

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

Μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού

Τάξη : Α' Λυκείου

Χρόνος : 2:30'

Μέρος Α'

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να κάνετε τις πράξεις $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
(Το αποτέλεσμα να δοθεί με ρητό παρονομαστή, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής).
2. Σε δύο τμήματα της Α' τάξης έγινε ένα κοινό διαγώνισμα στα Μαθηματικά. Οι μέσοι όροι των τμημάτων και η διασπορά τους δίνονται στον πιο κάτω πίνακα.

	Μέσος όρος ($\bar{x}$)	Διασπορά (s^2)
1 ^ο Τμήμα	24	3,2
2 ^ο Τμήμα	18	1,2

Να βρείτε τον συντελεστή μεταβλητότητας για το κάθε τμήμα και να αποφασίσετε ποιο τμήμα παρουσιάζει καλύτερη ομοιογένεια. (Να δείξετε τις πράξεις).

3. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 4x + 8 = 0$, να υπολογίσετε, χωρίς να λύσετε την εξίσωση, τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $x_1 + x_2$

(β) $x_1 \cdot x_2$

(γ) $\frac{x_1 \cdot x_2^2}{3} + \frac{x_1^2 \cdot x_2}{3}$

4. Να αποδείξετε την ταυτότητα : $\frac{(1 + \sigma\phi\theta)^2}{\sigma\tau\epsilon\mu\theta} = \sigma\tau\epsilon\mu\theta + 2\sigma\upsilon\upsilon\eta\theta$.

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $\epsilon_1 : 2x - 3y = 8$ και $\epsilon_2 : -4x - 3y = 2$ και σχηματίζει γωνία 60° με τον άξονα των τετμημένων.

6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = 3$ και $|\vec{\beta}| = 4$.

Αν τα διανύσματα $(8\vec{a} - \vec{\beta})$ και $(2\vec{a} + 9\vec{\beta})$ είναι κάθετα, να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

7. Στο διπλανό σχήμα δίνεται $ΕΔ = ΓΗ = (ΔΗ - 1)\text{cm}$ και $ΖΕ$ εφαπτομένη.
Αν $ΑΗ = (ΓΗ + 6)\text{cm}$ και $ΒΗ = 8\text{cm}$, να υπολογίσετε το μήκος της $ΖΕ$.
8. Αν $2,5 < x < 3,5$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η περίμετρος του πολυγώνου $ΑΒΓΔΕ$.
9. Δίνεται η παραβολή $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$. Αν
(-2,7) είναι σημείο της παραβολής,
 $x = 1$ είναι ο άξονας συμμετρίας της παραβολής και $f(0) = 15$,
(α) Να υπολογίσετε τις τιμές των α , β , γ και να γράψετε την εξίσωση της παραβολής.
(β) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{f^2(x)}{6-x} > 0$.
10. Στο διπλανό σχήμα οι κύκλοι (O, ρ) και (K, R) τέμνονται στα σημεία A και Δ . Η εφαπτομένη του (O, ρ) στο A τέμνει τον (K, R) στο Γ και η εφαπτομένη του (K, R) στο A τέμνει τον (O, ρ) στο B .
Αν $\widehat{MAB} = 82^\circ$ και $\widehat{\Delta\Gamma} = 120^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $ΑΒΔ$ και $ΔΓΕ$.
(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).

Μέρος Β΄

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής

$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma, \quad a \neq 0.$$

Να βρείτε:

(α) το πρόσημο του a και της διακρίνουσας Δ

(Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας).

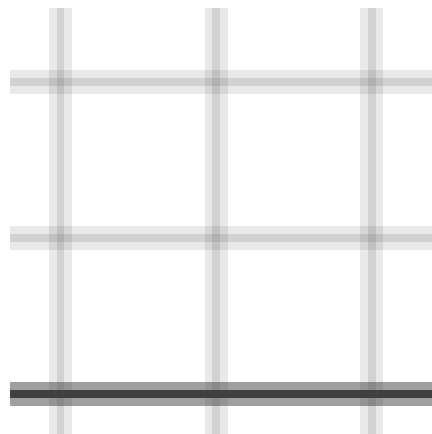
(β) τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$.

(γ) την τιμή της παράστασης $-\frac{\beta}{2a} + \frac{\beta}{a} + \frac{\gamma}{a}$.

(δ) τις λύσεις της $ax^2 + bx + \gamma \leq 0$.

(ε) τις λύσεις της $f(x) = 3$.

(στ) το πρόσημο της παράστασης: $\frac{f(-3,1) \cdot f(0,9^2)}{f(0)}$.



2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) με $A(2,5)$. Το ύψος του $A\Delta$ ανήκει στην ευθεία

$\varepsilon_1: 2x + y = 9$ και το $M\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ είναι το μέσο της AB .

Να βρείτε:

(α) Τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών του τριγώνου $AB\Gamma$.

(β) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(γ) Τη γωνία B (Η απάντηση να δοθεί κατά προσέγγιση ακεραίου).

3. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ταυτότητα
$$\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu^2(\pi - x)}{\sigma\varphi(2\pi - x) - \sigma\upsilon\nu(-x)} = \eta\mu x - 1$$

Ακολουθώντας να λύσετε την εξίσωση
$$\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu^2(\pi - x)}{\sigma\varphi(2\pi - x) - \sigma\upsilon\nu(-x)} = -\frac{1}{2}, \quad \text{όπου } \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο P έτσι ώστε $\overrightarrow{P\Gamma} = -2\overrightarrow{PB}$.
- (α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
- (β) Αν $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\overrightarrow{DG} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ (Δ οξεία γωνία).
5. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ (B οξεία γωνία). Φέρουμε το ύψος AD και στην προέκταση της AB παίρνουμε σημείο E έτσι ώστε $BE=BD$. Αν η προέκταση της ED τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι:
- (α) το τρίγωνο $\Delta Z\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- (β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και AZE είναι όμοια.
- (γ) $(AB) \cdot (AE) = 2(AZ)^2$.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να απαντήσετε και στα δέκα θέματα του μέρους Α΄.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες (5/100).

ΘΕΜΑ 1^ο

Αν $5 < x < 9$ και $-6 < y < -2$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή κάθε μιας από τις παραστάσεις:

- α) $2x + y$
β) $x - y$

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:

- (α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$,
(β) το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha}$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Να αποδείξετε ότι: $\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} + \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = 4$

ΘΕΜΑ 4^ο

Αν $9\eta\mu\theta - 5 = 4\eta\mu\theta - 8$ και $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

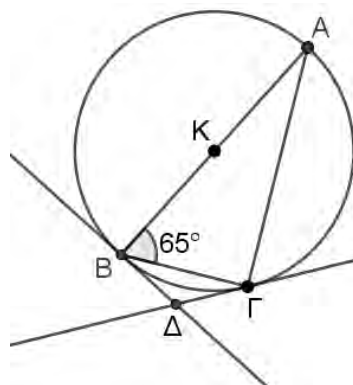
$$A = \frac{8\epsilon\phi\theta - 15\sigma\upsilon\nu\theta}{3\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$$

ΘΕΜΑ 5^ο

Στο διπλανό σχήμα οι ΔΒ και ΔΓ είναι εφαπτόμενες του κύκλου (Κ, R) και η γωνία

$\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 65^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες:

$\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B}$, $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$, $\hat{\Gamma}\hat{B}\hat{\Delta}$, $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$.



ΘΕΜΑ 6^ο

Αν $\frac{\eta\mu(180^\circ - \theta)\epsilon\phi(90^\circ - \theta)\eta\mu(-\theta)}{\epsilon\phi(180^\circ - \theta)\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \theta)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να υπολογίσετε

την γωνία θ .

ΘΕΜΑ 7^ο

Να αποδείξετε ότι:
$$\begin{vmatrix} 2 & 1-x & -2x \\ -1 & 0 & 1 \\ x & 3 & 1-2x \end{vmatrix} = (x+5)(x-1)$$

ΘΕΜΑ 8^ο

Να αποδείξετε ότι:
$$\frac{\epsilon\phi\chi - \eta\mu\chi}{\eta\mu^3\chi} = \frac{\tau\epsilon\mu\chi}{1 + \sigma\upsilon\nu\chi}$$

ΘΕΜΑ 9^ο

Να λύσετε την ανίσωση:
$$\frac{(x-2)(x^2+x-6)}{1-x^2} \leq 0$$

ΘΕΜΑ 10^ο

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρνουμε το ύψος AD και από το D φέρνουμε DE κάθετη στην AB . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle AD\Gamma$ είναι όμοια.

β) $(AD)^2 = (AG)(DE)$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να απαντήσετε και στα πέντε (5) θέματα του μέρους Β΄.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες (10/100).

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - (\lambda - 2)x + \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ με ρίζες x_1 και x_2 . Να βρείτε την τιμή του λ αν:

α) έχει ρίζες αντίθετες,

β) έχει ρίζες αντίστροφες,

γ) ισχύει η σχέση $\frac{x_1+1}{x_2} + \frac{x_2+1}{x_1} = -2$,

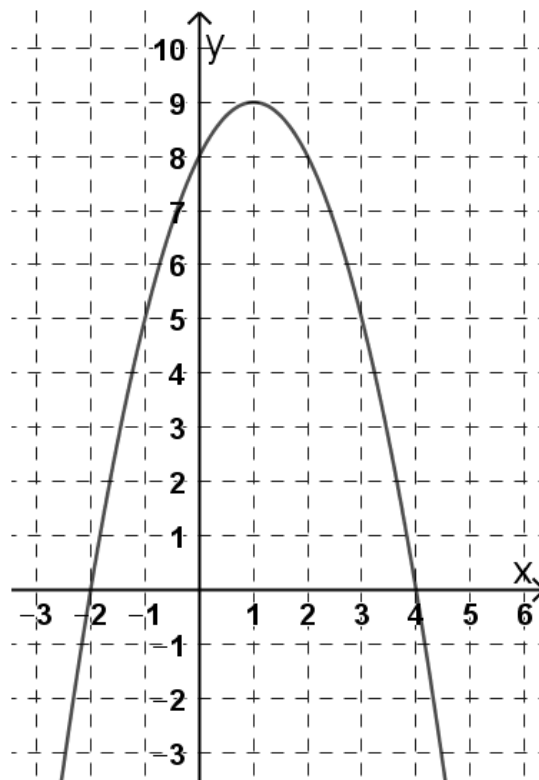
δ) το άθροισμα των ριζών της είναι μεγαλύτερο από το γινόμενο των ριζών της.

ΘΕΜΑ 2^ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η παραβολή $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε:

- (α) το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών της $y=f(x)$, τις συντεταγμένες της κορυφής και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας,
- (β) τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ και τις λύσεις της ανίσωσης $f(x)<0$,
- (γ) τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,
- (δ) την τιμή της παράστασης: $A = \frac{f(-1)+f(-3)}{2\alpha+\beta+\gamma}$,
- (ε) τις ρίζες της εξίσωσης: $\sqrt[3]{[17-f(x)]^2} = 4$.



ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \mu \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \mu + 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του μ :

- (α) το διάνυσμα $\vec{a}$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\vec{\beta}$,
 (β) το διάνυσμα $\vec{a}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\beta}$,
 (γ) το μέτρο του διανύσματος $\vec{a}$ είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$,
 (δ) αν $\mu = 2$, να βρείτε την γωνία θ που σχηματίζουν τα διανύσματα.

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία A(6, -3) και B(0, -1). Η εξίσωση μιας πλευράς του τριγώνου είναι η $y = 2x - 1$.

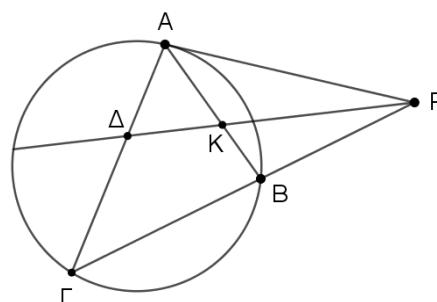
- (α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $y = 2x - 1$ είναι η εξίσωση της πλευράς ΒΓ.
 (β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΑΔ του τριγώνου.
 (γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.
 (δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Δ και είναι παράλληλη προς την ΑΒ.

ΘΕΜΑ 5^ο

Από σημείο Ρ που βρίσκεται εκτός κύκλου φέρνουμε την εφαπτομένη ΡΑ (Α σημείο επαφής) και τέμνουσα ΡΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{ΓΡΑ}$ τέμνει την ΑΒ στο Κ και την ΑΓ στο Δ. Να δείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα $\triangle AKP$ και $\triangle \Gamma DP$ είναι όμοια.

$$\beta) \frac{PA}{PB} = \frac{P\Delta}{PK}$$



ΛΥΚΕΙΟ ΑΚΡΟΠΟΛΕΩΣ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ: 2017 – 2018

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ)

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 15/05/2018

ΒΑΘΜΟΣ:

ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 07:45 π.μ.

ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΚΑΘΗΓΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ:

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2,5 ώρες

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ: ΤΜΗΜΑ:

- **ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΕΝΔΕΚΑ (11) ΣΕΛΙΔΕΣ.**
- **Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.**
- **Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν και με μολύβι.)**
- **Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, σφραγισμένης από το Σχολείο.**

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $5x^2 - 4 = 0$

β) $(3x^4 + 16)^{\frac{2}{3}} = 16$

2. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, την τιμή της παράστασης:

$$\left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2016} + \frac{1}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2016}} \right] \cdot \frac{(2\sqrt{3} - 2\sqrt{2})^{2016}}{2^{2017}}$$

3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} +1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - \vec{\gamma}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

4. Αν $9\eta\mu\theta + 3 = 8 - 4\eta\mu\theta$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{13\sigma\upsilon\nu\theta - 24\epsilon\varphi\theta}{\tau\epsilon\mu\theta \cdot \sigma\varphi\theta}$$

5. Οι βαθμοί έξι μαθητών της Α΄ τάξης στο μάθημα της Φυσικής είναι 20, 18, 16, 17, 15, 10.
α) Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των μαθητών.

β) Στις πιο πάνω βαθμολογίες προσθέτουμε τους βαθμούς ακόμα 2 μαθητών και η νέα μέση τιμή γίνεται 16,5. Να βρείτε τους βαθμούς των 2 μαθητών, αν γνωρίζουμε ότι διαφέρουν μεταξύ τους κατά 2 μονάδες.

6. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1): 2x + y = 3$, $(\varepsilon_2): x + 4y = 0$ και $(\varepsilon_3): 2x - y + 2 = 0$ δεν συντρέχουν.

7. Να υπολογίσετε τη γωνία θ , αν $0 < \theta < \pi$ και $\frac{\sin(\pi-\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin(-\theta)}{\cos(\pi-\theta)\sin(\pi+\theta)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{(x^2 - 9)(x^2 - 5x + 4)}{(x^2 - 1)} \geq 0$$

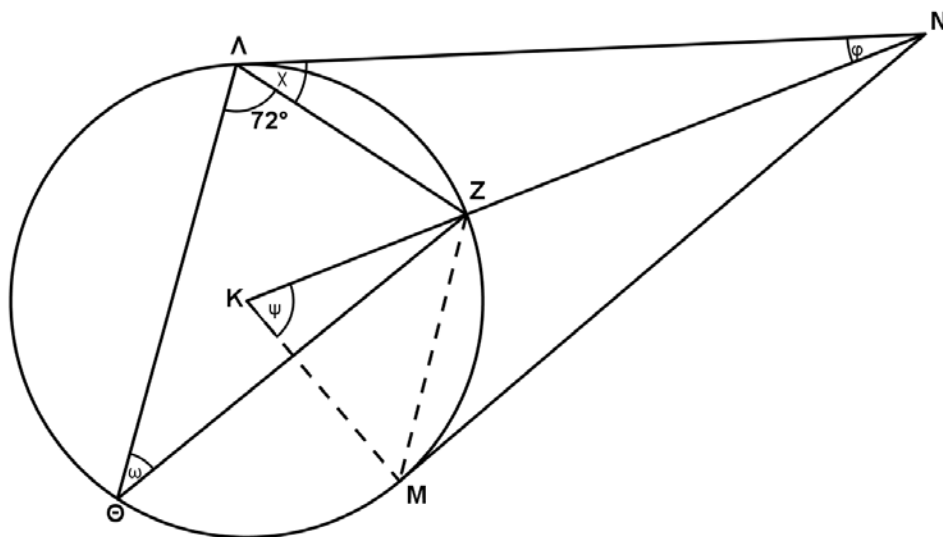
.

9. Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\chi^2 - (\lambda + 2)\chi + 2\lambda = 0$, να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

α) $\rho_1^2 \rho_2 + \rho_1 \rho_2^2 \geq 0$

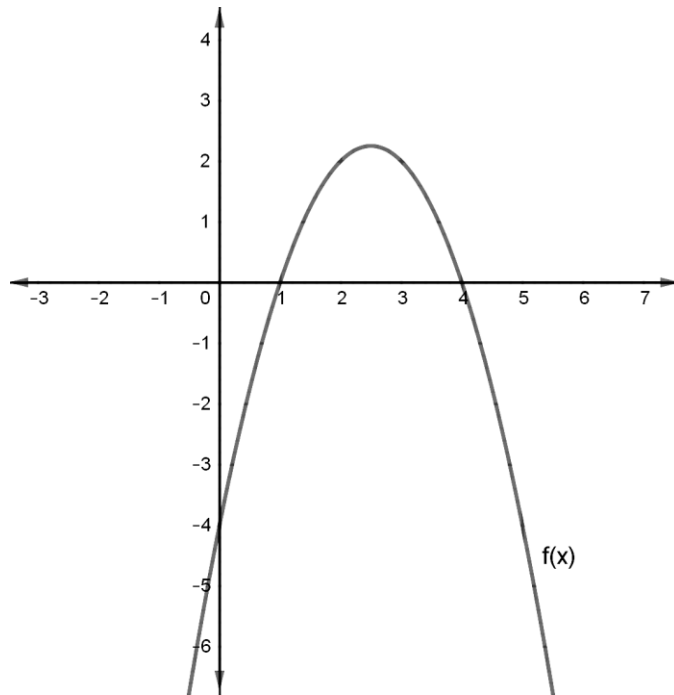
β) $\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1} < 4$

10. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται κύκλος (K, ρ) . Τα τμήματα $N\Lambda$ και NM είναι εφαπτόμενα του κύκλου στα σημεία του Λ και M αντίστοιχα. Το τρίγωνο $\Lambda Z\Theta$ είναι ισοσκελές με $Z\Theta = \Theta\Lambda$ και $\theta\hat{\Lambda}Z = 72^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες χ , ψ και ω , δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.



Με βάση το σχήμα, να βρείτε:

α) τις τιμές των a , b και c

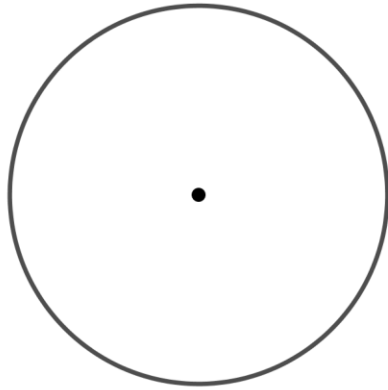
β) τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$ και τον άξονα συμμετρίας της παραβολής $f(x)$

γ) το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)$

2. α) Να βρείτε το είδος των ριζών της εξίσωσης:
- $$\varepsilon\varphi\theta \cdot \chi^2 + 2\tau\varepsilon\mu\theta \cdot \chi + \sigma\varphi\theta = 0, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

- β) Να σχηματίσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες $\omega_1 = 1 + \frac{\chi_1}{\chi_2}$ και $\omega_2 = 1 + \frac{\chi_2}{\chi_1}$.

3. i) Από σημείο Σ εκτός κύκλου φέρουμε εφαπτομένη ΣA και τέμνουσα $\Sigma B\Gamma$ του κύκλου. Αν M είναι το μέσο του μικρού τόξου $B\Gamma$ και Δ το σημείο τομής της $B\Gamma$ με την AM , να αποδείξετε ότι:



α) $(\Sigma A)^2 = (\Sigma B) \cdot (\Sigma \Gamma)$

β) $(\Delta A) \cdot (M\Gamma) = (A\Gamma) \cdot (\Delta B)$

- ii) Αν Δ είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι: $(B\Gamma)^2 = 4(\Delta M) \cdot (\Delta A)$

4. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράπλευρο με κορυφές $A(0, 4)$, $B(5, 4)$, $\Delta(-2, 0)$ και οι πλευρές $\Gamma\Delta$ και $B\Gamma$ έχουν εξισώσεις $\chi + 2\psi + 2 = 0$ και $-2\chi + \psi + 6 = 0$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .

β) Να δείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το μέσο M της AB και είναι παράλληλη με τη $B\Gamma$.

5. Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(\frac{3\pi}{2} + x)}{1 - \sigma\varphi(\pi + x)} + \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi + x)}{\sigma\varphi(\frac{3\pi}{2} - x) - 1} = \frac{2\eta\mu^2 x - 1}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$$

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α΄.**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.**

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $5x^2 - 4 = 0$

β) $(3x^3 + 16)^{\frac{2}{3}} = 16$

2. Αν
- $-4 < x < -3$
- και
- $2 < y < 5$
- , να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α) $x + y$

β) $2xy$

3. Δίνονται τα διανύσματα
- $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
- ,
- $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$
- και
- $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} +1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- .

α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - \vec{\gamma}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

4. Αν
- $9\eta\mu\theta + 3 = 8 - 4\eta\mu\theta$
- και
- $90^\circ < \theta < 180^\circ$
- , να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{13\sigma\upsilon\nu\theta - 24\epsilon\varphi\theta}{5\tau\epsilon\mu\theta \cdot \sigma\varphi\theta}$$

5. Οι βαθμοί έξι μαθητών της Α΄ τάξης στο μάθημα της Φυσικής είναι 20, 18, 16, 17, 15 και 10.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των μαθητών.

β) Στις πιο πάνω βαθμολογίες προσθέτουμε τους βαθμούς ακόμα 2 μαθητών και η νέα μέση τιμή γίνεται 16,5. Να βρείτε τους βαθμούς των 2 μαθητών, αν γνωρίζουμε ότι διαφέρουν μεταξύ τους κατά 2 μονάδες.

6. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες
- $(\epsilon_1): 2x + y = 3$
- ,
- $(\epsilon_2): x + 4y = 0$
- και
- $(\epsilon_3): 2x - y + 2 = 0$
- δεν συντρέχουν.

7. Να υπολογίσετε τη γωνία
- θ
- , αν
- $0 < \theta < \pi$
- και
- $\frac{\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sigma\upsilon\nu(-\theta)}{\sigma\varphi(\pi-\theta)\eta\mu(\pi+\theta)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- .

8. Να λύσετε την ανίσωση:

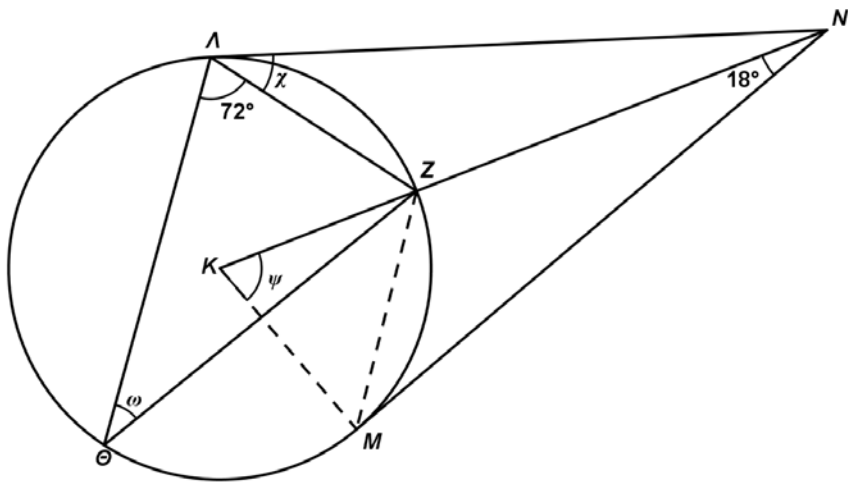
$$\frac{(x^2 - 9)(x^2 - 5x + 4)}{(1 - x^2)} \leq 0$$

Αν x_1, x_2 οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - (\lambda + 2)x + 2\lambda = 0$, να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

α) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 \geq 0$

β) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} < 4$

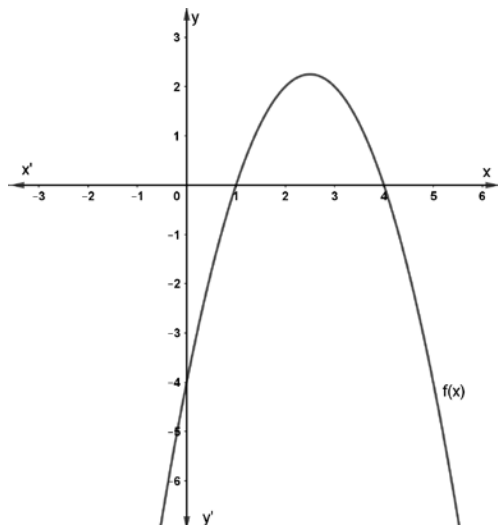
9. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται κύκλος (K, ρ) . Τα $N\Lambda$ και NM είναι εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία του Λ και M αντίστοιχα. Το τρίγωνο $\Lambda Z\Theta$ είναι ισοσκελές με $Z\Theta = \Theta\Lambda$ και $\theta\hat{\Lambda}Z = 72^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\chi}$, $\hat{\psi}$, $\hat{\omega}$ και το μέτρο του μικρού τόξου $\widehat{\Theta M}$, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$.



Με βάση το σχήμα, να βρείτε:

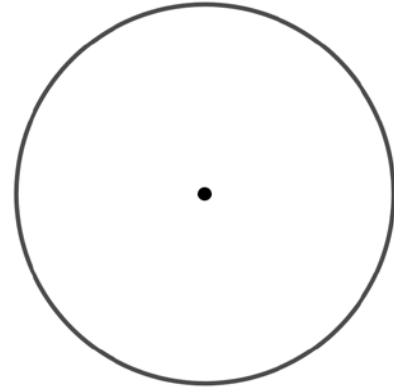
- τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ και το πρόσημο της διακρίνουσας
- τις τιμές των a , b και γ
- τον άξονα συμμετρίας της παραβολής και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $g(x) = \sqrt{f(x)}$

2. Δίνεται η εξίσωση $\varepsilon\varphi\theta \cdot x^2 + 2\tau\epsilon\mu\theta \cdot x + \sigma\varphi\theta = 0$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, με λύσεις x_1 και x_2 .

α) Να βρείτε το είδος των ριζών της πιο πάνω εξίσωσης.

β) Να σχηματίσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες $\omega_1 = 1 + \frac{x_1}{x_2}$ και $\omega_2 = 1 + \frac{x_2}{x_1}$.

3. Από σημείο Σ εκτός κύκλου φέρουμε εφαπτομένη ΣΑ και τέμνουσα ΣΒΓ του κύκλου, όπου Α, Β και Γ σημεία του κύκλου. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ και Λ το σημείο τομής της προέκτασης του ευθύγραμμου τμήματος ΑΜ, προς το μέρος του Μ, με τον κύκλο, να αποδείξετε ότι:



α) $(\Sigma\Lambda)^2 = (\Sigma\mathrm{B}) \cdot (\Sigma\Gamma)$

β) $(\mathrm{B}\Gamma)^2 = 4(\mathrm{A}\mathrm{M}) \cdot (\mathrm{M}\Lambda)$

4. Το $\mathrm{A}\mathrm{B}\Gamma\Delta$ είναι τετράπλευρο με κορυφές $\mathrm{A}(0, 4)$, $\mathrm{B}(5, 4)$, $\Delta(-2, 0)$ και οι πλευρές $\Gamma\Delta$ και $\mathrm{B}\Gamma$ έχουν εξισώσεις $x + 2y + 2 = 0$ και $-2x + y + 6 = 0$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .

β) Να δείξετε ότι το $\mathrm{A}\mathrm{B}\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $\mathrm{A}\mathrm{B}\Gamma\Delta$.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το μέσο M της $\mathrm{A}\mathrm{B}$ και είναι παράλληλη με τη $\mathrm{B}\Gamma$.

5. Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}{1 - \sigma\varphi(\pi + x)} - \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi + x)}{\sigma\varphi\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + 1} = \frac{2\eta\mu^2 x - 1}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$$

ΜΕΡΟΣ Α :

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Η Ευαγγελία είναι φοιτήτρια Μουσικής. Στη γραπτή εξέταση πήρε βαθμό 18, στην παρουσίαση τραγουδιού πήρε βαθμό 16 και στο πιάνο πήρε βαθμό 20. Να υπολογίσετε τον σταθμισμένο μέσο όρο των βαθμών της, αν έχουν βαρύτητα 50, 30 και 20 αντίστοιχα.

2. Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής.

(α) $\frac{2}{3 - \sqrt{5}}$

(β) $\frac{6}{\sqrt[3]{2}}$

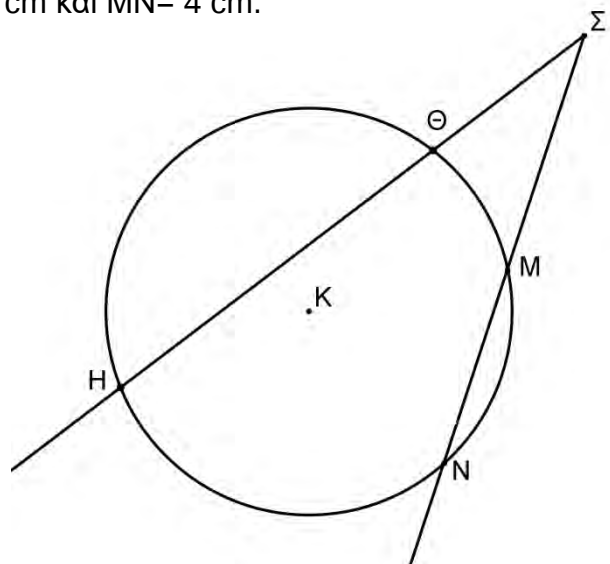
3. Αν $2 < x < 7$ και $-4 < y < -2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

(α) $2x + y$

(β) $-\frac{x}{y}$

4. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (Κ , R), σημείο Σ εκτός του κύκλου και τέμνουσες του κύκλου ΣΘΗ και ΣΜΝ με ΣΘ = 3 cm, ΣΝ = 9 cm και ΜΝ= 4 cm.

Να υπολογίσετε το μήκος του ΘΗ.



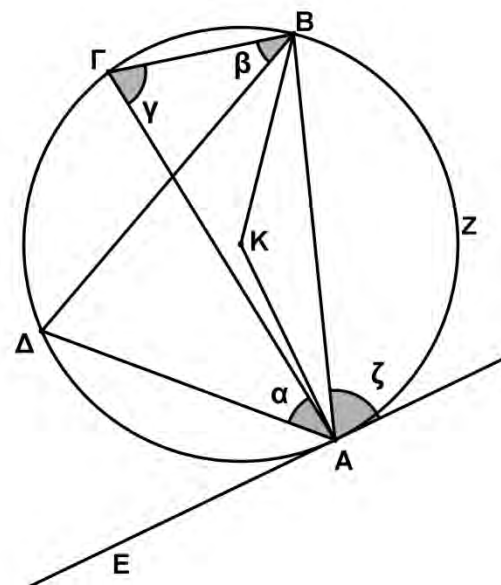
5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο Κ.

Η ΕΑ είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο Α.

Αν $\hat{\beta} = 38^\circ$ και $\hat{\gamma} = 70^\circ$ να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών

$\hat{\alpha}$, $\hat{\zeta}$, $\hat{AKB}$, $\hat{KAE}$ καθώς και το μέτρο του τόξου $\widehat{BZA}$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



6. Αν $\eta\mu\theta = -\frac{5}{13}$, $180^\circ < \theta < 270^\circ$, να υπολογίσετε, με τη χρήση τριγωνομετρικών

ταυτοτήτων, την τιμή της παράστασης $A = \frac{10\sigma\tau\epsilon\mu\theta + 12\epsilon\phi\theta}{5\sigma\phi\theta - 24\tau\epsilon\mu\theta}$

7. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$.

Να βρείτε:

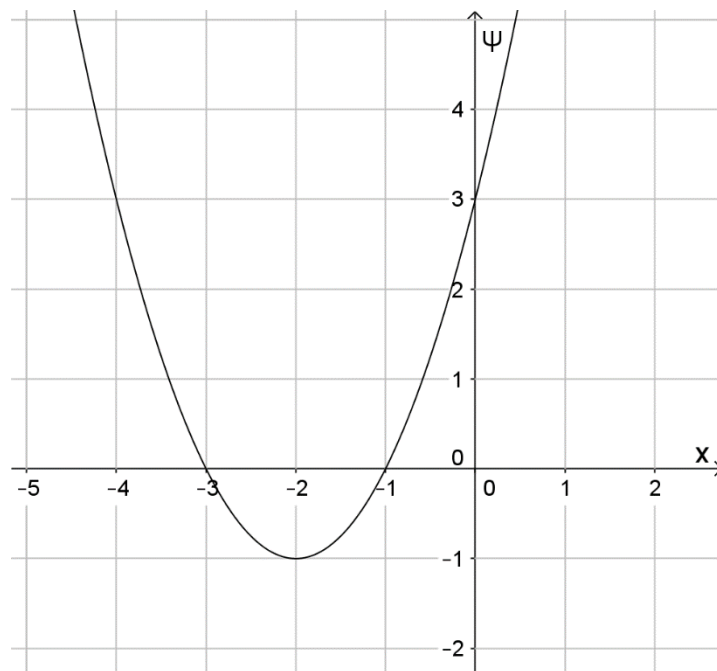
(α) το σύνολο τιμών της

(β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της

(γ) τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$

(δ) την τιμή του γ

(ε) την τιμή της παράστασης $\frac{6\gamma - 3\beta}{\alpha}$



8. Να βρείτε την τιμή των πραγματικών αριθμών κ και μ , ώστε η ευθεία $\varepsilon_1 : (5+\kappa)x - y = 4$ να διέρχεται από το σημείο $A(1, \mu)$ και να είναι παράλληλη προς την ευθεία $\varepsilon_2 : y = (14 - \mu)x + 6$
9. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + (2\kappa + 1)x - 2 + \kappa = 0$ έχει λύσεις πραγματικές και άνισες για κάθε πραγματική τιμή του κ .
10. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(x^2 + x - 6)(10 - 5x)}{(x^2 + 9)(3x - x^2)} \geq 0$.

ΜΕΡΟΣ Β :

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$. Να υπολογίσετε:
- (α) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$
 - (β) τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$
 - (γ) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, κατά προσέγγιση ακεραίου
 - (δ) τις τιμές της παραμέτρου $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ να είναι κάθετο με το διάνυσμα $\vec{u} = \begin{pmatrix} \mu^2 + 2 \\ 2\mu \end{pmatrix}$
2. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 - (3\lambda - 2)x + 2\lambda + 3 = 0$, $\lambda \neq 0$.
- (α) Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ η εξίσωση έχει:
 - (i) μία λύση τον αριθμό -3
 - (ii) λύσεις αντίστροφες
 - (iii) λύσεις που να ικανοποιούν τη σχέση $x_1^2 + x_2^2 = 5$
 - (β) Για $\lambda = 2$ να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού με λύσεις $\rho_1 = 2x_1 - 1$ και $\rho_2 = 2x_2 - 1$
3. Δίνεται κύκλος (O, R) . Το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο, με πλευρά τη διάμετρο ΛM . Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο M η οποία τέμνει την προέκταση της ΛK στο Z . Να δείξετε ότι:
- (α) $(K\Lambda)(KZ) = (KM)^2$
 - (β) $(K\Lambda)(\Lambda Z) = 4R^2$

4. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με A (2 , 3) και Γ (4 , -3) . Η διάμεσος AM έχει εξίσωση $y = 5x - 7$ και η πλευρά BΓ έχει εξίσωση $x + 3y = -5$.

(α) Να βρείτε:

(i) την εξίσωση της πλευράς ΑΓ

(ii) τις συντεταγμένες του σημείου Μ

(iii) τις συντεταγμένες της κορυφής Β

(β) Αν Β (-2 , -1), να υπολογίσετε: (i) το μήκος του ύψους ΑΔ

(ii) το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ

5. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\varepsilon\varphi(\pi - \theta) \cdot \sigma\varphi(-\theta) + \eta\mu(\pi + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\tau\epsilon\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu^2(3\pi - \theta)} \quad \text{και} \quad B = \varepsilon\varphi\theta + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \eta\mu\theta}$$

(α) Να δείξετε ότι η $A = \eta\mu\theta$ και $B = \tau\epsilon\mu\theta$

(β) Εάν ισχύει $5A^2 + \frac{1}{B^2} = 4$ και $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

(i) να δείξετε ότι $\eta\mu^2\theta = \frac{3}{4}$

(ii) να υπολογίσετε τη γωνία θ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τα 10 θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1:

Να μετατρέψετε το πιο κάτω κλάσμα σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή:

$$\frac{1}{3+\sqrt{2}} =$$

ΘΕΜΑ 2:

Να αποδείξετε ότι: $1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{1+\eta\mu\chi} = \eta\mu\chi$

ΘΕΜΑ 3:

Η επίδοση ενός μαθητή σε πέντε διαγωνίσματα των Αγγλικών ήταν 12, 10, 16, 18, 14. Ποιος θα είναι ο τελικός του βαθμός αν η βαρύτητα των διαγωνισμάτων είναι 20%, 30%, 10%, 10% και 30% αντίστοιχα.

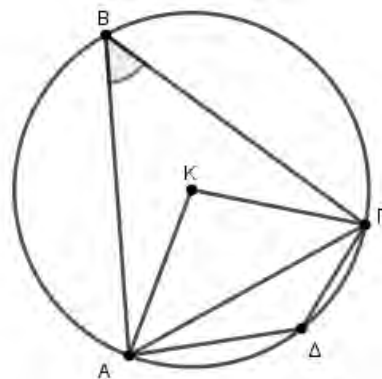
ΘΕΜΑ 4:

Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(\chi+3)(\chi^2+2\chi-3)}{2-\chi} \leq 0$

ΘΕΜΑ 5:

Στο διπλανό σχήμα K είναι το κέντρο του κύκλου, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και η γωνία $\widehat{AB\Gamma} = 50^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{AK\Gamma}$ και $\widehat{A\Delta\Gamma}$ καθώς και το τόξο AB .

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



ΘΕΜΑ 6:

Αν $3 < \chi < 7$ και $-5 < \psi < -2$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων:

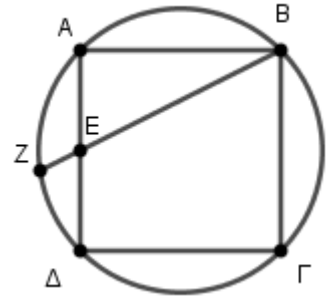
α) $\chi + \psi$

β) $\chi \cdot \psi$

ΘΕΜΑ 7:

Τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς α είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R) .

Αν E είναι το μέσο της $A\Delta$ και η προέκταση της BE τέμνει τον κύκλο στο Z , να υπολογίσετε το μήκος του EZ .

**ΘΕΜΑ 8:**

Να δείξετε ότι η εξίσωση $\begin{vmatrix} \chi & \psi & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ παριστάνει ευθεία που διέρχεται από τα σημεία

$A(-2, 4)$ και $B(-3, -1)$.

ΘΕΜΑ 9:

Για δυο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δίνονται ότι $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και η γωνία μεταξύ των δυο αυτών διανυσμάτων είναι ίση με 60° . Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους.

ΘΕΜΑ 10:

α) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού της οποίας οι ρίζες χ_1, χ_2 επαληθεύουν τις σχέσεις: $\chi_1 + \chi_2 + 2\chi_1 \cdot \chi_2 = 3$ και $\chi_1 + \chi_2 - \chi_1 \cdot \chi_2 = 3\lambda$.

β) Αν $\lambda < -\frac{1}{2}$ να βρείτε το είδος και το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τα 5 θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

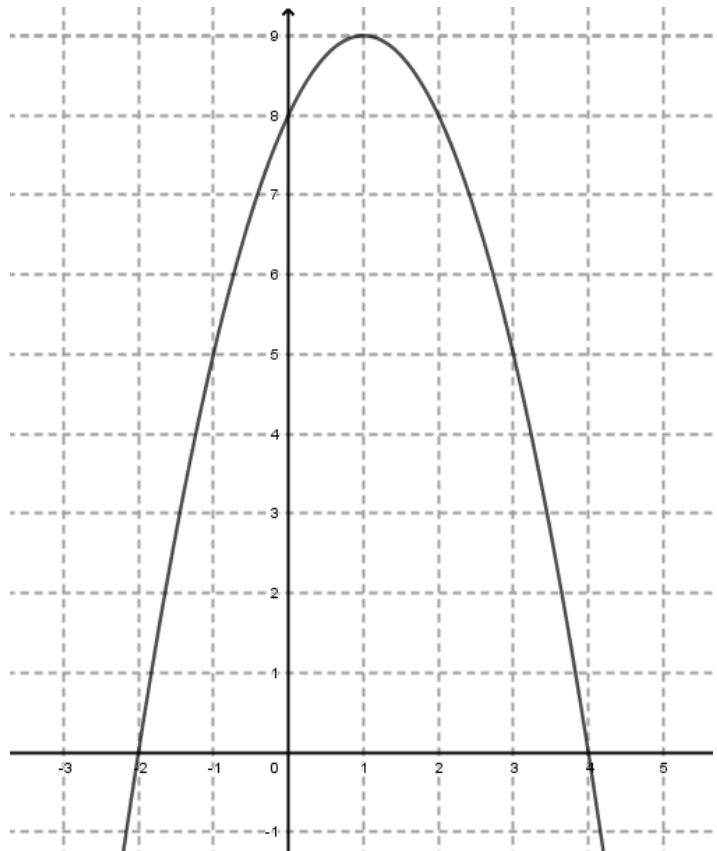
ΘΕΜΑ 1:

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

Να βρείτε :

- α) (i) το πεδίο ορισμού
- (ii) το σύνολο τιμών της
- β) (i) το πρόσημο του a .
- (ii) το πρόσημο της διακρίνουσας Δ
- γ) τον άξονα συμμετρίας της
- δ) τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$
- ε) τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 5$
- στ) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 0$
- ζ) τις τιμές των a , b και c
- η) την τιμή της παράστασης:

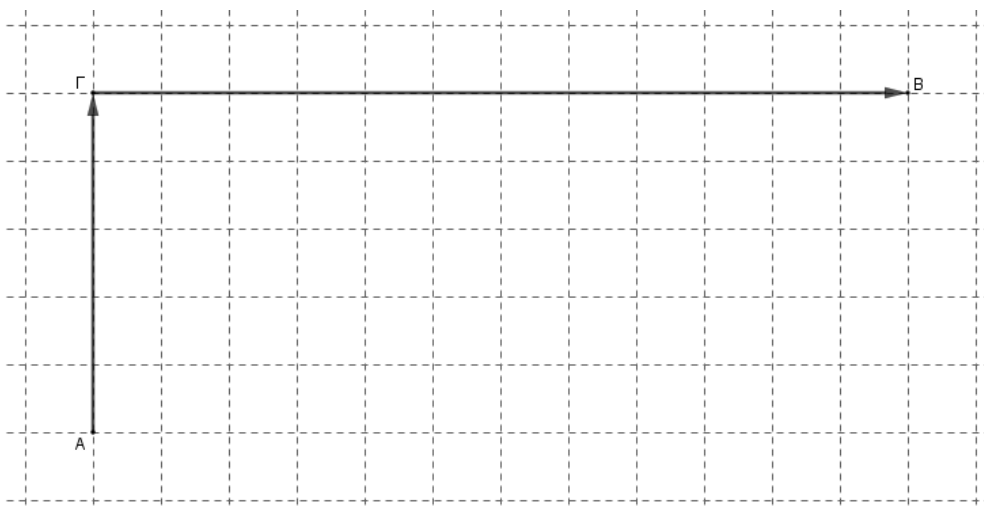
$$S - 3P + \Delta$$



ΘΕΜΑ 2:

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ και τα σημεία A, B, Γ όπου $A(-1, -2)$, $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{u} + \vec{v}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = 6\vec{v}$.

- α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}$.
- β) Να βρείτε τις διανυσματικές ακτίνες των B και Γ .
- γ) Να δείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο.



ΘΕΜΑ 3:

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\Gamma(-2, -1)$. Η πλευρά AB έχει εξίσωση $2\chi + \psi - 10 = 0$ και το ύψος AD έχει εξίσωση $\chi + 3\psi - 15 = 0$. Να βρείτε:

- α) τις συντεταγμένες των κορυφών A και B
- β) το μέτρο της γωνίας B
- γ) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
- δ) το σημείο του άξονα $x'x$ που απέχει από την ευθεία $B\Gamma$ απόσταση ίση με $\sqrt{10}$.

ΘΕΜΑ 4:

Σε κύκλο (K, R) , η διάμετρος AB και η χορδή ΓE τέμνονται κάθετα στο σημείο Δ . Να δείξετε ότι:

- α) $(A\Gamma)^2 = (AB)(A\Delta)$
- β) $(A\Gamma)^2 = (\Delta E)(\Delta\Gamma) + (\Delta A)^2$

ΘΕΜΑ 5:

Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 + (\sigma\nu\alpha + 1)\chi + \eta\mu^2\alpha = 0$ με $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

- α) Αν χ_1 και χ_2 είναι οι ρίζες της πιο πάνω εξίσωσης να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{\chi_1} + \frac{1}{\chi_2} = \frac{1}{\sigma\nu\alpha - 1}$$

- β) Αν η πιο πάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και ίσες να δείξετε ότι $\sigma\nu\alpha = \frac{3}{5}$

- γ) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{4\sigma\tau\epsilon\mu\alpha - 3\epsilon\phi\alpha + 15\sigma\nu\alpha}{25\eta\mu^2\alpha - 8\sigma\phi\alpha}$$

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2018ΤΑΞΗ Α΄ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.**

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- A1. Να γράψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρανομαστή:

$$A = \frac{9}{\sqrt{3}}$$

$$B = \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

- A2. Αν $\eta\mu x = \frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να υπολογίστε την τιμή της παράστασης

$$A = -5\sigma\upsilon\nu x + 8\epsilon\varphi x.$$

- A3. Αν $3 < x < 4$ και $-2 < y < -1$ να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκεται η τιμή της καθεμιάς από τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $A = 2x + y$

(β) $B = \frac{x}{y}$

- A4. Ένας φοιτητής πήρε σε 5 διαφορετικά μαθήματα στο πρώτο εξάμηνο, τους βαθμούς 7, 8, 9, 10 και 6. Ποια είναι η τελική του βαθμολογία αν τα μαθήματα έχουν βαρύτητα ανάλογη με τις περιόδους διδασκαλίας που είναι αντίστοιχα 2, 3, 1, 3 και 1.

- A5. Δίνεται κύκλος (K, R) με $R = 15 \text{ cm}$ και σημείο Γ το οποίο απέχει από το κέντρο του απόσταση ίση με 9 cm . Έστω AB χορδή του κύκλου η οποία περνά από το σημείο Γ έτσι ώστε $A\Gamma = 3\Gamma B$. Να βρείτε το μήκος της χορδής AB .

- A6. Δίνονται τα σημεία $A(1, -3)$, $B(3, 5)$ και $\Gamma(2, 1)$. Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά δεν κατασκευάζουν τρίγωνο.

- A7. Αν η εξίσωση $x^2 + \lambda x + \mu = 0$ έχει μια διπλή ρίζα να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^2 + 4(\mu + 1)x + \lambda^2 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες.

A8. Να λυθεί η ανίσωση

$$\frac{2(1-x)(x-3)^2}{x^2+5x+6} \geq 0.$$

A9. (α) Πότε ένα διάνυσμα ονομάζεται μοναδιαίο;

(β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{\beta} = \vec{i} + 3\vec{j}$. Να υπολογίσετε την τιμή του λ ,
ώστε το διάνυσμα $\vec{a}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\gamma}$, με $\vec{\gamma} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + \lambda\vec{\beta}$.

A10. Δίνεται κύκλος με διάμετρο AB και εφαπτομένη Bχ. Η προέκταση της χορδής AE τέμνει την Bχ στο Γ. Η εφαπτομένη του κύκλου στο E τέμνει την Bχ στο Δ, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Δίνεται η πιο κάτω γραφική παράσταση της $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$. Να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
- β) τις ρίζες της $f(x) = 0$.
- γ) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = -1$.
- δ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής.
- ε) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) < -1$.
- στ) το πρόσημο της Διακρίνουσας της $f(x) = -3$.
- ζ) τις τιμές των α, β, γ .



B2. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(-1, -1)$, $B(-3, 3)$ και $\Gamma(0, 2)$. Να βρείτε:

- (α) τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$
- (β) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$
- (γ) την γωνία $\hat{\Gamma AB}$
- (δ) διάνυσμα $\vec{u}$ το οποίο είναι αντίρροπο του $\overrightarrow{AB}$ και έχει μέτρο τριπλάσιο από αυτό
- (ε) το μήκος της προβολής του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ στο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.

B3. Α. Να δείξετε ότι:

(α)
$$\frac{\eta\mu(270^\circ - \alpha)\eta\mu(180^\circ + \alpha)\sigma\upsilon\nu(-\alpha)\epsilon\varphi(90^\circ - \alpha)}{\eta\mu(90^\circ + \alpha)\eta\mu(360^\circ - \alpha)\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \alpha)\epsilon\varphi(270^\circ + \alpha)} = -1$$

(β)
$$\frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = 2\sigma\tau\epsilon\mu\alpha, \text{ αν } \alpha \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Β. Αν $\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{3}{8}$ και $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ να σχηματίσετε εξίσωση με ρίζες

$$x_1 = \eta\mu\alpha, x_2 = \sigma\upsilon\nu\alpha.$$

B4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(0,3)$, $B(4,0)$ και $\Gamma(\kappa,5)$, με $0 < \kappa < 4$, του οποίου το εμβαδόν είναι ίσο με 7 τ.μ.

(α) Να δείξετε ότι $\kappa = 2$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB .

(γ) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους $\Gamma\Delta$.

(δ) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που περνά από τα σημεία B, Γ, Δ .

B5. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και από τυχαίο σημείο M της διαγωνίου $A\Gamma$ φέρουμε τις $ML \perp AB$ και $MK \perp AD$. Ακολουθώντας από το σημείο Γ φέρουμε κάθετη προς την AB στο σημείο E και κάθετη προς την AD στο σημείο Z .

Να δείξετε ότι:

(α) τα τρίγωνα $EB\Gamma$ και $\Delta Z\Gamma$ είναι όμοια.

(β) $(ML) \cdot (AB) = (MK) \cdot (AD)$.

ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 3x - 4 < 0$ **A2.** Αν $2 < x < 9$ και $3 < y < 8$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α) $x \cdot y$

β) $x - 2y$

A3. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (3 + 4\mu)x + 3\mu - 2 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η εξίσωση:

α) έχει ρίζες αντίστροφες

β) έχει άθροισμα ριζών ίσο με 5.

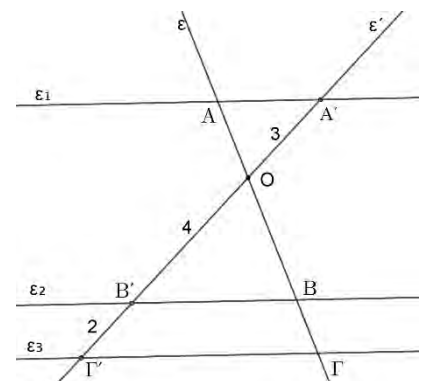
A4. Αν $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{5\sigma\upsilon\nu\theta - 4\epsilon\varphi\theta}{3\sigma\varphi\theta + 6\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$$

A5. Δύο ευθείες ϵ και ϵ' τέμνονται στο σημείο O . Οι τρεις παράλληλες ευθείες $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2 \parallel \epsilon_3$ τέμνουν τις ϵ και ϵ' στα σημεία $A, A', B, B', \Gamma, \Gamma'$ έτσι ώστε $OA' = 3 \text{ cm}$, $OB' = 4 \text{ cm}$ και $B'\Gamma' = 2 \text{ cm}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τους λόγους: $\frac{OB}{B\Gamma}$ και $\frac{OA}{OB}$ (μον.2)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του $\Gamma\Gamma'$, αν $BB' = 6 \text{ cm}$. (μον.3)



A6. Δίνονται τα κλάσματα: $A = \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$ και $B = \frac{\alpha-\beta}{\sqrt[3]{\alpha-\beta}}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $\alpha > \beta$

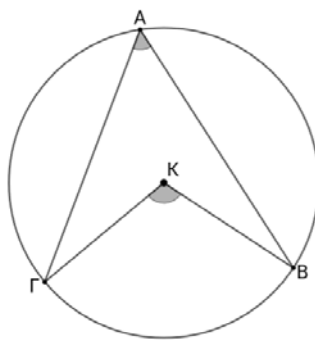
Να τα μετατρέψετε σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητό παρονομαστή και ακολούθως να δείξετε ότι: $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^3 (A \cdot B)^3 = (\alpha - \beta)^5$

A7. Το Κεντρικό Μαθητικό Συμβούλιο (ΚΜΣ) ενός σχολείου, αποτελείται από επτά μαθητές και η επιτροπή εκδρομών από τέσσερις καθηγητές. Ο μέσος όρος των ηλικιών των μαθητών είναι 15 χρόνια και των καθηγητών 45 χρόνια. Σε μια κοινή συνεδρίαση του ΚΜΣ και της επιτροπής εκδρομών έλειπε ένας μαθητής ηλικίας 15 χρονών. Ποιος είναι ο μέσος όρος της ηλικίας των παρευρισκόμενων στην κοινή συνεδρίαση;

A8. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: x - 2y = 3$ και $\varepsilon_2: 3x + 2y - 5 = 0$

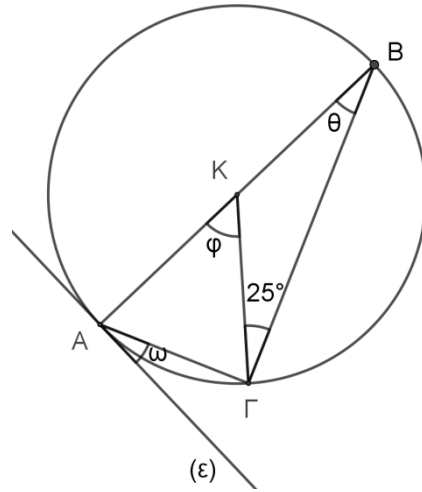
- α) Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι δύο ευθείες (κατά προσέγγιση δεκάτου) .
- β) Αν το σημείο Α της ευθείας ε_1 με τετμημένη 3, το σημείο Β της ευθείας ε_2 με τεταγμένη 4 και το σημείο $\Gamma(1, \kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$, είναι συνευθειακά, να βρείτε την τιμή του κ .

A9. α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα που αναφέρεται στη σχέση μίας εγγεγραμμένης γωνίας με την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία και να το αποδείξετε με τη βοήθεια του σχήματος. (Να μεταφέρετε το σχήμα στο τετράδιο απαντήσεων)



- β) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K, ρ) με διάμετρο AB, ευθεία (ε) εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A και η γωνία $K\hat{\Gamma}B = 25^\circ$.

Να υπολογίσετε τις γωνίες φ , ω και θ δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας .



A10. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2x^2$

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης g που προκύπτει αν η γραφική παράσταση της f μετατοπιστεί κατά 1 μονάδα αριστερά και 8 μονάδες προς τα κάτω.

(μον.2)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες των συντεταγμένων, τις συντεταγμένες της κορυφής της g και στη συνέχεια να κάνετε την γραφική της παράσταση.

(μον.3)

ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Δίνεται κύκλος (K, R) . Από σημείο Γ εκτός του κύκλου φέρουμε εφαπτομένη ΓA και τέμνουσα $\Gamma B \Delta$, έτσι ώστε η γωνία $\hat{A} \hat{\Gamma} B = 90^\circ$, όπου A, B και Δ σημεία του κύκλου.

α) Να αποδείξετε ότι $(\Gamma A)^2 = (\Gamma B)(\Gamma \Delta)$.

β) Αν $\Gamma B = 2 \text{ cm}$ και $B \Delta = 6 \text{ cm}$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $A B \Delta$.

B2. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{\alpha} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{\beta} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{\kappa} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\lambda} = 2\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$

Να βρείτε:

- α) τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ (κατά προσέγγιση δεκάτου)
- β) μοναδιαίο διάνυσμα που να είναι αντίρροπο με το $\vec{\kappa}$
- γ) την προβολή του $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$
- δ) την τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{\kappa}$ και $\vec{\lambda}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους.

B3. Δίνεται η παραβολή $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$ και η ευθεία $\varepsilon_1: g(x) = 3x + 5$.

- α) Να δείξετε ότι τα σημεία τομής της παραβολής και της ευθείας είναι τα σημεία $A(-2, -1)$ και $B(1, 8)$.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_2 που περνά από την κορυφή Γ της παραβολής και είναι παράλληλη με την ε_1 .
- γ) Να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών ε_1 και ε_2 .
- δ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Δ ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο.
- ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

B4. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \begin{vmatrix} 2 & 3x \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ και $g(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$

- α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x^2 - 3x$. (μον.1)
- β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. (μον.2)
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{g(x)}{f(x)} \leq 0$. (μον.5)
- δ) Να λύσετε την εξίσωση: $\left(\frac{g(x)}{x-1}\right)^{\frac{4}{3}} = 16, \quad x \in (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$. (μον.2)

B5. Δίνονται οι τριγωνομετρικές παραστάσεις:

$$A = \frac{\sin(\pi-\theta)\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\tau\epsilon\mu(-\theta)}{\sigma\tau\epsilon\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\eta\mu(\theta-\pi)\epsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)} \quad \text{και} \quad B = \frac{\epsilon\varphi\theta\eta\mu^2\theta}{\epsilon\varphi\theta+\eta\mu\theta}$$

α) Να δείξετε ότι : $A + B = 1$ (μον.8)

β) Αν $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ και $A = B$, να βρείτε το μέτρο της γωνίας θ . (μον.2)

Ο Διευθυντής

.....

Δημήτρης Παπαμιλιτιάδου

ΜΕΡΟΣ Α : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 7x - 8 \geq 0$.

A2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην ευθεία $y = 2x + 7$ και περνά από το σημείο $A(1,2)$.

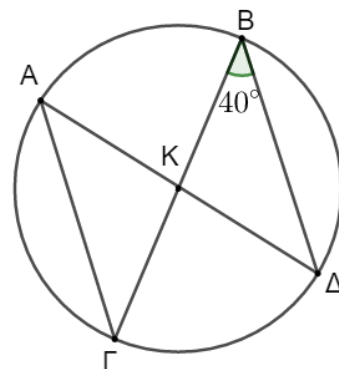
A3. α) Να δώσετε τον ορισμό της εγγεγραμμένης γωνίας.

β) Δίνεται ο κύκλος (K, ρ) . Αν $\angle B\hat{A}D = 40^\circ$,

να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών

$\angle A\hat{K}D$ και $\angle K\hat{A}D$.

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)



A4. Αν $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, να υπολογίσετε:

α) Τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

β) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

A5. Να δείξετε ότι $\left(3\alpha^{\frac{1}{4}} - 2\beta^{\frac{1}{4}}\right)^2 = 9\sqrt{\alpha} + 4\sqrt{\beta} - 12 \cdot \sqrt[4]{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$.

A6. Οι γονείς του Κυριάκου υποσχέθηκαν να του αγοράσουν καινούργιο κινητό, αν ο βαθμός των Μαθηματικών στον έλεγχο του είναι μεγαλύτερος από 16. Οι βαθμοί του ήταν 15 στο πρώτο τετράμηνο, 17 στο δεύτερο τετράμηνο και έγραψε 12 στην τελική εξέταση. Οι αντίστοιχοι συντελεστές βαρύτητας είναι 35%, 35% και 30%. Τελικά, με βάση το αποτέλεσμα, θα του αγοράσουν οι γονείς του καινούργιο κινητό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

A7. Αν $\eta\mu\theta = -\frac{5}{13}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{13\sigma\upsilon\nu\theta - 24\epsilon\varphi\theta}{36\tau\epsilon\mu\theta}$$

A8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, ($\hat{A} = 90^\circ$). Από τυχαίο σημείο K της AB φέρουμε κάθετη $K\Delta$ στην υποτεινούσα, που τέμνει την προέκταση της ΓA στο E .

Να δείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AK\epsilon$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.

β) $(AK) \cdot (B\Gamma) = (EK) \cdot (A\Gamma)$

- A9. α) Να δείξετε ότι τα σημεία $A(0, \alpha), B(-1, \alpha + 9), \Gamma(1, \alpha + 7)$ αποτελούν κορυφές τριγώνου, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
 β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- A10. Αν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3$ και η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι $\frac{2\pi}{3}$, να υπολογίσετε το $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Δίνεται η παραβολή $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.

- α) Να βρείτε:
 το πεδίο ορισμού, (1 μονάδα)
 τα σημεία τομής με τους άξονες, (2 μονάδες)
 τον άξονα συμμετρίας και την κορυφή, (2 μονάδες)
 και να την παραστήσετε γραφικά. (2 μονάδες)
 β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (1 μονάδα)
 γ) Να βρείτε το πρόσημο των $f(-1,5)$ και $f(2018)$. (2 μονάδες)

B2. Δίνονται οι γωνίες θ, φ με $0^\circ < \theta < 180^\circ$ και $0^\circ < \varphi < 180^\circ$, για τις οποίες ισχύει:

$$\frac{\sin(90^\circ + \theta) \cdot \eta\mu(\theta - 90^\circ) \cdot \sigma\varphi(270^\circ - \theta)}{\varepsilon\varphi(180^\circ - \theta) \cdot \eta\mu(720^\circ + \theta)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

και

$$\frac{(\eta\mu\varphi + \sigma\varphi\varphi)^2}{\sigma\varphi\varphi^2} - \tau\epsilon\mu^2\varphi = -2.$$

Να δείξετε ότι $\hat{\theta} = \hat{\varphi}$.

- B3. α) Να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες $x_1 = \frac{\kappa}{2+\sqrt{5}}$ και $x_2 = \frac{\kappa}{2-\sqrt{5}}$, $\kappa \in \mathbb{R}$. (5 μονάδες)
 β) Αν η πιο πάνω εξίσωση είναι η $x^2 + 4\kappa x - \kappa^2 = 0$,
 i. να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε το άθροισμα S των ριζών να είναι ίσο με γινόμενο τους P . (2 μονάδες)
 ii. να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $\frac{S-P+16}{4-S} \leq 1$ (3 μονάδες)

B4. Μια εταιρεία έχει στην κατοχή της δυο οικόπεδα που το κάθε ένα είναι σχήματος ορθογώνιου τριγώνου. Επίσης έχουν και τα δύο μια γωνία 30° , ενώ ο λόγος των υποτεινουσών τους είναι $\frac{3}{2}$. Το μεγαλύτερο οικόπεδο έχει εμβαδόν $900m^2$ και χρειάστηκαν $144m$ συρματόπλεγμα για την περίφραξή του.

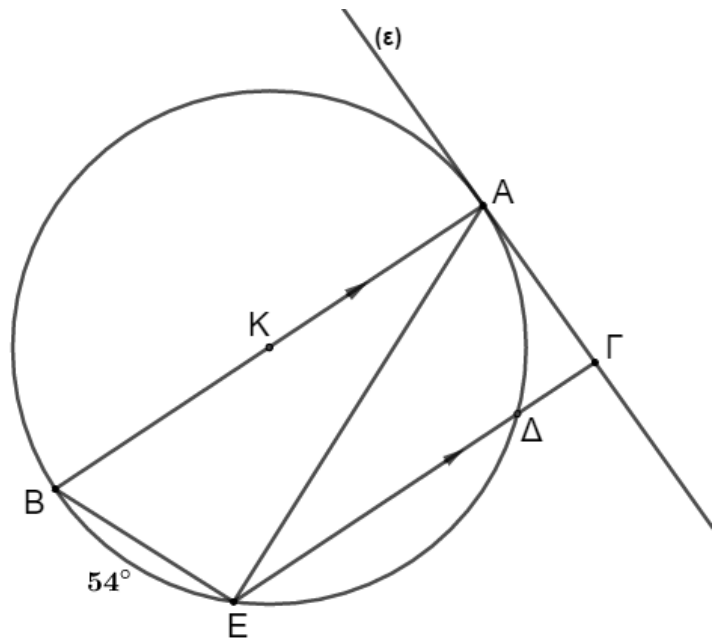
- α) i. Αφού δείξετε ότι τα οικόπεδα είναι όμοια σχήματα, να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικρότερου οικοπέδου.
ii. Να υπολογίσετε το κόστος για την περίφραξη του μικρότερου οικοπέδου, αν η περίφραξη στοιχίζει 5 ευρώ το μέτρο.
- β) Η εταιρεία έχει και ένα τρίτο οικόπεδο σχήματος ορθογώνιου παραλληλόγραμμου με διαστάσεις a και β . Η περίμετρος του τρίτου οικοπέδου είναι αριθμός ανάμεσα στις περιμέτρους των δύο τριγωνικών οικοπέδων και ομοίως το εμβαδόν του είναι αριθμός ανάμεσα στα εμβαδά των δυο τριγωνικών οικοπέδων.

Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται τα παρακάτω:

i. $(\alpha + \beta)^2$

ii. $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\cdot\beta}$

- B5. Στο πιο κάτω σχήμα η AB είναι διάμετρος του κύκλου (K, R) , η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου στο A και το τόξο BE έχει μέτρο 54° . Η ΓE είναι παράλληλη με την AB και τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ .



- α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $B\hat{A}E$, $A\hat{E}B$ και $A\hat{\Gamma}E$. (3 μονάδες)
- β) Αν επιπλέον δίνεται $K(1,2)$ και οι εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι AE και ΓE είναι αντίστοιχα οι $y = x - 1$ και $x - 3y = 3$:
- Να βρείτε την εξίσωση της AB . (2 μονάδες)
 - Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A . (1 μονάδα)
 - Να δείξετε ότι $(A\Gamma) = \frac{4\sqrt{10}}{5} cm$. (2 μονάδες)
 - Να υπολογίσετε το μήκος του $\Gamma\Delta$, αν $(\Gamma E) = \frac{8\sqrt{10}}{5} cm$. (2 μονάδες)

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΜΕΡΟΣ Α΄:

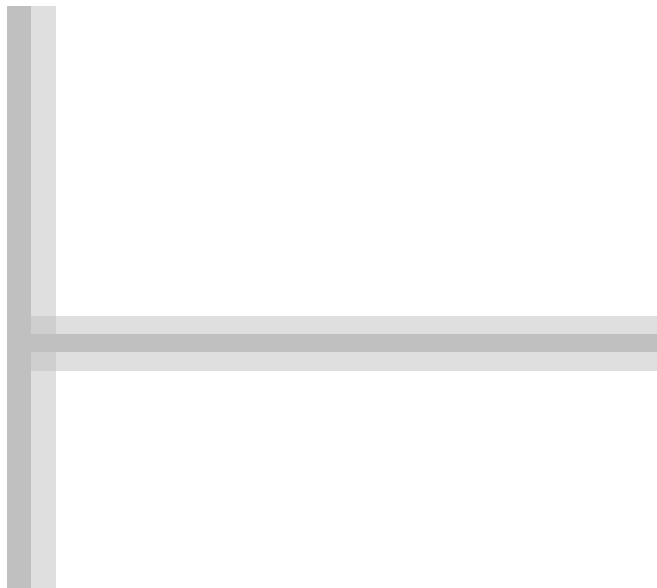
- Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες: $x_1 = 2$ και $x_2 = -8$.

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) , ΕΒΖ εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β, και τόξο $\widehat{B\Gamma} = 80^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες φ , χ , ψ , θ και ω . Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

3. Στο πιο κάτω διάγραμμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων Α, Β, Γ, Δ και Ε. Να αντιστοιχίσετε την καθεμία με τον αντίστοιχο της τύπο, στο φύλλο εργασίας σας.

1)	$\psi = -2x^2$
2)	$\psi = 2x^2 - 2$
3)	$\psi = -(x+2)^2 + 1$
4)	$\psi = (x-1)^2$
5)	$\psi = x^2 - 4x + 5$



4. Δίνονται

διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

β) Να εξετάσετε αν το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\vec{\kappa} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$.

5. α) Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{7}}$ σε άλλο ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x^4 - 17} = 8$.

6. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x^2 - 4x + 4}{10x - 2x^2} \leq 0$.

7. Αν $-10 < x < -2$ και $4 < \psi < 8$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α) $x - \psi$.

β) $\frac{\psi}{x^2 - 1}$.

8. α) Η ευθεία $2x - 3\psi = 6$ τέμνει του άξονες OX και $O\psi$ στα σημεία A και B αντίστοιχα. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης του ευθυγράμμου τμήματος AB .

β) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση της μεσοκάθετης να είναι παράλληλη με την ευθεία $\epsilon_1 : (\alpha - 4)x + \psi = 7$.

9. Να δείξετε ότι: $\frac{\sigma\phi(90^\circ + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \theta) \cdot \eta\mu(720^\circ - \theta) + \sigma\phi\theta \cdot \epsilon\phi(\theta - \pi)}{[1 + \eta\mu(-\theta)] \cdot \eta\mu 210^\circ} = -2(1 + \eta\mu\theta)$

10. α) Δίνεται η εξίσωση $\begin{vmatrix} \lambda x^2 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4x \\ -1 & x & 2 \end{vmatrix} + 4\lambda x^4 = 0$. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση να έχει ρίζες αντίστροφες.

β) Οι βαθμοί των εξετάσεων ενός φοιτητή στο μάθημα της Ψυχολογίας είναι 8 , 5 και λ .

Η βαρύτητα των τριών βαθμών είναι 40% , 40% και 20% αντίστοιχα. Να βρείτε:

i. Την τελική βαθμολογία του φοιτητή στο μάθημα της Ψυχολογίας, αν $\lambda=6$.

ii. Τη βαθμολογία που θα έπαιρνε ο φοιτητής αν όλες οι εξετάσεις είχαν την ίδια βαρύτητα.

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α

ΜΕΡΟΣ Β΄:

- Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.
 - Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.
-

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma \text{ με } a \neq 0 \text{ και } a, b, \gamma \in \mathbb{R}$$

Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

α) Το πρόσημο του a .

β) Την τιμή του γ .

γ) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας.

δ) Το πρόσημο της παράστασης $b^2 - 4a\gamma$.

ε) Την τιμή των παραστάσεων $\frac{b}{a}$ και $\frac{6b^2 - \gamma^2}{a^2}$.

2. Η εξίσωση $\sin\theta \cdot x^2 - 2x + \eta\mu\theta = 0$, $\theta \neq \frac{\kappa\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ έχει ρίζες x_1 και x_2 . Να δείξετε ότι:

α) i. $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} = 4\sigma\tau\epsilon\mu\theta$.

ii. $x_1^2 + x_2^2 = 4 + 4\epsilon\phi^2\theta - 2\epsilon\phi\theta$.

β) Αν $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} = 8$, να βρείτε τις τιμές του θ , $\theta \in (0, 2\pi)$, που επαληθεύουν την εξίσωση.

3. Δίνεται τρίγωνο ΚΛΝ με κορυφές Κ(8,-6), Λ(4,-3), Ν(7,3). Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της πλευράς ΛΝ.

β) Το μήκος του ύψους ΚΖ του τριγώνου ΚΛΝ.

γ) Τις συντεταγμένες του σημείου Ρ, ώστε το ΚΛΝΡ να είναι παραλληλόγραμμο.

δ) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΚΛΝΡ.

ε) Την εφαπτομένη της γωνίας $\hat{ΡΛΚ}$ (κατά προσέγγιση δεκάτου).

4. Στο διπλανό σχήμα η ΑΕ είναι διάμετρος του κύκλου (Κ,Ρ), ΑΔ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ και Μ το μέσο του τόξου ΒΕΓ. Να δείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές.

β) $(ΑΓ)(ΒΔ)=(ΓΕ)(ΑΔ)$.

γ) ΑΜ διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta Α Ε}$.

5. α) Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι η προβολή του διανύσματος $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$ δίνεται από τον τύπο $\vec{\alpha}_1 = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2} \cdot \vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}_1$ η προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\vec{\delta} = -3i + 4j$.

i. Να υπολογίσετε την προβολή του $\vec{\gamma}$ πάνω στο $\vec{\delta}$.

ii. Να βρείτε το $\kappa, \kappa \in \mathbb{R}$, ώστε το $\vec{\alpha} = \left(\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta} \right) \left(\vec{\gamma} - \vec{\delta} \right) + \kappa \vec{\gamma}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\gamma}$.

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ)

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 25/05/2018

ΜΕΡΟΣ Α' : (Μονάδες 50/100)

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.

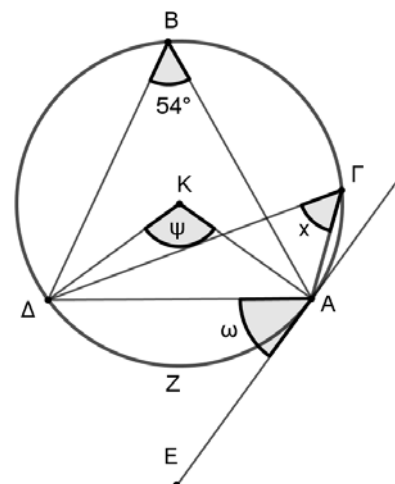
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100 μονάδες.

- A1.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) και AE η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A .

Αν $\hat{A}B\Delta = 54^\circ$ να υπολογίσετε:

- (α) Τα μέτρα των γωνιών $\hat{x}$, $\hat{\omega}$, $\hat{\psi}$ και $\hat{K}A\Delta$ (μον. 4)
 (β) Το μέτρο του τόξου ΔZA (μον. 1)

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



- A2.** Ο τελικός βαθμός στο μάθημα της Στατιστικής στο τμήμα Μαθηματικών του πανεπιστημίου Κύπρου στο χειμερινό εξάμηνο διαμορφώνεται ως εξής: 60% της βαθμολογίας αντιστοιχεί στην τελική εξέταση, 30% στις ομαδικές εργασίες και 10% στη συμμετοχή στην τάξη. Να βρείτε ποιος θα είναι ο τελικός βαθμός ενός φοιτητή που βαθμολογήθηκε με 65 από τα 100 στην τελική εξέταση, 80 από τα 100 για τις ομαδικές εργασίες και 95 από τα 100 στη συμμετοχή στην τάξη.

- A3.** Αν $\text{τεμ}\omega = \sqrt{2}$, $270^\circ < \omega < 360^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{5\sigma\upsilon\nu\omega - 3\eta\mu\omega}{\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\omega}$$

- A4.** Δίνονται οι παραστάσεις $A = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4}$ και $B = \frac{1}{3 + \sqrt{3}} + \frac{1}{3 - \sqrt{3}}$

(α) Να αποδείξετε ότι $A = 2$ και $B = 1$

(β) Να λύσετε την εξίσωση $(x - B)^3 = A$, $x \geq B$ για πραγματικές τιμές του x

- A5.** Αν $1 < x < 2$ και $-9 < \psi < -4$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η κάθε μια από τις παρακάτω παραστάσεις:

i. $-3x$ (μον. 1)

ii. $\frac{x}{\psi}$ (μον. 2)

iii. $x^2 + \psi^2$ (μον. 2)

A6. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot x^2 - 2\sigma\upsilon\nu\theta \cdot x - \frac{1}{\sigma\tau\epsilon\mu^2\theta - 1} = 0$, έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

A7. Δίνεται η παραβολή $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$.

(α) Να βρείτε:

- i. Τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής. (μον. 1)
- ii. Τα σημεία τομής της, με τους άξονες. (μον. 1)
- iii. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (μον. 1)

(β) Αν Σ σημείο της παραβολής, με $\Sigma(x_\Sigma, 0)$ όπου $x_\Sigma < 0$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από την κορυφή της παραβολής και από το σημείο Σ . (μον. 2)

A8. Έστω A και B δυο σημεία του επιπέδου με διανυσματικές ακτίνες $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, και M μέσο του AB .

(α) Να αποδείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα του μέσου M είναι $\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$.

(β) Αν $A(2, 1)$ και $B(4, 5)$, να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου N του άξονα $\psi'\psi$ έτσι ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{MN}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.

A9. (α) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το *Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης* (Σχήμα) (μον. 3)

(β) Σε κύκλο (K, R) εγγράφουμε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και φέρουμε την εφαπτομένη του στο σημείο B . Αν $A\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου και AZ κάθετη στην εφαπτομένη (Z σημείο της εφαπτομένης), να δείξετε ότι $(A\Gamma) \cdot (AZ) = (AB) \cdot (A\Delta)$ (μον. 2)

A10. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\epsilon\phi\theta - \sigma\phi\theta}{\epsilon\phi\theta + \sigma\phi\theta}$ και $B = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(6\pi - \theta)}{\sigma\phi\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} + \theta\right)}$

(α) Να δείξετε ότι: $A = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$ και $B = -\sigma\upsilon\nu^2\theta$ (μον. 4)

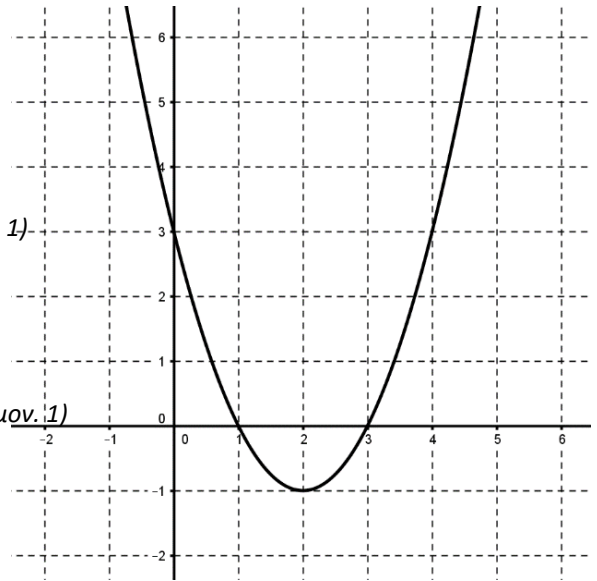
(β) Αν $A - B = \frac{1}{2}$ και $0 < \theta < \pi$ να βρείτε τις τιμές της γωνίας θ . (μον. 1)

ΜΕΡΟΣ Β' : (Μονάδες 50/100)**Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100 μονάδες.**

- B1.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$.

(α) Με βάση το σχήμα να βρείτε:

- Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $f(x)$. (μον. 1)
- Το πρόσημο της διακρίνουσας της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ (μον. 1)
- Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής. (μον. 1)
- Τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$. (μον. 1)
- Τις τιμές του x τέτοιες ώστε $f(x) \leq 0$ (μον. 1)
- Το πρόσημο της $f(\sqrt[3]{5})$, $f(-\sqrt[3]{5})$ (μον. 1)



(β) Να βρείτε τα σημεία τομής της παραβολής $f(x) = x^2 - 4x + 3$ με την ευθεία $\psi = x + 9$. (μον. 4)

- B2.** Δίδεται η εξίσωση $(\mu - 2)x^2 + (\mu - 1)x - \mu = 0$, $\mu \neq 2$ με ρίζες x_1, x_2 .

(α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του μ :

- Η εξίσωση έχει ρίζες αντίθετες. (μον. 2)
- Το άθροισμα των ριζών ισούται με το τετραπλάσιο του γινομένου των ριζών της. (μον. 2)
- Ισχύει η σχέση: $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} \geq -2$ (μον. 4)

(β) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του μ η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = (\mu - 2)x^2 + (\mu - 1)x - \mu = 0, \mu \neq 2 \text{ δεν τέμνει τον άξονα } x'x. \quad (\text{μον. } 2)$$

- B3.** Δίνονται τα σημεία $A(1, 5)$, $B(3, 2)$ και $\Gamma(6, -1)$

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ ορίζουν τρίγωνο. (μον. 2)

(β) Να υπολογίσετε:

- Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (μον. 2)
- Το μήκος του ύψους $A\Delta$. (μον. 2)
- Την εφαπτομένη της γωνίας B του τριγώνου $AB\Gamma$. (μον. 2)

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1) η οποία ανήκει στη δέσμη ευθειών

$(\varepsilon_\kappa): x + \psi - 2 + \lambda(x - 2\psi + 1) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και είναι παράλληλη με την πλευρά $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (μον. 2)

B4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ για τα οποία ισχύει: $\vec{a} + \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ και $2\vec{a} + \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

(α) Να δείξετε ότι $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$. (μον. 2)

(β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$. (μον. 2)

(γ) Να υπολογίσετε: $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{\beta})$ (μον. 2)

(δ) Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$. (μον. 2)

(ε) Να βρείτε μοναδιαίο διάνυσμα που να είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{v} = \vec{a} + \vec{\beta}$. (μον. 2)

B5. Σε κύκλο $(K, 2cm)$ η εφαπτομένη στο σημείο B τέμνει την προέκταση της διαμέτρου ΑΔ στο σημείο E, και η χορδή ΜΔ είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

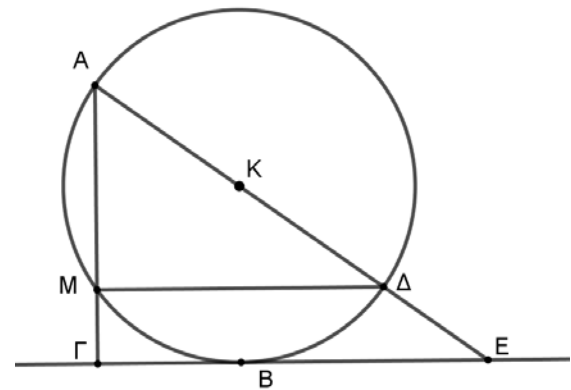
Δίνονται $BE = \sqrt{5}cm$, $\Delta E = \alpha cm$ και $\Gamma M = \beta cm$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$. (μον. 2)

(β) Να εκφράσετε το ΑΜ συναρτήσει του β . (μον. 2)

(γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΑΓΕ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους. (μον. 4)

(δ) Αν E_1 είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΜ και E_2 το εμβαδόν του τραapeζίου ΜΔΕΓ να βρείτε το λόγο $\frac{E_1}{E_2}$. (μον. 2)



ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

(α) $\frac{7}{\sqrt{15}-\sqrt{8}} =$

(β) $(64a^9b^{-15})^{\frac{1}{3}} =$

2. Στον πιο κάτω πίνακα δίνονται οι βαθμοί που πήρε ένας μαθητής του σχολείου μας σε 5 μαθήματα και οι ώρες διδασκαλίας των μαθημάτων κάθε εβδομάδα. Χρησιμοποιώντας τις ώρες διδασκαλίας ως συντελεστές βαρύτητας, να υπολογίσετε τον σταθμισμένο μέσο όρο των βαθμών του μαθητή.

	Μάθημα 1	Μάθημα 2	Μάθημα 3	Μάθημα 4	Μάθημα 5
Ώρες	2	3	3	5	7
Βαθμός	20	19	16	12	17

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x^4 - 16 = 0$

(β) $\sqrt[3]{(3-x)} - 2 = 0$

4. Δίνονται τα σημεία $A(1, -2)$, $B(-6, 0)$, $\Gamma(-1, -3)$.

(α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

(β) Να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u}$ που είναι ομόρροπο με το διάνυσμα $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{A\Gamma}$.

5. Αν $\sin\theta = \frac{-12}{13}$ και $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

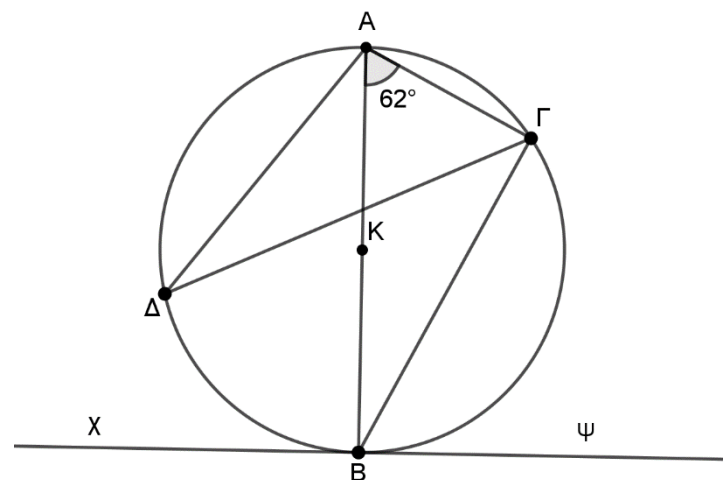
$$A = \frac{10\sigma\tau\epsilon\mu\theta - 5\sigma\phi\theta}{12\tau\epsilon\mu\theta + 24\epsilon\phi\theta}$$

6. Στο πιο διπλανό σχήμα η AB είναι διάμετρος του κύκλου (K, R) και η ευθεία $xB\psi$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B. Αν $\angle B\hat{A}\Gamma = 62^\circ$, να υπολογίσετε, με πλήρη αιτιολόγηση των απαντήσεών σας, τις γωνίες:

(α) $\angle \Gamma\hat{B}\psi =$ (1,5)

(β) $\angle A\hat{\Gamma}B =$ (1,5)

(γ) $\angle A\hat{\Delta}\Gamma =$ (2)

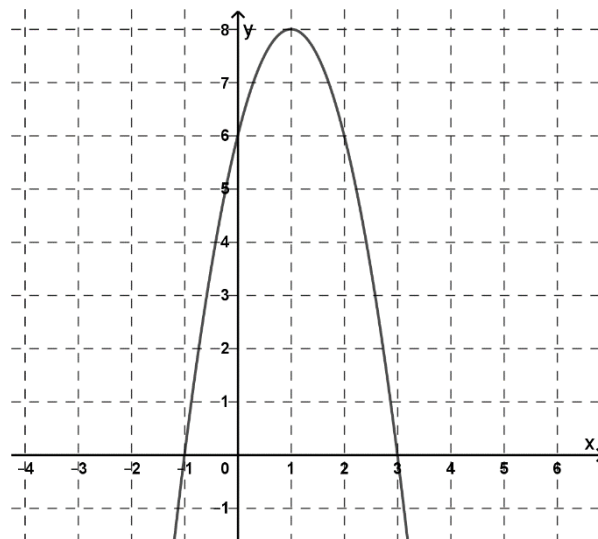


7. Να υπολογίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες αληθεύει η ανίσωση $\frac{x^2-9}{4-x^2} \leq -2$.
8. Δίνονται τα σημεία $A(-2,1)$, $B(1,5)$ και $\Gamma(3,0)$.
- (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.
- (β) Να υπολογίσετε την απόσταση των πλευρών $A\Delta$ και $B\Gamma$.
9. Παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ έχει εμβαδόν 84cm^2 , και τα σημεία E , Z , H και Θ είναι τα μέσα των πλευρών AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔA αντίστοιχα.
- (α) Να αποδείξετε ότι $(AB) \cdot (H\Theta) = (A\Gamma) \cdot (H\Delta)$
- (β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου $A\Theta H\Gamma Z E$
10. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 4x - \lambda^2 + 4\lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ με ρίζες x_1, x_2 .
- (α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η πιο πάνω εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.
- (β) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 + 1$.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$.
Να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού της f (1)
- β) το σύνολο τιμών της f (1)
- γ) τις ρίζες x_1 και x_2 της εξίσωσης $f(x) = 0$ (1)
- δ) τις τιμές των α , β και γ (3)
- ε) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 0$ (2)
- στ) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 6$ (2)



2. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

γ) Να βρείτε την προβολή του $\vec{u}$ στο $\vec{v}$.

δ) Αν $\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix}$ και $-1 \leq a \leq 2$ να υπολογίσετε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του εσωτερικού γινομένου $\vec{w} \cdot \vec{v}$

3. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) \cdot \eta\mu(\pi + \theta) \cdot \sin(2\pi + \theta)}{\varepsilon\varphi(\frac{3\pi}{2} - \theta) \cdot \eta\mu(-\theta) \cdot \eta\mu(2\pi - \theta)}$ και $B = \tan\theta - \frac{1}{\sec\theta \cdot \csc\theta}$

(α) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu\theta$ και $B = \sin\theta$.

(β) Να αποδείξετε ότι $(A^2 - B^2)^2 + 4A^2B^2 - B^2 = A^2$.

4. Ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ έχει κορυφή $A(-3,4)$ και η εξίσωση της μίας διαγωνίου είναι $3x - y = -3$. Αν η κορυφή Δ βρίσκεται στον άξονα των τετμημένων τότε:

(α) να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών B, Γ και Δ . (7)

(β) να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{A}B$. (3)

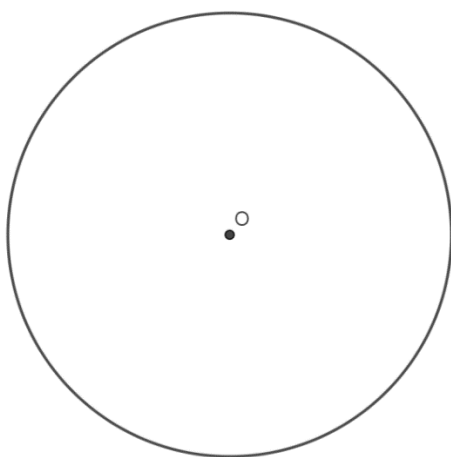
5. Σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα R φέρουμε διάμετρο AB και χορδή $B\Gamma$. Η εφαπτομένη (ε) του κύκλου στο σημείο A τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ σε σημείο Δ .

(α) Να αποδείξετε ότι $(A\Gamma)^2 = (\Delta\Gamma) \cdot (B\Gamma)$. (4)

(β) Να αποδείξετε ότι $\frac{(A\Gamma)^2}{(A\Delta)^2} = \frac{B\Gamma}{B\Delta}$ (3)

(γ) Ακολούθως, φέρουμε την διάμεσο OM του τριγώνου $OB\Gamma$. Η προέκταση της OM τέμνει την εφαπτομένη (ε) στο σημείο T .

Να αποδείξετε ότι $2R^2 = (OT) \cdot (A\Gamma)$. (3)



ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Προσανατολισμού (5 – ώρο)

ΤΑΞΗ: Α΄ Λυκείου

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + 5 = 0$ με λύσεις x_1 και x_2 . Χωρίς να λύσετε την εξίσωση, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων : $A = x_1 + x_2$ και $B = x_1 \cdot x_2$.

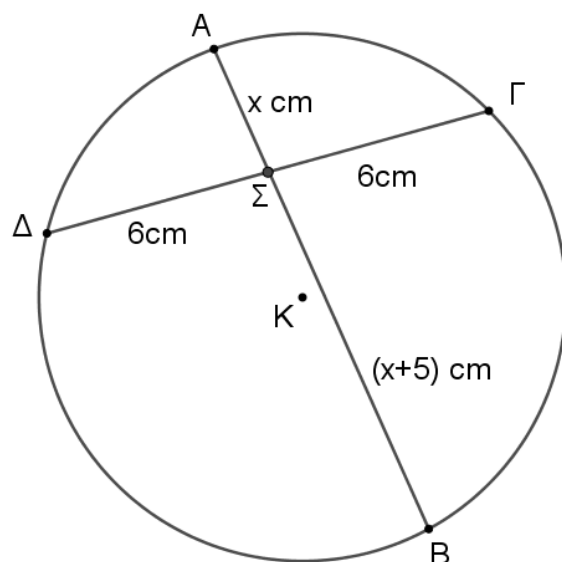
2) Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Να βρείτε:

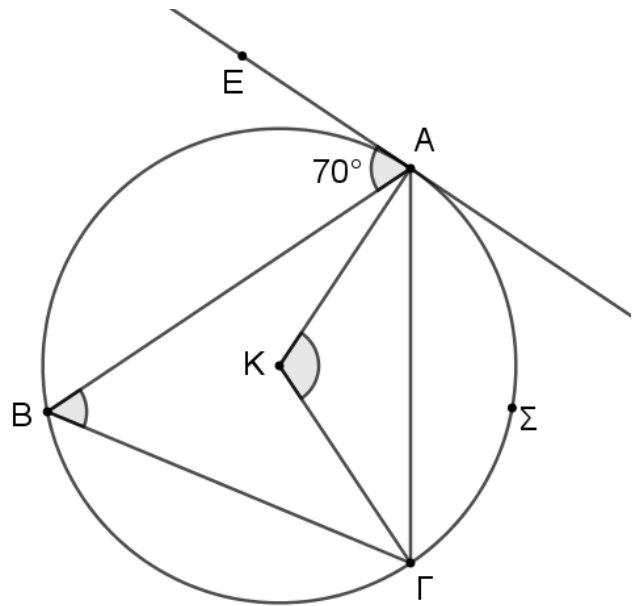
(α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{a} - \vec{b}$.(β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

3) Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της παραβολής $y = 3x^2 + 4$.

4) Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) με χορδές AB και ΔΓ (Σ το σημείο τομής των χορδών).

Αν $\Delta\Sigma = \Gamma\Sigma = 6\text{cm}$, $A\Sigma = x\text{cm}$ και $\Sigma B = (x+5)\text{cm}$ να υπολογίστε το x .

- 5) Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (K, R) . Η AE είναι εφαπτομένη του κύκλου στο A και η $K\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Gamma}A$. Η γωνία $E\hat{A}B = 70^\circ$. Να βρείτε το μέτρο των γωνιών: $B\hat{\Gamma}A$, $\Gamma\hat{K}A$ και $\Gamma\hat{B}A$ καθώς επίσης και το μέτρο του τόξου $\Gamma\Sigma A$. (Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)



- 6) (α) Να λύσετε την εξίσωση $x^5 - 81x = 0$.

(β) Αν α είναι η μεγαλύτερη από τις λύσεις της πιο πάνω εξίσωσης να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}+1} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}-1} = \sqrt{\alpha}$$

- 7) Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται οι μέρες άδειας των 20 υπαλλήλων μια εταιρείας για τον μήνα Αύγουστο. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

Μέρες άδειας υπαλλήλων (x_i)	Πλήθος υπαλλήλων (f_i)
5	2
6	1
7	2
8	3
9	5
11	3
12	4

- 8) Για τις διαστάσεις α και β ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισχύουν τα εξής :
- $$2 < \alpha < 4 \text{ και } 3 < \beta < 5 .$$

(α) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται:

- η περίμετρος Π του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
- το εμβαδόν E του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η περίμετρος είναι ίση με 14cm και το εμβαδόν ίσο με 12cm² να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

9) Αν
$$\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\theta\right)\cdot\sigma\varphi\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}{\eta\mu\left(\theta-\pi\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\pi-\theta\right)\cdot\eta\mu\left(-\theta\right)}=-2 \quad \text{και} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

(α) Να δείξετε ότι:

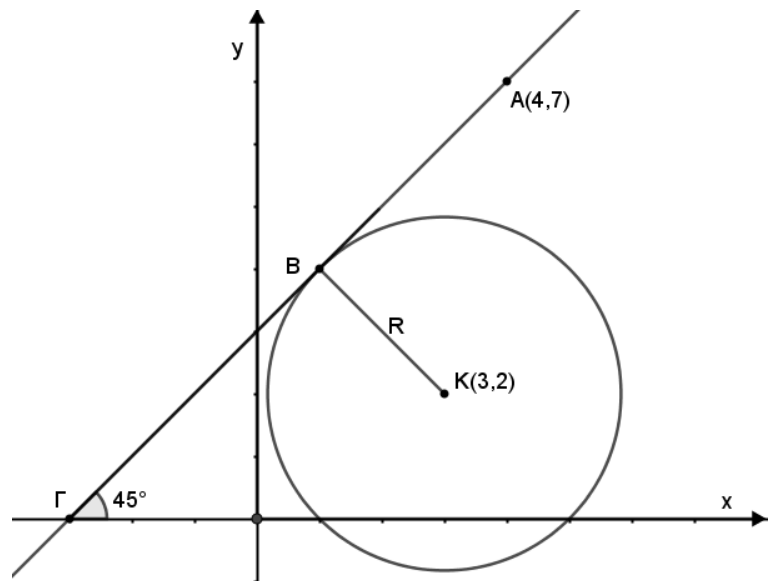
- $\hat{\theta} = \frac{\pi}{3}$
- το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της εξίσωσης $\varepsilon\varphi\theta \cdot x^2 - 2x + \sigma\varphi\theta = 0$ είναι ίσο με $\frac{2}{3}$.

(β) Για $\hat{\theta} = \frac{\pi}{3}$, να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες η εξίσωση $4\sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot x^2 - 2\kappa x + 3\eta\mu^2\theta = 0$ έχει λύσεις πραγματικές.

- 10) Στο πιο πάνω σχήμα η εφαπτομένη του κύκλου (K, R) στο B σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων γωνία 45° και περνά από το σημείο $A(4, 7)$.

(α) Να βρείτε:

- την εξίσωση της εφαπτομένης ΑΓ
- την κλίση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται η ακτίνα ΒΚ
- το μήκος της ακτίνας R



(β) Με κέντρο το A και ακτίνα $\rho = 3$ μονάδες, γράφουμε κύκλο (A, ρ) . Να δείξετε ότι οι κύκλοι (K, R) και (A, ρ) τέμνονται.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$.

Να βρείτε τα πιο κάτω:

(α) i. το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

ii. το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

(β) i. το πρόσημο του α και το πρόσημο της διακρίνουσας Δ της εξίσωσης

$$f(x) = 0$$

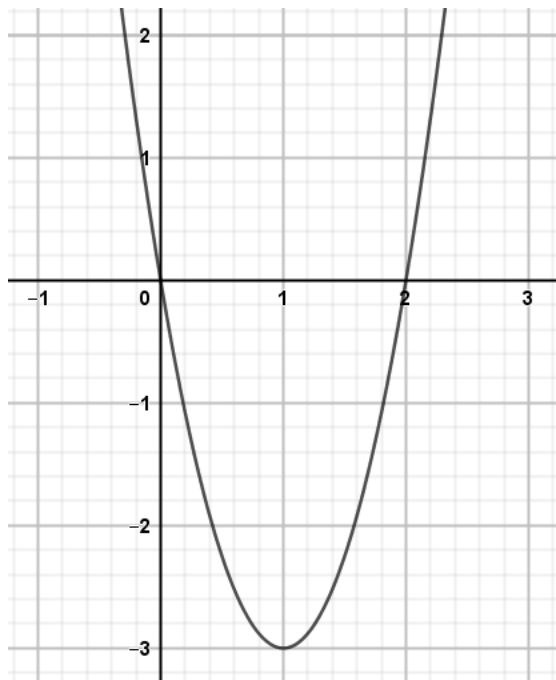
ii το πρόσημο του $f(\sqrt{5})$.

(γ) i. την εξίσωση του άξονα συμμετρίας.

ii. τις συντεταγμένες της κορυφής.

(δ) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \leq 0$.

(ε) την τιμή της παράστασης $A = \frac{2\gamma - 3\beta}{\alpha}$



α) Να αποδείξετε την πιο κάτω ταυτότητα:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & x-2 & 2x \\ 4 & 4 & 2-x \end{vmatrix} = (x+2)^2$$

β) Να λύσετε την πιο κάτω ανίσωση:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & x-2 & 2x \\ 4 & 4 & 2-x \end{vmatrix} \leq \frac{2(x+2)}{x+1}$$

2) (α) i. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\sigma \nu \theta \left(\varepsilon \varphi \theta - \frac{\sigma \varphi \theta}{1 + \sigma \varphi^2 \theta} \right) = \eta \mu^3 \theta$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{4\eta \mu^2 \theta + 3} - 1 = 2\eta \mu \theta$, $0^\circ < \theta < 180^\circ$.

(β) Να βρείτε το είδος των λύσεων της εξίσωσης $\tau \varepsilon \mu \theta \cdot x^2 - (2\eta \mu \theta + 1) \cdot x - \sigma \nu^3 \theta = 0$, $\sigma \nu \theta \neq 0$.

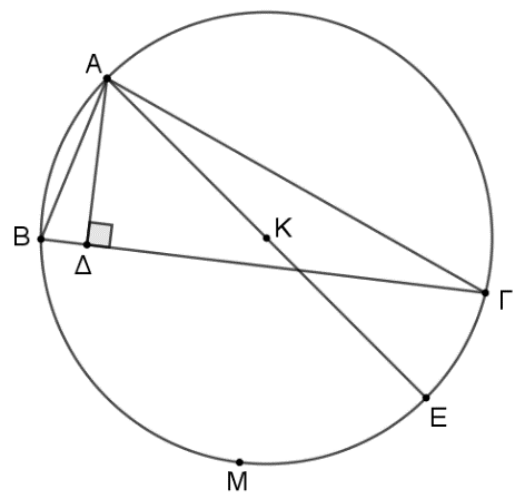
3) Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του οποίου η πλευρά AB ανήκει σε ευθεία με εξίσωση $y = -2x + 8$ και η πλευρά $B\Gamma$ σε ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 12$. Αν μια από τις κορυφές του είναι το σημείο $(-1, 2)$ να βρείτε:

- (α) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.
- (β) το μέτρο της οξείας γωνίας που σχηματίζει η διαγώνιος $B\Delta$ με την πλευρά $\Gamma\Delta$.
- (γ) το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$

4) Στο διπλανό σχήμα η AE είναι διάμετρος του κύκλου (K, R) , το $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ και το σημείο M είναι το μέσο του τόξου $BE\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- (α) το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- (β) $(A\Gamma) \cdot (B\Delta) = (\Gamma E) \cdot (A\Delta)$.
- (γ) AM διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}AE$.



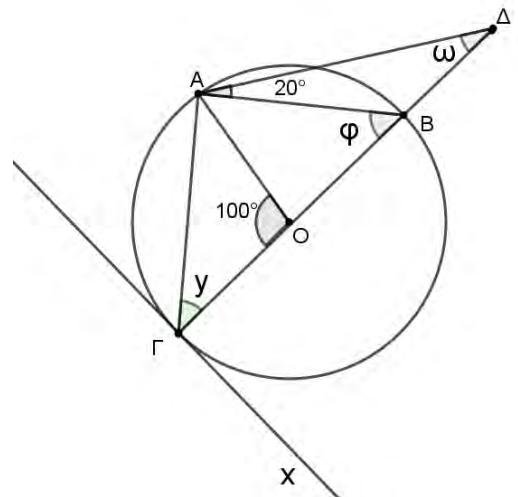
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ(5-ΩΡΟ)****ΜΕΡΟΣ Α':** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.1. Αν x_1, x_2 είναι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 6x - 3 = 0$ να δείξετε ότι:

α) $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 0$ και β) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -2$

2. Αν $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$ να δείξετε ότι $-2 < 2x - y < 4$ 3. Δίνονται τα σημεία $A(0,1)$, $B(1,-1)$ και $\Gamma(2,1)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overline{AB}$ και $\overline{B\Gamma}$ και να δείξετε ότι τα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα.4. Να λύσετε την εξίσωση: $(4x+1)^{\frac{3}{4}} = 27$ για $x \geq -\frac{1}{4}$

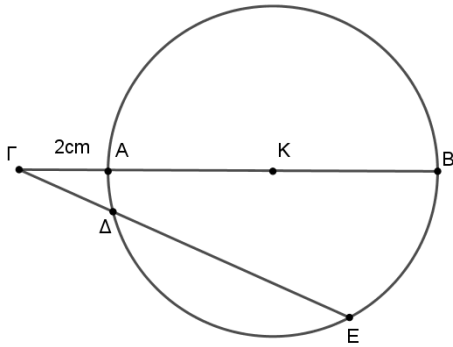
5. Αν οι βαθμοί ενός φοιτητή σε πέντε(5) διαφορετικά μαθήματα του εξαμήνου είναι:

7, 8, 9, 10 και 6 με βαρύτητα 0,15 0,2 0,1 0,25 και 0,3 αντίστοιχα να υπολογίσετε τη μέση βαθμολογία του φοιτητή για το εξάμηνο.

6. Στο διπλανό σχήμα, $\triangle A\hat{B}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου O , $\angle A\hat{O}\Gamma = 100^\circ$, $\angle B\hat{A}\Delta = 20^\circ$ και η Γx εφαπτομένη του κύκλου στο Γ .Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\varphi}$, $\hat{y}$ και $\hat{\omega}$, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.7. Να δείξετε ότι η πιο κάτω παράσταση είναι ανεξάρτητη του x :

$$3\eta\mu(180^\circ - x)\sigma\upsilon\nu(90^\circ - x) + 4\eta\mu^2(270^\circ - x) + \sigma\upsilon\nu(180^\circ + x)\sigma\upsilon\nu(360^\circ - x)$$

8. Δίνεται κύκλος (Κ, 11cm) και Γ σημείο εκτός του κύκλου. Αν ΓΑ=2cm και ΔΕ=4ΓΔ+1 να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΓΔ.



9. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (\lambda - 1)x^2 + 4x + (6 - \lambda)$, $\lambda \neq 1$.

- α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + 4x + (6 - \lambda) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.
β) Αν $\lambda = 3$ να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα των x (άξονα των τετμημένων).

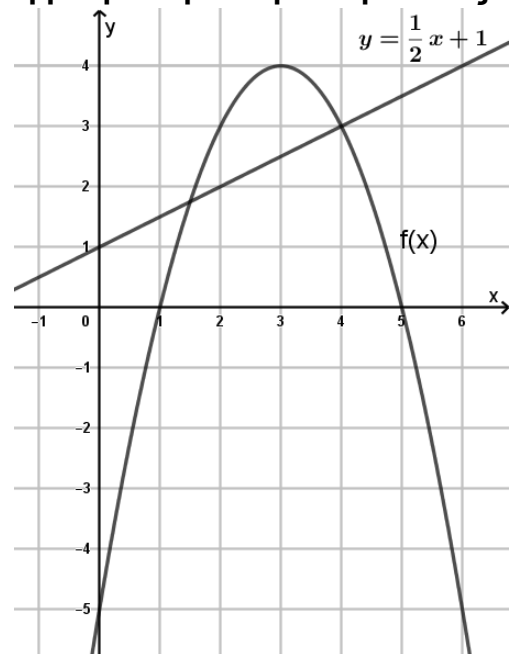
10. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β, που βρίσκεται πάνω στον άξονα yy' , έτσι ώστε η απόστασή του από το σημείο Α(4,6) να είναι ίση με την απόστασή του από την ευθεία $\varepsilon: \sqrt{3}x - y + 13 = 0$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$,

$\alpha \neq 0$ και της ευθείας $y = \frac{1}{2}x + 1$. Να βρείτε:

- α) Τις λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$
β) Τις συντεταγμένες του σημείου τομής του άξονα συμμετρίας της $f(x)$ με την $y = \frac{1}{2}x + 1$
γ) Τις τιμές των α , β και γ
δ) Τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) \leq \frac{1}{2}x + 1$



2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Να βρείτε:

- α) Το εσωτερικό γινόμενο και τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, δίνοντας την απάντησή σας κατά προσέγγιση ακεραίου.
β) Την προβολή του διανύσματος $\vec{a}$ στο διάνυσμα $\vec{\beta}$
γ) Αν $A(-2, -1)$, $\Gamma(1, \kappa)$ να υπολογίσετε την τιμή του κ έτσι ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ να είναι κάθετο στην προβολή του $\vec{a}$ στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.

3. α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A(-1,0), B(1,4) και Γ(-5,2) είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B\Gamma A}$

γ) Αν ΑΔ ύψος και Μ,Ν μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι ΑΝΔΜ είναι τετράγωνο.

δ) Να δείξετε ότι $E_{\text{ΑΝΔΜ}} = \frac{1}{2}E_{\text{ΑΒΓ}}$

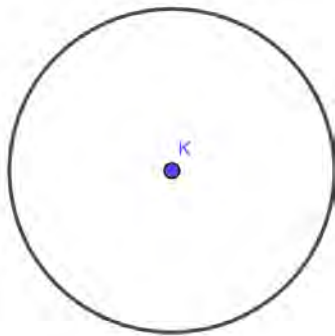
4. α) Δίνεται η εξίσωση: $(2 + \sin \omega)x^2 - 5x + 2\eta \mu^2 \omega = 0$, $180^\circ < \omega < 270^\circ$. Να βρείτε για ποια τιμή του ω η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.

β) Αν $\sigma\phi\alpha = 2\sigma\phi\beta$, να δείξετε ότι: $\frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta + 1}{\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta} = \frac{2 - \eta\mu^2\beta}{3\sigma\upsilon\nu\beta \cdot \eta\mu\beta}$

5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) εγγεγραμμένο σε κύκλος (Κ,Ρ) και ΑΔ ύψος του τριγώνου. Φέρουμε ευθεία που περνά από το σημείο Γ, τέμνει το ύψος ΑΔ στο Τ και τον κύκλο στο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι:

i) Οι γωνίες $\hat{\Gamma B A} = \hat{\Delta A \Gamma}$

ii) $(\Gamma A)^2 = (\Gamma T) \cdot (\Gamma P)$

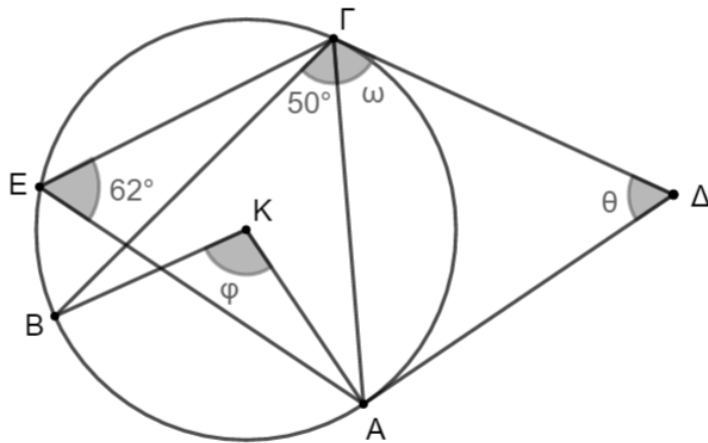


ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΝΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2018**ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22 / 5 / 2018****ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ****ΜΕΡΟΣ Α΄ Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.**1. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x-8} = 6$, $x \geq 8$.2. Αν $4 < x < 7$ και $-5 < y < 12$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:α) $3y$ β) $4x + 3y - 8$ 3. Ένας μαθητής πήρε στα διαγωνίσματα του Α΄ τετραμήνου τους βαθμούς **15 , 14 , 16** και στην προφορική επίδοση αξιολογήθηκε με **18**. Αν οι βαθμοί έχουν συντελεστή βαρύτητας **2 , 2 , 3** και **3** αντίστοιχα, να βρείτε τον τελικό βαθμό του μαθητή για το τετράμηνο.4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 6-2\lambda \\ \kappa+3 \end{pmatrix}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.β) Να βρείτε την τιμή των παραμέτρων κ και λ έτσι ώστε $\vec{\gamma} = -2\vec{\alpha}$.5. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) που περνά από το σημείο $A(-3, 2)$ και είναι:α) **κάθετη** με την ευθεία $\varepsilon_1: 4x + 5y = 12$ β) **παράλληλη** με την ευθεία $\varepsilon_2: x = 8$ 6. Αν $\sin\theta = -\frac{5}{13}$ και $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = \frac{13 \cdot \eta\mu\theta - 24 \cdot \sigma\phi\theta}{25 \cdot \tau\epsilon\mu\theta} .$$

7. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(2, 3)$, $B(-1, 5)$ και $\Gamma(4, 7)$.Αν M είναι το μέσο της $A\Gamma$, να βρείτε:α) τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{MA}$ και $\overrightarrow{MB}$ (μον. 2)β) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{MA}$ και $\overrightarrow{MB}$ (μον. 1)γ) το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{MA}$ και $\overrightarrow{MB}$ (μον. 2)

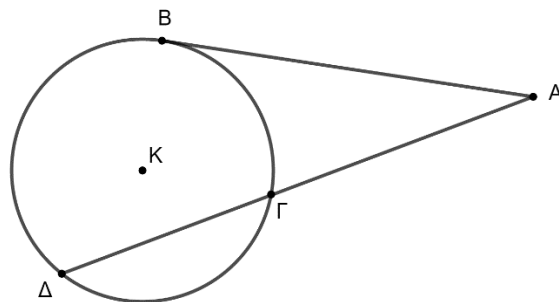
8. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) . Τα τμήματα $\Delta\Gamma$ και ΔA εφάπτονται του κύκλου στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, $B\hat{\Gamma}A = 50^\circ$ και $A\hat{E}\Gamma = 62^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνιές $\hat{\phi}$, $\hat{\omega}$, $K\hat{B}A$, $\Gamma\hat{A}B$ και $\hat{\theta}$. **Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.**



9. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(1-2x) \cdot (x^2+3) \cdot (4x^2-1)}{x^2-10x+24} \leq 0$.

10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) .

Από σημείο A εκτός κύκλου, φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα AB , B σημείο επαφής και την τέμνουσα $A\Gamma\Delta$, Γ και Δ σημεία του κύκλου.



α) Να δείξετε ότι $(AB)^2 = (A\Gamma) \cdot (A\Delta)$.

β) Αν $(AB) = (x - 4) \text{ cm}$, $(A\Gamma) = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \text{ cm}$ και $(A\Delta) = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \text{ cm}$, να βρείτε την τιμή του x .

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + (\lambda + 2)x - (3\lambda + 15) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ έτσι ώστε :

α) η εξίσωση να έχει ρίζα τον αριθμό -2

β) η εξίσωση να έχει ρίζες αντίθετες

γ) να ισχύει η σχέση $P - S = -25$

δ) να ισχύει η σχέση $\frac{2x_1}{x_2} + \frac{2x_2}{x_1} = -5$

2. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$.

Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

α) Το Πεδίο Ορισμού και το Σύνολο Τιμών της συνάρτησης. (μον.1)

β) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας. (μον.1)

γ) Τις συντεταγμένες του ακρότατου σημείου και να το χαρακτηρίσετε. (μον.1)

δ) Το πρόσημο των $f(\sqrt{2018})$ και $f(0)$. (μον.1)

ε) Τις ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = -5$. (μον.2)

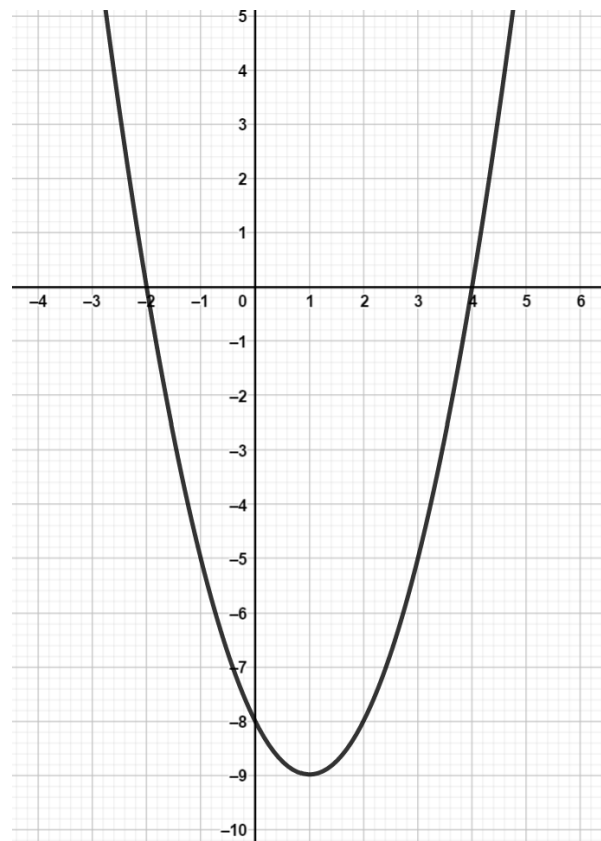
στ) Τις τιμές του κ , $\kappa \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\frac{\alpha \cdot f(\kappa)}{P} \geq 0$

όπου P το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0. \quad (\text{μον.2})$$

ζ) Να απλοποιήσετε το κλάσμα

$$\frac{x \cdot f(x)}{2x^2 - 8x} \quad (\text{μον.2})$$



3. α) Να δείξετε ότι: $\frac{1}{\tan x - 1} - \frac{\sigma \varphi x}{\sigma \tan x + \sigma \varphi x} = 2\sigma \varphi^2 x$. (μον. 4)

β) Να υπολογίσετε την γωνία x , αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και $\frac{\varepsilon \varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\eta \mu\left(\frac{3 \pi}{2}+x\right)+\sigma \nu \nu(-x)}{\varepsilon \varphi(\pi+x)-\varepsilon \varphi\left(\frac{3 \pi}{2}+x\right)-\tan (x-2 \pi)}=\frac{3}{2}$. (μον. 6)

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με κορυφές $A(1, 1)$ και $B(2, 8)$.
Αν η εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ είναι $y + 3x = 14$, να βρείτε:

α) το μήκος του ύψους AE του τριγώνου (μον. 2)

β) τις συντεταγμένες του σημείου Δ έτσι ώστε το $AB\Delta\Gamma$ να είναι ρόμβος (μον. 3)

γ) το εμβαδόν του ρόμβου $AB\Delta\Gamma$ (μον. 2)

δ) την οξεία γωνία $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ κατά προσέγγιση ακεραίου (μον. 3)

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) , AB και KM εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία B και M αντίστοιχα.

α) να δείξετε ότι τα τρίγωνα KOM και KAB είναι όμοια (μον. 4)

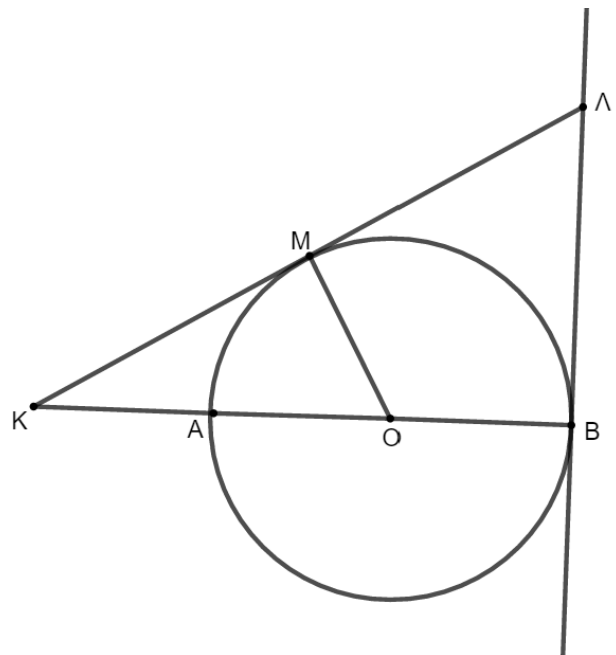
β) Αν $(AB) = 2 \cdot (KA)$ να δείξετε ότι:

i) $(KO) \cdot (KB) = (KM) \cdot (KA) = 6R^2$

(μον. 4)

ii) $(AB) = \frac{(KA)}{2}$

(μον. 2)



ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής.

(α) $\frac{3}{\sqrt{5}-2}$

(β) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

2. Αν $\sin\theta = \frac{4}{5}$ και $270^\circ < \theta < 360^\circ$, να υπολογίσετε, με τη χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων,

την τιμή της παράστασης $A = \frac{10\eta\mu\theta - 8\varepsilon\phi\theta}{4\tau\epsilon\mu\theta}$

3. Δίνονται τα σημεία A(3, 2), B(-5,4). Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης του ευθύγραμμου τμήματος AB.

4. Αν $3 < x < 4$ και $-5 < y < -2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

(α) $2x + 4y$

(β) $-\frac{x}{y}$

5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 2\kappa - 1 \\ \kappa + 4\mu \end{pmatrix}$.

Αν ισχύει ότι $2 \cdot \vec{\alpha} - \vec{\gamma} = 3 \cdot \vec{\beta}$, να υπολογίσετε:

ι) τις τιμές των κ και μ

ιι) το μέτρο του διανύσματος $\frac{1}{5}\vec{\gamma}$

6. Να αποδείξετε ότι
$$\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \cdot \varepsilon\phi(3\pi + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(-\omega)}{\tau\epsilon\mu(2\pi - \omega) \cdot \sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi + \omega)} + \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = 1$$

7. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\begin{vmatrix} x & -1 & y \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$, παριστάνει εξίσωση ευθείας, η οποία είναι

παράλληλη με την ευθεία $22x - 2y - 7 = 0$

8. Δίνονται οι βαθμοί που πήραν 7 μαθητές της Α' Λυκείου σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών: 17, 12, 10, 20, 17, 12, 17

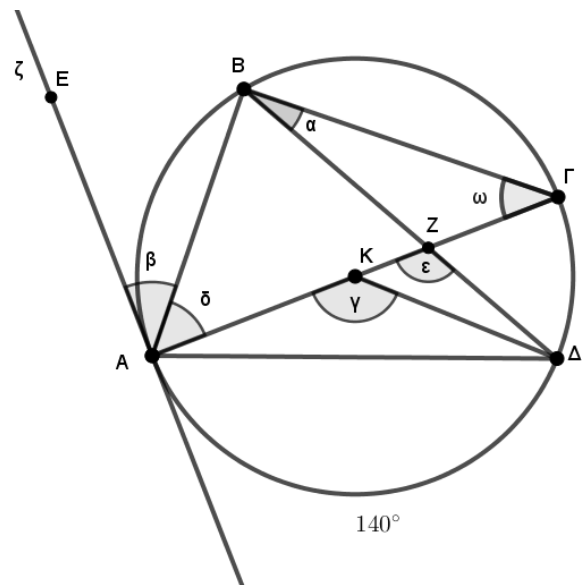
Να υπολογίσετε τη μέση τιμή ($\bar{x}$) και την τυπική απόκλιση (s) των βαθμών.

9. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) και ΑΓ μια διάμετρος του. Αν η ευθεία (ζ) είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο Α, το μέτρο του μικρότερου τόξου ΑΔ είναι $\widehat{A\Delta} = 140^\circ$ και η γωνιά $\omega = 40^\circ$,

α) Να υπολογίσετε, τις γωνιές

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ και ε .

(δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας)



β) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα KZΔ και BΓZ είναι όμοια.

10. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2(\lambda - 1)x + 3\lambda - 4 = 0$ και x_1, x_2 οι ρίζες της.

$$\text{Αν } A = \frac{-8}{x_1 + x_2 + 2x_1 \cdot x_2 + 2} \text{ και } B = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2 - 2}$$

α) Να δείξετε ότι: α) $A = \frac{1}{1 - \lambda}$

β) $B = 2\lambda - 3, \forall \lambda \in R - \{2\}$

β) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω αποτελέσματα, να λύσετε την ανίσωση $A < B$.

ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνονται τα σημεία $A(-3, 7)$, $B(1, 9)$, $\Gamma(-6, 8)$ και $\Delta(\kappa - 3, 3\kappa + 8)$. Να βρείτε:

α) Τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$.

β) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$.

γ) Τη γωνιά $\hat{A}$.

δ) Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι παράλληλο με το $\vec{BG}$.

ε) Τις τιμές του κ , ώστε τα διανύσματα $\vec{AD}$ και $\vec{GD}$ να είναι κάθετα.

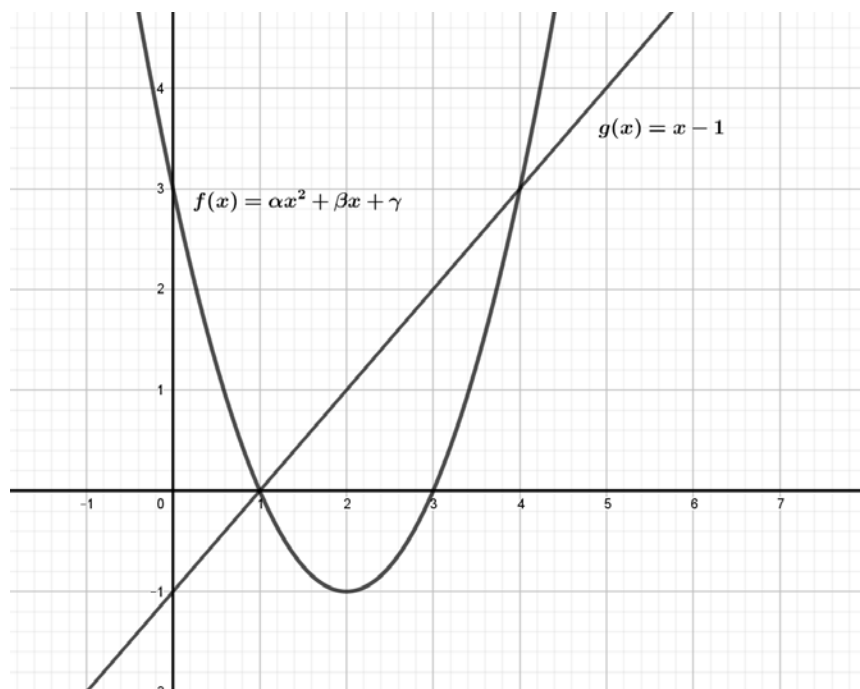
2. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν $2x - y + 5 = 0$ και $x - 2y + 4 = 0$, είναι οι εξισώσεις δύο πλευρών του παραλληλόγραμμου και οι διαγώνιοί του τέμνονται στο σημείο $K(1, 4)$, να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες των κορυφών του παραλληλόγραμμου.

β) Το εμβαδό του παραλληλογράμμου.

γ) Τα μήκη των δύο υψών του παραλληλογράμμου.

3. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και της ευθείας $g(x) = x - 1$



Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης

α. Να βρείτε:

- i) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
 - ii) το πρόσημο του a και της Διακρίνουσας (να δικαιολογήσετε).
 - iii) τις συντεταγμένες της κορυφής και την εξίσωση του Άξονα Συμμετρίας της παραβολής.
- β. Να υπολογίσετε την τιμή:
- i) της παράστασης $A = \frac{2\beta - 3\gamma}{a}$.
 - ii) του $f(f(3))$
- γ. Να βρείτε τις λύσεις των πιο κάτω εξισώσεων:
- i) $f(x) = -1$
 - ii) $f(x) = x - 1$
- δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$
- ε. Να γράψετε την εξίσωση της συνάρτησης που θα προκύψει από τη μετατόπιση της $f(x)$ μια μονάδα πάνω και δυο μονάδες αριστερά.

4. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\eta\mu\theta x - 2\sigma\upsilon\nu\theta + 1 = 0$, με ρίζες x_1, x_2 .

- α) Να αποδείξετε ότι $\frac{(x_1 + x_2)^2 + x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1 + x_2} = \frac{5}{2} \sigma\tau\epsilon\mu\theta - 2 \sigma\phi\theta$
- β) Αν οι ρίζες της πιο πάνω εξίσωσης είναι πραγματικές και ίσες, να βρείτε τη γωνιά θ , με $0 < \theta < 180^\circ$
- γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση με ρίζες $\rho_1 = \frac{1}{x_1}$ και $\rho_2 = \frac{1}{x_2}$ είναι:

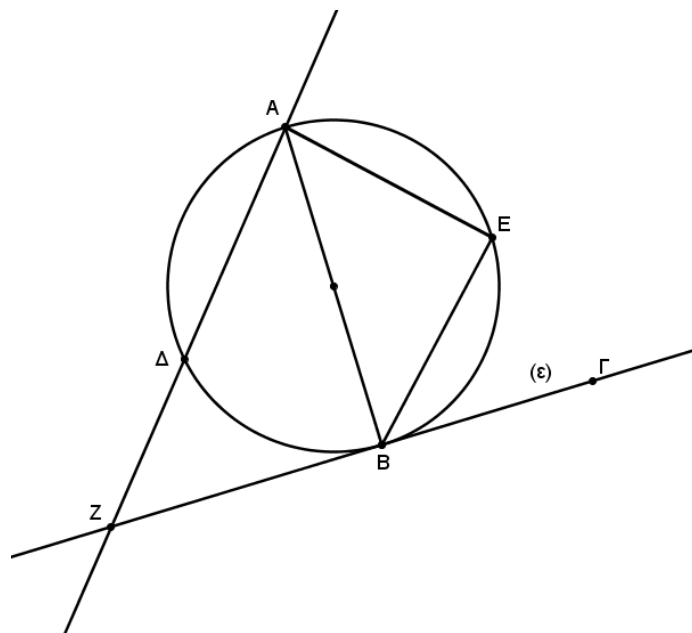
$$(1 - 2\sigma\upsilon\nu\theta)x^2 - 2\eta\mu\theta x + 1 = 0$$

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με ακτίνα R και διάμετρο AB . Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B τέμνει τη προέκταση του AD στο Z . Αν η γωνίες $EB\Gamma$ και BAZ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα BZA και AEB είναι όμοια.

β)
$$\frac{(AZ)(AE)}{4} = R^2$$

γ)
$$(ZA)^2 - (AB)^2 = (Z\Delta)(ZA)$$



ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τα 10 θέματα του Μέρους Α'.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες (5/100).

ΘΕΜΑ 1:

Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $5x^2 + 10x - 2 = 0$ να υπολογίσετε, χωρίς να λύσετε την εξίσωση, την τιμή των παραστάσεων: (α) $x_1 + x_2$ (β) $x_1 \cdot x_2$ (γ) $5x_1^2 x_2 + 5x_1 x_2^2$

ΘΕΜΑ 2:

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $A(0, -4)$ και σχηματίζει γωνία 120° με τον άξονα των x .

ΘΕΜΑ 3:

Σε δείγμα 50 οικογενειών καταγράφηκε ο αριθμός των παιδιών τους, όπως φαίνεται στον πίνακα:

αριθμός παιδιών (x_i)	0	1	2	3	4	5
αριθμός οικογενειών (f_i)	1	4	11	19	8	7

Να βρείτε τη μέση τιμή ($\bar{x}$) και την τυπική απόκλιση (s).

ΘΕΜΑ 4:

(α) Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt[3]{2x-1} = 3$

(β) Να αποδείξετε χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής ότι: $\frac{9}{5-\sqrt{7}} + \frac{9}{5+\sqrt{7}} = 5$

ΘΕΜΑ 5:

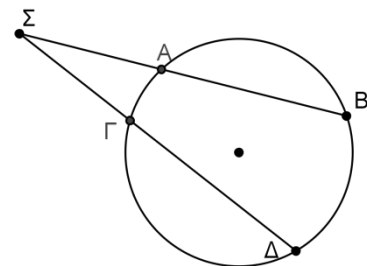
Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Να βρείτε : α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$.

β) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

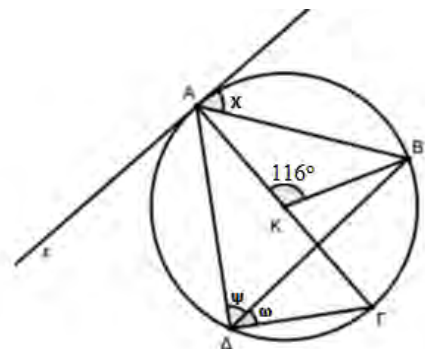
ΘΕΜΑ 6:

Σε κύκλο (Κ, R) οι ημιευθείες ΣΑΒ και ΣΓΔ είναι τέμνουσες του κύκλου. Αν ΣΓ=5cm, ΓΔ=7cm και ΣΑ=4cm, να υπολογίσετε το μήκος της χορδής ΑΒ.



ΘΕΜΑ 7:

Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο Κ και η ευθεία ε είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου και η γωνία $\widehat{AKB}$ είναι 116° . Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών χ , ψ και ω .



ΘΕΜΑ 8:

Να αποδειχθεί η ταυτότητα: $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} + \frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2 \cdot \tau\epsilon\mu x$

ΘΕΜΑ 9:

Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{(x^2+4)(x^2+7x+6)(x-3)^2}{x+4} \leq 0$

ΘΕΜΑ 10:

Δίνεται η παραβολή με τύπο $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & -5 \\ 3 & x+6 \end{vmatrix}$.

(α) Να βρείτε το είδος των ριζών της.

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής.

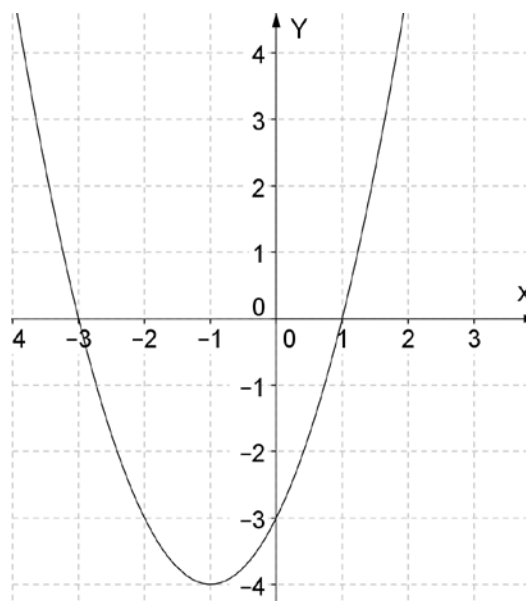
ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τα 5 θέματα του Μέρους Β'.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες (10/100).

ΘΕΜΑ 1:

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

Από το σχήμα να βρείτε:

- (α) Το σύνολο τιμών της $f(x)$
- (β) Το πρόσημο του a και της διακρίνουσας Δ
- (γ) Την τιμή του γ
- (δ) Τον άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής
- (ε) Το πρόσημο των $f(-100)$ και $f(+10)$
- (στ) Τις λύσεις της $f(x) = 0$
- (ζ) Τις τιμές των $f(-2)$ και $f(1)$
- (η) Τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \leq 0$
- (θ) Την τιμή των a και b

**ΘΕΜΑ 2:**

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 4 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$, με ρίζες x_1, x_2 .

α) Να βρείτε τις τιμές του λ , έτσι ώστε η εξίσωση να έχει ρίζες αντίστροφες.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ , έτσι ώστε να ισχύει η σχέση: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geq -2$

ΘΕΜΑ 3:

(α) Δίνεται ότι: $\frac{\eta\mu(180^\circ + \chi) \cdot \epsilon\varphi(90^\circ - \chi) \cdot \eta\mu(-\chi)}{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \chi) \cdot \epsilon\varphi(180^\circ - \chi)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Αν $0^\circ < \chi < 90^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία χ .

(β) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\sigma\upsilon\nu\theta - 1}{\tau\epsilon\mu\theta + \epsilon\varphi\theta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta + 1}{\tau\epsilon\mu\theta - \epsilon\varphi\theta} = 2(1 + \epsilon\varphi\theta)$

ΘΕΜΑ 4:

Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(6,1)$, $B(2,-1)$ και $\Gamma(-4,5)$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.

(β) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου A από τη $B\Gamma$.

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου BM .

(δ) Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι πλευρές AB και $B\Gamma$.

(ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

ΘΕΜΑ 5:

Τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και Δ είναι το μέσο του τόξου $B\Gamma$. Η ευθεία $A\Delta$ τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Να δείξετε ότι:

(α) τα τρίγωνα $AE\Gamma$ και $AD\Gamma$ είναι όμοια

(β) $(\Delta B)^2 = (\Delta A)(\Delta E)$

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Α' Προσανατολισμού

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\sqrt{3} - 2\sqrt{27} + \sqrt{48}$$

2. Αν $2 < x < 4$ και $-4 < y < -1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

(α) $x + y$

(β) $x \cdot y$

3. Δίνονται τα σημεία $A(-2,0)$ και $B(1,4)$. Να υπολογίσετε:

(α) Τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. (μον. 2)

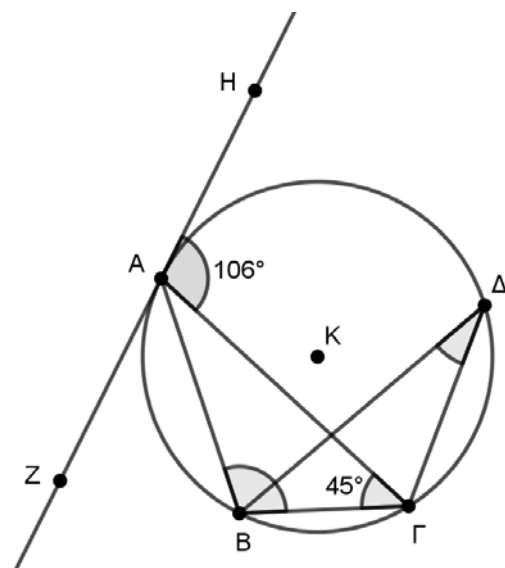
(β) Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. (μον. 2)

(γ) Το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. (μον. 1)

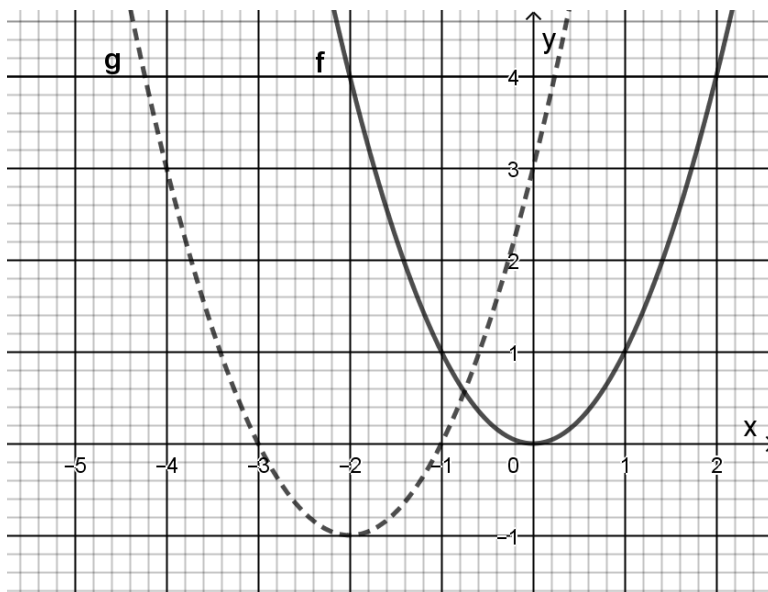
4. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K,R) και A, B, Γ, Δ σημεία του κύκλου. Η ZA είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A , $\widehat{H\hat{A}\Gamma} = 106^\circ$ και $\widehat{B\hat{\Gamma}A} = 45^\circ$.
Να βρείτε το μέτρο των γωνιών: (Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας)

(α) $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$

(β) $\widehat{B\hat{\Delta}\Gamma}$



5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(2\sqrt{3}, 3)$ και σχηματίζει γωνία 150° με τον άξονα των τετμημένων.
6. Στο πιο κάτω σχήμα με συνεχή γραμμή φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$. Η διακεκομμένη γραμμή παρουσιάζει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g που προκύπτει με μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f .



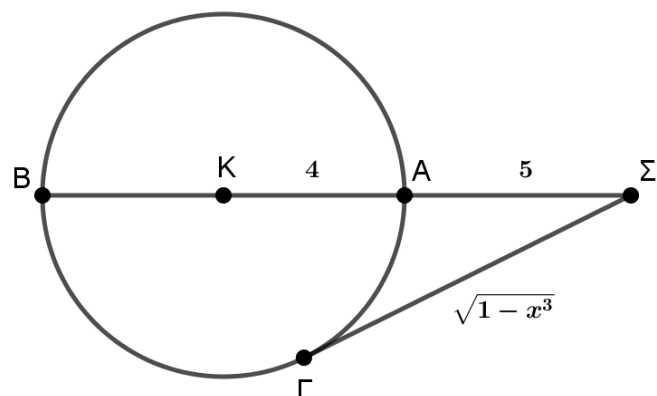
Με βάση το σχήμα, να βρείτε:

- (α) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της συνάρτησης g .
 - (β) Την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g .
 - (γ) Τις συντεταγμένες της κορυφής της συνάρτησης g .
 - (δ) Τις λύσεις της εξίσωσης $g(x) = 0$.
 - (ε) Τον τύπο της συνάρτησης g .
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + \mu x - 5$, $\mu \in \mathbb{R}$.
- (α) Να βρείτε την τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{3}{4}$.
 - (β) Αν $\mu = 3$, να μετατρέψετε σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων το τριώνυμο f .

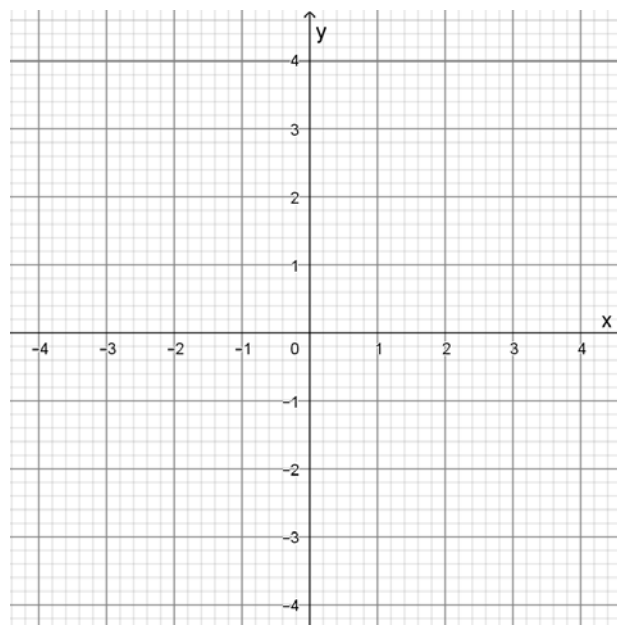
8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και το ύψος του AD .
- (α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AD\Gamma$ και ADB , είναι όμοια. (μον. 3)
- (β) Αν $DB = 4\text{ cm}$ και $D\Gamma = 9\text{ cm}$, να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AD . (μον. 2)
9. Δίνεται γωνία θ για την οποία ισχύει ότι $\sigma\epsilon\mu\theta = \frac{5}{3}$ και $\epsilon\phi\theta < 0$.
- Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
- $$A = 5\eta\mu(\pi - \theta) - 10\sigma\upsilon\nu\theta + 9\epsilon\phi\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$
10. Δίνονται τα σημεία $A(\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu^2\theta)$ και $B(-1, \eta\mu\theta + 1)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.
- (α) Να αποδείξετε ότι η κλίση της ευθείας (ϵ) που διέρχεται από τα σημεία A και B , είναι $\lambda = -\eta\mu\theta$.
- (β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην ευθεία (ϵ) στο σημείο A , έχει εξίσωση $x - (\eta\mu\theta) \cdot y = \eta\mu^3\theta$.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 - 2\lambda x + \lambda + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 1$, έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες.
- (β) Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $(\lambda - 1)x^2 - 2\lambda x + \lambda + 1 = 0$, $\lambda \neq 1$, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 \geq 0$.
2. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) με ακτίνα $R = 4\text{ cm}$, $\Sigma\Gamma$ εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ , $(\Sigma A) = 5\text{ cm}$ και $(\Sigma\Gamma) = \sqrt{1 - x^3}$, $x < 1$.
- (α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Sigma A\Gamma$ και $\Sigma B\Gamma$, είναι όμοια. (μον. 4)
- (β) Να αποδείξετε ότι $(\Sigma A) \cdot (\Sigma B) = (\Sigma\Gamma)^2$ (μον. 3)
- (γ) Να υπολογίσετε την τιμή του x . (μον. 3)



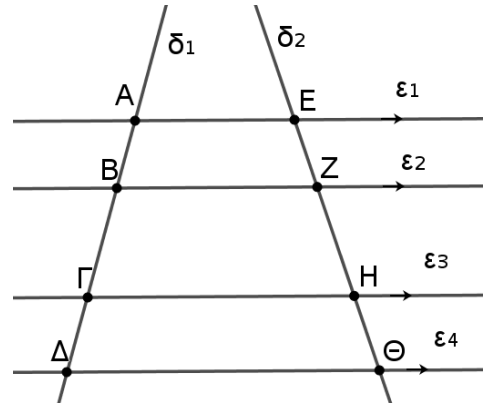
3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:
- (α) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. (μον. 2)
- (β) Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (μον. 3)
- (γ) Την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $(2\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $(\kappa\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ να είναι κάθετα. (μον. 2)
- (δ) Το διάνυσμα που είναι η προβολή του διανύσματος $\vec{\alpha}$ στο διάνυσμα $\vec{\beta}$. (μον. 3)
4. Δίνεται η παράσταση $A = (1 + \varepsilon\varphi\theta) \cdot \eta\mu\theta + (1 + \sigma\varphi\theta) \cdot \sigma\upsilon\upsilon\theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.
- (α) Να αποδείξετε ότι $A = \frac{1}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\upsilon\theta}$. (μον. 7)
- (β) Αν ισχύει $A \cdot \eta\mu\theta = 2$, να αποδείξετε ότι $\hat{\theta} = \frac{\pi}{4}$. (μον. 3)
5. Δίνονται τα σημεία $A(-2, 2)$, $B(-2, 0)$ και $\Gamma(1, 4)$.
- (α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ, ορίζουν τρίγωνο.
- (β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.
- (γ) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς BΓ του τριγώνου.
- (δ) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους AΔ του τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή A.
- (ε) Να υπολογίσετε τη γωνία A του τριγώνου.



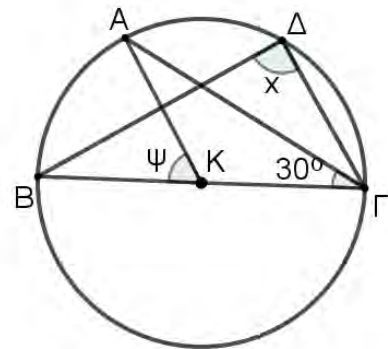
ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τα 10 ερωτήματα. Κάθε ερώτημα βαθμολογείται με 5/100.

1. Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 625 = 0$.

2. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται ότι $AB = 2\text{cm}$,
 $\Gamma\Delta = 3\text{cm}$, $H\Theta = 6\text{cm}$ και $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3 // \varepsilon_4$.
 Να υπολογίσετε το μήκος του EZ .



3. Δίνεται κύκλος με κέντρο K και ακτίνα KB . Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $\hat{x}$ και $\hat{\psi}$ αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.



4. Δίνεται η εξίσωση $5x^2 - 10x + 2 = 0$, με ρίζες x_1, x_2 . Χωρίς να λύσετε την εξίσωση:
 α) να βρείτε το είδος των ριζών της,

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $5x_1 + 5x_2 + 3x_1x_2$.

5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:

α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$,

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\delta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

6. Με τον θεσμό των τετραμήνων στα Λύκεια ο βαθμός σε ένα εξεταζόμενο μάθημα στο τέλος του χρόνου συνυπολογίζεται από τους βαθμούς των δύο τετραμήνων με βαρύτητα 35% στο κάθε τετράμηνο και 30% στην τελική εξέταση. Αν ένας μαθητής είχε στα Μαθηματικά 13 στο Α' τετράμηνο, 12 στο Β' τετράμηνο και στην τελική εξέταση ο βαθμός του ήταν 2, τότε να βρείτε τον τελικό βαθμό του.

7. Αν $3 < x < 4$ και $-5 < \psi < -3$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α) $x + \psi$

β) $x \cdot \psi$

8. α) Να δώσετε τον ορισμό του τριγωνομετρικού κύκλου .

β) Να αποδείξετε ότι: $\epsilon\varphi^2x + \sigma\varphi^2x + 2 = \tau\epsilon\mu^2x \cdot \sigma\tau\epsilon\mu^2x$.

9. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με B(0, 1) και Γ(1, 1) . Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A με $x_A > 0$, που ανήκει στην ευθεία (ε): $\psi = \chi + 1$, τέτοιο ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ να είναι ίσο με $\frac{1}{2}$ τ.μ.

10. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(x^2+1)(x-1)^2}{x^2-2x-15} \geq 0$.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τα 5 ερωτήματα. Κάθε ερώτημα βαθμολογείται με 10/100.

1. Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $x \in \mathcal{R}$, $a \neq 0$ στις πιο κάτω περιπτώσεις:

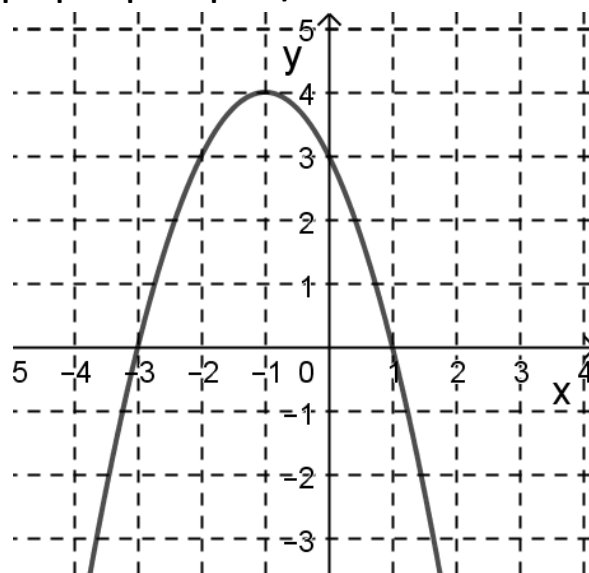
α) να βρείτε το σύνολο τιμών της f ,

β) να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής,

γ) να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$,

δ) να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) \leq 0$,

ε) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\Delta}{a^2}$, όπου Δ η διακρίνουσα .



2. Οι πλευρές AB και ΒΓ του παραλληλογράμμου ABΓΔ δίνονται από τις εξισώσεις $2x -$

$3\psi - 1 = 0$ και $3x - \psi + 2 = 0$, αντίστοιχα. Αν E(1,2) είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου:

α) να δείξετε ότι B(-1, -1) ,

β) να δείξετε ότι Δ(3,5),

γ) να βρείτε την απόσταση της κορυφής Δ από την πλευρά AB ,

δ) να βρείτε το μέτρο (σε μοίρες) της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι πλευρές AB και BΓ,

ε) να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΔZ του παραλληλογράμμου (Z το ίχνος του ύψους στην πλευρά AB) .

3. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu(\pi-\omega) \cdot \sigma\varphi(\frac{3\pi}{2}-\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega-2\pi)}{\varepsilon\varphi(\pi+\omega) \cdot \varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2}+\omega) \cdot \eta\mu(-\omega)}$.

α) Να δείξετε ότι $A = \eta\mu\omega$,

β) Να λύσετε την εξίσωση $(18A - 1)^{\frac{2}{3}} = 4$, $\omega \in (0, \pi)$.

4. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και σημείο P εξωτερικό του κύκλου. Από το σημείο P φέρουμε εφαπτόμενη PA του κύκλου (A το σημείο επαφής) και μια τέμνουσα PBΓ (B , Γ τα σημεία τομής με τον κύκλο).

α) Να αποδείξετε ότι:

i) Τα τρίγωνα PAB και PAΓ είναι όμοια.

ii) $\frac{AB^2}{AG^2} = \frac{PB}{PG}$

β) Αν ΒΔ διάμετρος του κύκλου και Ε το σημείο τομής των ΒΔ και ΑΓ , να δείξετε

ότι $\frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EG}$

5. α) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

i) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας των δυο διανυσμάτων.

ii) Να βρείτε την τιμή του $\mu \in \mathcal{R}$ για την οποία τα διανύσματα $(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $(\mu\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ είναι κάθετα .

β) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Μ σημείο της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MG}$. Αν ισχύει

ότι $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AG} = \vec{\beta}$, να δείξετε ότι:

i) $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}(\vec{\beta} - \vec{\alpha})$

ii) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}(3\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

ΜΕΡΟΣ Α': (Μονάδες 50) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες (5/100).

1. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή (χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής)

α) $A = \frac{6}{5 - \sqrt{3}}$

β) $B = \frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

2. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Να υπολογίσετε:

- α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{a} - \vec{b}$

- β) το μέτρο του διανύσματος $2\vec{b}$

3. Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του κ , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (3\kappa^2 - \kappa - 4)x^2$ να είναι παραβολή και να παρουσιάζει ελάχιστο.

4. Αν $6 < x < 10$ και $-8 < y < -4$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α) $x + 2y$

(1 μον.)

β) $x - y$

(2 μον.)

γ) $\frac{2x+1}{y}$

(2 μον.)

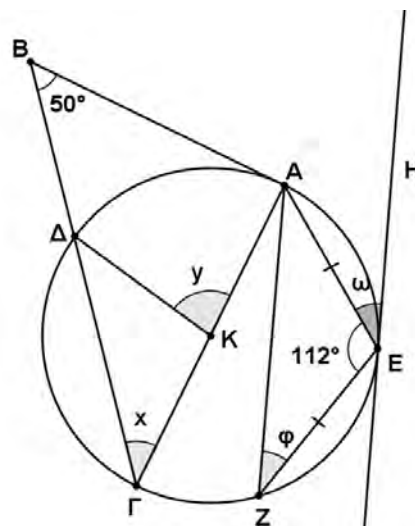
5. Αν $\sin\theta = \frac{12}{13}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{26\eta\mu\theta + 25\sigma\tau\epsilon\mu\theta - 3}{10\sigma\varphi\theta}$$

6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) , με ΑΓ διάμετρο, ΑΒ και ΗΕ εφαπτόμενες, $AE = EZ$, $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 50^\circ$ και $\hat{Z}\hat{E}\hat{A} = 112^\circ$.

Να υπολογίσετε τις γωνίες: x , y , ω και φ ,

δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



7. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των τερμάτων που έχουν πετύχει κατά τη διάρκεια μιας αγωνιστικής οι 20 ομάδες του αγγλικού πρωταθλήματος ποδοσφαίρου.

Αριθμός τερμάτων x_i	0	1	2	3	4	5
Αριθμός ομάδων f_i	2	7	4	4	2	1

- α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή. (2 μον.)
 β) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων, κατά προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων. (2 μον.)
 γ) Σε μια άλλη αγωνιστική η μέση τιμή των τερμάτων ήταν $\bar{x} = 2$ και η τυπική απόκλισή τους $s = 1,05$. Να συγκρίνετε ως προς την ομοιογένεια των τερμάτων ποια είναι η καλύτερη αγωνιστική. (1 μον.)

8. Δίνεται η εξίσωση: $6x^2 - (3\lambda - 2)x + \lambda + 1 = 0$, με λύσεις x_1, x_2

Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες:

- α) η εξίσωση έχει λύσεις αντίστροφες (2 μον.)

- β) ισχύει η ανίσωση: $\frac{3x_1 + 3x_2 - 5x_1x_2}{x_1 + x_2} \leq 1$ (3 μον.)

9. Δίνεται η παράσταση:

$$A = \begin{vmatrix} \eta\mu(\pi - x) & \sigma\upsilon\nu(\pi - x) \\ -\sigma\upsilon\nu(6\pi - x) & \eta\mu(\pi - x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2\eta\mu(\frac{\pi}{2} - x) & 0 \\ \frac{1}{\epsilon\phi(x - \frac{\pi}{2})} & \sigma\upsilon\nu(x - 2\pi) \end{vmatrix}$$

Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης είναι ανεξάρτητη του x .

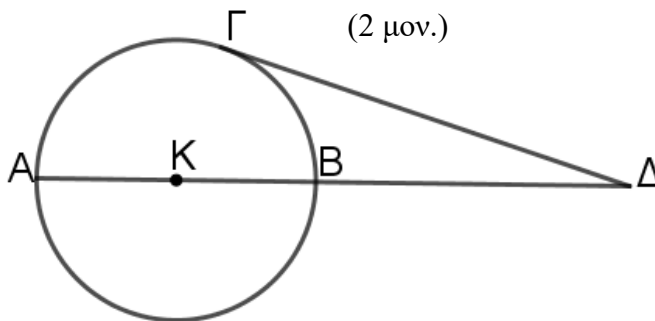
10. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος $\left(K, \frac{x}{2}\right)$, με διάμετρο AB , εφαπτομένη $\Delta\Gamma$ και

τέμνουσα ΔBA . Αν $BD = y$ cm, $AD = 16$ cm και ισχύει η σχέση:

$$x^2 + y^2 = 130, \text{ με } x < y, \text{ να υπολογίσετε:}$$

- α) τις τιμές των x, y (3 μον.)

- β) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ (2 μον.)



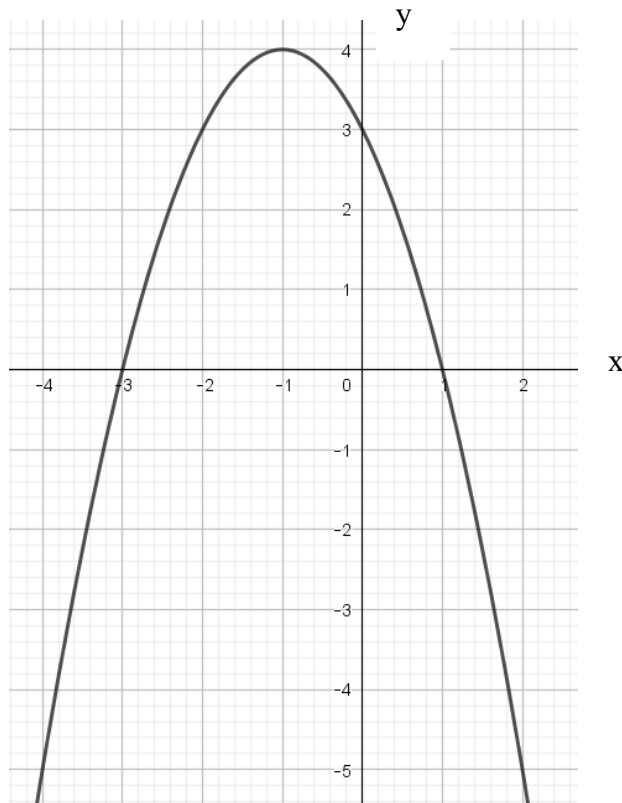
ΜΕΡΟΣ Β': (Μονάδες 50) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες (10/100).

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$.

Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $f(x)$ (1 μον.)
- β) τον άξονα συμμετρίας και την κορυφή της παραβολής (2 μον.)
- γ) το πρόσημο της διακρίνουσας Δ και τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ (2 μον.)
- δ) τις τιμές των α, β και γ (2 μον.)
- ε) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 0$ (1 μον.)
- στ) την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{S^3 - 2P + 3f(-2)}{3S - 1} \quad (2 \text{ μον.})$$



2. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, οι συντεταγμένες των δύο κορυφών του είναι $A(4,6)$ και

$\Gamma(-2,2)$. Η εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ είναι $(\varepsilon_1): 2x + 4y = 4$ και η εξίσωση της διαμέσου AM είναι $(\varepsilon_2): 3x - y = 6$.

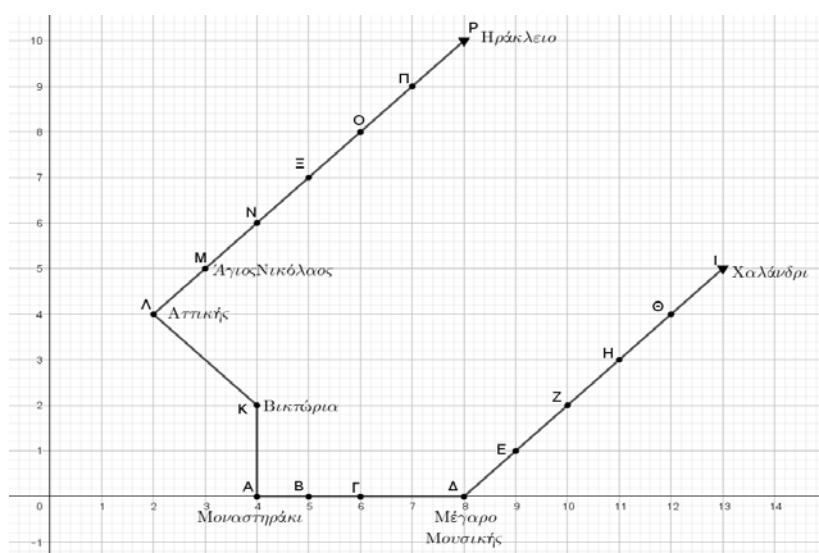
Να βρείτε:

- α) τις συντεταγμένες του σημείου M
- β) τις συντεταγμένες του σημείου B
- γ) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
- δ) το μήκος του ύψους $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$
- ε) το μέτρο της οξείας γωνίας $A\Gamma B$ (κατά προσέγγιση ακεραίου)

3. Στο πιο κάτω σχεδιάγραμμα δίνονται οι διαδρομές του μετρό στην Αθήνα.



Στη συνέχεια δίνεται ένα μέρος του πιο πάνω διαγράμματος πάνω σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.



- Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων: $\overrightarrow{ΛΞ}$, $\overrightarrow{ΘΔ}$ και $\overrightarrow{ΛΚ}$
- Να δείξετε ότι οι διαδρομές Αττικής-Ηρακλείου και Μεγάρου Μουσικής-Χαλανδρίου είναι παράλληλες.
- Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας που σχηματίζεται μεταξύ των διαδρομών Αττικής-Βικτώριας και Αττικής -Αγίου Νικολάου.
- Να υπολογίσετε το διάνυσμα που είναι η προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{ΛΞ}$ στο διάνυσμα $\overrightarrow{ΛΖ}$.

4. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \frac{\text{τεμ}\theta - \text{συν}\theta}{\eta\mu\theta}x - 2\epsilon\phi^2\theta = 0$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ με λύσεις x_1 , x_2 .

α) Να δείξετε ότι: $\frac{\text{τεμ}\theta - \text{συν}\theta}{\eta\mu\theta} = \epsilon\phi\theta$

β) Να δείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση έχει δυο λύσεις πραγματικές και άνισες.

γ) Αν ισχύει $x_1^2 + x_2^2 = 5$, να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας θ .

δ) Αν $\rho_1 = \frac{1}{x_1}$ και $\rho_2 = \frac{1}{x_2}$ να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με λύσεις τους αριθμούς ρ_1 και ρ_2 .

5. Δίνεται κύκλος (O, R) και MN μια χορδή του. Στο M φέρουμε εφαπτομένη (ϵ) του κύκλου και από το N φέρουμε κάθετη NK στην (ϵ).

α) Αν MD διάμετρος του κύκλου, να δείξετε ότι: $(NM)^2 = 2R(KN)$

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (δ) του κύκλου στο μέσο Λ του τόξου MN είναι παράλληλη με την χορδή MN .

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε και τα δέκα (10) θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, που να περνά από το σημείο $A(-2,1)$ και σχηματίζει γωνία 120° με τον άξονα των τετμημένων.
2. Αν $\sin\theta = -\frac{12}{13}$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:
$$A = 26\eta\mu\theta - 12\varepsilon\varphi\theta - 10\sigma\tau\epsilon\mu\theta$$
3. Αν $-2 < x < -1$ και $4 < y < 7$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:
(α) $x + y$
(β) $\frac{1}{xy}$
4. Δίνεται η εξίσωση: $ax^2 - 2(a-4)x + 2a - 3 = 0$, $a \neq 0$. Να υπολογίσετε την τιμή του a , ώστε:
(α) η εξίσωση να έχει λύση τον αριθμό -1
(β) το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης να είναι μεγαλύτερο του τέσσερα.
5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$ και $\vec{\beta} = \vec{i} - 9\vec{j}$.
(α) Να βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα, το οποίο να είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{u} = -3\vec{a} + \vec{\beta}$.
(β) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή του $k \in \mathbb{R}$, ώστε το διάνυσμα $\begin{pmatrix} k \\ 4 \end{pmatrix}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{u}$.

6. Στο πιο κάτω σχήμα η ΔH είναι η εφαπτομένη του κύκλου (K, R) στο σημείο του Δ , η $ΑΓ$ είναι διάμετρος του κύκλου, η γωνία $\hat{\Delta A \Gamma} = 54^\circ$ και τα τόξα $\widehat{\Delta Z} = \widehat{Z \Gamma}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\varphi}$, $\hat{\omega}$, $\hat{\delta}$ και $\hat{\theta}$.

7. Οι θερμοκρασίες σε είκοσι πόλεις της Ευρώπης μια μέρα της άνοιξης φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα. Να βρείτε:
- (α) τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών.
- (β) τον συντελεστή μεταβολής.

Θερμοκρασία	14	15	16	18	19	20
Αρ. Πόλεων	1	5	3	8	1	2

8. Δίνεται κύκλος (K, R) . Από σημείο M εκτός του κύκλου φέρουμε δύο τέμνουσες $ΜΑΒ$ και $ΜΓΔ$. Αν $AB = 2\text{cm}$, $ΜΓ = \sqrt{20 - 5\sqrt{7}}\text{ cm}$ και $ΜΔ = \sqrt{20 + 5\sqrt{7}}\text{ cm}$, να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AM .

9. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(x^2 + x - 6)(x^2 + 4)(x^2 - 9)}{(2 - x)(x - 1)} \geq 0$

10. Δίνεται η εξίσωση $\tau\epsilon\mu\theta \cdot x^2 + 2(1 + \epsilon\varphi\theta) \cdot x + 2\eta\mu\theta + \tau\epsilon\mu\theta = 0$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

(α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας θ , ώστε η εξίσωση να έχει ρίζες αντίθετες.

(β) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και ίσες.

ΜΕΡΟΣ Β΄

Να λύσετε και τα πέντε (5) θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$.

Από το σχήμα να βρείτε:

(α) το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

(β) το πρόσημο του α και της διακρίνουσας.

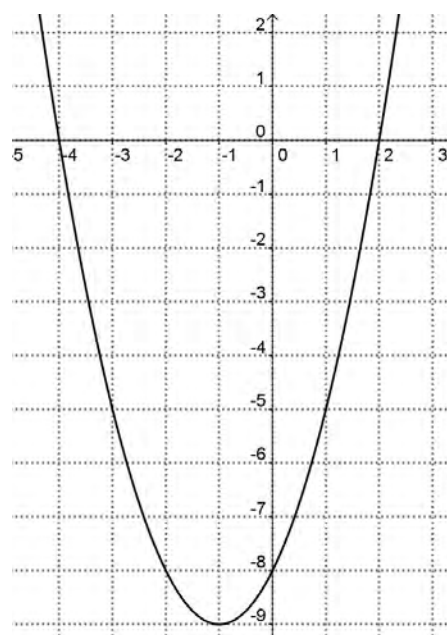
(γ) την αριθμητική τιμή του γ .

(δ) τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

(ε) τις συντεταγμένες της κορυφής και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας.

(στ) την αριθμητική τιμή της παράστασης $\Sigma = -\frac{2\gamma}{3\alpha} + \frac{4\beta}{3\alpha}$

.



2. Δίνεται κύκλος (K, R) . Από σημείο Σ εκτός κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη ΣA και την τέμνουσα $\Sigma B\Gamma$ του κύκλου (A, B και Γ σημεία του κύκλου). Αν M είναι το μέσο του μικρού τόξου $B\Gamma$ και Δ το σημείο τομής της $B\Gamma$ με την AM , να αποδείξετε ότι:

(α) $(\Sigma A)^2 = (\Sigma B)(\Sigma \Gamma)$

(β) $(\Delta A) \cdot (M\Gamma) = (A\Gamma) \cdot (\Delta B)$

3. (α) Να υπολογίσετε τη γωνία x , αν $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ και

$$\frac{\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(x-\pi) \cdot \eta\mu(\pi+x) + \varepsilon\varphi(-x) \cdot \varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu(-x) \cdot \varepsilon\varphi\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(β) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{1}{\sigma\tau\epsilon\mu\theta-1} - \frac{\varepsilon\varphi\theta}{\tau\epsilon\mu\theta+\varepsilon\varphi\theta} = 2\left(\tau\epsilon\mu^2\theta-1\right)$$

4. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Οι συντεταγμένες της κορυφής Α είναι (1,2) και η πλευρά ΓΔ έχει εξίσωση $2x - y + 5 = 0$.

(α) Να βρείτε:

(i) τις εξισώσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΔ του τετραγώνου.

(ii) τις συντεταγμένες της κορυφής Δ και Β, αν η κορυφή Β βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

(β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου.

(γ) Αν η κορυφή Β έχει συντεταγμένες Β(2,4) και Κ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραγώνου, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΔ.

5. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Κ και Λ τέτοια ώστε $\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AD}$ και $\vec{AL} = \frac{1}{4}\vec{AG}$.

(α) Αν $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AD} = \vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ, Β είναι συνευθειακά.

(β) Αν οι τρεις κορυφές του παραλληλογράμμου είναι Α(2,1), Β(3,4) και Γ(4,2),

(i) να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.

(ii) να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{BAG}$.

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Προσανατολισμού

ΤΑΞΗ: Α΄

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

A1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

A2. Αν $x > 0$, να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή. (Η απάντηση να δοθεί στην απλούστερη μορφή.)

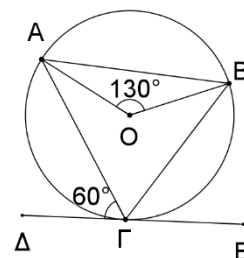
(α) $\frac{x}{\sqrt{x}}$ (2 μονάδες)

(β) $\frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} + 2}$ (3 μονάδες)

A3. Στο διπλανό σχήμα, η ευθεία ΔΕ εφάπτεται του κύκλου (Ο, R) στο σημείο Γ και $\widehat{A\Gamma\Delta} = 60^\circ$,

$$\widehat{A\hat{O}B} = 130^\circ.$$

Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ. (Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)



A4. Οι βαθμοί ενός μαθητή στα διαγωνίσματα

Μαθηματικών ήταν:

8, 10, 4, 16, 12.

(α) Να βρείτε την τυπική απόκλιση της βαθμολογίας του μαθητή.

(β) Να βρείτε τον συντελεστή μεταβλητότητας της βαθμολογίας του μαθητή και να εξετάσετε αν οι βαθμοί του μαθητή αποτελούν ομοιογενές δείγμα.

A5. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{x(x-3)}{(x-1)(x+1)^2} \geq 0$

A6. Να βρείτε το μέτρο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1): x+3y-12=0, (\varepsilon_2): \begin{vmatrix} x & 4 \\ y & 2 \end{vmatrix} = 5$$

A7. Η εξίσωση $x^2-(5\lambda-6\mu)x-1=0$ έχει αντίθετες ρίζες, ενώ η εξίσωση $\lambda x^2+13x-\lambda\mu+\lambda^2=0$ έχει αντίστροφες ρίζες με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$.
Να υπολογίσετε τις τιμές των λ και μ .

A8. Αν $-2 < x < -1$ και $3 < y < 6$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις :

(α) $2y-x$

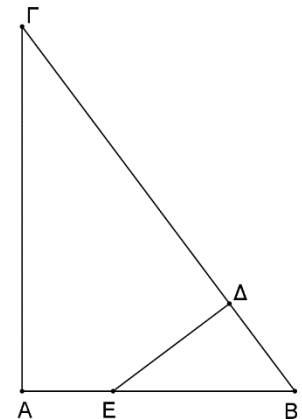
(2 μονάδες)

(β) x^2y

(3 μονάδες)

A9. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\sigma\tau\epsilon\mu\theta-\eta\mu\theta}{\tau\epsilon\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta} = \sigma\phi^3\theta$

A10. Στο διπλανό σχήμα, δίνονται: $\hat{A}=90^\circ$, $\Delta E \perp B\Gamma$, $AE=2\text{cm}$, $EB=4\text{cm}$ και $A\Gamma=8\text{cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $E\Delta B$.

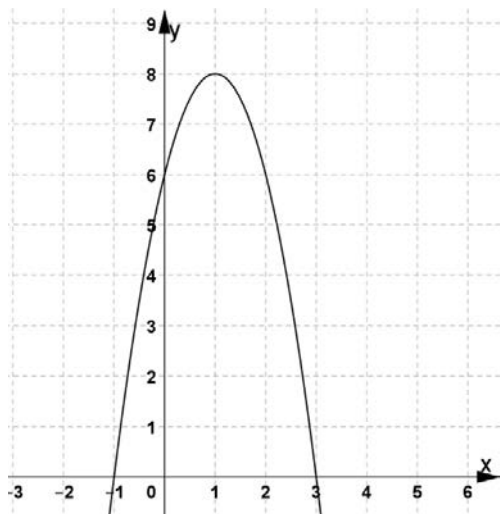


ΜΕΡΟΣ Β΄

Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

B1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ($a \neq 0$).



(α) Να βρείτε:

(i) το πρόσημο του a και της διακρίνουσας Δ της εξίσωσης $f(x) = 0$

(1 μονάδα)

(ii) την τιμή του γ

(1 μονάδα)

(iii) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

(1 μονάδα)

(iv) τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$

(1 μονάδα)

(v) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 6$

(2 μονάδες)

(vi) την τιμή της παράστασης $\frac{\gamma - 2\beta}{a}$.

(2 μονάδες)

(β) Να περιγράψετε πώς, με κατάλληλες μετατοπίσεις, η γραφική παράσταση της παραβολής $g(x) = -2x^2$ θα συμπίψει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ($a = -2$).

(2 μονάδες)

B2. Τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ σχηματίζουν γωνία θ για την οποία ισχύει $0^\circ < \theta < 90^\circ$. Τα διανύσματα $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

Να αποδείξετε ότι:

(α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2}$

(4 μονάδες)

(β) $\theta = 60^\circ$

(3 μονάδες)

(γ) Τα διανύσματα $\vec{u} + \vec{v}$ και $3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ είναι παράλληλα.

(3 μονάδες)

- B3.** Τα σημεία $B(10, 3)$, $\Gamma(5, 4)$, $\Delta(2, 2)$ είναι κορυφές τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB , $\Gamma\Delta$ και $7x-4y-19=0$ είναι η εξίσωση μίας διαγωνίου του.
 Να βρείτε:
 (α) το εμβαδόν του τριγώνου $B\Gamma\Delta$ (3 μονάδες)
 (β) το μήκος του ύψους του τραπεζίου (3 μονάδες)
 (γ) τις συντεταγμένες της κορυφής A (4 μονάδες)
- B4.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (1 + \eta\mu\alpha)x + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 0$ ($\eta\mu\alpha > 0$, $\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0$).
 (α) Να βρείτε την τιμή του $\eta\mu\alpha$ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και ίσες. (3 μονάδες)
 (β) Αν η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και ίσες και επιπλέον $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{8\tau\epsilon\mu\alpha + 16\epsilon\varphi(\pi - \alpha) + 1}{10\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$$
 (4 μονάδες)
 (γ) Αν $A = -\eta\mu\omega$ και $0 < \omega < 2\pi$, να βρείτε τη γωνία ω . (3 μονάδες)
- B5.** Δίνεται κύκλος (K, R) με διάμετρο AB και $A\Gamma$ τυχαία χορδή του. Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία B και Γ τέμνονται στο T .
 Να αποδείξετε ότι:
 (α) $B\hat{K}T = T\hat{K}\Gamma$
 (β) $(KT)(A\Gamma) = 2R^2$

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (5-ωρο)**

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

2. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:
(χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής)

α) $A = \frac{5}{\sqrt{3}}$

β) $B = \frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

3. Αν $\eta\mu\theta = -\frac{3}{5}$ και $270^\circ < \theta < 360^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{6\sigma\tau\epsilon\mu\theta + 10\sigma\upsilon\nu\theta + 4\tau\epsilon\mu\theta}{\eta\mu\theta}.$$

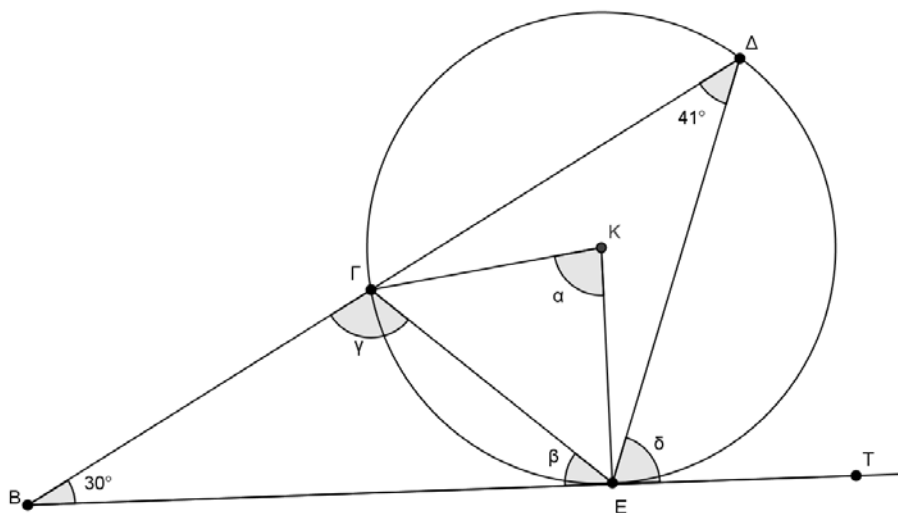
4. Ένας μαθητής πήρε σε 5 διαφορετικά μαθήματα για το πρώτο τετράμηνο τους βαθμούς 17, 18, 19, 10 και 16.

Να υπολογίσετε τον σταθμισμένο μέσο, αν τα μαθήματα έχουν βαρύτητα ανάλογη με τις περιόδους διδασκαλίας του κάθε μαθήματος που είναι αντίστοιχα 2, 3, 1, 4 και 5.

5. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x^2 - y = 6 \end{cases}$$

6. Να λύσετε την ανίσωση:
$$\frac{(x-1)(x^2+2x+3)(x^2-1)}{2x-1} \leq 0$$

7. Δίνεται κύκλος (K, R) . Η ευθεία BT εφάπτεται του κύκλου στο σημείο E . Να βρείτε τις γωνίες α , β , γ και δ . Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



8. α) Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας η οποία περνά από το σημείο (4, -5) και είναι κάθετη με την ευθεία $3x - 2y + 10 = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{\sigma \nu \nu \omega}{1 + \eta \mu \omega} - \frac{\sigma \phi \omega}{1 - \sigma \tau \epsilon \mu \omega} = 2 \tau \epsilon \mu \omega$

9. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x, y για τους οποίους ισχύει $2 < x < 5$ και $-3 < y < -1$.
Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

$$1. \quad 3x + \psi$$

11. $x \cdot \psi$

III. $\frac{2x}{\psi}$

10. Να υπολογίσετε τις τιμές της παραμέτρου λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) έτσι ώστε η εξίσωση

$$x^2 + (2\lambda + 1)x + \lambda^2 - 3 = 0 \text{ να έχει:}$$

α) ρίζες αντίστροφες

β) ρίζες αντίθετες

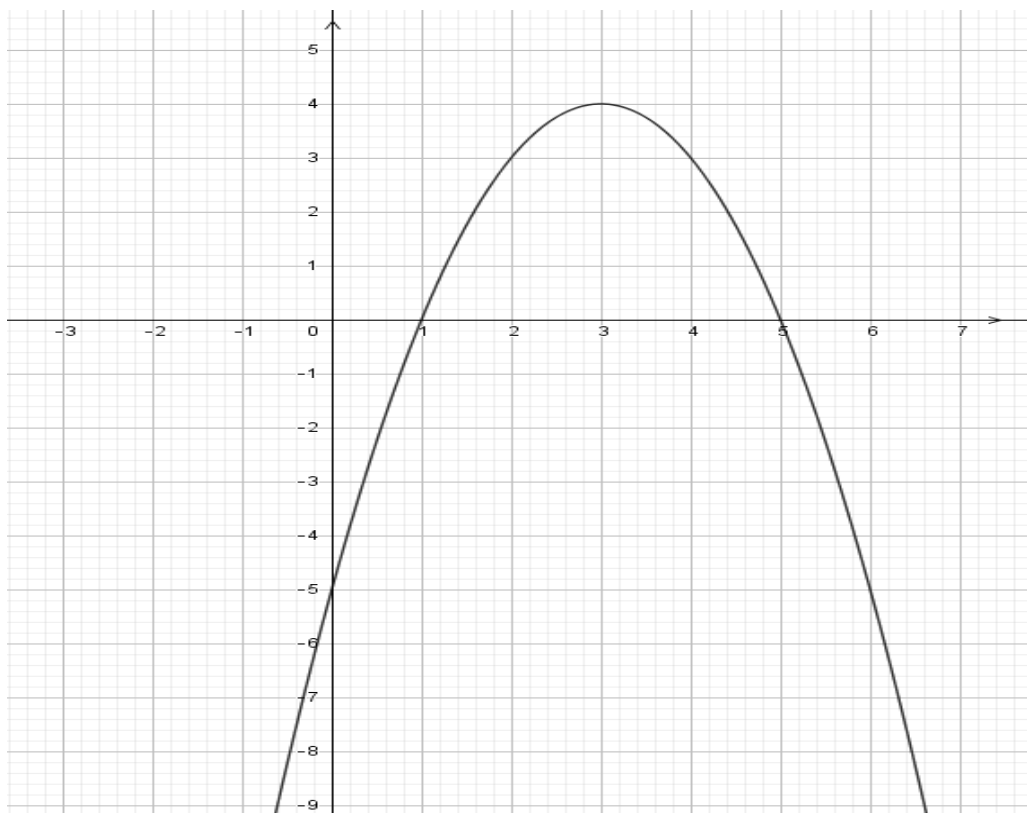
γ) ρίζα τον αριθμό -1

δ) ρίζες πραγματικές

ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$.



Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού της $f(x)$
- β) το σύνολο τιμών της $f(x)$
- γ) το πρόσημο του a
- δ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας
- ε) τις λύσεις x_1 και x_2 της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$
- στ) τις τιμές των a , b , γ
- ζ) την τιμή της παράστασης $K = f(2) + f(3)$
- η) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 0$

2. Ο πίνακας παρουσιάζει των αριθμό των παιδιών που έχουν οι οικογένειες ενός χωριού της Πάφου.

Αριθμός Παιδιών χ_i	0	1	2	3	4	5
Οικογένειες f_i	1	7	11	4	1	1

α) Να υπολογίσετε :

- i) Τη μέση τιμή
- ii) Το εύρος τιμών
- iii) Την τυπική απόκλιση
- ν) Τον συντελεστή μεταβολής

β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές (Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας)

3. Σε τρίγωνο ABΓ οι συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΒΓ είναι (2,-1) και οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι (-3,3). Δίνεται η εξίσωση της πλευράς ΑΒ: $x + y = 2$ και η εξίσωση της διαμέσου ΑΜ: $x + 2y = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε:

i) το σημείο τομής της ευθείας ΑΒ με τον άξονα $x'x$

ii) την τιμή του μ , $\mu \in \mathbb{R}$

β) i) Να δείξετε ότι το σημείο Α έχει συντεταγμένες Α(4,-2).

ii) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΑΔ.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

4. Δίνεται η εξίσωση: $4x^2 - 4(1 + \varepsilon\phi\theta) \cdot x + \tau\epsilon\mu^2\theta + 2 = 0$, με ρίζες x_1, x_2 .

α) Αν S το άθροισμα και P το γινόμενο των ριζών της πιο πάνω εξίσωσης,

να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις χωρίς να τη λύσετε :

$$A = (S-1) \cdot \varepsilon\phi(90^\circ - \theta) \cdot \eta\mu^2(180^\circ + \theta) \text{ και}$$

$$B = (4P-2) \cdot \sigma\upsilon\nu(360^\circ - \theta) \cdot \eta\mu(90^\circ + \theta)$$

β) Να δείξετε ότι: $B - A = \sigma\upsilon\nu^2\theta$

γ) Να βρείτε τις τιμές του θ , $45^\circ \leq \theta < 90^\circ$, αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.

5. Δίνεται κύκλος (O, R) και AB μια διάμετρος του.

Στην προέκταση της AB , προς το μέρος του B ,

παίρνουμε σημείο Γ . Φέρνουμε το εφαπτόμενο

τμήμα $\Gamma\Delta$ και ευθεία ε , κάθετη στην $A\Gamma$, στο

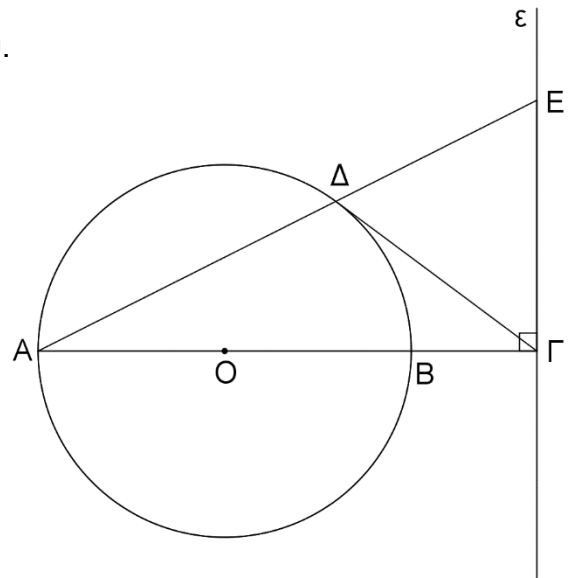
σημείο Γ . Η προέκταση της χορδής $A\Delta$ τέμνει

την ευθεία ε στο E . Να δείξετε ότι:

α) $(A\Delta) \cdot (AE) = (AB) \cdot (A\Gamma)$

β) $(\Gamma\Delta)^2 = (A\Gamma) \cdot (\Gamma B)$

γ) $(A\Gamma)^2 - (A\Delta) \cdot (AE) = (\Gamma\Delta)^2$



ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

(α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$

(β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$

A2. Ένας μαθητής πήρε στα δύο διαγωνίσματα Μαθηματικών βαθμούς 12 και 13 αντίστοιχα και βαθμό 18 στην εργασία που του δόθηκε από τον καθηγητή. Αν το κάθε διαγώνισμα έχει βαρύτητα 40% και η εργασία 20% στη συνολική βαθμολογία, να υπολογίσετε τον μέσο όρο της βαθμολογίας του μαθητή.

A3. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{5}{\sqrt{5}} + (\sqrt{5} + 1)^2 = 6 + 3\sqrt{5}$$

A4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $B(-2, 3)$ και σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα των x γωνία 45° .

A5. Αν $\eta\mu x = -\frac{4}{5}$, $180^\circ < x < 270^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 5\sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) - 10\eta\mu(270^\circ + x)$$

A6. Θέλουμε να δημιουργήσουμε έναν χώρο στάθμευσης σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, το οποίο να έχει μήκος x μέτρα και πλάτος y μέτρα. Λόγω του περιορισμένου χώρου για τις διαστάσεις πρέπει να ισχύουν $12 < x < 20$ και $13 < y < 22$.

Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται:

(α) η περίμετρος

(β) το εμβαδόν του χώρου στάθμευσης.

A7. Δίνεται η παραβολή με τύπο $f(x) = \begin{vmatrix} -x & 5 \\ 5 & x-4 \end{vmatrix}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής της και να αναφέρετε αν παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

A8. Ο καθηγητής της τεχνολογίας ανέθεσε στους μαθητές του να κάνουν μία ορθογώνια τριγωνική κατασκευή με κάθετες πλευρές x, y και υποτείνουσα 13 cm, που θα χρησιμοποιηθεί ως βάση ενός πρίσματος. Δεδομένου ότι η περίμετρος της βάσης είναι 30 cm, να υπολογίσετε τα μήκη των κάθετων πλευρών.

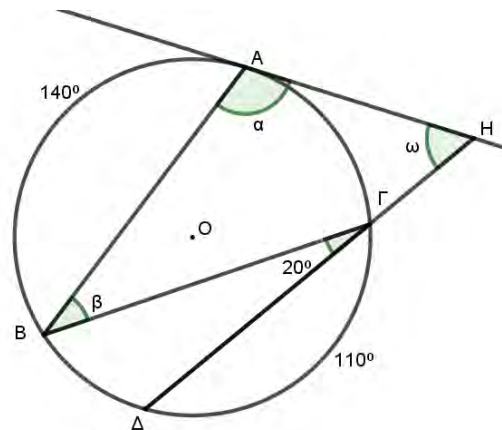
A9. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$ με ρίζες x_1, x_2 .

(α) Να δείξετε ότι έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

(β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει ρίζες που ικανοποιούν τη σχέση

$$x_1(x_1 + 2x_2) + x_2^2(x_1^2 + 1) = 1$$

A10. Στο πιο κάτω σχήμα η ΑΗ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Αν $\widehat{AB} = 140^\circ$, $\widehat{\Gamma\Delta} = 110^\circ$ και $\widehat{B\Gamma\Delta} = 20^\circ$, να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών α, β, ω .



ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

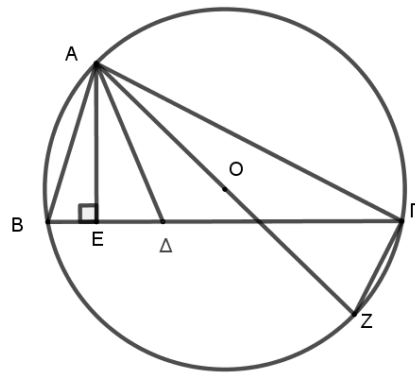
B1. (α) Να αποδείξετε ότι σε κάθε κύκλο οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες μεταξύ τους. (μον 4)

(β) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O και διάμετρο AZ . Αν η AD είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$ και AE το ύψος του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$:

(i) Να δείξετε ότι $(AB)(A\Gamma) = (AE)(AZ)$ (μον 2)

(ii) Να δείξετε ότι η AD διχοτομεί τη γωνία $\hat{E}\hat{A}\hat{O}$ (μον 2)

(iii) Αν το $AB = 3,6 \text{ cm}$, το $\Gamma Z = 2,5 \text{ cm}$ και το $EB = 1 \text{ cm}$ να δείξετε ότι το $AZ = 9 \text{ cm}$ (μον 2)



B2. Δίνονται τα σημεία $A(2,-1)$, $B(6,7)$, $\Gamma(1,2)$, $\Delta(2,4)$.

(α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι παράλληλα.

(β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$.

(γ) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$.

(δ) Αν M είναι το μέσο του $\vec{AB}$ και $Z(6,2)$, να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{MZ}$ είναι κάθετα.

(ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$.

B3. Δίνεται η παραβολή $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$, $x \in [-1, +\infty)$.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες. (μον 1)

(β) Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες x και y . (μον 1,5)

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής της και να την χαρακτηρίσετε (μέγιστο ή ελάχιστο). (μον 1,5)

(δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της. (μον 1)

(ε) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) \leq -6$. (μον 1,5)

(στ) Να γράψετε την παραβολή στη μορφή $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda$, όπου $a, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. (μον 1,5)

(ζ) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x)$ στο πεδίο ορισμού της, στην οποία να φαίνονται τα σημεία τομής της με τους άξονες και η κορυφή της. (μον 2)

B4. Οι συντεταγμένες των κορυφών ενός τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ είναι $A(0, 3)$, $B(0, 0)$ και $\Gamma(-3, \kappa)$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$.
Η πλευρά $A\Gamma$ έχει εξίσωση $2x - 3y + 9 = 0$.

(α) (i) Να δείξετε ότι $\kappa = 1$. (μον 1)

(ii) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους $B\Delta$ του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$. (μον 2)

(iii) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους $B\Delta$. (μον 2)

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου E , το οποίο ανήκει στη $B\Delta$ και ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος AB . (μον 5)

B5. (α) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\sin(2\pi + \theta) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sigma\tau\epsilon\mu(-\theta)}$

i. Να αποδείξετε ότι $A = -\sin\theta$

ii. Να υπολογίσετε τη γωνία θ , αν $\pi < \theta < 2\pi$ και $A = -\frac{1}{2}$.

(β) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $1 - \frac{\sin^2\theta}{1 + \eta\mu\theta} = \epsilon\phi\theta \cdot \sin\theta$

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΤΑΞΗ:

Α'

ΜΕΡΟΣ Α': Περιλαμβάνει 10 θέματα.**Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που περνά από το σημείο (0,4) και είναι κάθετη στην ευθεία:

$$y = \frac{1}{7}x + 3.$$

2. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 3x - 10 \leq 0$.

3. Δίνονται οι αριθμοί: $A = \sqrt[3]{54} \div \sqrt[3]{2}$ και $B = \sqrt{5 + \sqrt{21}} \cdot \sqrt{5 - \sqrt{21}}$.

(α) Να βρείτε τις τιμές των A και B, **χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής.**

(β) Αν $A = 3$ και $B = 2$, να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες A και B.

4. Δίνονται τα σημεία A(2,2), B(5,2), Γ(10,7).

Να βρείτε: (α) το εσωτερικό γινόμενο: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BG}$

(β) τη γωνιά των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BG}$.

5. Αν $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$ να υπολογίσετε την παράσταση:

$$K = 20\eta\mu(90 - \theta) + 4\epsilon\phi\theta + 8\tau\epsilon\mu\theta.$$

6. Να βρείτε ποιες από τις πιο κάτω προτάσεις είναι **Σωστές** και ποιες **Λάθος**:

Η απάντηση να δοθεί στις κόλλες απαντήσεων.

(α) Ο μαθητής A με βαθμούς διαγωνισμάτων 12, 13, 15 και 16 έχει καλύτερο μέσο όρο από το μαθητή B με μέσο όρο 13,5.

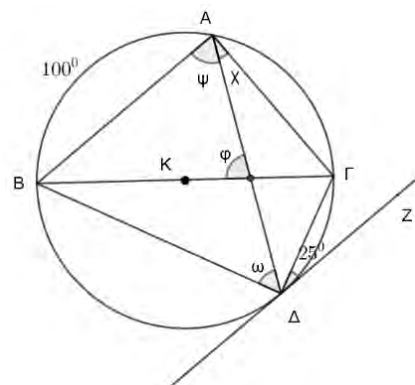
(β) Η επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων 12,15,16,12 είναι το 16.

(γ) Δύο τμήματα A και B έχουν την ίδια μέση τιμή $\bar{X}_A = \bar{X}_B = 15$ σε ένα διαγώνισμα. Αν η τυπική τους απόκλιση είναι $S_A = 1,5$ και $S_B = 5$ αντίστοιχα, τότε το τμήμα B έχει καλύτερη ομοιογένεια από το A.

(δ) Αν ένας μαθητής πάρει βαθμούς διαγωνισμάτων σε κάποιο μάθημα 12, 15, 16 με βαρύτητα 20%, 30%, 50% αντίστοιχα, τότε ο μέσος όρος των διαγωνισμάτων του είναι μικρότερος από 15.

7. Δίνεται κύκλος με κέντρο K , διάμετρο $B\Gamma$ και ΔZ εφαπτομένη στο σημείο Δ του κύκλου. Αν $\widehat{\Gamma\Delta Z} = 25^\circ$ και $\widehat{AB} = 100^\circ$ να υπολογίσετε τις γωνίες χ , ψ , ω και φ .

Να μεταφέρετε το σχήμα στις κόλλες απαντήσεων και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

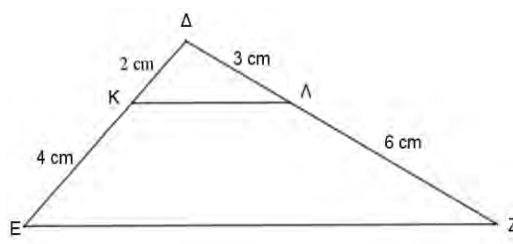


8. Αν $-3 < x < -2$, και $4 < y < 6$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις: $x - y$ και $\frac{x+y}{3x}$.

9. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται: $\Delta K = 2 \text{ cm}$, $\Delta \Lambda = 3 \text{ cm}$, $KE = 4 \text{ cm}$ και $\Lambda Z = 6 \text{ cm}$

(α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{K\Lambda}{EZ}$.

(β) Εάν $K\Lambda = (x - 2)^{\frac{2}{3}} \text{ cm}$ και $EZ = 12 \text{ cm}$ να βρείτε την τιμή του x .



Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

10. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda - 2) \cdot x + \lambda - 5 = 0$.

(α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β) Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geq -2$

ΜΕΡΟΣ Β': Περιλαμβάνει 5 θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma, a, b, \gamma \in \mathbb{R} \text{ με } a \neq 0.$$

Η τετμημένη του σημείου A είναι $2 - \sqrt{3}$.

Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

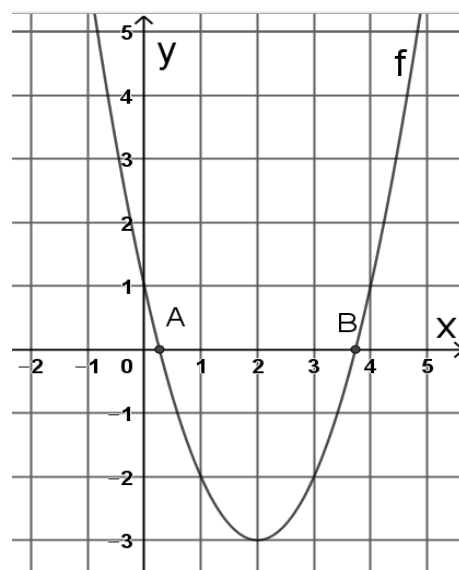
(α) Το πρόσημο του a και το πρόσημο της Διακρίνουσας

(β) Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

(γ) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και την κορυφή της παραβολής.

(δ) Τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ και τις τιμές των a, b και γ .

(ε) Το πρόσημο της αριθμητικής παράστασης: $f(3) \cdot f(2018)$



2. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με εξίσωση της πλευράς $AB: x + 4y = 6$ και εξίσωση της διαγωνίου $B\Delta: x - 6y = 6$. Αν το σημείο $(2,1)$ είναι μία από τις κορυφές του παραλληλογράμμου, να βρείτε:

(α) Αν $H(3,\kappa)$ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου, να δείξετε ότι $\kappa = -\frac{1}{2}$ (μον. 1)

(β) Τις συντεταγμένες των κορυφών του παραλληλογράμμου. (μον. 4)

(γ) Την απόσταση μεταξύ των ευθειών AB και $\Gamma\Delta$. (μον. 2,5)

(δ) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου. (μον. 2,5)

3. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\text{συν}^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \text{συν}(2\pi - x) - \text{συν}(x - \pi) \cdot \frac{2}{\text{τεμ}(-x)}}{\eta\mu(\pi - x) \cdot \sigma\phi(5\pi + x)} \quad \text{και}$$

$$B = \frac{(1 + \epsilon\phi\chi)^2 - \text{τεμ}^2\chi}{\epsilon\phi\chi + \sigma\phi\chi}$$

(α) Να δείξετε ότι: $A = \text{τεμ}\chi$ και $B = 2\eta\mu^2\chi$. (μον. 7)

(β) Αν $B = 1$ και $0 < x < \pi$, να βρείτε τις τιμές του x . (μον. 3)

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma} = \vec{i} - 3\vec{j}$.

(α) Να βρείτε μοναδιαίο διάνυσμα αντίρροπο προς το $\vec{a} + \vec{\beta}$.

(β) Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u} = 3\vec{a} - 5\vec{\beta}$ είναι παράλληλο με το $\vec{\gamma}$.

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες της προβολής του $\vec{\gamma}$ πάνω στο $\vec{a}$.

(δ) Αν $\vec{v} = x\vec{a} + 2\vec{\beta}$, να βρείτε την τιμή του x ώστε τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ να είναι κάθετα.

5. Δίνεται κύκλος (K, R) με διάμετρο $B\Gamma$. Σχηματίζουμε εγγεγραμμένο τρίγωνο $AB\Gamma$ έτσι ώστε $\widehat{AB} > \widehat{A\Gamma}$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο A τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ σε σημείο Δ . Φέρουμε ευθεία (ϵ) κάθετη στην $B\Gamma$ στο Δ , που τέμνει την ευθεία AB στο E .

Να δείξετε ότι:

(α) $(B\Gamma)(B\Delta) = (AB)(BE)$ (μον. 4)

(β) $A\Delta = E\Delta$ (μον. 3)

(γ) $(\Delta B)(\Delta \Gamma) = (E\Delta)^2$ (μον. 3)

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**ΜΕΡΟΣ Α΄: (50 μονάδες)**

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Αν η εξίσωση $2x^2 - 8x + 2 = 0$ έχει ρίζες x_1, x_2 , να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων (χωρίς να λύσετε την εξίσωση):

(α) $8x_1 + 8x_2$

(β) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

2. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή (χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής):

(α) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

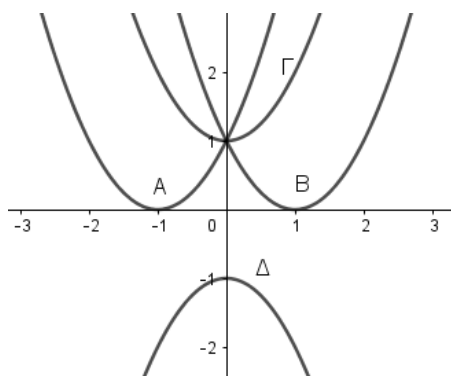
(β) $\frac{3}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}$

3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

(β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

4. Να σημειώσετε δίπλα από κάθε τύπο την παραβολή που αντιστοιχεί διαλέγοντας το σωστό γράμμα (Α, Β, Γ, Δ).



$y = x^2 + 1$	
$y = -x^2 - 1$	
$y = (x + 1)^2$	
$y = (x - 1)^2$	

5. Αν $2 < x < 6$ και $-4 < y < -3$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

(α) $2x + 3y$

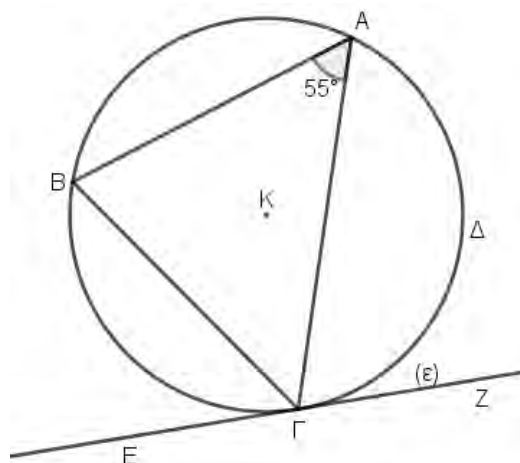
(β) $x - y$

(γ) $4xy$

6. Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται οι ώρες που σερφάρουν στο διαδίκτυο 20 μαθητές της πρώτης λυκείου, του λυκείου Λευκάρων. Να υπολογίσετε: (α) τη μέση τιμή των ωρών ($\bar{x}$).
(β) την τυπική απόκλιση των ωρών (s).

Ωρες (x_i)	Συχνότητα (f_i)
1	2
2	2
3	10
4	6

7. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (Κ, R). Η ευθεία (ε) εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Γ. Αν το τόξο $\widehat{A\Delta\Gamma} = 146^\circ$ και η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 55^\circ$ να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$, $\widehat{B\hat{\Gamma}E}$, $\widehat{A\hat{\Gamma}Z}$ και $\widehat{A\hat{K}B}$ δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



8. Αν $\sin \omega = -\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \sin(\pi - \omega) + \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right) \cdot \epsilon\phi(3\pi + \omega)$$

9. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(x+3)(x^2+5x+6)}{(x^2+9)(2x^2-3x+1)} \leq 0$.

10. Δίνεται η εξίσωση: $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 2 & x & 2 \\ \mu & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - 2$, με ρίζες x_1, x_2 .

Να βρείτε τις τιμές του μ ώστε η πιο πάνω εξίσωση να έχει:

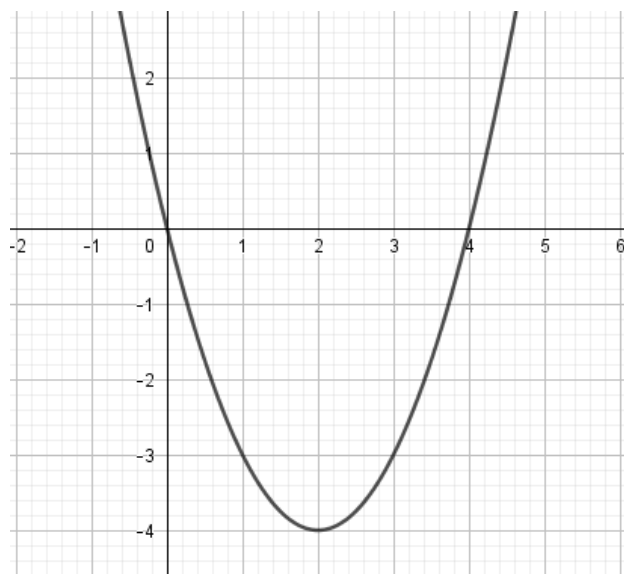
(α) λύσεις αντίστροφες,

(β) λύσεις πραγματικές.

Μέρος Β:(50 μονάδες)

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$.



Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

(α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της,

(β) το πρόσημο του a ,

(γ) το πρόσημο της διακρίνουσας,

(δ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της,

(ε) τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής και να τη χαρακτηρίσετε,

(στ) τις λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$,

(ζ) τις λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = -3$,

(η) την τιμή της παράστασης $A = \frac{2a+3\gamma}{\beta}$.

2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, $\hat{B} = 90^\circ$, με $A(1, 4)$, $\Gamma(2, 1)$ και εξίσωση $AB: x + 2y = 9$. Να βρείτε:

(α) την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$

(β) την εξίσωση της υποτείνουσας $A\Gamma$

(γ) το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές

(δ) τις συντεταγμένες σημείου Δ , έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο.

3. Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $\Gamma(-1, -2)$ και $\Delta(4, -1)$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

(β) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας θ των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$

(γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + 4\vec{v})$

(δ) Να υπολογίσετε την τιμή του λ , έτσι ώστε το διάνυσμα $(2\vec{u} - \vec{v})$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $(\lambda\vec{u} + \vec{v})$.

(ε) Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής του διανύσματος $\vec{u}$ στο διάνυσμα $\vec{v}$.

4. Δίνεται η παράσταση $A = x^2 - \frac{\eta\mu\theta}{1-\sigma\upsilon\nu\theta}x + \frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}$, με ρίζες x_1, x_2 και $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

(α) Αν $A = 0$,

(i) να δείξετε ότι $S + P = 2\sigma\tau\epsilon\mu\theta$

(ii) να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{S+P}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = 8$

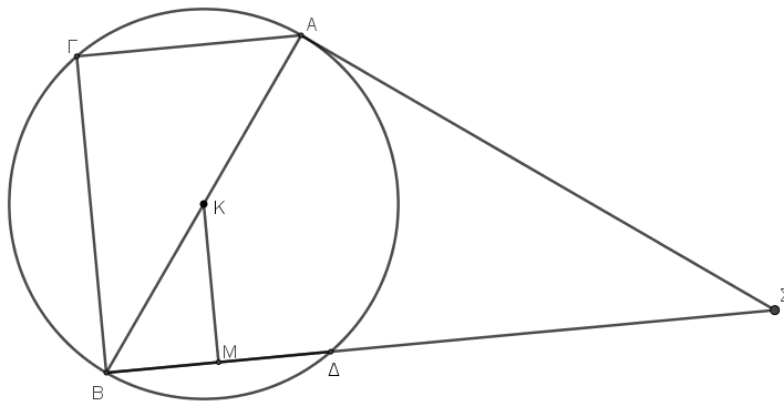
(β) Αν η εξίσωση $A=5$, έχει μία ρίζα ίση με -1 , να βρείτε το μέτρο της γωνίας θ .

5. Δίνεται κύκλος (K, R) με διάμετρο AB . Τα τόξα $A\Gamma$ και $B\Delta$ του κύκλου είναι ίσα. Από το κέντρο K του κύκλου φέρουμε τη KM κάθετη στη $B\Delta$. Προεκτείνουμε τη $B\Delta$ προς το Δ έτσι ώστε $\Sigma\Delta=2(B\Delta)$.

(α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΓAB και MBK είναι όμοια.

(β) Να βρείτε το λόγο ομοιότητας των δύο τριγώνων.

(γ) Να δείξετε ότι $(\Sigma A)^2 = 24(BM)^2$.



ΕΜΠΟΡΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΜΙΤΣΗ ΛΕΜΥΘΟΥ
ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2017 - 2018

ΤΑΞΗ : Α' Λυκείου
ΜΑΘΗΜΑ : Μαθηματικά Προσανατολισμού

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.
Κάθε ορθή άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\omega} = \vec{\beta} - 3\vec{\alpha}$.

2. Χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, να δείξετε ότι οι πιο κάτω παραστάσεις είναι ίσες.
(Να φαίνονται όλα τα βήματα απόδειξης).

$$A = \frac{12}{\sqrt{2}}$$

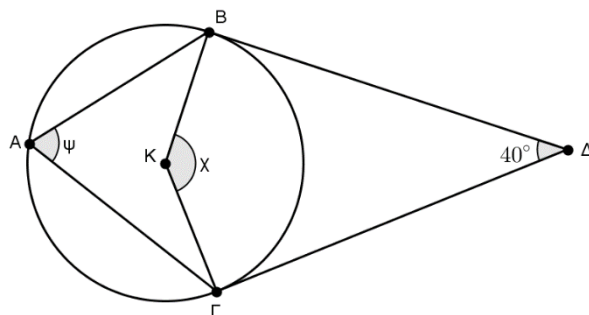
$$B = (3 + \sqrt{2})^2 - \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} - \sqrt{162} \div \sqrt{2}$$

3. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{1}{1 + \eta\mu\chi} + \frac{1}{1 - \eta\mu\chi} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$$

4. Ένας μαθητής της Α' Λυκείου πήρε στο Α' τετράμηνο βαθμό 17, στο Β' τετράμηνο βαθμό 13 και στις τελικές εξετάσεις βαθμό 10. Να υπολογίσετε τον σταθμισμένο μέσο όρο των βαθμών του, αν έχουν βαρύτητα 35, 35, 30 αντίστοιχα.

5. Στο πιο κάτω σχήμα, τα σημεία Α, Β και Γ βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια κύκλου με κέντρο Κ. Από το σημείο Δ εκτός κύκλου φέρουμε εφαπτόμενες ΔΒ και ΔΓ στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα (Β και Γ είναι σημεία του κύκλου). Αν η γωνία $\widehat{B\Delta\Gamma} = 40^\circ$, να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών χ και ψ δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



6. Δίνονται τα σημεία Α(-3,-5), Β(0,4) και Γ(2,κ). Να υπολογίσετε την τιμή του κ ώστε τα σημεία Α, Β, Γ να είναι συνευθειακά.

7. Αν $\sin \omega = \frac{3}{5}$ και $270^\circ < \omega < 360^\circ$, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής και χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
- $$A = 10\eta\mu\omega + 9\epsilon\phi\omega + 3\tau\epsilon\mu\omega$$
8. Δίνεται κύκλος (Κ, 3 cm) και Σ σημείο εκτός του κύκλου τέτοιο ώστε $\Sigma K = 9\text{cm}$. Από το σημείο Σ φέρουμε την τέμνουσα ΣAB με $\Sigma A = 8\text{cm}$ (Α και Β είναι σημεία του κύκλου). Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής AB.
9. Να λύσετε την εξίσωση: $(\sqrt{\chi - 4})^8 + 1 = 17, \chi \geq 4$
10. Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$, το τριώνυμο $\varphi(\chi) = \chi^2 - 2\kappa\chi + \kappa + 2$ είναι θετικό $\forall \chi \in \mathbb{R}$;

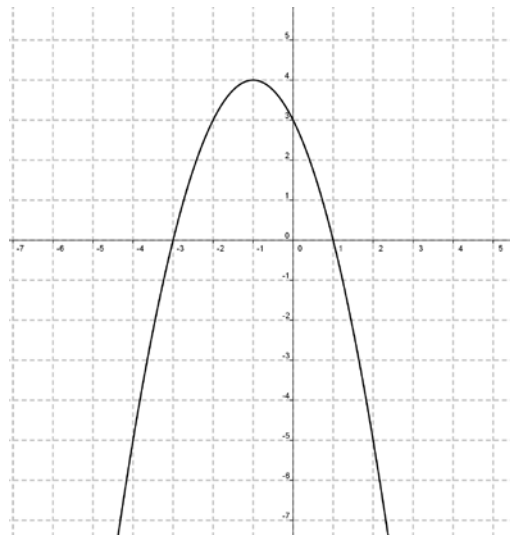
**ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄**

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε ορθή άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma, \alpha \neq 0$

Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε:

- το πεδίο ορισμού της f
- το σύνολο τιμών της f
- το πρόσημο του α
- την εξίσωση του άξονα συμμετρίας
- τις ρίζες χ_1 και χ_2 της εξίσωσης $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$
- τις τιμές των α, β και γ
- τις λύσεις της εξίσωσης $f(\chi) = 3$
- τις τιμές του χ για τις οποίες ισχύει $f(\chi) > 0$



2. α) Να λύσετε την ανίσωση: $(-2\chi^2 + 3\chi - 1)(\chi^2 + 3)(\chi^2 - 1) < 0$

β) Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 - (2\lambda - 1)\chi + \lambda^2 - 4 = 0$ με ρίζες χ_1, χ_2 . Χωρίς να λύσετε την εξίσωση, να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η σχέση $\frac{\chi_1}{\chi_2} + \frac{\chi_2}{\chi_1} < -2$.

3. α) Αν ισχύει ότι $\frac{\eta\mu(180^\circ-\omega) \cdot \sigma\varphi(-\omega) - \tau\epsilon\mu(270^\circ-\omega) \cdot \eta\mu(360^\circ-\omega)}{\epsilon\varphi(90^\circ+\omega) \cdot \epsilon\varphi(180^\circ+\omega)} = \frac{3}{2}$, $270^\circ < \omega < 360^\circ$

να υπολογίσετε τη γωνιά ω .

β) Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma\varphi\omega}{\sigma\tau\epsilon\mu\omega-1} - \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1+\eta\mu\omega} \right)$ και $B = \eta\mu\omega$. Αν $\hat{\omega} = 300^\circ$, να

αποδείξετε ότι $\frac{A}{B} = 1$ (Χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής).

4. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφές $A(-2,3)$, $\Gamma(3,8)$ και $\Delta(-\alpha, \alpha-1)$. Αν η πλευρά ΒΓ έχει εξίσωση $3\chi + \psi - 17 = 0$, η γωνία $\hat{B}$ είναι ορθή και οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες, να βρείτε:

α) την εξίσωση της πλευράς ΑΒ

β) τις συντεταγμένες της κορυφής Β

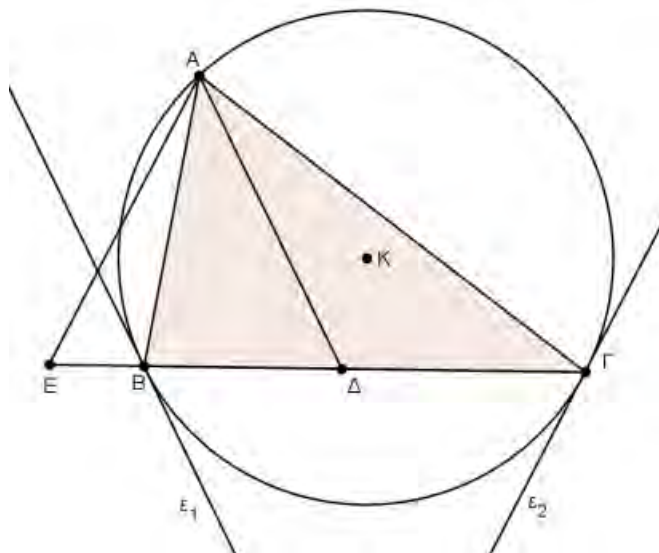
γ) την εξίσωση της πλευράς ΓΔ

δ) τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.

5. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Κ, R) και οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 είναι οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Αν $ΑΔ \parallel \epsilon_1$, $ΑΕ \parallel \epsilon_2$ και τα σημεία Ε, Β, Δ, Γ είναι συνευθειακά, να δείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

α) $(AB)^2 = (BD)(B\Gamma)$

β) $(ΑΓ)^2 = (ΓΕ)(B\Gamma)$



ΛΥΚΕΙΟ ΛΙΝΟΠΕΤΡΑΣ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2017-2018

ΤΑΞΗ: Α' Λυκείου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22/05/2018

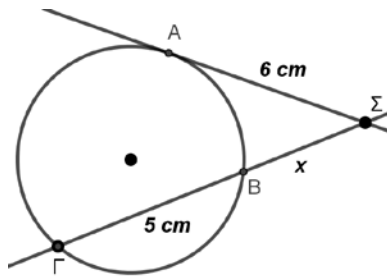
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΩΡΑ: 10:30 - 13:00

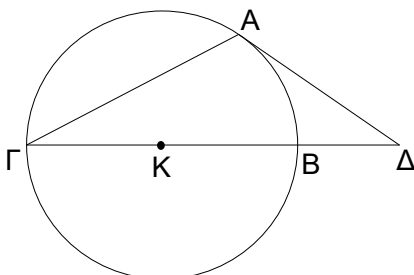
ΜΕΡΟΣ Α' (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Από σημείο Σ εκτός κύκλου φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΣA και τη τέμνουσα $\Sigma B\Gamma$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Αν $\Sigma A = 6\text{ cm}$, $\Sigma B = x\text{ cm}$ και $B\Gamma = 5\text{ cm}$, να υπολογίσετε το μήκος του ΣB .



2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ και $\vec{\beta} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = -2\vec{a} + 3\vec{\beta}$.
3. Αν (ε) είναι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(5, 2)$ και $B(-3, 2)$, να βρείτε την απόσταση του σημείου $\Sigma(4, -1)$ από την ευθεία (ε) .
4. Αν $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ και $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της πιο κάτω παράστασης: $A = \frac{12\varepsilon\varphi\theta - 18\tau\epsilon\mu\theta}{5\sigma\upsilon\nu\theta + 30\eta\mu\theta}$
5. Στο πιο κάτω σχήμα η ΓB είναι διάμετρος και η $A\Delta$ εφαπτομένη του κύκλου (K, ρ) . Αν το τόξο $\widehat{AB} = 56^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Gamma\Delta$. (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



6. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4x+3} \geq 0$.
7. Αν ισχύει $1 < \alpha < 2$ και $-3 < \beta < -2$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις πιο κάτω παραστάσεις:
- α) $4\alpha - 3\beta$
β) $-\frac{\alpha}{\beta}$
8. Ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, ($\hat{\Gamma} = 90^\circ$), έχει κορυφές $B(-1, -1)$ και $\Gamma(2, 3)$. Η κλίση της πλευράς AB είναι $\frac{1}{7}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής A .
9. Πιο κάτω δίνονται οι χρόνοι, σε λεπτά, 10 αθλητών ενός σωματίου που έτρεξαν στον μααραθώνιο.
- 135, 140, 150, 147, 164, 170, 150, 149, 145, 150
- Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση των πιο πάνω χρόνων και να εξετάσετε την ομοιογένεια του πιο πάνω δείγματος.
10. Το κέρδος σε ευρώ ενός τουριστικού γραφείου από μια εκδρομή x ατόμων, δίνεται από τον τύπο $K(x) = 80x - x^2$.
- α) Να βρείτε το μέγιστο κέρδος του τουριστικού γραφείου.
β) Να κατασκευάσετε πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης $K(x)$, με $x \in \square$ σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, στην οποία να φαίνονται τα σημεία τομής με τους άξονες, η κορυφή και ο άξονας συμμετρίας της.

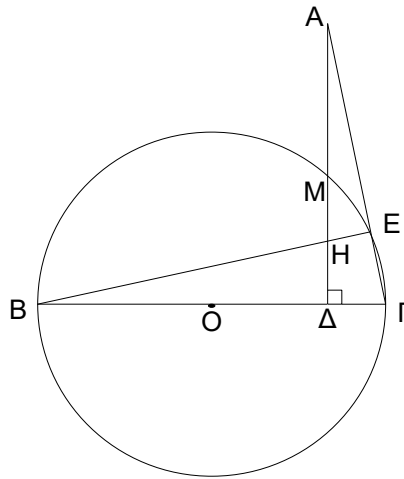
ΜΕΡΟΣ Β' (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - (5\lambda - \mu)x - 1$ και $g(x) = \lambda x^2 + 13x - \lambda\mu + \lambda^2$ με $\lambda \neq 0$, $\lambda, \mu \in R$. Αν οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι αντίθετες και οι ρίζες της εξίσωσης $g(x) = 0$ είναι αντίστροφες, να υπολογίσετε τις τιμές των παραμέτρων λ και μ .
2. Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει κορυφές τα σημεία $A(3, 4)$, $B(5, 7)$ και $\Gamma(2\mu + 1, 3\mu - 2)$, όπου $\mu \in R$.
- α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δεν εξαρτάται από την πραγματική τιμή του μ . (μον.3)
- β) Αν το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία $x = 5$, να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (μον.3)
- γ) Να υπολογίσετε την οξεία γωνιά $\hat{\theta}$ των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (μον.4)

3. Σε τυχαίο σημείο Δ της διαμέτρου $B\Gamma$ ενός κύκλου (O, ρ) , φέρουμε ΔA κάθετη στη $B\Gamma$, η οποία τέμνει την BE στο H και τον κύκλο στο M , όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να δείξετε ότι:

- α) $E\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{A}\Gamma$
 β) $(A\Delta)(\Delta H) = (\Delta\Gamma)(\Delta B)$



4. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \sigma\tau\epsilon\mu(3\pi + \theta) \epsilon\varphi\left(\frac{7\pi}{2} - \theta\right)}{\sigma\upsilon\nu(2\pi - \theta) \tau\epsilon\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sigma\upsilon\nu(\pi - \theta)}$ και

$$B = \sigma\upsilon\nu^2\theta (\epsilon\varphi^2\theta + 1) + \eta\mu^2\theta (\sigma\varphi^2\theta - 1) \quad \text{με } \theta \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Να δείξετε ότι $A \cdot B = 2$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 3(\lambda + 2)x + \lambda^2 + 4\lambda + 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (μον.4)

- β) Για $\lambda = 0$ να αποδείξετε ότι:

$$A = \frac{\sqrt{f(0)}}{\sqrt{f(0)-f(1)}-\sqrt{f(0)}} + \frac{\sqrt{f(0)-f(1)}-\sqrt{f(0)}}{\sqrt{f(0)-f(1)}+\sqrt{f(0)}} = 10 - 2\sqrt{3}$$

και να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$B = x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3, \quad \text{όπου } x_1, x_2 \text{ ρίζες της } f(x) = 0 \quad (\text{μον.6})$$

ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΟΥ ΑΝΤΩΝΙΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2017-2018

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 01/06/2018

ΩΡΑ: 10.30' - 13.00'

ΤΑΞΗ: Α' ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2.5 ΩΡΕΣ

ΒΑΘΜΟΣ: -----

ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΚΑΘΗΓΗΤΗ: -----

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: -----

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού/ταινίας.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο (2) μέρη.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.
- Επιτρέπεται η χρήση μή προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Όλες οι απαντήσεις να δοθούν στις σφραγισμένες κόλλες αναφοράς που σας δόθηκαν.

ΜΕΡΟΣ Α' (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 6x + 8 = 0$. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων Α, Β, Γ χωρίς να λύσετε την εξίσωση :

$$A = x_1 + x_2 \quad B = x_1 \cdot x_2 \quad \Gamma = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$$

2. Ο Αντρέας πέτυχε τους 10 πιο κάτω βαθμούς στα διαγωνίσματα του.

11, 12, 11, 17, 11, 13, 18, 13, 14, 20

Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, την επικρατούσα τιμή, το εύρος και την τυπική απόκλιση των παραπάνω μετρήσεων.

3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ και τα σημεία $A(-1, -3)$, $B(x, 7)$.

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} + \vec{v}$.

β) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{u} + \vec{v}$, να είναι κάθετα μεταξύ τους

4. Να λύσετε την εξίσωση : $(x^{\frac{3}{2}} + 1)^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{27}$, $x > 0$

5. Αν $\eta\mu x = -\frac{4}{5}$ με $270^\circ \leq x \leq 360^\circ$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{3\epsilon\phi x - 10\sigma\upsilon\nu x}{1 - 4\sigma\tau\epsilon\mu x}$$

6. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος x μέτρα και πλάτος ψ μέτρα , του οποίου οι διαστάσεις ικανοποιούν τις ανισότητες $8 \leq x \leq 14$ και $2 \leq \psi \leq 5$.

Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή :

α) της περιμέτρου του ορθογωνίου

β) του εμβαδού του ορθογωνίου

7. Να βρείτε την τιμή του κ ώστε οι παρακάτω ευθείες να διέρχονται από το ίδιο σημείο.

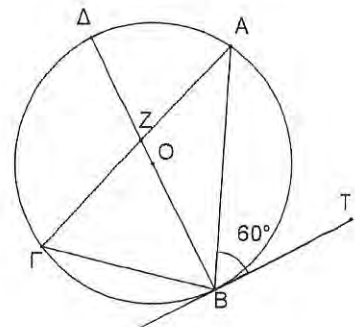
$$\epsilon_1 : 2x + 2\psi = -3$$

$$\epsilon_2 : 2x + \kappa\psi = -3$$

$$\epsilon_3 : 2x + 3\psi = -\kappa$$

8.

Στο διπλανό σχήμα η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Ο, R), η ΒΤ εφάπτεται του κύκλου στο Β και Ζ είναι το σημείο τομής της ΒΔ και της χορδής ΑΓ. Αν η γωνία ΤΒΑ έχει μέτρο 60° και το τόξο ΒΓ έχει μέτρο 70° να βρείτε το μέτρο των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας

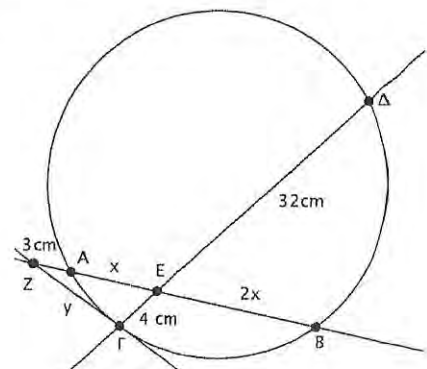


9. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(-x+2)^2(3-x)}{x^2(x^2+4)(x^2-5x+4)} \leq 0$.

10. Στο σχήμα η ΖΓ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ. Αν $AZ = 3\text{cm}$, $\Gamma E = 4\text{cm}$, $E\Delta = 32\text{cm}$, $AE = x$, $BE = 2x$ και $Z\Gamma = y$,

α) να υπολογίσετε τις τιμές των x και y .

β) να αποδείξετε ότι η ΓΔ δεν είναι διάμετρος.



ΜΕΡΟΣ Β' (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0 \text{ Να βρείτε:}$$

α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης

β) τις συντεταγμένες της κορυφής

γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της

δ) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) > 0$

ε) το πρόσημο των τιμών $f(-1), f(3)$

στ) τις ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

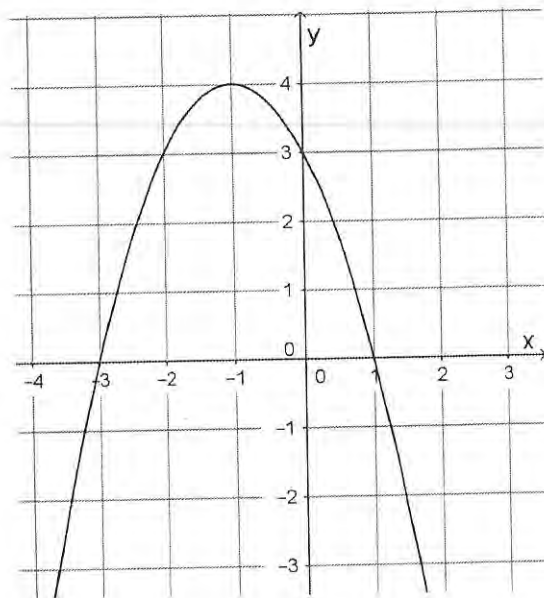
ζ) το πρόσημο του α

η) το πρόσημο της Δ (διακρίνουσα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$) με εξήγηση

θ) την τιμή του γ

ι) την εξίσωση της παραβολής

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$



2. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(-1, -1)$, $B(-3, 3)$ και $\Gamma(0, 2)$. Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$

β) τη γωνία $\angle A\hat{B}$

γ) διάνυσμα $\vec{u}$ το οποίο είναι αντίρροπο του $\overrightarrow{AB}$ και έχει μέτρο διπλάσιο από αυτό.

δ) το μήκος της προβολής του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ στο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.

ε) το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι αντίρροπο του $\overrightarrow{A\Gamma}$

3. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\sin(90^\circ - \theta) \cdot \eta\mu(180^\circ - \theta) \cdot \sigma\tau\epsilon\mu(360^\circ - \theta)}{\sigma\phi(180^\circ + \theta) \cdot \eta\mu(-\theta) \cdot \tau\epsilon\mu(360^\circ + \theta)} \quad \text{και} \quad B = \tau\epsilon\mu\theta - \frac{1}{\sigma\phi\theta \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\theta}$$

Να δείξετε ότι :

α) $A = \eta\mu\theta$ και $B = \sigma\upsilon\upsilon\theta$

β) αν ισχύει $4A^2 + 8B^2 = 5$, τότε $\epsilon\phi^2\theta = 3$

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(\kappa, 4)$ και $\Gamma(-3, \lambda)$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.
Οι εξισώσεις των πλευρών AB και $B\Gamma$ είναι $2x + y = 8$ και $y - x = 8$ αντίστοιχα.
Να υπολογίσετε:
- α) τις τιμές των κ και λ
 - β) τις συντεταγμένες της κορυφής B
 - γ) τις συντεταγμένες σημείου Δ , τέτοιου ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο
 - δ) την απόσταση των πλευρών $A\Delta$ και $B\Gamma$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$
 - ε) το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

5. Τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R) με $AG < BG$, έτσι ώστε η AB να είναι διάμετρος του κύκλου και η εφαπτομένη του κύκλου στο Γ να τέμνει την προέκταση της AB (στη μεριά του A) σε σημείο Δ .
- α) Αν FE είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι :
- i) $(FE)^2 = (AE) \cdot (EB)$
 - ii) $(\Delta A) \cdot (\Delta B) - (EA) \cdot (EB) = (E\Delta)^2$
- β) Αν επιπλέον το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει εμβαδόν ίσο με 64cm^2 και το τρίγωνο $AE\Gamma$ έχει εμβαδόν ίσο με 4cm^2 , να αποδείξετε ότι $(AG) = \frac{R}{2}$.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε **όλες** τις ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **πέντε** μονάδες από τις **εκατό**.

1. Να σχηματίσετε μία εξίσωση β' βαθμού με λύσεις τις $3 + \sqrt{5}$ και $3 - \sqrt{5}$.
2. Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$ και $B(5,-1)$. Να βρείτε:
 - α) Τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$.
 - β) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{AB}$.
3. Αν $2 < a < 6$ και $-8 < b < -4$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:
 - α) $3a - b$ και
 - β) $\frac{b}{a}$.

4. Οι παρατηρήσεις στον διπλανό πίνακα έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 4$. Να υπολογίσετε:
 - α) Την τυπική απόκλιση (s) των παρατηρήσεων.
 - β) Τον συντελεστή μεταβλητότητας (CV).

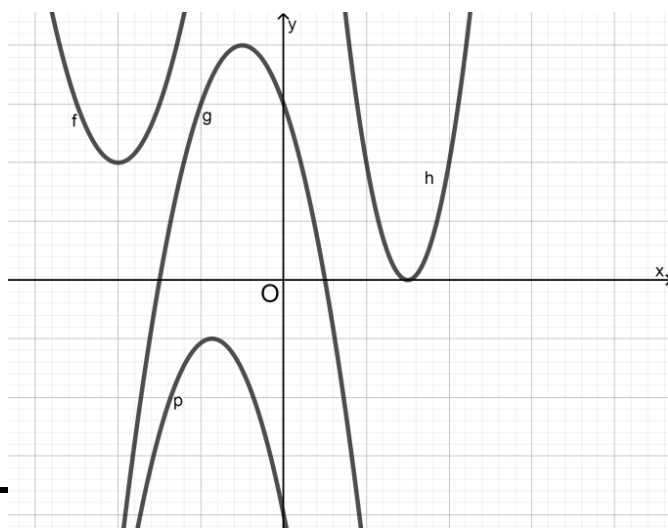
Τιμές x_i	Συχνότητα f_i
2	4
3	4
4	3
10	2

5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x\sqrt{3} & y \\ 2 & -\sqrt{3} \end{vmatrix}$ παριστάνει την εξίσωση ευθείας

που σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα των τετμημένων.

6. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g , h και p της μορφής $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

- α) Ποια από τις παραβολές έχει:
 - i. $a < 0$ και $c < 0$.
 - ii. Μορφή $y = a \cdot (x + k)^2$.
 - iii. Την τιμή του $-\frac{b}{2a}$ θετική.



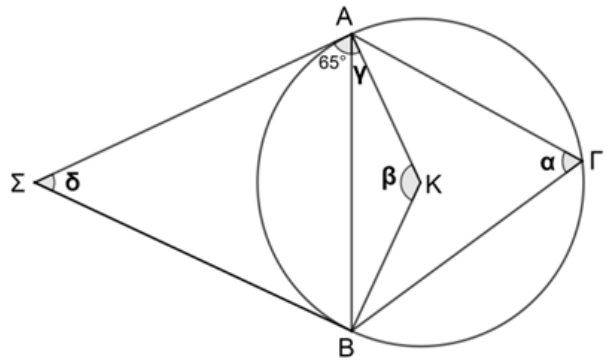
β) Ποια από τις εξισώσεις $f(x)=0$, $g(x)=0$, $h(x)=0$, $p(x)=0$ έχει:

- i. $\Delta < 0$ και $a > 0$.
- ii. $P < 0$.

7. Η ευθεία με εξίσωση $y = (\kappa^2 + 3\kappa + \mu)x + \kappa^2 + 2\kappa + 2$, $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$, περνά από το σημείο $(-1, 0)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $2x - y + 3 = 0$. Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και μ .

8. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο K και οι εφαπτομένες του από το σημείο Σ .

Αν η γωνία $\hat{\Sigma AB} = 65^\circ$, να βρείτε τις γωνίες α , β , γ , δ και το μέτρο του τόξου $\widehat{APB}$. (να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις)



9. Τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ σχηματίζουν γωνία $\frac{\pi}{3}$. Αν $|\vec{a}| = 5$ και $|\vec{b}| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το διάνυσμα $(\vec{a} + \kappa\vec{b})$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $(\vec{a} - 4\vec{b})$.

10. Δίνεται η εξίσωση β' βαθμού $x^2 + 2\eta\mu\theta \cdot x - \sigma\upsilon\nu^2\theta = 0$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες.
- β) Να δείξετε ότι ισχύει $x_1^2 + x_2^2 = 2(1 + \eta\mu^2\theta)$, όπου x_1 και x_2 οι λύσεις της εξίσωσης.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε **όλες** τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **δέκα** μονάδες από τις **εκατό**.

1. α) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda^2 - 4 = 0$. Για ποιες τιμές της παραμέτρου λ ,

$\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει:

i. Μια λύση ίση με -3.

ii. Λύσεις αντίστροφες.

iii. Δύο λύσεις x_1 και x_2 που να ικανοποιούν τη σχέση $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq 0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(5-x)(x-3)^2(x^2+3)}{x^2-2x-8} \geq 0$.

2. α) Αν ισχύει $\frac{\sigma\tau\epsilon\mu(360^\circ - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ + \theta)}{\epsilon\phi(90^\circ + \theta) \cdot \epsilon\phi(180^\circ + \theta)} + \tau\epsilon\mu^2\theta = 3$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$,

i. Να δείξετε ότι $\epsilon\phi\theta = -\sqrt{3}$.

ii. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας θ .

β) Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{5}{13}$ και $\eta\mu\theta > 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{13\eta\mu\theta - 15\tau\epsilon\mu\theta}{24\sigma\phi\theta}.$$

3. Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο

OAB είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$), η

ευθεία OA έχει εξίσωση $x - 2y = 0$

και $B(0, 8)$. Να βρείτε:

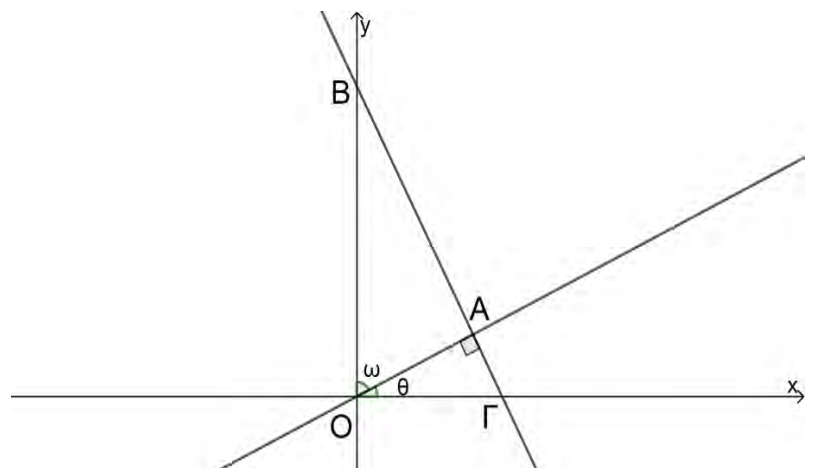
α) Την εξίσωση της AB.

β) Τις συντεταγμένες των σημείων A και Γ.

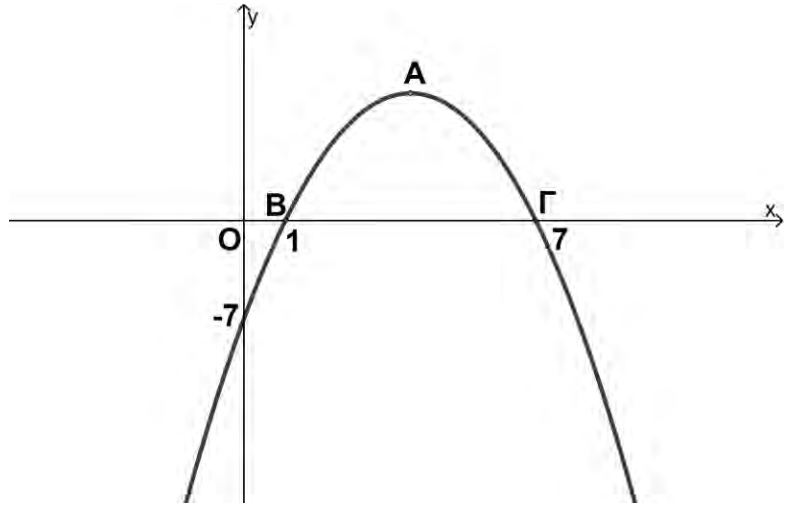
γ) Το μήκος του BA.

δ) Την $\epsilon\phi\theta$ και τη γωνία ω .

ε) Την απόσταση του σημείου $(-3, 4)$ από την ευθεία AB.

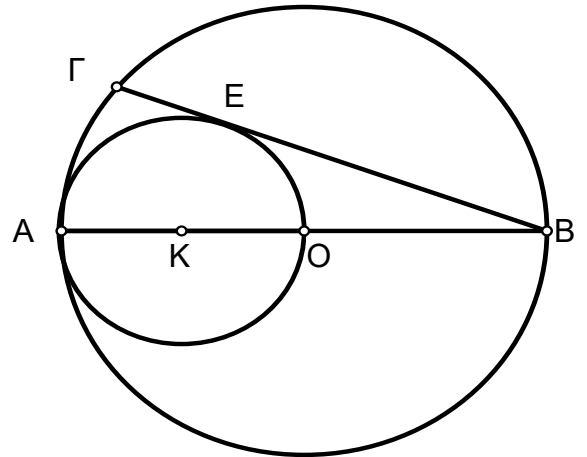


4. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $y = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ με κορυφή Α.



- α) Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής.
- β) Να βρείτε τις τιμές των a , b , γ .
- γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της παραβολής.
- δ) Να λύσετε την $f(x) \geq 0$.
- ε) Αν η ευθεία $x=5$ τέμνει την παραβολή στο σημείο Δ να βρείτε:
 - i. Τις συντεταγμένες του Δ.
 - ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ.

5. Σε κύκλο (O, R) φέρουμε τη διάμετρο ΑΒ. Ένας άλλος κύκλος με κέντρο Κ εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου (O, R) στο Α και έχει διάμετρο ΟΑ. Από το Β φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία ΒΕ στον κύκλο με κέντρο Κ (Ε το σημείο επαφής) και η προέκτασή της τέμνει τον εξωτερικό κύκλο στο Γ.



- α) Να δείξετε ότι $(KB) \cdot (ΑΓ) = (ΑΒ) \cdot (ΚΕ)$.
- β) Να δείξετε ότι $\frac{ΚΕ}{ΑΓ} = \frac{3}{4}$.
- γ) Να υπολογίσετε, συναρτήσει του R , το μήκος της ΑΓ και της ΒΕ.

Μέρος Α':

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των πιο κάτω διανυσμάτων:
(α) $\vec{x} + \vec{y}$

(β) $\vec{x} - 2\vec{y}$

A2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(β) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

A3. Να αποδείξετε την πιο κάτω τριγωνομετρική ταυτότητα: $\frac{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x} = \frac{1}{\epsilon\phi x}$.

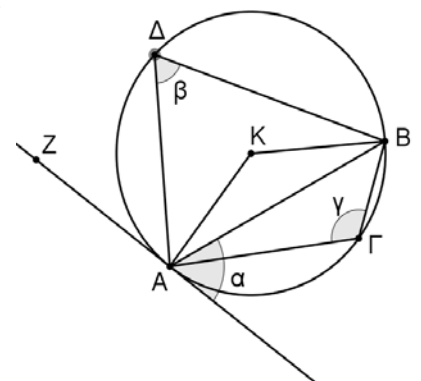
A4. Οι βαθμολογία 15 μαθητών σε μια σχολική εργασία με άριστα το 10 είναι: 6, 5, 7, 5, 4, 5, 6, 4, 4, 6, 7, 8, 6, 8, 9. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή συσχέτισης του αριθμού των παιδιών κατά προσέγγιση δεκάτου.

A5. Αν $2 < a < 3$ και $-6 < \beta < -4$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

(α) $\alpha - \beta$

(β) $\frac{\alpha}{\beta}$

A6. Δίνεται κύκλος (K,R) και ΖΑ εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Αν το τόξο $\widehat{A\Gamma B} = 140^\circ$ να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$. (να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας)



A7. Να υπολογίσετε την ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

A8. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(x-3)(x^2-7x+12)}{x^2-1} \leq 0$.

A9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$). Από ένα τυχαίο σημείο Δ της ΑΓ, να φέρετε ΔΕ κάθετο στο ΒΓ. Να αποδείξετε ότι: (ΑΓ)(ΕΔ)=(ΑΒ)(ΕΓ).

A10. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (k-3)x + 3k-2 = 0$ με ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2 . Να υπολογίσετε τις τιμές του k , $k \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε οι ρίζες της εξίσωσης να έχει ρίζες που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{2x_1 + 2x_2}{x_1 x_2} \geq 1$$

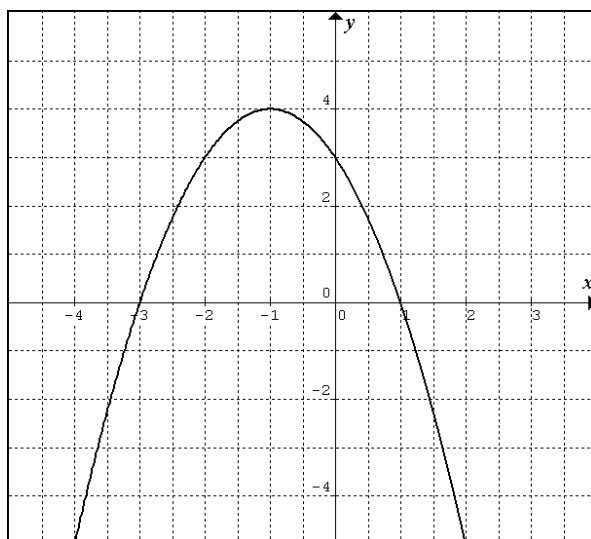
Μέρος Β' :

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β' . Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$.

Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

- (α) Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)$.
- (β) Τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- (γ) Τον άξονα συμμετρίας.
- (δ) Το πρόσημο του a και της διακρίνουσας Δ .
- (ε) Να υπολογίσετε τα a , β , γ .



- B2. (α) Αν $\frac{\eta\mu(180^\circ - a) \cdot \sigma\varphi(180^\circ + a) \cdot \tau\epsilon\mu(-a)}{\epsilon\varphi(360^\circ - a) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ - a)} = 2$ και $0^\circ < a < 90^\circ$ να υπολογίσετε τη γωνία α .

(β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} - \frac{\epsilon\varphi^2\alpha}{\tau\epsilon\mu\alpha} = \sigma\upsilon\nu\alpha$

- B3. Δίνονται τα σημεία A(1,5), B(3,2) και Γ(6,-1). Να υπολογίσετε:

- (α) την εξίσωση της ΒΓ.
 (β) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
 (γ) το μήκος του ύψους ΑΔ.
 (δ) το μήκος της διαμέσου ΑΜ.
 (ε) τη κορυφή Ζ έτσι ώστε το ΑΒΓΖ να είναι παραλληλόγραμμο.

- B4. Δύο χορδές ΑΒ και ΔΕ ενός κύκλου είναι παράλληλες. Στο σημείο Β φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου που τέμνει την ευθεία ΔΕ στο σημείο Γ. Να δείξετε ότι

$$(B\Delta)^2 = (BA)(\Delta\Gamma).$$

- B5. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$, $k \in R$

Να βρείτε τις τιμές του k , ώστε:

- (α) Τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{z}$ να είναι παράλληλα. (μονάδες 3)
 (β) Τα διανύσματα $\vec{y}$ και $\vec{z}$ να είναι κάθετα. (μονάδες 3)
 (γ) Τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{z}$ να σχηματίζουν γωνία 45° . (μονάδες 4)

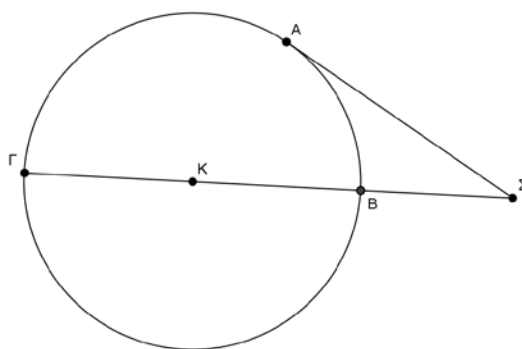
ΜΕΡΟΣ Α' : Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 2x - 48 \leq 0$.2. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο και τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ και

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος $(K, 4\text{cm})$ με ΒΓ διάμετρο. Από το σημείο Σ εκτός κύκλου φέρουμε τέμνουσα ΣΒΓ και εφαπτόμενο τμήμα ΣΑ μήκους $\sqrt{20}\text{cm}$ προς τον κύκλο. Να υπολογίσετε το μήκος του ΣΒ.



4. Ένας μαθητής της Α' Λυκείου πήρε στο μάθημα των Μαθηματικών προσανατολισμού κατά το δεύτερο τετράμηνο στα τρία διαγωνίσματα τους εξής βαθμούς: 18 , 16, 19. Ο συντελεστής βαρύτητας για το κάθε διαγώνισμα ήταν αντίστοιχα 3, 2 , 4. Να βρείτε τον σταθμισμένο μέσο.

5. Αν $3 < x < 6$ και $-3 < y < -2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις: (α) $x + 2y$ (β) $(x - y)^2$

6. Να λύσετε την εξίσωση: $(x - 4)^2 = \frac{16}{9} \cdot \sqrt{\left(\frac{27}{8}\right)^{-2}}$.

7. Δίνεται ότι $\sin \theta = \frac{3}{5}$ και $270^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{9\text{τεμ}\theta + 5\eta\mu\theta}{\eta\mu^2(90^\circ - \theta) + \sin^2(90^\circ - \theta)}$$

8. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1) που διέρχεται από τα σημεία $A(4, \kappa^2)$ και $B(\kappa, 8\kappa - 16)$, $\kappa \neq 4$ και είναι κάθετη με ευθεία που σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα των τετμημένων.

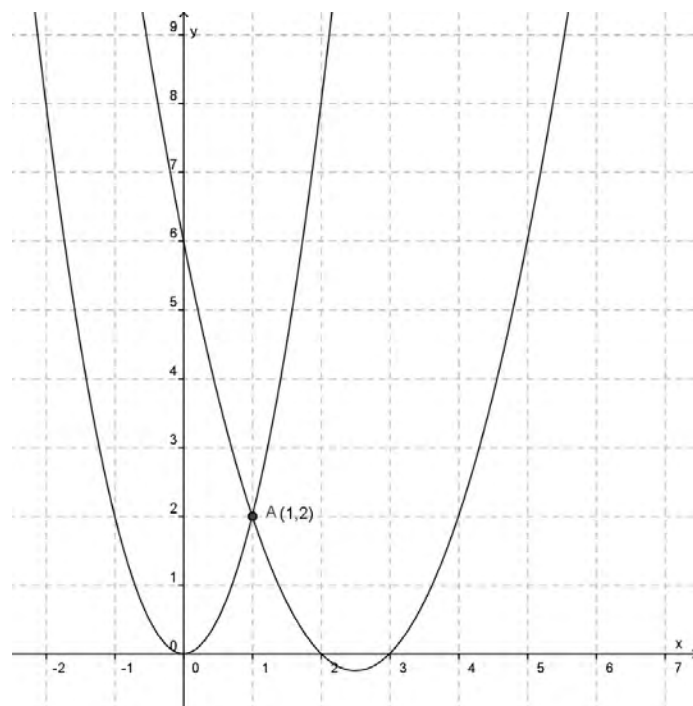
9. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ \begin{vmatrix} 2x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = 22 \end{cases}$$

10. Να αποδείξετε ότι κάθε τραπέζιο εγγεγραμμένο σε κύκλο είναι ισοσκελές.

ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = \kappa x^2$ και $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο A (1,2). Να βρείτε:
- (α) Τον τύπο της $g(x)$.
 - (β) Το σύνολο τιμών και τις συντεταγμένες της κορυφής της $g(x)$.
 - (γ) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της $f(x)$.
 - (δ) Τις τιμές των α , β και γ .
 - (ε) Την εξίσωση δεύτερου βαθμού με λύσεις τους αριθμούς $g(4)$ και $f(1)$.
 - (στ) Τις λύσεις της ανίσωσης: $g(x) > f(x)$.



- (ζ) Το διάνυσμα $\vec{w}$ που είναι ομόρροπο με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$, όπου $A(1,2)$ και $B(5,f(5))$ και είναι $|\vec{w}| = 8\sqrt{2}$.

2. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + (\mu - 1)x + (\mu - 1) = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, με λύσεις τις x_1 και x_2 .

Να βρείτε τις τιμές του μ ώστε:

- (α) Η εξίσωση να έχει λύσεις αντίστροφες.
- (β) Η εξίσωση να έχει δύο πραγματικές και άνισες λύσεις.
- (γ) Να ισχύει η σχέση: $\frac{\mu^2 + \mu - 5 - x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2} \geq 0$.
- (δ) Η παραβολή $f(x) = x^2 + (\mu - 1)x + (\mu - 1)$ να έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 8$.

3.(α) Το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ έχει κορυφές $A(1,4)$, $B(4,\kappa)$ και $\Gamma(-2,8)$ με $\kappa > 0$.

Να βρείτε την τιμή του κ .

(β) Δεδομένου ότι $\kappa = 8$ να υπολογίσετε:

- i. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- ii. Τις συντεταγμένες του σημείου Δ , έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ να είναι ρόμβος.
- iii. Τη γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$.
- iv. Τις συντεταγμένες του σημείου που βρίσκεται πάνω στον άξονα των τετμημένων και απέχει από την πλευρά $A\Gamma$ απόσταση 4 μονάδων.

4.(α) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: $A = \frac{\eta\mu(180^\circ + \theta) \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \theta)}{\sigma\upsilon\nu(-\theta) \cdot \tau\epsilon\mu(360^\circ - \theta)}$ και $B = \frac{\tau\epsilon\mu^2 60^\circ - 1}{3\eta\mu^2 \theta + 3\sigma\upsilon\nu^2 \theta}$

Ακολουθώντας να λύσετε την εξίσωση: $2A + \sqrt{3}B = 0$, $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$.

(β) Να αποδείξετε την ταυτότητα:
$$\frac{\eta\mu^3 \theta - \eta\mu^2 \theta + \eta\mu \theta - 1}{\eta\mu^4 \theta - 1} = \frac{1}{\eta\mu \theta + 1}$$

5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο. Από την κορυφή A του ισοσκελούς τριγώνου φέρουμε ευθεία που τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ και τον κύκλο στο σημείο E . Να δείξετε ότι:

(α) $(AB)^2 = (A\Delta)(AE)$

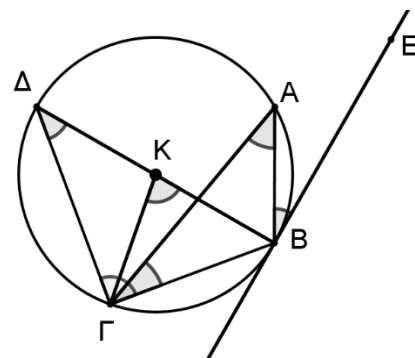
(β) $(\Delta B)(\Delta \Gamma) = (\Delta A)(AE) - (\Delta A)^2$

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να γράψετε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με λύσεις: $x_1 = 5 + \sqrt{3}$ και $x_2 = 5 - \sqrt{3}$
2. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 3x < 0$
3. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt[3]{x-2} = 3, x \geq 2$
4. Αν $2 < x < 5$ και $4 < y < 7$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:
α) $2x - y$
β) $\frac{x}{y}$
5. Οι ώρες απασχόλησης με ηλεκτρονικά παιχνίδια εβδομαδιαίως 6 μαθητών του Σχολείου μας είναι: 3, 4, 6, 0, 2, 9. Να υπολογίσετε:
α) το εύρος των παρατηρήσεων
β) την τυπική απόκλιση (κατά προσέγγιση ακεραίου)
6. Αν $\eta\mu\theta = -\frac{3}{5}$ και $270^\circ < \theta < 360^\circ$, να υπολογίσετε με τη χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων την αριθμητική τιμή της παράστασης: $A = \frac{4\epsilon\phi\theta - 15\sigma\upsilon\nu\theta}{12\tau\epsilon\mu\theta}$
7. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (Κ, R). Στο σημείο Β φέρουμε την εφαπτομένη ΒΕ έτσι ώστε η γωνία $\hat{A}BE = 30^\circ$. Αν $\hat{\Gamma}\hat{A}B = 40^\circ$, να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $\hat{\Gamma}\hat{A}B$, $\hat{A}\hat{\Gamma}B$, $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}B$, $\hat{\Gamma}\hat{K}B$ και του τόξου $\Gamma\Delta B$ δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



8. Δίνεται η δέσμη ευθειών $x + y - 6 + \lambda(2x - 3y - 7) = 0$.

α) Να βρείτε το κέντρο της δέσμης.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας της πιο πάνω δέσμης, που περνά από το σημείο $B(3, -1)$.

9. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$.
Να βρείτε:

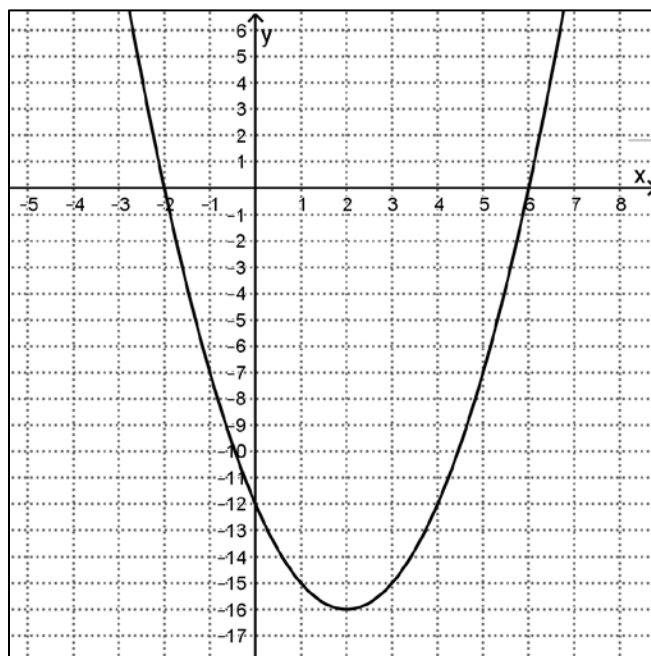
α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της παραβολής

β) τις συντεταγμένες της κορυφής της

γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας

δ) το πρόσημο της διακρίνουσας (Δ) της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$

ε) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 0$



10. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ σημείο της AB , ώστε $(A\Delta) = \frac{2}{3}(AB)$. Από το σημείο Δ

φέρουμε τη ΔZ παράλληλη στη $B\Gamma$ (Z σημείο της $A\Gamma$) και από το σημείο Z φέρουμε τη ZE παράλληλη στην AB (E σημείο της $B\Gamma$). Αν $A\Gamma = 12cm$ και $\Gamma E = 2cm$, να υπολογίσετε τα μήκη των AZ και $B\Gamma$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. α) Αν $\frac{\eta\mu^2(90^\circ + \theta) \cdot \tau\epsilon\mu(-\theta)}{\tau\epsilon\mu(270^\circ - \theta) \cdot \eta\mu(180^\circ - \theta)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία θ .

β) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 - 1}{\sigma\phi\theta} = 2 - 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$

2. α) Για ποιες τιμές της παραμέτρου μ , $\mu \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $x^2 + (\mu - 4)x + \mu - 5 = 0$:

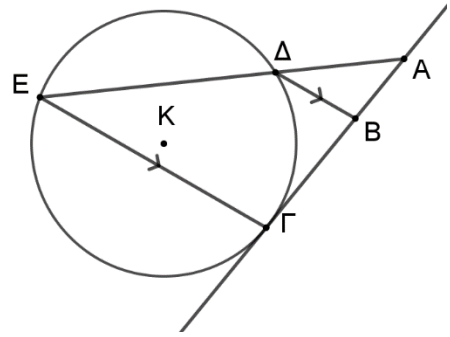
i) έχει λύση τον αριθμό 1

ii) έχει λύσεις αντίστροφες

iii) ισχύει η σχέση $x_1^2 + x_2^2 = 2$

β) Να λύσετε την ανίσωση:
$$\frac{(5-x)(x^2-9)}{(x^2-x-12)(x^2+1)} \geq 0$$

3. Δίνεται κύκλος (K, R) . Από σημείο A εκτός κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη AG (G σημείο επαφής) και την τέμνουσα ADE . Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την EG , η οποία τέμνει την AG στο B . Να δείξετε ότι:



α) $(A\Delta)^2 = (AB) \cdot (AG)$

- β) Αν $A\Delta = 4cm$ και $\Delta E = 12cm$, να υπολογίσετε το μήκος του AG .

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ και $\vec{\beta} = -4\vec{i} - 3\vec{j}$.

- α) Να υπολογίσετε:

- το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$
- το μέτρο της γωνίας (κατά προσέγγιση δεκάτου) των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$

- β) Να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\delta}$, το οποίο να είναι παράλληλο προς το $\vec{\gamma} = \vec{a} - \vec{\beta}$.

5. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) με συντεταγμένες κορυφών $A(1, -3)$, $B(10, 3)$, $\Gamma(5, 4)$ και $\Delta(2, 2)$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς AB .

- β) Να υπολογίσετε:

- την απόσταση του σημείου Δ από την AB
- το μέτρο της οξείας γωνίας $\hat{B}\Delta\Gamma$ (κατά προσέγγιση ακεραίου)
- το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$
- τις συντεταγμένες του σημείου E έτσι ώστε το τετράπλευρο $AGEB$ να είναι παραλληλόγραμμο

ΜΕΡΟΣ Α' Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του μέρους Α'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής και να απλοποιήσετε την απάντησή σας:

α) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ (2 μ.)

β) $\frac{10}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}$ (3 μ.)

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ αν $A(1,2)$, $B(-2,4)$ και $\Gamma(2,5)$.

3. Αν x_1 και x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $2x^2 + 8x + 4 = 0$, να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων χωρίς να λύσετε την εξίσωση:

α) $x_1 + x_2$ (1.5 μ.)

β) $x_1 \cdot x_2$ (1.5 μ.)

γ) $\frac{5}{x_1} + \frac{5}{x_2}$ (1 μ.)

δ) $x_1^2 + x_2^2$ (1 μ.)

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

α) Να υπολογίσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ (2 μ.)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ (2 μ.)

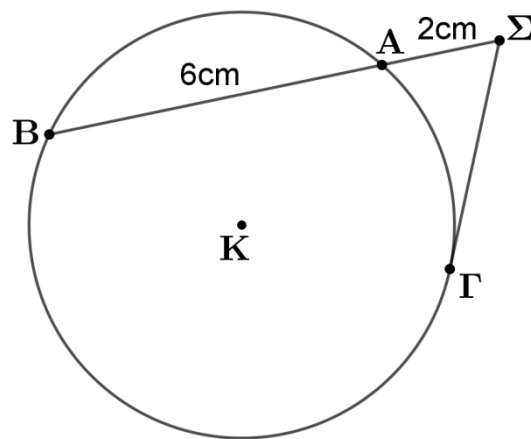
γ) Να απαντήσετε αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας (1 μ.)

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο Κ.

Δίνονται επίσης τέμνουσα ΣΑΒ καθώς και ΣΓ η οποία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Γ όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του μήκους του ευθύγραμμου τμήματος ΣΓ. (4 μ.)

β) Αν η ακτίνα του κύκλου είναι 4cm, να υπολογίσετε την τιμή του μήκους του ευθύγραμμου τμήματος ΣΚ. (1 μ.)



6. Δίνονται τα τέρματα τα οποία σημείωσαν οι ποδοσφαιριστές μιας ομάδας σε μια χρονιά: 7, 3, 11, 8, 21, 15, 5

Να υπολογίσετε:

α) τη μέση τιμή των πιο πάνω παρατηρήσεων. (1 μ.)

β) Το εύρος των παρατηρήσεων. (1 μ.)

γ) Την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων. (2 μ.)

δ) Τον συντελεστή μεταβλητότητας (CV) και να εξετάσετε αν οι παρατηρήσεις παρουσιάζουν ομοιογένεια δικαιολογώντας την απάντησή σας. (1 μ.)

7. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\epsilon\phi\chi + \sigma\phi\chi = \tau\epsilon\mu\chi \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\chi$ (3 μ.)

β) Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = 5 - 2\eta\mu\chi$ (2 μ.)

8. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(x^2 + x - 6)(x^2 - 4)}{(5 - x)} \leq 0$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + \mu^2 - 1$. Να υπολογίσετε τις τιμές της παραμέτρου μ ($\mu \in \mathbb{R}$) για την καθεμία από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

α) Η γραφική παράσταση της πιο πάνω συνάρτησης τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο 8. (2 μ.)

β) Το σύνολο τιμών της πιο πάνω συνάρτησης είναι $[-4, +\infty)$ (3 μ.)

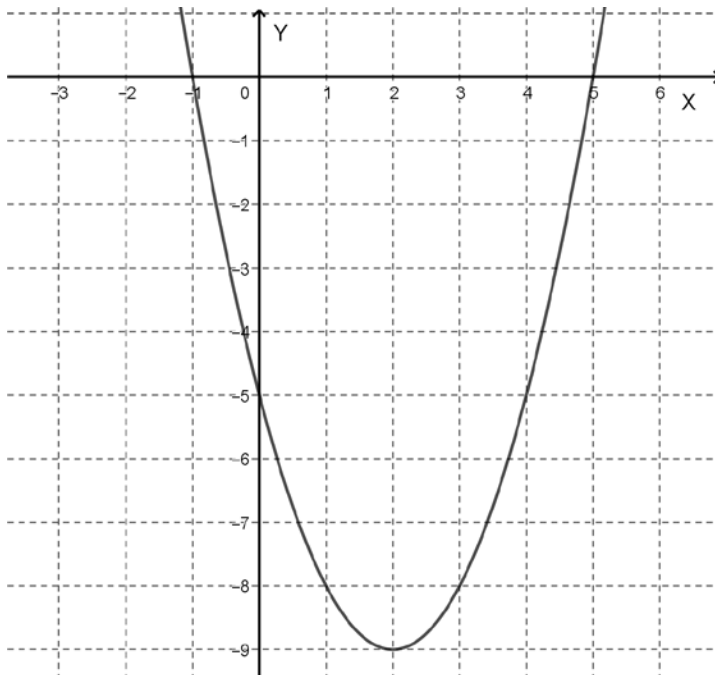
10. Δίνονται οι κορυφές $A(-2,6)$, $B(4,2)$, και $\Gamma(\kappa,\lambda)$ του τριγώνου $AB\Gamma$ με $\kappa,\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $A = 90^\circ$ και το σημείο Γ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $x - y = -10$ να βρείτε τις τιμές των κ και λ . (4 μ.)

β) Αν $\Gamma(2,12)$, να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου AM . (1 μ.)

ΜΕΡΟΣ Β' Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του μέρους Β'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.



Να βρείτε:

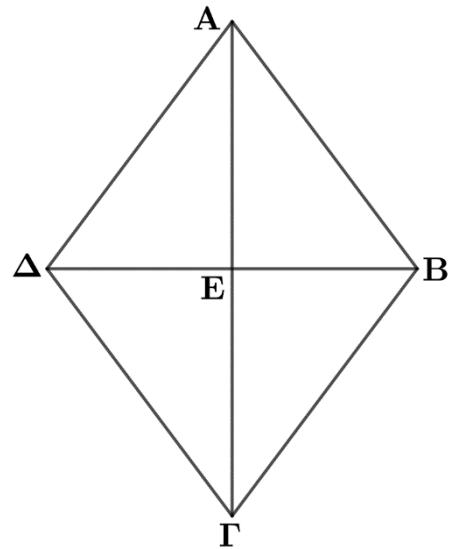
- α) Το πρόσημο του α
- β) Την τιμή του γ
- γ) Τις λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$
- δ) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας
- ε) Τις συντεταγμένες της κορυφής
- στ) Το σύνολο τιμών της f
- ζ) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) > 0$
- η) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) \leq -8$
- θ) Την τιμή του α
- ι) Την τιμή του β

2. α) Αν $180^\circ < \theta < 270^\circ$ και $\frac{\eta\mu(360^\circ - \theta) \varepsilon\varphi(180^\circ + \theta) \sigma\upsilon\nu(270^\circ - \theta)}{\eta\mu(-\theta) \sigma\varphi(90^\circ - \theta)} = \frac{1}{2}$, να υπολογίσετε τη γωνία θ .

β) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} - \sigma\varphi x = \sigma\tau\epsilon\mu x$

3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ και Ε σημείο τομής των διαγωνίων του .

$$\text{Αν } \vec{\Delta\text{B}} = 2\vec{\kappa} \text{ και } \vec{\text{ΑΓ}} = 2\vec{\lambda} .$$



(I) Να εκφράσετε τα πιο κάτω διανύσματα

συναρτήσει των $\vec{\kappa}$ και $\vec{\lambda}$:

α) $\vec{\Delta\text{E}}$ (2 μ.)

β) $\vec{\text{ΑB}}$ (1 μ.)

γ) $\vec{\Delta\text{A}}$ (1 μ.)

(II) Να βρείτε την τιμή του εσωτερικού γινομένου: $\vec{\kappa} \cdot \vec{\lambda}$ (1 μ.)

(III) α) Αν $\vec{\Delta\text{A}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ και $\vec{\text{ΑB}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, να υπολογίσετε την προβολή του διανύσματος

$\vec{\Delta\text{A}}$ στο διάνυσμα $\vec{\Delta\text{B}}$. (3 μ.)

β) Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{\text{BΔA}}$ με προσέγγιση δυο δεκαδικών ψηφίων. (2 μ.)

4. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\text{A}(4,6)$, $\text{Δ}(2,2)$ και η εξίσωση μιας διαγωνίου του $-x + 8y = 14$.

Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες του σημείου Β, (3 μ.)

β) την εξίσωση της άλλης διαγωνίου, (3 μ.)

γ) την περίμετρο και το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, (2 μ.)

δ) την περίμετρο και το εμβαδόν τετραπλεύρου όμοιου προς το ΑΒΓΔ αν ο

λόγος ομοιότητας ισούται με 2 ($\lambda = 2$) και το ΑΒΓΔ είναι το μικρότερο από

τα δυο όμοια σχήματα. (2 μ.)

5. α) Να γράψετε δυο (2) κριτήρια ομοιότητας τριγώνων. (2 μ.)

β) Δίνεται κύκλος (Κ,ρ) και ΑΒ, ΔΓ δυο παράλληλες χορδές του ($\text{ΑB} // \text{ΔΓ}$). Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β. Η προέκταση της χορδής ΔΓ τέμνει την πιο πάνω εφαπτομένη στο σημείο Σ. Να αποδείξετε ότι: $(\text{BΔ})^2 = (\text{BΑ})(\text{ΣΔ})$ (8 μ.)

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Α΄ Προσανατολισμού

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τα δέκα (10) θέματα του Μέρους Α΄.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

Θέμα 1:Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 3x - 10 < 0$.Θέμα 2:

Αν $1 < x < 4$ και $-5 < y < -2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις δείχνοντας όλα τα βήματά σας:

$$(α) A = 2x + 3y \quad (β) B = x \cdot y$$

Θέμα 3:

Δίνονται τα σημεία $A(1, 0)$, $\Gamma(-2, 5)$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

[μον. 2]

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ και τις συντεταγμένες του σημείου Β.

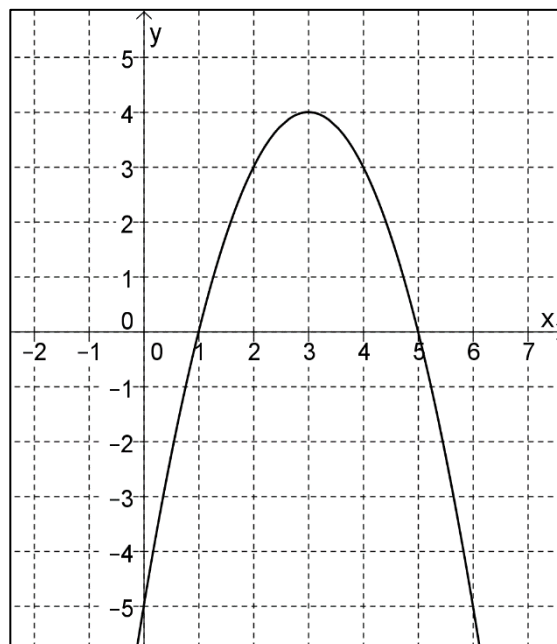
[μον. 3]

Θέμα 4:

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Να βρείτε:

- (α) το πεδίο ορισμού της,
- (β) την τιμή του c ,
- (γ) τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$,
- (δ) το πρόσημο του a (να το δικαιολογήσετε),
- (ε) την τιμή των $f(2)$ και $f(6)$.



Θέμα 5:

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon_1 : 3x + 4y = 12$ και το σημείο $A(8, 2)$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_2 , η οποία περνά από το σημείο A και είναι παράλληλη με την ευθεία ε_1 .

(β) Να βρείτε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 .

Θέμα 6:

Η βαθμολογία 10 μαθητών στο μάθημα των Θρησκευτικών είναι:

13, 15, 20, 13, 19, 16, 13, 16, 16, 19

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβλητότητας CV σε ποσοστό των πιο πάνω βαθμών.

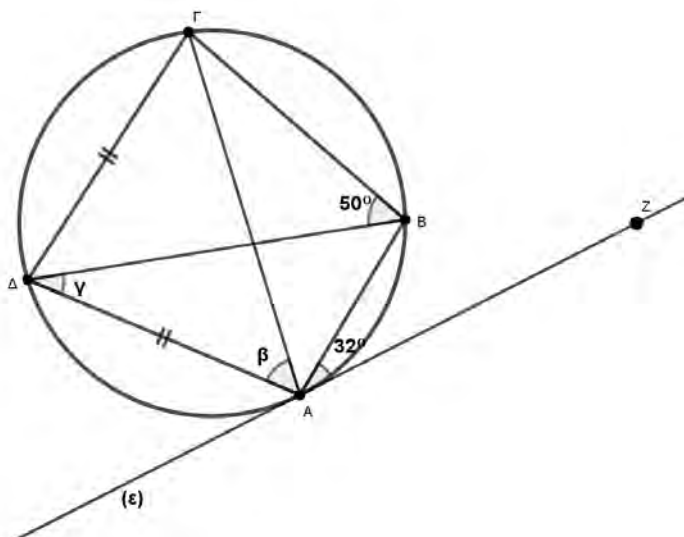
Θέμα 7:

Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A .

Δίνεται $\Gamma\Delta = A\Delta$ και $B\hat{A}Z = 32^\circ$,

$\Gamma\hat{B}\Delta = 50^\circ$. Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών β , γ , $\Delta\hat{\Gamma}B$, $\Delta\hat{A}B$ και το τόξο $\widehat{AB\Gamma}$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



Θέμα 8:

Αν $\eta\mu(\pi - x) - \varepsilon\varphi(-x) - \sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της

παράστασης: $A = 10\sigma\upsilon\nu\chi + 8\varepsilon\varphi\chi$

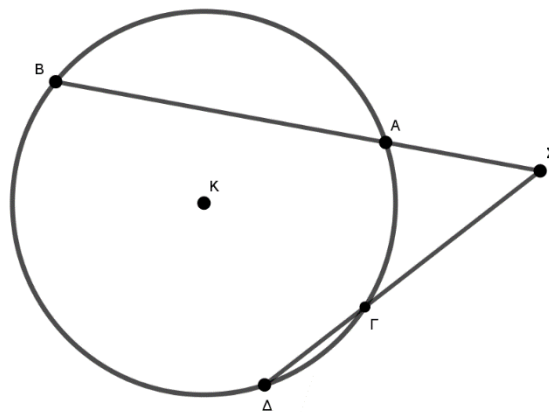
Θέμα 9:

Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) και ΣAB και $\Sigma \Gamma \Delta$ τέμνουσες του κύκλου. Αν $\Sigma A = 4 \text{ cm}$, $AB = 8 \text{ cm}$ και $\Sigma \Gamma = 6 \text{ cm}$, να υπολογίσετε:

(α) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma \Delta$

(β) την ακτίνα R του κύκλου, αν δίνεται

$$\text{ότι } (K\Sigma) = \delta = 6\sqrt{2} \text{ cm}.$$



Θέμα 10:

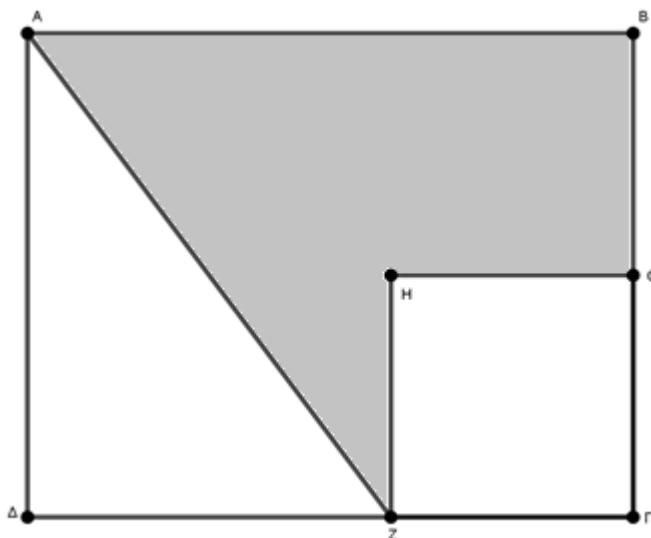
Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με διαστάσεις $AB = 10 \text{ cm}$, $A\Delta = 8 \text{ cm}$ και $ZH\Theta\Gamma$ τετράγωνο.

(α) Αν $\Delta Z = x \text{ cm}$ ($2 < x < 10$), να

δείξετε ότι το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής είναι:

$$E(x) = (-x^2 + 16x - 20) \text{ cm}^2.$$

(β) Να βρείτε το μέγιστο εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής.



ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β'

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

Θέμα 1:

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda - 2)x^2 - 4\lambda x + \lambda - 5 = 0$, $\lambda \neq 2$ με λύσεις x_1, x_2 .

(α) Για ποιες τιμές του λ , $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει λύσεις:

(i) αντίστροφες, [μον. 3]

(ii) ετερόσημες, [μον. 2]

(iii) πραγματικές και άνισες [μον. 3]

(β) Για ποιες τιμές του λ η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = (\lambda - 2)x^2 - 4\lambda x + \lambda - 5$, $\lambda \neq 2$ εφάπτεται του άξονα των τετμημένων; [μον. 2]

Θέμα 2:

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \vec{i} + 2\vec{j}$ και $\vec{\beta} = 3\vec{i} + \vec{j}$.

Να βρείτε:

(α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$,

(β) τη γωνιά των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$,

(γ) την τιμή του κ , έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 2\kappa^2 \\ -\kappa - 2 \end{pmatrix}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$,

(δ) ένα διάνυσμα μοναδιαίο το οποίο να είναι αντίρροπο προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = 4\vec{\alpha} - \vec{\beta}$,

(ε) το διάνυσμα που είναι η προβολή του διανύσματος $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.

Θέμα 3:

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = 2x + 2$ και $\varepsilon_2 : x + 2y = 14$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο A και τέμνουν τον άξονα των x στα σημεία B και Γ αντίστοιχα.

(α) Να δείξετε ότι οι ευθείες τέμνονται κάθετα στο σημείο A και να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ . [μον. 4]

(β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με 45 τ. μον. [μον. 2]

(γ) Εάν $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ . [μον. 1]

(δ) Εάν K το κέντρο του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, να βρείτε τη γωνία $\widehat{BK\Gamma}$. [μον. 2]

(ε) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Z της ευθείας ε_1 , με $y_Z < 0$, έτσι ώστε να ισχύει

$$E_{\triangle BZ\Gamma} = 2 \cdot E_{\triangle AB\Gamma}. \quad [\text{μον. 1}]$$

Θέμα 4:

(α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{\eta\mu\theta}{1-\sigma\upsilon\nu\theta} = 2\sigma\tau\epsilon\mu\theta$, $\sigma\upsilon\nu\theta \neq \pm 1$ [μον. 2]

(β) Να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού με λύσεις $x_1 = \frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}$ και $x_2 = \frac{\eta\mu\theta}{1-\sigma\upsilon\nu\theta}$, $\sigma\upsilon\nu\theta \neq \pm 1$. [μον. 3]

(γ) Αν η εξίσωση που έχει σχηματιστεί είναι $\eta\mu\theta \cdot x^2 - 2x + \eta\mu\theta = 0$,

(i) να βρείτε τις τιμές του θ στο διάστημα $0 < \theta < \pi$, ώστε η εξίσωση να έχει λύση τον αριθμό $\sqrt{3}$. [μον. 3]

(ii) να δείξετε ότι ισχύει $x_1^2 + x_2^2 = 2(2\sigma\phi^2\theta + 1)$. [μον. 2]

Θέμα 5:

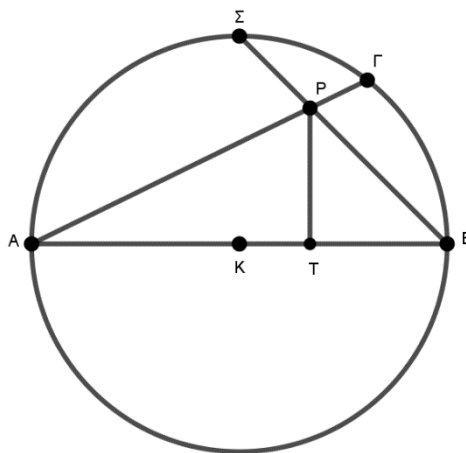
Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) και AB μια διάμετρος του. Αν Γ σημείο στην περιφέρεια του κύκλου και P τυχαίο σημείο της $A\Gamma$, $PT \perp AB$ και η προέκταση της BP τέμνει τον κύκλο στο σημείο Σ , να δείξετε:

(α) $(A\Sigma) \cdot (P\Gamma) = (B\Gamma) \cdot (\Sigma P)$, [μον. 3]

(β) ότι τα τρίγωνα TPA και $AB\Gamma$ είναι όμοια [μον. 3]

(γ) $(AP) \cdot (A\Gamma) = (AT) \cdot (AB)$, [μον. 2]

(δ) $(AP) \cdot (A\Gamma) + (BP) \cdot (B\Sigma) = 4R^2$. [μον. 2]



ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις . Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

1. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $2x^2 - 4x - 3 = 0$, να υπολογίσετε την τιμή της πιο κάτω παράστασης (χωρίς να λύσετε την εξίσωση).

$$A = x_1 + x_2 - 2x_1x_2$$

2. Να λύσετε την εξίσωση $(3 - x)^4 = 16$.

3. Δίνονται οι παρατηρήσεις 15, 17, 13, 16, 14.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.

β) Αν η τυπική απόκλιση των πιο πάνω παρατηρήσεων είναι $s = \sqrt{2}$, να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας (CV) του δείγματος.

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-1,3)$ και σχηματίζει γωνιά $\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$ με τον άξονα των τετμημένων.

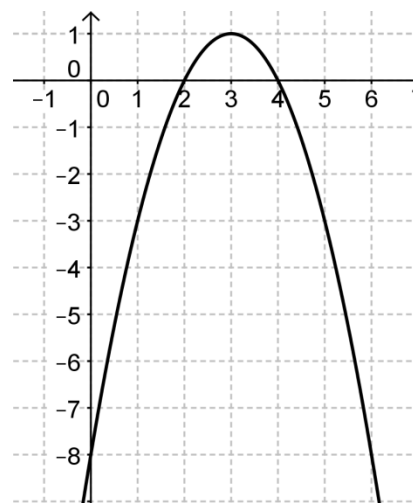
6. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(x^2-1) \cdot (x-4)}{x^2-3x+2} \geq 0$.

7. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$. Να βρείτε:

α) Το σύνολο τιμών της f .

β) Τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) \leq 0$.

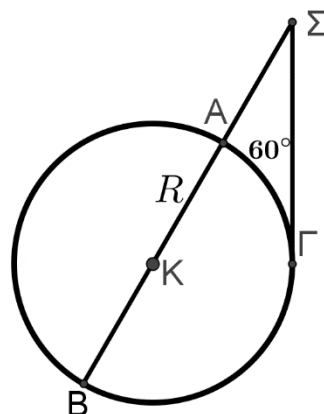
γ) Τις τιμές των a , β και γ .



8. Δίνεται η παράσταση $A = 2\eta\mu(180^\circ - x) - \sigma\upsilon\nu(90^\circ - x)$. Να δείξετε ότι:
 α) $A = \eta\mu x$
 β) Αν $-2 \leq B \leq 3$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $A + B$.

9. Αν $\eta\mu^2\theta = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.
 α) Να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu^2\theta$.
 β) Να δείξετε ότι $\epsilon\varphi\theta = 2 - \sqrt{3}$.

10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) και $\Sigma\Gamma$ εφαπτόμενο τμήμα. Αν $\Sigma A = 2\sqrt{2} \text{ cm}$, $\Sigma\Gamma = 2\sqrt{6} \text{ cm}$, $\widehat{A\Gamma} = 60^\circ$, να υπολογίσετε:
 α) Το μήκος της ακτίνας R .
 β) Το μέτρο της γωνιάς $\Sigma\hat{\Gamma}A$.



ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις . Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{\sigma\varphi^2(\frac{\pi}{2} + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(-\theta)}{\epsilon\varphi(2\pi - \theta) \cdot \eta\mu(\frac{3\pi}{2} - \theta) \cdot \tau\epsilon\mu(\pi - \theta)}$,

$$B = \epsilon\varphi\theta \cdot \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta.$$

Να δείξετε ότι:

- α) $A = -\eta\mu\theta$ και $B = \tau\epsilon\mu\theta$.
 β) $\left(A + \frac{1}{B}\right)^2 = 1 - 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$.

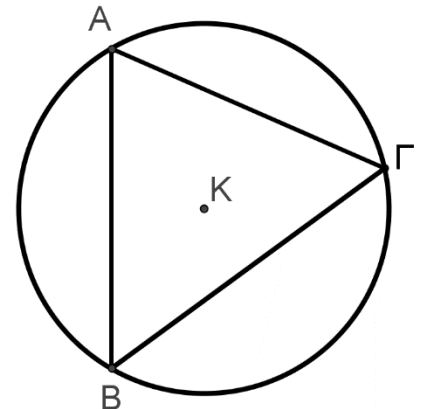
2. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(2, 1)$, $B(4, 5)$, $\overrightarrow{B\Gamma} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -2\vec{i} - 4\vec{j}$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.
 β) Αν K, Λ και M είναι τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων AB , $B\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο και τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{K\Lambda}$ και $\overrightarrow{KM}$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 1 - \varepsilon\varphi^2\theta$, με $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.
- α) Να βρείτε το είδος των λύσεων της εξίσωσης $x^2 - 2x + 1 - \varepsilon\varphi^2\theta = 0$.
- β) Αν x_1, x_2 οι λύσεις της πιο πάνω εξίσωσης:
- i) Να δείξετε ότι $x_1^2 + x_2^2 = 2\varepsilon\mu^2\theta$.
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $x_1^2 + x_2^2 = 4$.
- γ) Αν $\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$, να εξετάσετε κατά πόσον η ευθεία $y = 3x + 6$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. Αν την τέμνει, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

4. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με εξίσωση πλευράς $AB : 2x - 3y + 31 = 0$ και κορυφή $\Delta(-1,1)$. Αν μια από τις κορυφές του είναι το σημείο $(-5,7)$ και η διαγώνιος του $B\Delta$ έχει εξίσωση $-12x + 5y = 17$, να βρείτε:
- α) Την εξίσωση της πλευράς $\Gamma\Delta$.
- β) Τις συντεταγμένες των κορυφών του $AB\Gamma\Delta$.
- γ) Το εμβαδόν του.
- δ) Την απόσταση της κορυφής A από τη διαγώνιο $B\Delta$.
- ε) Την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι διαγώνιοί του.

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R) . Η διχοτόμος AD , του τριγώνου $AB\Gamma$, περνά από το κέντρο του κύκλου τον οποίον τέμνει στο σημείο E . Στο σημείο B φέρουμε την εφαπτομένη(ε) του κύκλου. Η προέκταση της χορδής ΓE τέμνει την εφαπτόμενη(ε) στο σημείο θ . Αν $\Gamma\theta \perp (\varepsilon)$, να δείξετε ότι:



- α) Τα τρίγωνα $B\theta E$ και BEA είναι όμοια.
- β) $(\theta B)^2 = (\theta E) \cdot (\theta \Gamma)$
- γ) Η BE διχοτομεί τη γωνία $\theta \hat{B} \Delta$.
- δ) Το τρίγωνο BEG είναι ισοσκελές.

Τάξη: Α' Λυκείου

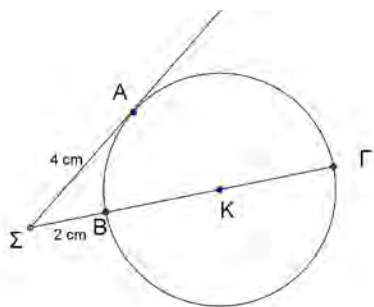
Μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού

Μέρος Α':

1. Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

α) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ β) $\frac{10}{3(\sqrt{7}-\sqrt{2})}$

2. Σε ένα μουσικό διαγωνισμό οι συμμετέχοντες βαθμολογούνται από το κοινό και την κριτική επιτροπή. Η βαθμολογία του κοινού έχει βαρύτητα 60% και της κριτικής επιτροπής 40%. Ποια θα είναι η τελική βαθμολογία ενός διαγωνιζόμενου που βαθμολογήθηκε με 7 από τα 10 από το κοινό και 6 από τα 10 από την κριτική επιτροπή.
3. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $\sqrt{3}-4$ και $\sqrt{3}+4$.
4. Δίνεται κύκλος (K, R). Από σημείο Σ εκτός κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη ΣΑ και την τέμνουσα ΣΒΓ η οποία περνά από το κέντρο του κύκλου. Αν ΣΑ=4cm και ΣΒ=2cm να υπολογίσετε την ακτίνα (R) του κύκλου.



5. Αν $2 < x < 6$ και $-5 < \frac{1}{y} < -1$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι παραστάσεις:

α) $2x+3$, β) $\frac{x}{y}$

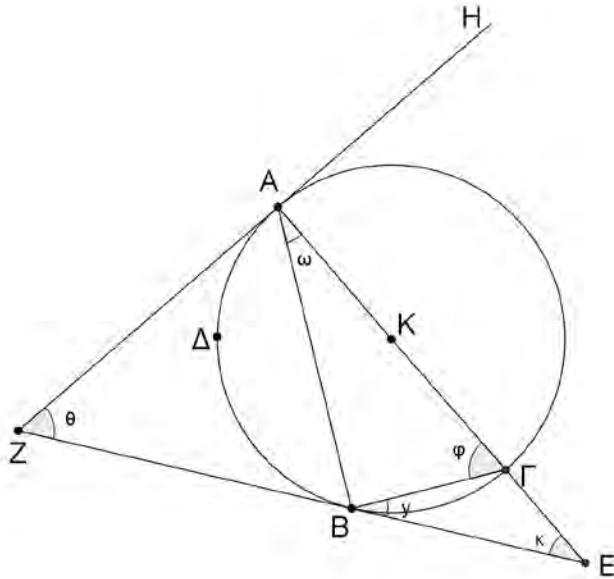
6. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ x & 1 \end{vmatrix}$$

7. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Α.

$$A = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + \varepsilon\varphi\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \eta\mu^2(2\pi - \theta)$$

8. Δίνεται κύκλος (K, R) με ZE και ZH εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία B και A αντίστοιχα. Αν $\hat{\omega} = 20^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\gamma, \varphi, \kappa, \theta$ και το τόξο AΔB.



9. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{(x^2 - 3x)(2x^2 - 3x + 1)}{(1 - x^2)} \leq 0$$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2(\lambda - 4)x - 2\lambda - 3$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

β) Αν x_1 και x_2 ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, να βρείτε την τιμή του λ για να ισχύει η σχέση $x_1^2 x_2^2 - 2(x_1 + x_2) < 21$.

Μέρος Β΄:

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} +3 \\ -4 \end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} +5 \\ -12 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο του διανύσματος $\vec{a}$,

β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\gamma}$,

γ) το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\gamma}$,

δ) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\beta}$ αν ισχύει η σχέση $\vec{\gamma} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$

2. Δίνονται τα σημεία A(1,1) και B(3,5).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος AB είναι $x + 2y = 8$.

β) Αν Γ το σημείο τομής της μεσοκαθέτου με τον άξονα των τετμημένων, να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι (8,0) και να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

γ) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του.

δ) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΔ.

3. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, με $a \neq 0$.

Η εξίσωση του άξονα συμμετρίας της είναι $x = 3$ και η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 18. Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ισούται με 6. Να βρείτε:

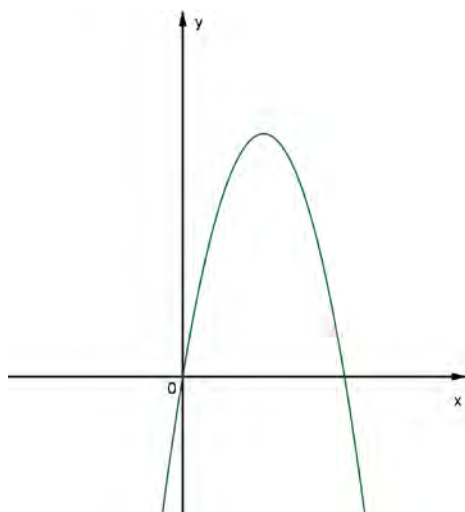
α) το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$

β) τις τιμές των α , β και γ ,

γ) τις ρίζες της εξίσωσης,

δ) το γινόμενο των ριζών (δικαιολογώντας την απάντησή σας),

ε) τη λύση της ανίσωσης $f(x) \leq 0$.



4. Δίνεται η παράσταση $A = (\eta\mu x - \epsilon\phi x)^2 + (\sigma\upsilon\nu x - 1)^2$.

α) Να δείξετε ότι $A = \left(1 - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2$

β) Αν $A = \frac{4}{9}$ να υπολογίσετε την τιμή της $\tau\epsilon\mu x$.

5. Δίνεται κύκλος (K,R) με διάμετρο AB. Παίρνω σημείο Γ στην περιφέρεια του κύκλου έτσι ώστε $\Gamma\hat{K}B = 60^\circ$. Στο σημείο Γ φέρουμε εφαπτομένη (ε). Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ είναι παράλληλο με το ΚΓ (Δ σημείο της εφαπτομένης).

α) Να δείξετε ότι $(AB)(\Delta\Gamma) = (A\Gamma)(B\Gamma)$

β) Στη συνέχεια, να δείξετε ότι $\Delta B = \frac{R}{2}$.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΤΑΞΗ: Α' Λυκείου

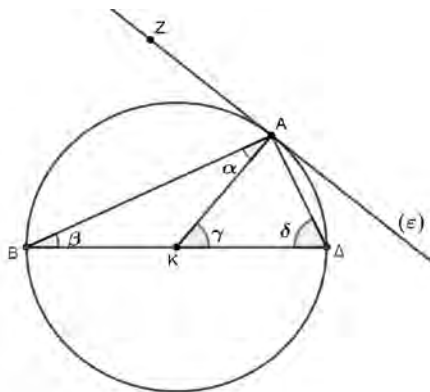
ΜΕΡΟΣ Α'**Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 από τις 100 μονάδες.**

1. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2x+1} = 2$
2. Να υπολογίσετε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt[4]{3} \\ \sqrt[4]{27} & \sqrt{8} \end{vmatrix}$.
3. Στον πιο κάτω πίνακα κατανομής συχνοτήτων δίνονται οι βαθμοί που πήρε ένας μαθητής στα μαθήματα του το Α' τετράμηνο:

Βαθμοί (χ_i)	14	15	16	17	19
Μαθήματα(f_i)	2	1	3	2	1

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή ($\bar{x}$), την τυπική απόκλιση (s) και τον συντελεστή μεταβολής (CV).

4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ο κύκλος με κέντρο Κ και η διάμετρος του ΒΔ. Η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Το Ζ είναι σημείο της (ε) έτσι ώστε $\angle ZAB = 70^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες α, β, γ, δ και $\angle B\hat{A}D$ δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



5. Δίνονται τα σημεία $A(-5,2)$, $B(-1,4)$ και $\Gamma(\kappa-6, \kappa-2)$.

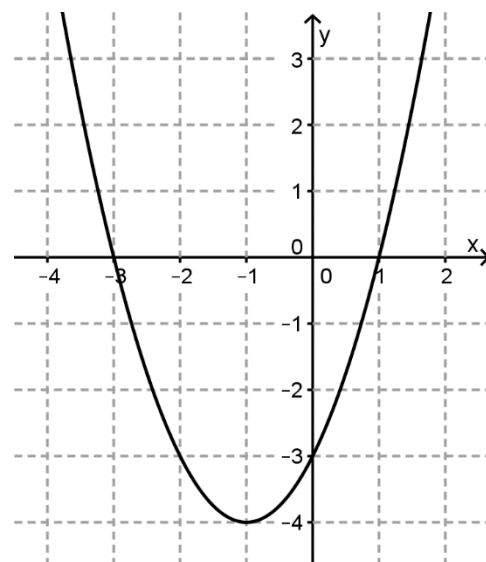
- α) Να εξετάσετε αν το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ είναι μοναδιαίο.
- β) Να βρείτε την τιμή του κ ώστε τα σημεία A, B, Γ να είναι συγγραμμικά.

6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με τύπο

$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma = 0 \quad a \neq 0$$

Να βρείτε:

- (α) το πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών της f
- (β) την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της παραβολής
- (γ) τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$
- (δ) για ποιες τιμές του x είναι $f(x) \geq 0$
- (ε) τις τιμές των a, β, γ .



7. Αν $\eta\mu\omega = -\frac{5}{13}$ και $180^\circ < \omega < 270^\circ$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{13\sigma\upsilon\nu\omega + 26\tau\epsilon\mu\omega}{10\epsilon\phi\omega}$$

8. Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{(x^2+4)(x^2-x-12)}{(2-x)(x-4)} \geq 0$

9. Για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύουν $1 < \alpha < 3$ και $-3 < \beta < -2$.
Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α) $\beta - 3\alpha$ β) $\frac{-3\alpha}{\beta}$ γ) $\alpha^2 - \alpha\beta$

10. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 4 - 2x - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

- (α) Να γράψετε την $f(x)$ στη μορφή $f(x) = \alpha(x + \kappa)^2 + \lambda$, $\alpha \neq 0$
- (β) Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της f και την κορυφή της γραφικής παράστασης
- (γ) Να βρείτε την μέγιστη τιμή της f
- (δ) Να σχεδιάσετε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της f .

ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 από τις 100 μονάδες.

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2\lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

- (α) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.
- (β) Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
- (γ) Το διάνυσμα που είναι η προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$.
- (δ) Την τιμή του λ για την οποία τα διανύσματα $2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι κάθετα.
- (ε) Το μοναδιαίο διάνυσμα που να είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

2. (α) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\varepsilon\varphi\theta}{\tau\varepsilon\mu\theta - 1} - \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta + 1} = 2\sigma\varphi\theta$$

(β) Αν $\frac{\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\tau\varepsilon\mu(-\theta)-1} - \frac{\eta\mu(\pi-\theta)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ και $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, να βρείτε τη γωνία θ .

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (2 - \kappa)x^2 - (\kappa + 1)x + 1$ με $\kappa \neq 2$ και ρίζες x_1 και x_2 .

(α) Να βρείτε την τιμή του κ ώστε η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει ρίζες αντίστροφες .

(β) Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο και δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(γ) Αν $\kappa = 6$, να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες: $\rho_1 = 1 + \frac{\chi_1}{\chi_2}$ και $\rho_2 = 1 + \frac{\chi_2}{\chi_1}$

4. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(2, -3)$ και $B(0,3)$, το ύψος του $B\Delta$ έχει εξίσωση

$$\psi = 2x + 3.$$

(α) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου Δ είναι $(-2, -1)$

(β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία AB .

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$.

(δ) Να υπολογίσετε την γωνία $\Delta\hat{A}B$.

5. Δίνεται ο κύκλος (K, R) με διάμετρο την AB και σημείο Γ του κύκλου διαφορετικό από τα μέσα των ημικυκλίων. Στο σημείο A του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη (ε) και από το A μία χορδή $A\Gamma$. Από το Γ φέρουμε την $\Gamma\Delta$ κάθετη στην (ε) (Δ σημείο της (ε)). Η $\Gamma\Delta$ τέμνει τον κύκλο στο E . Να δείξετε ότι:

(α) $(A\Gamma)^2 = (AB) \cdot (\Delta\Gamma)$

(β) $(\Delta A)^2 = (\Delta E) \cdot (\Delta\Gamma)$

(γ) $(\Delta A)^2 = \frac{(\Delta E) \cdot (A\Gamma)^2}{2R}$

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Α΄ Λυκείου Προσανατολισμού (5-ωρο)

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.
- 2) Να βρείτε χωρίς τη χρήση της υπολογιστικής μηχανής, μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με ακέραιους συντελεστές που να έχει λύσεις τους αριθμούς $x_1 = 5 + 2\sqrt{3}$ και $x_2 = 5 - 2\sqrt{3}$.
- 3) Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) και τα σημεία του A, B, Γ, Δ, E . Αν το τόξο $\widehat{AE\Delta} = 120^\circ$, να υπολογίσετε με πλήρη αιτιολόγηση των απαντήσεών σας, τις γωνίες χ , ψ , ϕ και ω .
- 4) Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x + \psi = 5 \\ x^2 + 3\psi^2 = 21 \end{cases}$$
- 5) Οι βαθμοί ενός φοιτητή στο μάθημα της Μαθηματικής Λογικής είναι οι ακόλουθοι: 6 στην πρώτη ενδιάμεση εξέταση, 7 στην δεύτερη ενδιάμεση εξέταση, 8 στις εβδομαδιαίες εργασίες και 5 στην τελική εξέταση. Αν η πρώτη ενδιάμεση εξέταση έχει βαρύτητα 20%, η δεύτερη ενδιάμεση εξέταση 15%, οι εβδομαδιαίες εργασίες 10% και η τελική εξέταση το υπόλοιπο ποσοστό, να βρείτε τον μέσο όρο των βαθμών του φοιτητή.
- 6) Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος $(K, 3 \text{ cm})$. Από σημείο Σ που βρίσκεται στην προέκταση της διαμέτρου ΓB του κύκλου φέρνουμε την τέμνουσα $\Sigma B \Gamma$ και το εφαπτόμενο τμήμα ΣA .
Αν $\Sigma A = 4 \text{ cm}$, να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΣB .

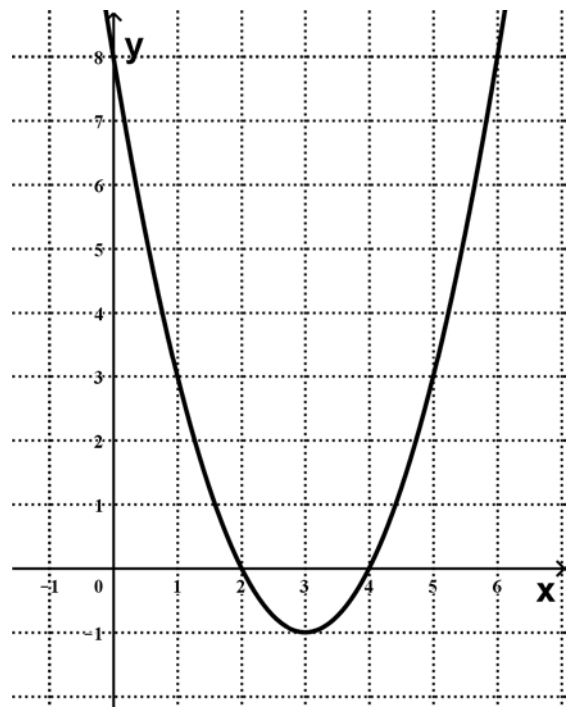
- 7) Αν $25\sigma\upsilon\nu\theta - 7 = 0$ και $270^\circ < \theta < 360^\circ$, να υπολογίσετε με χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = \frac{50 \eta\mu\theta - 24 \sigma\varphi\theta}{7 + 14 \varepsilon\varphi\theta}$$

- 8) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$.

Από το σχήμα να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- β) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας.
- δ) τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής.
- ε) τις τιμές των α , β και γ .



- 9) Αν $-5 < \chi < -2$ και $3 < \psi < 7$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

- α) $3\chi - \psi$
- β) $\frac{\chi}{\psi}$

- 10) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(2x^2+5) \cdot (x^2-3x-4) \cdot (1-x^2)}{3x^2-12} \leq 0$.

ΜΕΡΟΣ Β΄ Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{\delta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5\kappa - 6 \end{pmatrix}$.

- α) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με προσέγγιση δεκάτου.
- β) Να υπολογίσετε την τιμή του κ ώστε τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ να είναι κάθετα.
- γ) Να υπολογίσετε την τιμή του κ ώστε τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$ να είναι παράλληλα.
- δ) Να βρείτε το διάνυσμα που είναι προβολή του διανύσματος $\vec{\alpha}$ στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.

2) Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = (\kappa + 2)x^2 + 2\kappa x + \kappa - 1$, $\kappa \in \mathbb{R} - \{-2\}$, με ρίζες x_1, x_2 .

Να υπολογίσετε στην κάθε περίπτωση, τις τιμές της παραμέτρου κ ώστε:

α) η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να είναι παραβολή που παρουσιάζει μέγιστο.

β) η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να εφάπτεται του άξονα $x'x$.

γ) η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει λύση τον αριθμό $x = -2$.

δ) να ισχύει η ανίσωση $x_1^2 + x_2^2 \geq 1$.

3) Σε ρόμβο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφή $A(1, 4)$ οι διαγώνιες του τέμνονται στο K . Η πλευρά του $A\Delta$ έχει εξίσωση $\begin{vmatrix} 1 & \psi \\ 2 & \chi \end{vmatrix} = -7$ και η διαγώνιος $B\Delta$ εξίσωση $\chi + \psi = -1$.

α) Να βρείτε:

- i) την εξίσωση της $A\Gamma$.
- ii) τις συντεταγμένες του K και των κορυφών B, Δ του ρόμβου.
- iii) τη γωνία που σχηματίζει η διαγώνιος $B\Delta$ με τον άξονα των τετμημένων.

β) Εάν $B(-1, 0)$ και $\Delta(-3, 2)$ είναι οι συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών του ρόμβου, να υπολογίσετε:

- i) την απόσταση της κορυφής B από την πλευρά $A\Delta$ του ρόμβου.
- ii) το εμβαδόν του ρόμβου $AB\Gamma\Delta$.
- iii) τη γωνία A του τριγώνου $AB\Delta$ (με προσέγγιση δεκάτου).

4) Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\tau\epsilon\mu(\pi-\omega) \cdot \epsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) - \sigma\tau\epsilon\mu(\pi+\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu^2(-\omega)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) \cdot \epsilon\varphi(2\pi - \omega)}$$

$$B = (1 + \epsilon\varphi^2\omega) \cdot \left(\frac{1}{\eta\mu\omega} - \eta\mu\omega\right)$$

α) Να δείξετε ότι $A = 1$ και $B = \frac{1}{\eta\mu\omega}$.

β) Αν επιπρόσθετα ισχύει $B^2 = 2A$ και $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε τη γωνία ω .

- 5) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R) . Φέρουμε το ύψος AE του τριγώνου $AB\Gamma$ και τη διάμετρο AD του κύκλου. Η εφαπτομένη του κύκλου στο B και η χορδή $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο Σ .

α) Να δείξετε ότι:

- i) $(AB)(A\Gamma) = (AD)(AE)$
- ii) $(\Sigma B)^2 - (\Sigma\Delta)^2 = (\Sigma\Delta)(\Delta\Gamma)$
- iii) $(\Gamma B)(\Sigma B) = (\Sigma\Gamma)(B\Delta)$

β) Φέρουμε το ύψος EZ του τριγώνου AEB . Να δείξετε ότι: $(EZ)^2 = (ZA)(ZB)$

