

ΛΥΚΕΙΟ ΑΚΡΟΠΟΛΕΩΣ
ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ: 2017-2018

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2018
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22/05/2018
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2,5 ώρες
ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 07:45 π.μ.

ΒΑΘΜΟΣ:.....
ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:.....
ΥΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ:.....

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:..... ΤΜΗΜΑ:.....

- ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ.
- Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο, το οποίο αποτελείται από μία (1) σελίδα.
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν και με μολύβι.)
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, σφραγισμένης από το Σχολείο.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

ΑΣΚΗΣΗ 1:

Στο πιο κάτω φυλλογράφημα παρουσιάζεται ο βαθμός πτυχίου, με άριστα το δέκα (10), για 19 πτυχιούχους φοιτητές της Ιατρικής Σχολής Αθηνών.

9	3 5 8 8
8	4 4 5 6 8
7	3 3 5 5
6	1 2 3 5 5 7

(α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη παρατήρηση και το εύρος των παρατηρήσεων.

(β) Να βρείτε τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

ΑΣΚΗΣΗ 2:

Να επιλύσετε το τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $\alpha = 1 \text{ cm}$ και $\gamma = \sqrt{3} \text{ cm}$ και γωνία $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

ΑΣΚΗΣΗ 3:

$$\text{Av } f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta x + 2, & x < 1 \\ 4ax - 3\beta, & x \geq 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $f\left(\frac{3}{2}\right) = 9$.

ΑΣΚΗΣΗ 4:

Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha) \quad f(x) = \sqrt{3x+2}, \quad x \in \left[-\frac{2}{3}, \infty\right) \qquad (\beta) \quad y = \frac{e^{x^2}}{\eta\mu x}, \quad x \in R - \{\kappa\pi\}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5:

Σε μία ακολουθία (α_n) το άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι $\Sigma_n = \alpha n^2 + \beta n$, $\alpha, \beta \in R$. Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο $\alpha_1 = \alpha + \beta$ και διαφορά $\delta = 2\alpha$.

ΑΣΚΗΣΗ 6:

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow R$, $g: B \rightarrow R$, $A, B \subseteq R$ με $f(x) = x^2 - 4$ και $g(x) = \sqrt{1-x}$.

(α) Να εξετάσετε, αν η συνάρτηση f είναι άρτια, ή περιττή.

(β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{g}{f}$ (τύπος και πεδίο ορισμού).

ΑΣΚΗΣΗ 7:

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ με τύπο $f(x) = xe^x$, $x \in R$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής, να αποδείξετε ότι $f^{(v)}(x) = (x+v) \cdot e^x$, $\forall v \in N$ (όπου $f^{(v)}(x)$ η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης f).

ΑΣΚΗΣΗ 8:

Δίνονται: $A = \frac{\eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{(1+\sigma\upsilon\nu 2x) \cdot (1+\sigma\upsilon\nu x)}$ και $B = \frac{\eta\mu x + \eta\mu 5x + 2\eta\mu 3x}{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 5x}$

(α) Να δείξετε ότι $A = \varepsilon\varphi \frac{x}{2}$ και $B = \sigma\varphi x$.

(β) Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $A = B$.

ΑΣΚΗΣΗ 9:

Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ και το σημείο της $A(x_1, y_1)$.

(α) Να δείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = -\frac{9x}{16y}$.

(β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο A είναι η $\frac{xx_1}{16} + \frac{yy_1}{9} = 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 10:

Παραμετρική καμπύλη ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = 2\tau\epsilon\mu t \\ y = 2\epsilon\varphi t \end{cases}, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

(α) Να δείξετε ότι: $\frac{dy}{dx} = \sigma\tau\epsilon\mu t$ και $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\sigma\varphi^3 t}{2}$

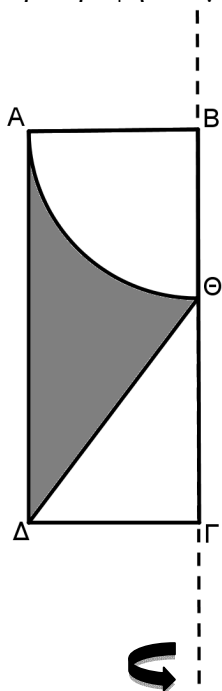
(β) Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση: $y^{-1} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d^2y}{dx^2} - y^{-1} = 0$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

ΑΣΚΗΣΗ 1:

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με διαστάσεις ΑΒ = 6 cm και ΒΓ = 14 cm. Με κέντρο το Β και ακτίνα ΒΑ γράφουμε τόξο ΑΘ εσωτερικά του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που τέμνει τη ΒΓ στο Θ. Να υπολογίσετε:

- (α) το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΔΘ
(β) τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΔΘ γύρω από την ευθεία ΒΓ



ΑΣΚΗΣΗ 2:

- (α) Να δώσετε τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. (μον. 2)
(β) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = |x^3 - 1|$. Να εξετάσετε, κατά πόσο η συνάρτηση f είναι συνεχής. (μον. 4)
(γ) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f . (μον. 4)

ΑΣΚΗΣΗ 3:

- (α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί $\log_{\sin x} \varepsilon \varphi x$, $\log_{\sin^2 x} \varepsilon \varphi x$, $\log_{\sin^4 x} \varepsilon \varphi x$ με $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, είναι διαδοχικοί όροι φθίνουσας γεωμετρικής προόδου.
- (β) Αν οι παραπάνω αριθμοί είναι οι τρεις πρώτοι όροι γεωμετρικής προόδου με $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, να λύσετε την εξίσωση $\Sigma_{\infty} = \log_{\sin x} (\sqrt{3} \cdot \varepsilon \varphi x)$, όπου Σ_{∞} είναι το άθροισμα των άπειρων όρων της.

ΑΣΚΗΣΗ 4:

Έστω συνάρτηση $g(x) = f(e^{x-1} + 2x)$, όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R . Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 2$ εφάπτεται της συνάρτησης f στο σημείο της $M(3, f(3))$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης g στο σημείο της $N(1, g(1))$.

ΑΣΚΗΣΗ 5:

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow f(A)$, $g: B \rightarrow R$, $A, B \subseteq R$ με $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$ και

$$g(x) = \ln x.$$

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων f και g .
- (β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.
- (γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$ (τύπος και πεδίο ορισμού).
- (δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $[0, 1]$.

Ο Διευθυντής

Λοΐζος Σέπος

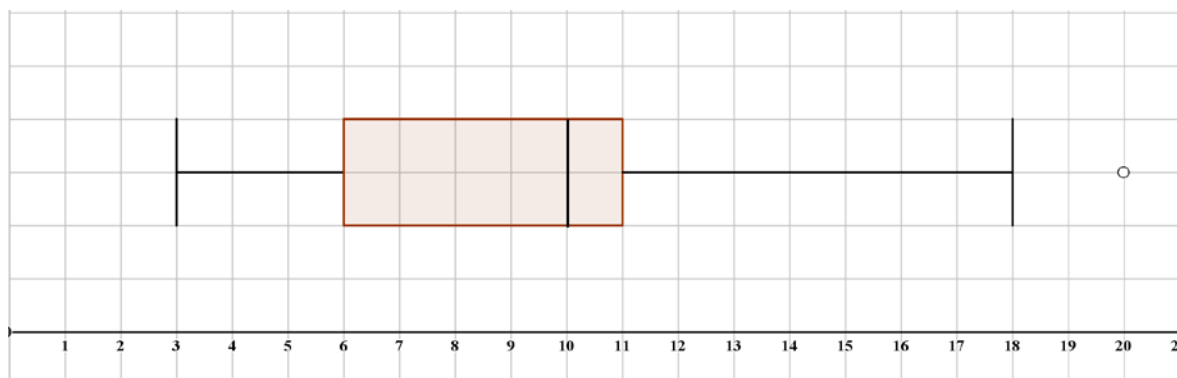
ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Β΄ Λυκείου Κατεύθυνσης

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Το πιο κάτω θηκόγραμμα παρουσιάζει τις τιμές της θερμοκρασίας ($^{\circ}\text{C}$) σε μια ορεινή περιοχή του Τροόδους από τον Ιανουάριο μέχρι τον Μάρτιο.



Από το θηκόγραμμα:

(α) να υπολογίσετε το εύρος (R) των παρατηρήσεων

(β) να βρείτε τα τεταρτημόρια Q_1 , Q_2 , Q_3 , και να υπολογίσετε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος (IQR).

2. (α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = e^x \cdot \eta\mu x$.

(β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $\frac{dy}{dx}$ που ορίζεται από την εξίσωση $x^2 + y^2 = 20$.

3. Αν οι αριθμοί $|x|+2$, x , $|x|-1$ είναι διαδοχικοί όροι Γεωμετρικής Προόδου, να υπολογίσετε τις τιμές του x , $x \in \mathbb{R}$.

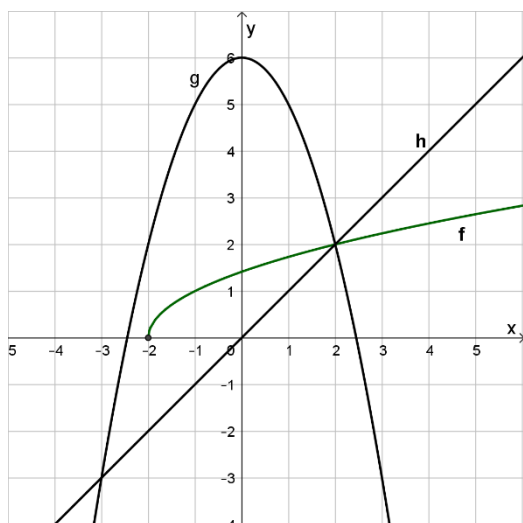
4. Να αποδείξετε την ταυτότητα $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu \alpha}{\eta\mu 2\alpha + \eta\mu \alpha} = \sigma\phi \alpha$.

5. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 - 4}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

6. Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων:
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $g: B \rightarrow (-\infty, 6]$, $h: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$.



Από το διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων:

- α. να υπολογίσετε τις τιμές, αν υπάρχουν,
 (i) $(f + g + h)(-1)$
 (ii) $(g - f)(-3)$
 (iii) $(h \circ g)(-1)$
- β. να βρείτε για ποια τιμή του x ισχύει η σχέση:
 $f(x) = g(x) = h(x)$
- γ. να βρείτε το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης $\frac{h}{f}$.

7. Να αποδείξετε ότι με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι η πρόταση

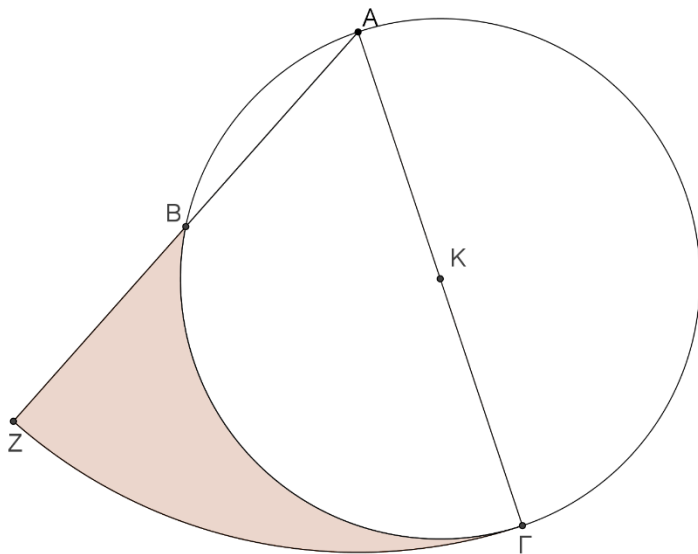
$$p(n) : \frac{3}{3 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{3}{(n+2) \cdot (n+3)} = \frac{n}{n+3} \text{ είναι αληθής για κάθε θετικό ακέραιο } (n \in \mathbb{N}).$$

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $g(x) = \ln x$.

(α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ (Πεδίο Ορισμού και τύπο).

(β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f \circ g$ δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη στο διάστημα $(0, e)$.

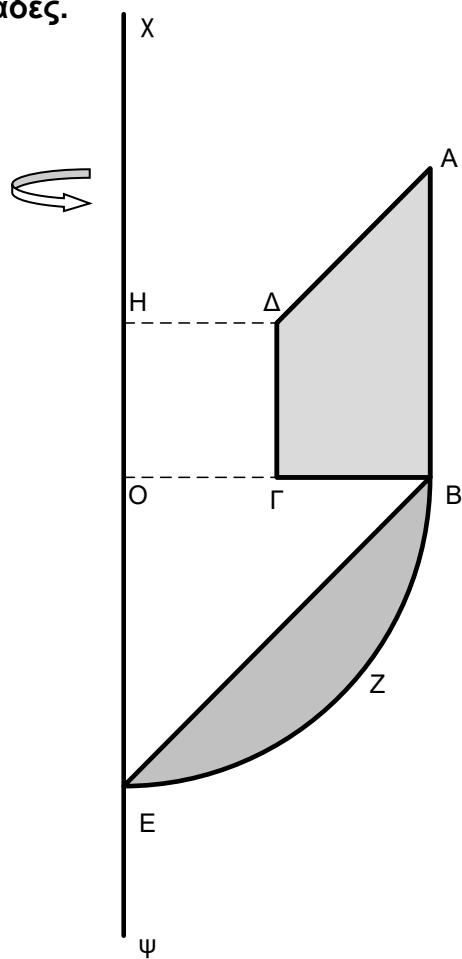
9. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο K και ακτίνα R . Η χορδή AB είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (K, R) και το ευθύγραμμο τμήμα AG είναι διάμετρος του κύκλου (K, R) . Το σημείο Z είναι σημείο τομής της προέκτασης της χορδής AB και της περιφέρειας του κύκλου (A, AG) . Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του σκιασμένου χωρίου, που περικλείεται από το ευθύγραμμο τμήμα BZ και τα τόξα $\widehat{ZG}$ και $\widehat{BG}$, συναρτήσει της ακτίνας R .



10. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - x^2 - 9x - 2$. Να δείξετε ότι:
- (α) η f πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, στο διάστημα $[-2, 0]$
- (β) στο διάστημα $(-2, 4)$ η εξίσωση $x^3 - x^2 - 9x - 2 = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις.

ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο, $(AB // \Gamma\Delta // \chi\psi)$ με γωνία $\hat{A} = 45^\circ$. Ο κυκλικός τομέας $OBZE$ είναι τεταρτοκύκλιο με κέντρο O και ακτίνα $OB = 8\text{ cm}$. Το Γ είναι μέσο του OB και το $ΟΓ\Delta Η$ είναι τετράγωνο. Να υπολογίσετε τον όγκο (V) και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ($E_{ολ}$) του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου χωρίου γύρω από τον άξονα $\chi\psi$.



2. (α) Η παραμετρική καμπύλη (C) ορίζεται από τις εξισώσεις: $\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = 8t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
- (i) Να εξετάσετε αν το σημείο $A(4, -8)$ ανήκει στην καμπύλη.
- (ii) Να δείξετε ότι: $x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 3 \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{20}{y} = 0, \quad t \in (0, +\infty)$.
- (iii) Να εκφράσετε τις παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης (C) σε καρτεσιανή εξίσωση της μορφής $f(x, y) = 0$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $g: A \rightarrow g(A), A = [0, \infty)$ με τύπο $g(x) = 4\sqrt{x}$. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση g^{-1} της g .

3. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$.

(α) Αν ισχύει η σχέση $(\sin A + \sin B)^2 + (\eta\mu A - \eta\mu B)^2 = 4\eta\mu^2 \frac{B}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

(β) Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} = \hat{\Gamma}$) η πλευρά $\alpha = B\Gamma = \sqrt{3} \text{ cm}$ και η πλευρά $\beta = A\Gamma$ είναι η λύση της εξίσωσης $2^{2x} - 2^x - 2 = 0$. Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$.

4. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} \frac{x^{2018} + 2}{x^2 + 1}, & x \leq 0 \\ 2\sigma\upsilon\nu 4x, & x > 0 \end{cases}$

(α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

(β) Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

(γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 3}$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Αν ισχύει η σχέση $f(x^2) + f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

(α) να αποδείξετε ότι $f(1) = \frac{1}{2}$.

(β) να βρείτε την εξίσωση της καθέτου της συνάρτησης f στο σημείο της, με $x = 1$.

(γ) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια στο $\mathbb{R}$.

ΜΕΡΟΣ Α'

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

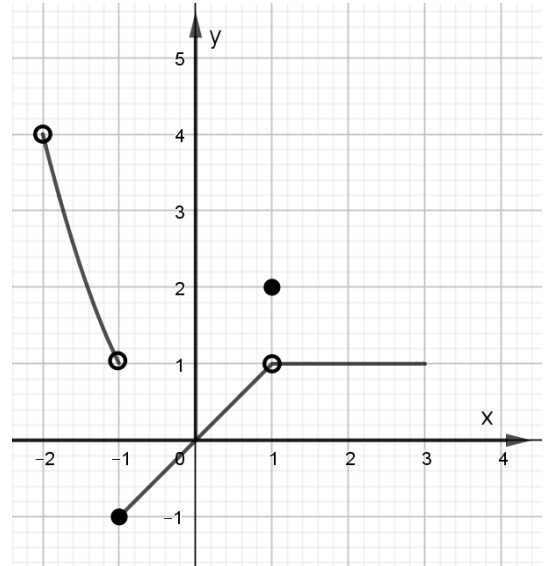
1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(β) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(γ) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

(δ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

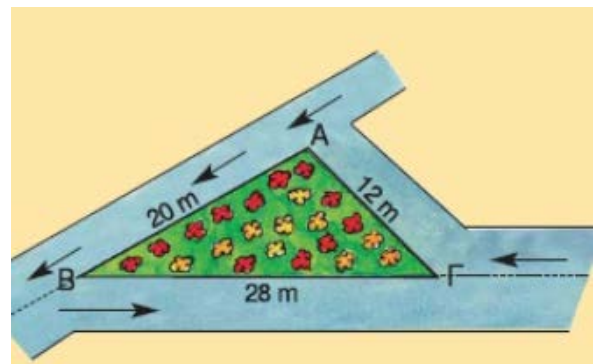


2. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 7$

(β) $y = e^x \sin x$

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κήπου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος.



4. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n ισχύει:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \dots + n \cdot (3n - 1) = n^2 \cdot (n + 1)$$

5. Σε μια εξέταση στα Μαθηματικά πέντε μαθητών η βαθμολογία δυο εξεταστών Α, Β φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

- (α) Να υπολογίσετε τον γραμμικό συντελεστή συσχέτισης.
 (β) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των δυο μεταβλητών (η απάντησή σας να δοθεί κατά προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων).

Εξεταστής Α (x)	Εξεταστής Β (y)
53	54
66	66
63	63
72	73
51	54

6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sin 2x}{4x^2}, & x > 0 \\ (x + \alpha) \ln e^{2\alpha}, & x \leq 0 \end{cases}$

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow f(A)$ με $A = (-\infty, 3)$ και τύπο $f(x) = \frac{2x-1}{x-5}$.

Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f . Αν ορίζεται, να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.

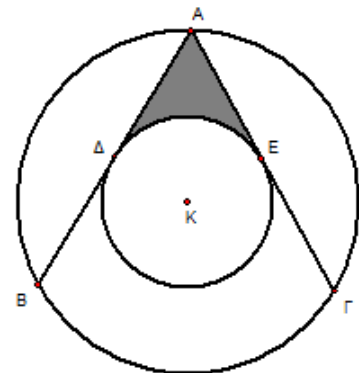
8. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(0, \pi)$.

9. Να λύσετε το σύστημα:

$$2^\psi - 3^\chi = 1$$

$$\psi \cdot \log 2 + \chi \cdot \log 3 = \log 72 - \log 6$$

10. Δίνεται κύκλος (K, R) με χορδές $AB = A\Gamma = \lambda_3$, οι οποίες εφάπτονται στον κύκλο (K, R) στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου μικτόγραμμου τριγώνου $\Delta\Delta E$ συναρτήσει της ακτίνας R .



ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2}{x}$ και $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

(α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο $f'(x) = \frac{2}{x^2}$, με **χρήση του ορισμού** της παραγώγου.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x) = \frac{2}{x}$, στο σημείο της με $x = 3$.

(γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$ και να υπολογίσετε (αν υπάρχει) την τιμή $(g \circ f)(4)$.

(δ) Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο πάνω συναρτήσεις είναι **άρτιες** ή **περιττές** ή **τίποτε** από τα δύο δικαιολογώντας την απάντησή σας.

2. Δίνεται ότι το άθροισμα $\sum_{v=1}^n$ των n -πρώτων όρων μιας ακολουθίας α_v , $v \in \mathbb{N}$ είναι:

$$\sum_{v=1}^n \alpha_v = 3 - \frac{3}{5^n}$$

(α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία δίνεται από τον γενικό τύπο $\alpha_v = \frac{12}{5^v}$.

(β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (α_v) είναι γνησίως φθίνουσα και φραγμένη.

(γ) Αφού δικαιολογήσετε γιατί υπάρχει το όριο της ακολουθίας (α_v) , να το υπολογίσετε.

(δ) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (α_v) είναι γεωμετρική πρόοδος και να υπολογίσετε το άθροισμα των απείρων όρων της.

3. (α) Δίνεται η συνάρτηση $\ln \psi = x \ln 2 + \ln x$ $x > 0, \psi > 0$

i. Να δείξετε ότι: $\frac{d\psi}{dx} = \frac{\psi}{x} + \psi \ln 2$

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{d\psi}{dx} - \psi \ln 2 + 12 = 4^x$ μετασχηματίζεται στη μορφή

$$4^x - 2^x - 12 = 0 \text{ και να βρείτε το } x.$$

(β) Αν $\eta \mu \psi = 2 \eta \mu x$, να δείξετε ότι:

$$\sigma \phi \psi \cdot \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 = -1$$

4. (α) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\alpha + \beta = 4R \sin \frac{\Gamma}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

(β) Να αποδείξετε ότι:
$$\frac{2\eta\mu 5\chi \cdot \sigma\upsilon\nu 3\chi - \eta\mu 8\chi}{2\sigma\upsilon\nu 3\chi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\chi - \sigma\upsilon\nu 5\chi} = 2\eta\mu\chi.$$

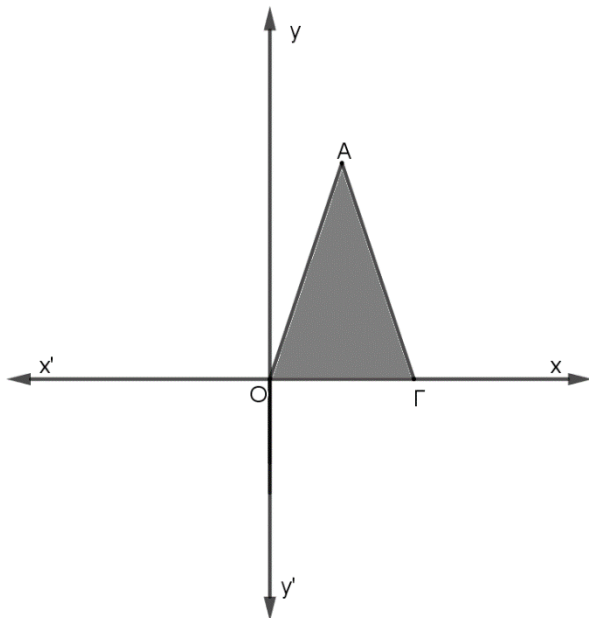
- (γ) Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ταυτότητα ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2\eta\mu 5\chi \cdot \sigma\upsilon\nu 3\chi - \eta\mu 8\chi}{2\sigma\upsilon\nu 3\chi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\chi - \sigma\upsilon\nu 5\chi} = \epsilon\phi\chi, \text{ στο διάστημα } [0, \pi].$$

5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΟΓ με $AO = AG$ και κορυφή Α με συντεταγμένες $A(\alpha, \beta)$.

Να βρείτε:

- (α) τον όγκο V_1 του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του τριγώνου ΑΟΓ γύρω από τον άξονα yy' , συναρτήσει των α και β .
- (β) τον όγκο V_2 του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του τριγώνου ΑΟΓ, γύρω από τον άξονα xx' , συναρτήσει των α και β .
- (γ) τα μήκη των α και β , αν $V_1 = V_2$ και $AO = \sqrt{10} \text{ cm}$.
- (δ) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα yy' , αν $\alpha = 1 \text{ cm}$ και $\beta = 3 \text{ cm}$.



ΜΕΡΟΣ Α' (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2+7}{x^2+5x-2}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}$$

A2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x) = \sqrt{x} + \eta\mu 2x$$

$$(\beta) g(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

A3. Να εξετάσετε, ως προς τη μονοτονία, την ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_n = 3 - \frac{1}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

A4. Να δείξετε ότι οι αριθμοί $\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, $\sqrt{\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}$, $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

A5. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu^2 2x}{\eta\mu 2x + 2\eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sigma\phi 2x}{2}$

A6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + 3$, $x \in [0, 3]$ και $g(x) = \sqrt{5-x}$.
Να ορίσετε την συνάρτηση $g \circ f$.

A7. Κύλινδρος του οποίου το ύψος είναι διπλάσιο της ακτίνας του, είναι εγγεγραμμένος σε σφαίρα. Αν E_1 είναι το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου και E_2 το εμβαδόν της σφαίρας, να δείξετε ότι $\frac{E_1}{E_2} = \frac{3}{4}$.

A8. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = ae^x + \beta e^{-x} - 10$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τα α και $\beta \in \mathbb{R}$, αν $f(0) = 0$ και $f'(\ln 3) = 0$.

(β) Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 9$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο με τετμημένη ίση με $\ln 3$.

A9. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 3, & x < 0 \\ \alpha x + \beta, & x \geq 0 \end{cases}$

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

A10. Να λύσετε την εξίσωση: $\log_3(8^{\sin x}) - \log_3\left(\frac{1}{27 \cdot 4 \eta \mu^2 x}\right) = 3$

ΜΕΡΟΣ Β' (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τους βαθμούς του Β' τετράμηνου και τους βαθμούς στις τελικές εξετάσεις 10 μαθητών ενός τμήματος της Β' Λυκείου στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης.

Βαθμοί Β' τετράμηνου (x_i)	11	12	13	20	18	14	19	19	12	12
Βαθμοί τελικών εξετάσεων (y_i)	6	3	10	18	14	12	16	16	6	9

(α) Να κατασκευάσετε θηκόγραμμα για τους βαθμούς του Β' τετράμηνου. (μον.3)

(β) Να υπολογίσετε τον συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των βαθμών του Β' τετράμηνου και των βαθμών των τελικών εξετάσεων. (μον.7)

B2. (α) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+2}$ και $g(x) = \sqrt{x^2-4}$.

Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ είναι ίσες. Σε περίπτωση που είναι $f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο είναι $f = g$. (μον.4)

(β) Δίνεται η συνάρτηση $h: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = x$.

Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $g - h$ και $\frac{g}{h}$.
Στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g - h)$. (μον.6)

B3. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \log_a x$

(α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f καθώς και το σύνολο των πραγματικών τιμών που μπορεί να πάρει το a . (μον.3)

(β) Να δείξετε ότι $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ και στη συνέχεια να βρείτε την $f'(x)$. (μον.3)

(γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $\log_a x + \log_{a^2} x + \log_{a^4} x + \dots$ (μον.4)

B4. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $e^{\varphi 2y} = e^x$.

(α) Να δείξετε ότι: $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{2+2e^{2x}}$ (μον.3)

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $e^x \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}$ (μον.3)

(γ) Να δείξετε ότι: $4e^x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{e^x}{2(1+e^{2x})}$ (μον.4)

B5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) και χορδή AB ίση με πλευρά κανονικού εξαγώνου, εγγεγραμμένου στον κύκλο. Με κέντρο το A και ακτίνα ίση με AB γράφουμε τόξο $B\Gamma$ μέσα στον κύκλο.

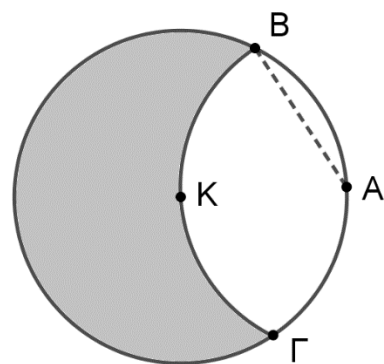
Να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν και

(μον.6)

(β) την περίμετρο του σκιασμένου χωρίου, συναρτήσει της ακτίνας R .

(μον.4)



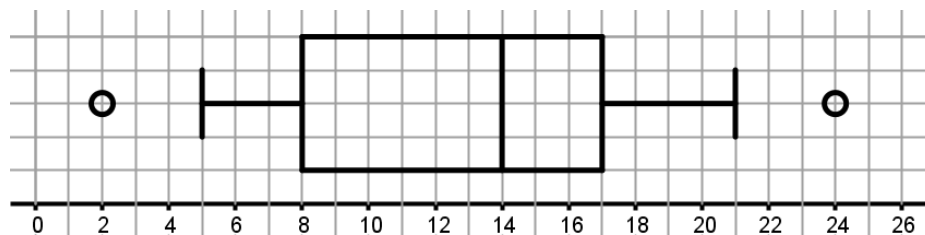
ΤΑΞΗ Β΄

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Μέρος Α: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Η κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Στο πιο κάτω θηκόγραμμα παρουσιάζεται η κατανομή του ύψους των δέντρων σε ένα δάσος.



Υψος δέντρων σε μέτρα

- α) Να βρείτε τις ακραίες παρατηρήσεις, αν υπάρχουν.
- β) Να βρείτε τη διάμεσο του ύψους των δέντρων, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο.
- γ) Να βρείτε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος του ύψους των δέντρων.

A2. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^4 - 3\sqrt{x} + \frac{4}{x}$

β) $y = e^{2x} \cdot \sin(3x)$

A3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 - |x + 1|}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

A4. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2x + 5}{6x^2 - 5x + 1}$

β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x+7}}{x-2}$

A5. Δίνεται ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας (α_n) , $n \in \mathbb{N}$ είναι $\Sigma_n = 3n^2 + n$

- α) Να βρείτε το γενικό όρο της ακολουθίας (α_n) .
- β) Αν ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι $\alpha_n = 6n - 2$, να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα αριθμητική πρόοδος.

- A6. Σε κύκλο (K, R) δίνεται η χορδή $AB = \lambda_6$. Με διάμετρο τη χορδή AB γράφουμε ημικύκλιο AEB έξω από τον κύκλο. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του μηνίσκου που σχηματίζεται, συναρτήσει του R .
- A7. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\alpha = 2\gamma$ και $\hat{B} = 60^\circ$.
Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου.
- A8. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = 2^x$.
α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της $f(x+1)$.
β) Να λύσετε την εξίσωση : $x + \log_2(4 - f(x+1)) = 2\log_4(2 - f(x))$.
- A9. Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$, ο αριθμός $A = 2^{n+2} + 3^{2n+1}$ είναι πολλαπλάσιο του 7.
- A10. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ , ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 - x + \beta, & x < 2 \\ 2, & x = 2, \\ x^2 + \gamma x - 4, & x > 2 \end{cases}$$
 να είναι παραγωγίσιμη στο $x = 2$.

ΤΕΛΟΣ Α΄ ΜΕΡΟΥΣ

Μέρος Β: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Η κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- B1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow f(A)$ και $g: B \rightarrow g(B)$ με τύπους

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-3} \quad \text{και} \quad g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{αντίστοιχα.}$$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η συνάρτηση f^{-1} και αν ορίζεται να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.
- γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι περιττή.
- δ) Να εξετάσετε αν ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$.

B2. Δίνεται η καμπύλη (C) με παραμετρικές εξισώσεις: $x = 3t^2 + 6t$, $y = t^3 + 6t$, $t \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη πρώτη παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ και δεύτερη παράγωγο $\frac{d^2y}{dx^2}$ της συνάρτησης που ορίζεται από τις πιο πάνω παραμετρικές εξισώσεις.

β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της καμπύλης (C) δεν δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Να βρείτε το σημείο της καμπύλης C στο οποίο παρουσιάζει κατακόρυφη εφαπτομένη.

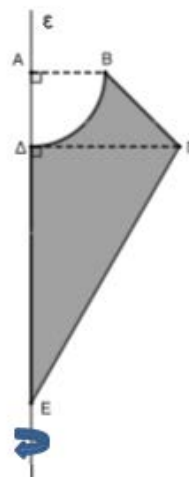
B3. Στο πιο κάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $B\hat{\Gamma}\Delta = 45^\circ$.

Το τόξο $\widehat{B\Delta}$ ανήκει στον κύκλο (A, AB) με $AB = 2\text{cm}$. Το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\Delta\hat{\Gamma}E = 60^\circ$. Το σκιασμένο χωρίο $\Delta B\Gamma E$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε).

Να υπολογίσετε:

α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και

β) τον όγκο του στερεού, που παράγεται.



B4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\sin 2x}{1 - \sin 2x - \eta \mu 2x} \cdot \frac{2\eta \mu x}{1 + \sigma \varphi x}$ και $g(x) = \frac{\sigma \varphi 3x \cdot \sigma \varphi x + 1}{\sigma \varphi x - \sigma \varphi 3x} \cdot \frac{2\varepsilon \varphi x}{1 + \varepsilon \varphi^2 x}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = -\eta \mu x$ και $g(x) = \sin 2x$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(3x) - f(x) = g(x)$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot g(x)}{x^2 + 1}$.

B5. Δίνεται η καμπύλη (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της (C) στο σημείο της A(α συν θ, β ημ θ) είναι η ευθεία (ε): β συν θ · x + α ημ θ · y = α β.

β) Αν $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = 1$ και $\theta = \frac{\pi}{4}$ να δείξετε η ευθεία (ε) και η γραφική παράσταση της

$y = \ln x$ έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο $T(x_0, y_0)$ με $x_0 \in (1, 2)$.

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Δίνονται οι βαθμοί 10 μαθητών στο μάθημα των Αρχαίων: 10,12,11,18,12,19,13,12,14,13.

α) Να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια Q_1 , $x_5=Q_2$, Q_3 και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

β) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο θηκόγραμμα.

A2. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

α) $\log_x 9 = 2$

β) $4^x + 4 \cdot 2^x - 32 = 0$

A3. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{x}$

β) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{x^2 - x - 6}$

A4. Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $y = x^4 + \ln(x^2 + 1) + \sqrt{x} - 7$

β) $y = e^{2x} \cdot \sin x$

A5. Δίνονται οι τρεις πρώτοι όροι Αριθμητικής Προόδου: $\log(x^2 + 2x)$, 2, $\log x - \log(x + 2)$. Να υπολογίσετε την τιμή του x .

A6. Δίνεται η ακολουθία $(\alpha_n), n \in \mathbb{N}$, με γενικό όρο $\alpha_n = \frac{2 \cdot 3^{n-1}}{5^n}$.

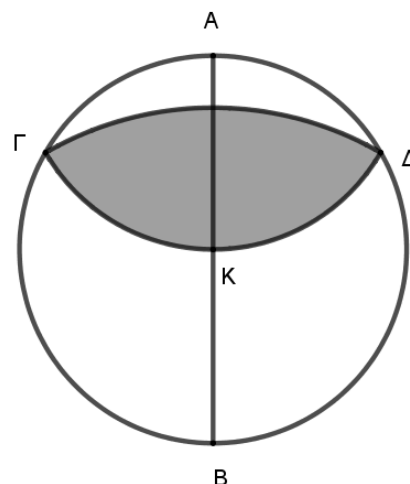
α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (α_n) είναι απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος. (2 μ.)

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των απείρων όρων της ακολουθίας (α_n) . (1,5 μ.)

γ) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (α_n) είναι φραγμένη.

(1,5 μ.)

A7. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K,R) και AB διάμετρος του. Με κέντρο το A και ακτίνα AK γράφουμε τόξο $\widehat{AK\Delta}$ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Γ και Δ . Με κέντρο το σημείο B και ακτίνα $B\Gamma$ γράφουμε τόξο $\widehat{B\Delta}$ μέσα στον κύκλο.



α) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = R\sqrt{3}$. (1 μ.)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο της σκιασμένης επιφάνειας συναρτήσει του R . (4 μ.)

A8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 2x}{x} & , x < 0 \\ 2 & , x = 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} & , x > 0 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

A9. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ για το οποίο ισχύει : $\frac{\beta}{R} = 3 \cdot \frac{\eta\mu A + \eta\mu \Gamma}{\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu \Gamma}$ (όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου).

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = 120^\circ$.

β) Αν επιπλέον το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και έχει εμβαδόν $E = \frac{27\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$, να επιλύσετε το τρίγωνο.

A10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ και $h: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους : $f(x) = \frac{x-3}{x-1}$,

$$g(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{|x|-1} \text{ και } h(x) = \frac{x-3}{|x-1|}.$$

α) Να δείξετε ότι το πεδίο ορισμού της g είναι $B = \left[-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$. (1,5 μ.)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{g}{f}$. (2 μ.)

γ) Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις f και h είναι ίσες. Σε περίπτωση που δεν είναι ίσες, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ώστε οι συναρτήσεις να είναι ίσες .
(1,5 μ.)

Μέρος Β: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Δίνεται η καμπύλη $C : 4(x+1)^2 + (2y-3)^2 = 25$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο $A(1,3)$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης ,στα οποία η εφαπτομένη της είναι οριζόντια.

B2. Δίνεται η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2\ln x$ και η συνάρτηση $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

α) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
(1,5 μ.)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.
(3,5 μ.)

γ) Αν η συνάρτηση $f \circ g$ έχει τύπο $(f \circ g)(x) = 2\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.
(1 μ.)

δ) i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη.
(2 μ.)

ii) Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση της g για $x > 1$.
(2 μ.)

B3. α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει: $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = f\left(\frac{1}{n}\right)$

ii) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) < f(2)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση : $\log_{\eta\mu\chi} 2 + \log_2\left(\frac{\eta\mu\chi}{4}\right) = -4$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

B4. Στο πιο κάτω σχήμα το ΔΗΓΘ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το ΗΕΖ

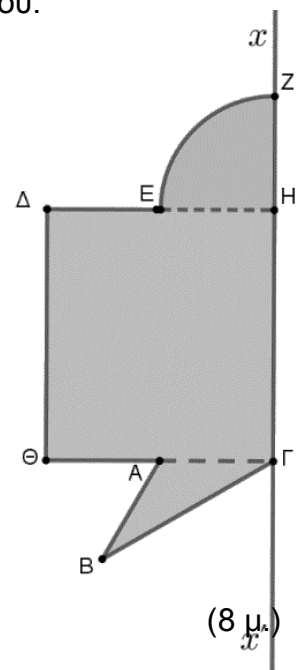
τεταρτοκύκλιο. Τα σημεία Ε, Α είναι τα μέσα των πλευρών ΔΗ και ΓΘ αντίστοιχα. Δίνεται ότι $\widehat{ΑΒ} = 120^\circ$, $HZ = 2\text{cm}$ και $H\Gamma = 3\sqrt{3}\text{cm}$.

α) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\beta \cdot \text{συν}\Gamma = \gamma \cdot \text{συν}Β$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (2 μ.)

β) Στη συνέχεια, η σκιασμένη επιφάνεια ΑΒΓΗΖΕΔΘΑ κάνει πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα xx' .

i) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού.



B5. Παραμετρική καμπύλη (Κ) ορίζεται από τις εξισώσεις:
$$\begin{cases} x = \text{συν}^4\theta \\ y = 3\text{συν}\theta + \text{συν}3\theta \end{cases}, \quad \theta \neq \frac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

α) Να δείξετε ότι: $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{\text{συν}\theta}$. (4 μ.)

β) Να δείξετε ότι: $4x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$. (3 μ.)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{dy}{dx} = 8 \cdot \text{συν}^2 \frac{\theta}{2} - 4$. (3 μ.)

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2018ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΤΑΞΗ: Β΄ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**ΜΕΡΟΣ Α΄:** Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $y = 5x^3 - 2\sqrt{x}$

(β) $y = \frac{x^2 + 1}{e^{2x}}$

2. (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{|x + 3| - 1}$.

(β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

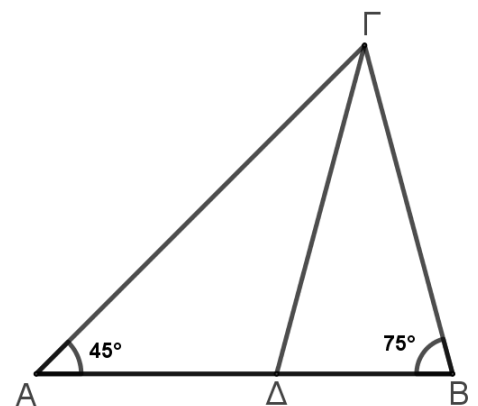
3. (α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Bolzano.

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^2 - \sqrt{x} + 5 - \frac{12}{x} - 4x = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(1, 4)$.

4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, $AB = 30\text{cm}$, $\hat{B} = 75^\circ$, $\hat{A} = 45^\circ$ και ΓΔ διχοτόμους της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

(α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές.

(β) Να υπολογίσετε το μήκος της διχοτόμου ΓΔ.

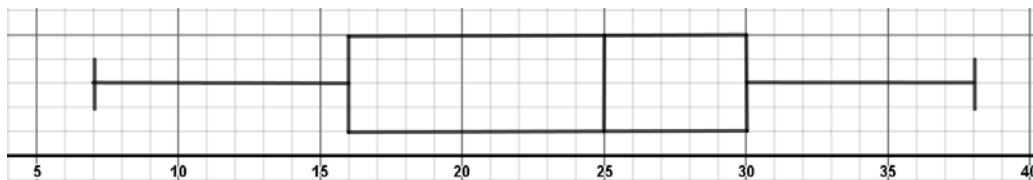


5. Στο πιο κάτω φυλλογράφημα δίνεται το φιλοδώρημα (σε ευρώ) 15 σερβιτόρων του ξενοδοχείου Α για μια μέρα εργασίας.

5	3
4	0 0
3	0 1 9
2	0 1 3 6 7 7
1	2 5 9

(α) Αν το ενδοτεταρτημοριακό εύρος (IQR) των παρατηρήσεων είναι 19 να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ακραίες παρατηρήσεις.

(β) Το πιο κάτω θηκόγραμμα παρουσιάζει το φιλοδώρημα (σε ευρώ) κάποιων σερβιτόρων ενός ξενοδοχείου Β για την ίδια μέρα εργασίας.



- (i) Ποιου ξενοδοχείου το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερο;
(ii) Αν εκείνη τη μέρα στο ξενοδοχείο Β εργάστηκαν 20 σερβιτόροι, να υπολογίσετε τον αριθμό των σερβιτόρων που πήραν φιλοδώρημα το πολύ €30.

6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = g(x)$.

(α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $y = g(x)$.

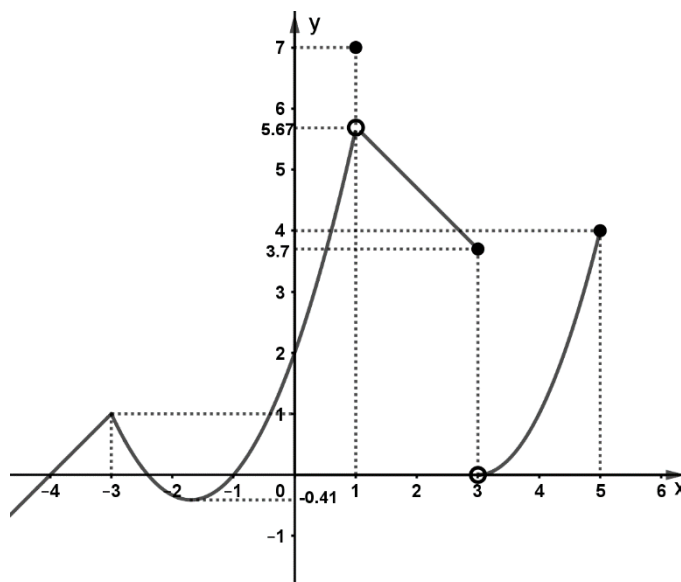
(β) Να βρείτε:

(i) Την τιμή της $(g \circ g)(-3)$.

(ii) Τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$, αν υπάρχουν.

(iii) Τις τιμές του x για τις οποίες η g δεν είναι συνεχής.

(iv) Τις τιμές του x για τις οποίες η g δεν είναι παραγωγίσιμη.



7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x-2)$, $x \in (2, +\infty)$.

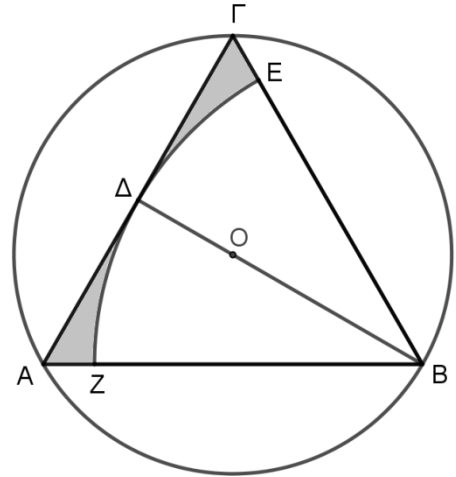
(α) Να δείξετε ότι $100^{\log \sqrt{6}} = 6$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $4 \cdot 4^{f(x)} - 9 \cdot 2^{f(x)} + 100^{\log \sqrt{6}} - 4 = 0$.

8. Στο διπλανό σχήμα το εμβαδόν του κύκλου είναι $25\pi\text{cm}^2$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο και το τόξο $\widehat{ZE}$ δημιουργήθηκε με κέντρο το Β και εφάπτεται της ΑΓ στο σημείο Δ. Να υπολογίσετε:

(α) Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

(β) Την περίμετρο του σκιασμένου χωρίου.



9. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} & , x > 3 \\ \alpha x^2 + \beta x - 2e^{3-x} & , x \leq 3 \end{cases}$$

(α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$.

(β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, συναρτήσεσι των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(γ) Να βρείτε τα α, β ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 3$ και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$.

10. (α) Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{v-1}} = 2 - 2^{1-v}$$

(β) Δίνεται ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας $a_n, n \in \mathbb{N}$, είναι $S_n = 2^n - 1$.

(i) Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος της ακολουθίας είναι $\alpha_v = 2^{v-1}$, $v \in \mathbb{N}$.

(ii) Να εξετάσετε την ακολουθία ως προς τη μονοτονία.

(iii) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα $ΕΔ = 4\text{ cm}$, $ΑΔ = 12\text{ cm}$, $ΒΓ = 13\text{ cm}$, το σημείο Β απέχει 11 cm από τον άξονα $ΧΥ$, $ΑΒ \parallel ΓΕ$ και $ΓΖ$ τεταρτοκύκλιο με κέντρο το Ε. Το σκιασμένο μέρος του σχήματος περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $ΧΥ$.

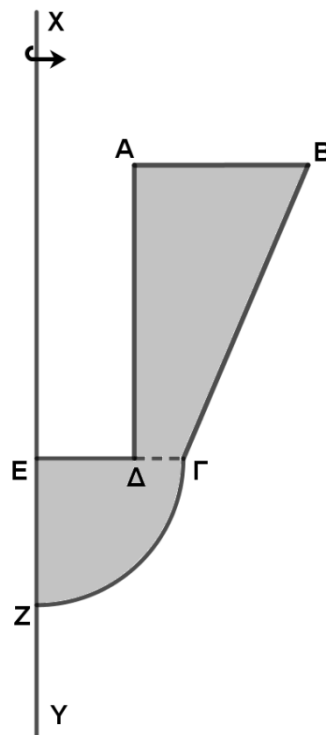
(α) Να δείξετε ότι $ΓΔ = 2\text{ cm}$.

(β) Να υπολογίσετε:

(i) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

(ii) Τον όγκο του στερεού που παράγεται.

(γ) Αν το άδειο κυλινδρικό δοχείο που παράγεται από την περιστροφή γεμίζει νερό με ρυθμό $48\text{ cm}^3/\text{sec}$, να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο ανεβαίνει το ύψος της στάθμης του νερού.



2. Οι αριθμοί $\log(3 \cdot 2^{\alpha} - 1)$, $\log(4 \cdot 2^{\alpha} - 1)$, $\log(8 \cdot 2^{\alpha} - 2)$ με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(α) Να δείξετε ότι $\alpha = -1$.

(β) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{\ln x - 1} - \frac{1}{\ln x + 1} < -2$.

3. Έστω $A = 2 \cdot \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \eta \mu \theta} \cdot \frac{\sin 2\theta}{1 + \sin 2\theta}$ και $B = \frac{\sin^3 \theta - \sin 3\theta}{\sin \theta} + \frac{\eta \mu^3 \theta + \eta \mu 3\theta}{\eta \mu \theta}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $A = 1 - \epsilon \phi \theta$ και $B = 3$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $(1 - A)^2 = \frac{1}{B}$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ και $g(x) = \frac{x}{\ln x}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(β) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή, στο πεδίο ορισμού της.

(γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(1-x)}{4[f(x)]^2}$.

(δ) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $g \circ f$.

(ε) Να αποδείξετε ότι η $f: A \rightarrow f(A)$, $A = (0,1)$ είναι αντιστρέψιμη.

5. Δίνεται η παραμετρική καμπύλη (c) που ορίζεται από τις εξισώσεις:
$$\begin{cases} x = 6\ln(\sin\theta) \\ y = \tan\theta \end{cases}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

και η $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια φορά παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε $g(xe^x) = \alpha + 2\alpha e^x$. Να δείξετε ότι:

(α) Για την καμπύλη (c) ισχύει η σχέση: $36y \frac{d^2y}{dx^2} - 36\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + e^x \cdot y^6 = 1$.

(β) Η κάθετη ευθεία της καμπύλης (c) στο σημείο της με $\theta = \frac{\pi}{3}$ έχει εξίσωση

$(\zeta): 3x - y + 18\ln 2 + 2 = 0$.

(γ) Η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της με $x = 0$ έχει

εξίσωση $(\epsilon): y = 2\alpha x + 3\alpha$.

ΜΕΡΟΣ Α': Να απαντήσετε και στις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

A1. Στο πιο κάτω θηκόγραμμα παρουσιάζονται οι βαθμολογίες μαθητών σε ένα διαγώνισμα.



Να βρείτε:

- (α) Τις ακραίες παρατηρήσεις (αν υπάρχουν). (μον.1,5)
 (β) Την μέγιστη και ελάχιστη τιμή των παρατηρήσεων. (μον.1)
 (γ) Τη διάμεσο, το πρώτο, το τρίτο τεταρτημόριο και το ενδοτεταρτομοριακό εύρος. (μον.2,5)

A2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $\psi = 2x^5 - \frac{3}{x} + 4\sqrt{x} + e$ (μον.1,5)

(β) $\psi = \frac{\eta\mu^3 x}{x}$ (μον.1,5)

(γ) $\psi^2 - 4x\psi = xe^{3x}$ (μον.2)

A3. Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι ισχύει :

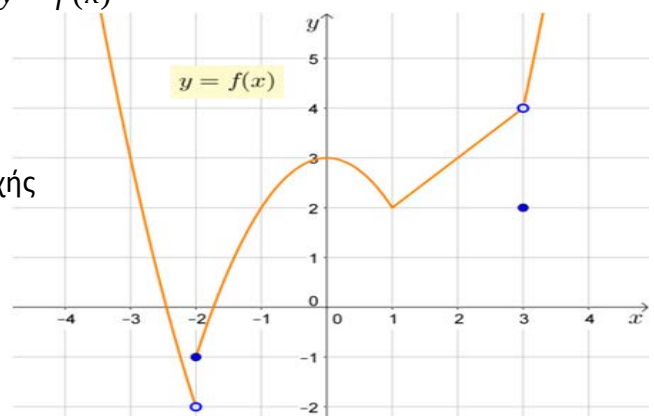
$$1 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + \dots + n(n+5) = \frac{n(n+1)(n+8)}{3}, \quad n \in \mathbb{N}$$

A4. (α) Να διατυπώσετε τον ορισμό συνέχειας συνάρτησης σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. (μον.2)

(β) Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της $y = f(x)$

να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα:

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f (μον. 1)
- Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στα σημεία $x = -2$ και $x = 3$ (μον. 1)
- Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της. (μον. 1)



A5. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\varepsilon\phi(A + 45^\circ) = \frac{2}{1 - \sigma\phi B} - 1$ να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

A6. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \ln\left(\frac{7-x}{7+x}\right)$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (μον. 1)

(β) Να δώσετε τον ορισμό άρτιας και περιττής συνάρτησης και να εξετάσετε τι ισχύει για τη συνάρτηση f (μον. 2)

(γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f(x)}$ (μον. 2)

A7. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} \log_2(x-2) + \log_2(y+2) = 2 + 3\log_8 y \\ 2^x \cdot 2^{2y} = 256 \end{cases}$$

A8. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = |x-1|$ και $g(x) = \sqrt{2x-1}$.

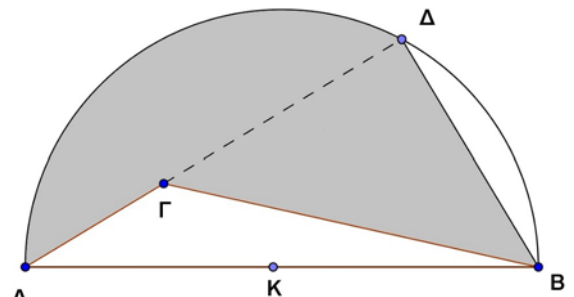
Να ορίσετε τη σύνθεση $f \circ g$ και $g \circ f$.

A9. Στο διπλανό σχήμα, το ημικύκλιο $A\Delta B$ γράφτηκε με διάμετρο AB . Φέρουμε τη χορδή $A\Delta$ έτσι ώστε

$\widehat{B\Delta A} = 30^\circ$. Στη χορδή $A\Delta$ παίρνουμε σημείο Γ τέτοιο ώστε $A\Gamma = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ και $B\Gamma = 2\sqrt{21} \text{ cm}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $AB = 12 \text{ cm}$. (μον. 2)

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου. (μον. 3)



A10. Δίνεται συνάρτηση f , όπου f συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$.

(α) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$ (μον. 2)

(β) Δίνεται η συνάρτηση h με τύπο $h(x) = f(x) \cdot \sqrt{x^2 + 3}$

i. Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

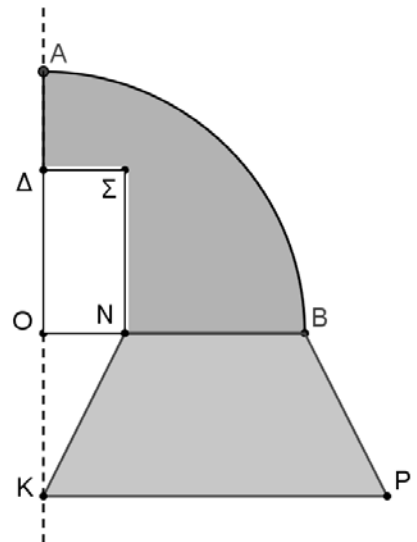
Να δικαιολογήσετε την πιο πάνω πρόταση. (μον. 1)

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$, και να βρείτε το $h'(1)$ (μον. 2)

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να απαντήσετε και στις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

- B1.** Στο διπλανό σχήμα OAB είναι τεταρτοκύκλιο με ακτίνα $OA = 8\text{ cm}$. Το τετράπλευρο $ON\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις $ON = 3\text{ cm}$ και $\Sigma N = 5\text{ cm}$ και το $KPBN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $NK = BP = 5\text{ cm}$.
Να υπολογίσετε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου μέρους γύρω από την ευθεία AK .



- B2.** Δίνεται η ακολουθία (α_n) , $n \in \mathbb{N}$ και $\Sigma_n = n^2 - 10n$ είναι το άθροισμα των n πρώτων όρων της ακολουθίας.
(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_n = 2n - 11$, $n \in \mathbb{N}$ (μον.2)
(β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (α_n) είναι γνησίως αύξουσα αριθμητική πρόοδος. (μον.3)
(γ) Αν $\alpha_1 = -9$ και $\delta = 2$ να υπολογίσετε το άθροισμα των δεκαπέντε πρώτων θετικών όρων της Α.Π. (μον.2)
(δ) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $|x^2 - 2x - 1| = 2$ είναι διαδοχικοί όροι της Α.Π.. (μον.3)

- B3.** Παραμετρική καμπύλη ορίζεται από τις εξισώσεις: $\begin{cases} x = 2t + \eta\mu 2t \\ y = 1 - \sigma\upsilon\nu 2t \end{cases}, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(α) Να δείξετε ότι: $\frac{dy}{dx} = \varepsilon\phi t$ (μον.3)

(β) Να βρείτε τη εξίσωση της εφαπτομένης της πιο πάνω καμπύλης στο σημείο της με $t = \frac{\pi}{4}$ (μον.2)

(γ) Να δείξετε ότι: $2(2 - y)\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$ (μον.5)

- B4.** Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu 3x + \eta\mu(-2x)}{\sigma\upsilon\nu 3x + \sigma\upsilon\nu(-2x)}$

(α) Να αποδείξετε ότι :

i. $A = \varepsilon\phi \frac{x}{2}$ (μον.3)

ii. $A = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ (μον.3)

(β) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω αποτελέσματα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να λύσετε

την εξίσωση $\frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \tau\varepsilon\mu^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ (μον.4)

B5. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \ln(x^2 - x)$ και $g(x) = \ln(x - 1)$

(α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ (μον.3)

(β) Να εξετάσετε αν το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης h (μον.1)

(γ) Αν $h : (1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} και αν ναι, να γράψετε τον τύπο της. (μον.3)

(δ) Να λύσετε την εξίσωση $2 \cdot h^{-1}(x - 1) - h^{-1}(2x - 1) = \frac{h(e)}{e} - h(e^2)$ (μον.3)

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\alpha = \beta \sin \Gamma$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και να ορίσετε την ορθή γωνία.

2. Σε ένα διαγώνισμα μαθηματικών οι μαθητές ενός τμήματος πήραν τους ακόλουθους βαθμούς:

8 13 15 15 16 17 18 18 19 20 20

(α) Να υπολογίσετε το εύρος και τα τεταρτημόρια των παρατηρήσεων.

(β) Να βρείτε τις ακραίες παρατηρήσεις, αν υπάρχουν, και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \varepsilon \varphi x + x^4 - \sqrt[3]{x} + e^2$

(β) $g(x) = e^{3x} \cdot \ln(x^2 + 7x)$

4. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 8}$

(β) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x^2 - 2x - 3|}{x^2 - 1}$

5. Να αποδείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι:

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n \cdot (3n - 1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

6. Να λύσετε την εξίσωση: $8^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{1}{8} + \frac{4}{27} - \frac{1}{16} + \frac{8}{81} + \dots} = 4^{\log_2(-x)}$

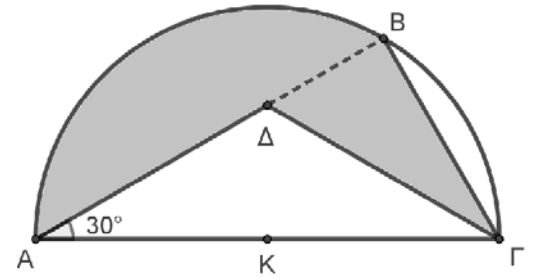
7. Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με τύπους

$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ και $g(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$ είναι ίσες. Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ώστε οι συναρτήσεις να είναι ίσες.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x + 6e^{-x}$ και $g(x) = \sqrt{x - 5}$.

Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$.

9. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο K και ακτίνα R . Στο εσωτερικό του γράφουμε ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, ($A\Delta = \Delta\Gamma$) και $\Gamma\hat{A}\Delta = 30^\circ$. Αν B είναι το σημείο τομής του ημικυκλίου και της προέκτασης της $A\Delta$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου, συναρτήσει του R .



10. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $7f(x) + 3f(-x) = 8\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή και να βρείτε τον τύπο της.

(β) Αν $f(x) = \eta\mu 2x$ να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης: $2f'\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{f''(x)}{4} = f\left(\frac{\pi - 2x}{4}\right)$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

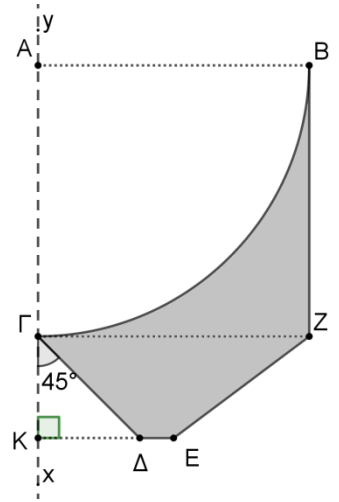
1. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\eta\mu 3x + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 3x} \cdot \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2\eta\mu x}$ και $B = \frac{2\eta\mu 3x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu 4x}{2\eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu 2x}$

(α) Να αποδείξετε ότι: $A = \sigma\upsilon\nu x$ και $B = \frac{1}{2\eta\mu 2x}$. (3),(3)

(β) Να λύσετε την εξίσωση $B = 1 - \frac{\eta\mu 2x}{2}$ στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$. (2)

(γ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \cdot A \cdot B}$ (2)

2. Στο πιο κάτω σχήμα το $ABZ\Gamma$ είναι τετράγωνο και το $\Gamma ZE\Delta$ τραπέζιο. Ο κυκλικός τομέας $AB\Gamma$ είναι τεταρτοκύκλιο με ακτίνα $AB = 8\text{cm}$, $\Delta E = 1\text{cm}$, $\Gamma\Delta = 3\sqrt{2}\text{cm}$, $\Delta K \perp xy$ και $\Delta\hat{\Gamma}K = 45^\circ$.
Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου χωρίου γύρω από τον άξονα xy .



3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} a + \eta\mu x & x \leq 0 \\ \beta x + \sqrt{x^2 + 4} & x > 0 \end{cases}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

(α) Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (7)

(β) Να βρείτε την παράγωγο της $f(x)$ στο $\mathbb{R}$. (3)

4. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ με τύπο $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$.

(α) i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)$. (3)

ii) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . (2)

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης f , στα οποία οι εφαπτόμενες της (ε_1) και (ε_2) σχηματίζουν γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα των τετμημένων. (2)

(γ) Παραμετρική καμπύλη (K) ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = \eta\mu(t) + \sigma\upsilon\nu(t) \end{cases}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης (K) στο σημείο με τετμημένη $x = 0$, είναι παράλληλη με τις εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της $f(x)$. (3)

5. Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$ που ορίζεται ως εξής: $a_1 = \ln \frac{4}{9}$, και $a_{n+1} = a_n + \ln \frac{2}{3}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$ είναι αριθμητική πρόοδος με γενικό όρο

$$a_n = (n + 1) \ln \frac{2}{3}. \quad (2)$$

(β) Αν S_n είναι το άθροισμα των n πρώτων όρων της Α.Π. (a_n) να αποδείξετε ότι: $S_n = n(n + 3) \ln \sqrt{\frac{2}{3}}$. (2)

(γ) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $(b_n), n \in \mathbb{N}$, με γενικό όρο $b_n = e^{a_n}$ είναι φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος. (2)

(δ) Να βρείτε την τιμή του $n, n \in \mathbb{N}$, για την οποία ισχύει η ισότητα: $\sqrt[n-3]{b_n} = e^{(n-2) \ln \frac{2}{3}}$. (4)

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Κατεύθυνσης

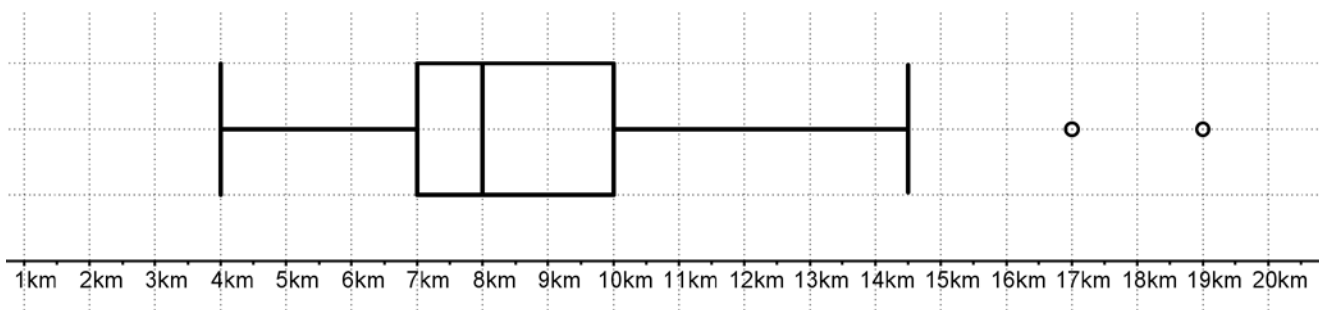
ΤΑΞΗ: Β' Ενιαίου Λυκείου

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Το πιο κάτω θηκόγραμμα παρουσιάζει τα χιλιόμετρα (Km) που διένυσε μια ομάδα μαθητών στο Μαραθώνιο Λεμεσού. Να βρείτε:

- α) το εύρος των παρατηρήσεων
- β) το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο
- γ) τη διάμεσο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος
- δ) τις ακραίες παρατηρήσεις, αν υπάρχουν.



(Μονάδες: 1 / 1,5 / 1,5 / 1)

A2. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{x^2 + 2x}$

β) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

(Μονάδες: 2,5 / 2,5)

A3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \ln x + \sin x + e^{2018}, \quad x > 0$

β) $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

(Μονάδες: 2,5 / 2,5)

A4. Να λύσετε την εξίσωση $\log_4(2x + 3) = \log_2 x$.

(Μονάδες: 5)

A5. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n , $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{n-1} = \frac{5^n - 1}{4}$$

(Μονάδες: 5)

A6. α) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{3}\sigma\phi\Gamma - 3 = 0$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

β) Η λύση της πιο πάνω εξίσωσης είναι ίση με το μέτρο της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τριγώνου $AB\Gamma$.

Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $\alpha = \log_3 9$ cm και $\beta = 2^{\frac{1}{2}\log_2 12}$ cm.

(Μονάδες: 1 / 4)

A7. α) Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} \log y - \log x = 2 - \log 50 \\ \log(y+1) + \log x = 1 \end{cases}$$

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των απείρων όρων απόλυτα φθίνουσας γεωμετρικής

προόδου που έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = x$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{y}$, όπου x, y η λύση του πιο πάνω συστήματος.

(Μονάδες: 3 / 2)

A8. α) Να αποδείξετε ότι:
$$\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x \cdot \eta\mu x - \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu 2x \cdot \eta\mu x} = \frac{\eta\mu 4x}{4\sigma\upsilon\nu x}$$

β) Αν $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x \cdot \eta\mu x - \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu 2x \cdot \eta\mu x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ χρησιμοποιώντας το πιο πάνω,

να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{|x|}$.

(Μονάδες: 2,5 / 2,5)

A9. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:
$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{2x} + \beta, & x < 2 \\ \beta(e^{x^2} + 1) + x^2 - 4, & x \geq 2 \end{cases}$$

α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.

γ) Αν $\alpha = \beta$ και $\alpha, \beta \in (-\infty, -1)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + \alpha^2 x^2 + \beta x + \beta = 0$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

(Μονάδες: 2 / 1,5 / 1,5)

A10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κανονικό εξάγωνο

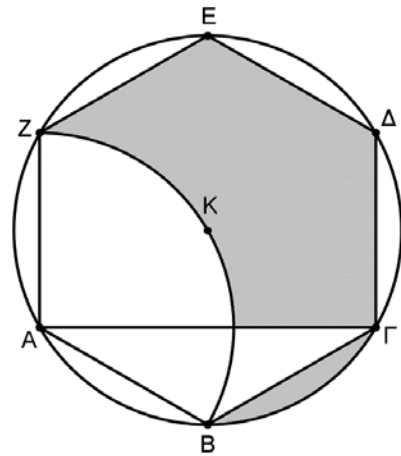
ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ, R).

Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΒ γράφουμε τόξο ΒΚΖ.

Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R:

α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

β) το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



(Μονάδες: 1,5 / 3,5)

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & x < 1 \\ \frac{\alpha + \beta}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$. Να αποδείξετε ότι η σχέση που συνδέει τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι $3\alpha + \beta = 0$.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $\angle(1, f(1))$ να είναι κάθετη προς την ευθεία με εξίσωση $x - 4y = 2$.

(Μονάδες: 5 / 5)

B2. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\eta\mu 8x \cdot \sigma\upsilon\nu 4x}{(1 + \sigma\upsilon\nu 8x)(1 + \sigma\upsilon\nu 4x)} \text{ και } B = \frac{\eta\mu 5x - \eta\mu x}{(2\sigma\upsilon\nu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu 5x - \sigma\upsilon\nu 7x) \cdot \sigma\upsilon\nu x}$$

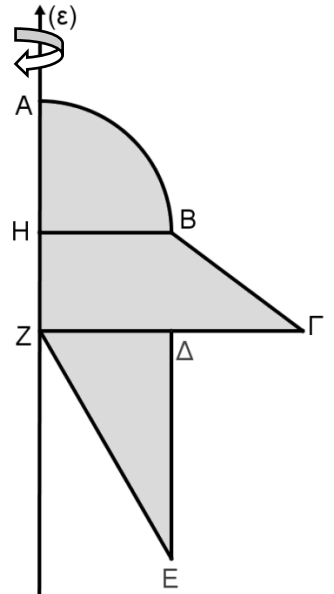
α) Να αποδείξετε ότι $A = \epsilon\phi 2x$ και $B = 4\eta\mu x$.

β) Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω, να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{\sqrt{1+A^2}} + \frac{B}{4} = 1$,

στο διάστημα $(0, \pi)$.

(Μονάδες: 5 / 5)

- B3.** Στο διπλανό σχήμα το AHB είναι τεταρτοκύκλιο με κέντρο το Η και ακτίνα ΗΑ. Το ΗΒΓΖ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με $\widehat{B\hat{H}\Gamma} = \widehat{H\hat{B}\Gamma}$ και το ΖΔΕ ορθογώνιο τρίγωνο με $\widehat{Z\Delta E} = 90^\circ$. Δίνονται $\Gamma\Delta = 4\text{ cm}$, $B\Gamma = 5\text{ cm}$, $ZE = 8\text{ cm}$, $\widehat{E\hat{Z}\Delta} = 60^\circ$ και Δ μέσο του ΖΓ. Το σκιασμένο χωρίο ΑΒΓΔΕΖΑ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε). Να υπολογίσετε:
- το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και
 - τον όγκο του στερεού που παράγεται.



(Μονάδες: 5 / 5)

- B4.** Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } f(x) = \sqrt{x-2} \text{ και } g: (2, +\infty) \rightarrow (1, +\infty) \text{ με τύπο } g(x) = \frac{x+4}{x-2}$$

- Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της g . Αν ορίζεται να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.
- Να εξετάσετε αν ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$. Αν ορίζεται να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.
- Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης να δείξετε ότι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$
- Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \cdot f'$

(Μονάδες: 2,5 / 2,5 / 2,5 / 2,5)

- B5.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln(2 - e^x)$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- Οι όροι $\alpha = 2x$, $\beta = f(x)$, $\gamma = \ln 4$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
 - Να αποδείξετε ότι το x είναι ίσο με $\ln \frac{2}{3}$ και η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι ίση με $\ln 3$.
 - Ο αριθμός β είναι ο τέταρτος όρος της αριθμητικής προόδου. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο $\Sigma_n = \frac{1}{2} \ln(2^{4n} \cdot 3^{n(n-9)})$

(Μονάδες: 2 / 8)

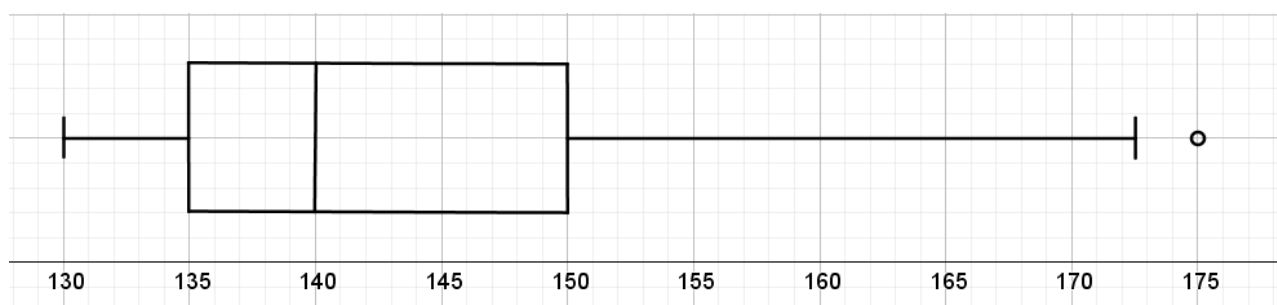
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ	ΤΑΞΗ: Β΄
---	-----------------

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

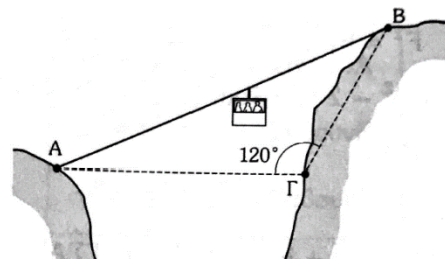
1. Στο πιο κάτω θηκόγραμμα παρουσιάζονται οι παλμοί της καρδιάς 30 μαθητών σε κατάσταση σωματικής καταπόνησης.



- α) Να βρείτε τις ακραίες παρατηρήσεις, αν υπάρχουν.
 β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη παρατήρηση και το εύρος των παρατηρήσεων.
 γ) Να βρείτε τη διάμεσο, το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.
2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = e^x - 2$ β) $g(x) = \frac{7-x}{|2x-1|-5}$

3. Το τηλεφérico του διπλανού σχήματος χρησιμοποιείται για τη συγκοινωνία ανάμεσα στα σημεία A και B, τα οποία βρίσκονται στις δύο αντίθετες πλευρές μιας χαράδρας. Αν η απόσταση ΑΓ είναι ίση με 300m, η απόσταση ΒΓ είναι ίση με 200m και η γωνία $\widehat{A\Gamma B} = 120^\circ$, να υπολογίσετε την απόσταση AB (κατά προσέγγιση ακεραίου).



4. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των πιο κάτω:

α) $y = \frac{x^2 \eta \mu x}{x+1}$ β) $e^y = \epsilon \varphi 3x$

5. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{2(1 - \sigma\upsilon\nu x)} = \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2}$$

6. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

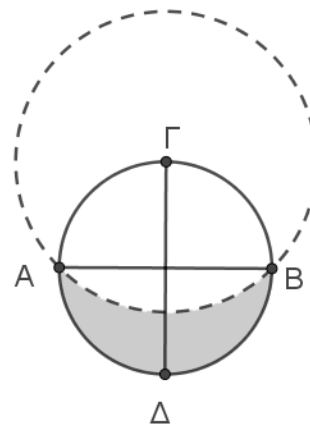
$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + 3x - 2) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2|x-2| + x^2 - 5x + 6}{(x-1)^2}$$

7. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει η πιο κάτω ισότητα:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

8. Τρία σχολεία A, B, Γ δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Να βρείτε σε ποιο σημείο θα πρέπει να τοποθετηθεί μια στάση λεωφορείου για να ισαπέχει από τα τρία σχολεία, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

9. Στο διπλανό σχήμα, δίνονται δύο κάθετοι διάμετροι AB και ΓΔ ενός κύκλου (O,R). Με κέντρο το Γ και ακτίνα ΓΑ γράφουμε κύκλο που διέρχεται από τα A και B. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου ΓAB.



10. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν η f είναι περιττή, τότε $f''(0) = 0$.

β) Αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή.

γ) Αν η f είναι άρτια, τότε οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία $A(-a, f(-a))$ και $B(a, f(a))$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.

ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε και τις πέντε ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 2}{e^x + 1}\right)$.

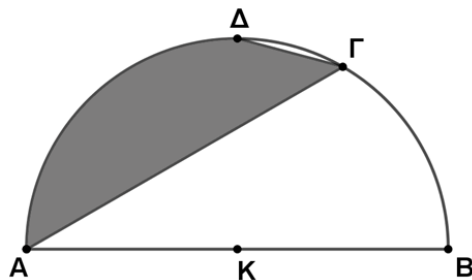
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να δείξετε ότι $f(\ln 4) + \ln\left(\frac{5}{3}\right) < 0$ (χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής).

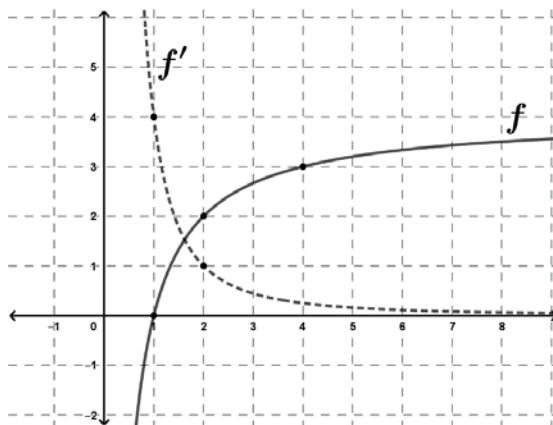
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln(e^x - 1) - \ln(3e^x - 1)$.

2. α) Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\varphi x = -\sqrt{3}, x \in \mathbb{R}$.
 β) Οι θετικές λύσεις της παραπάνω εξίσωσης σχηματίζουν ακολουθία $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι ο νιοστός όρος της ακολουθίας είναι ο $\alpha_n = (3n - 1)\frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{N}$.
 γ) Να υπολογίσετε το όριο της ακολουθίας $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ και να εξετάσετε κατά πόσο είναι φραγμένη ή όχι.
 δ) Να δείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ είναι αριθμητική πρόοδος και να υπολογίσετε:
 i. ποιος από τους όρους της ισούται με $\frac{2018\pi}{3}$.
 ii. το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της.

3. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου $AB=2R$ με κέντρο K και χορδές $A\Gamma=\lambda_3$, $\Gamma\Delta=\lambda_{12}$.



- α) Να δείξετε ότι $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 45^\circ$.
 β) Να δείξετε ότι $\Gamma\Delta = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)R$.
 γ) Το σκιασμένο χωρίο περιστρέφεται γύρω από τη διάμετρο του ημικυκλίου AB κατά 2π . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.
4. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας συνάρτησης $f : (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 4)$ και της παραγώγου της $f' : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$



Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = f\left(\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\right)$ και να υπολογίσετε την παράγωγό της στο $x = \frac{3}{2}$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια: i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{f(x)} - e^{-f(x)})$ ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

γ) Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . Σε περίπτωση που ορίζεται, να βρείτε:
i. το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f^{-1} .
ii. την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασής της στο σημείο $A(0, f^{-1}(0))$.

5. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x}, & -1 \leq x < 0 \\ \alpha^2 \ln(x+e) + 2\alpha + \left(\beta^2 + \frac{1}{2}\right)e^x, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να υπολογίσετε τις τιμές των α και β .

β) Αν $\alpha = -1$ και $\beta = 0$:

i. να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox σε ένα τουλάχιστον σημείο.

ii. να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{e^x - 2} \cdot f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.**

1. Τα χρήματα σε ευρώ που έδωσαν 10 παιδιά σε κάποιο έρανο είναι:

1, 6, 8, 17, 1, 8, 6, 20, 10, 6

(α) Να βρείτε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος (IQR).

(β) Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα και να βρείτε τις ακραίες τιμές αν υπάρχουν.

2. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + x + 7}{1 - 3x^2}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 3}{x - 2}$

3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων :

α) $f(x) = x^5 - 2\ln x + \frac{4}{x^3} - \sin \pi$

β) $y^2 = xe^x + 2, \quad y > 0$

4. Με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής, να αποδείξετε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

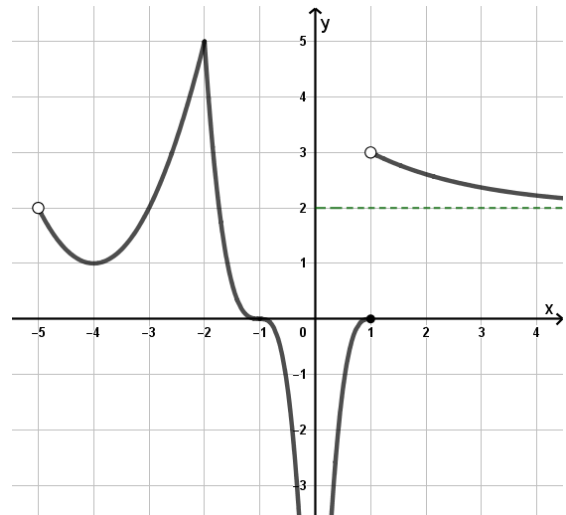
$$1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1} = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

5. (α) Να λύσετε την εξίσωση $\log_x 1000 = (\log_x 10)^2 + 2, \quad x > 0 \quad x \neq 1.$

(β) Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της πιο πάνω εξίσωσης με $x_1 > x_2$, να σχηματίσετε γεωμετρική πρόοδο με $\lambda > 0$, $\alpha_1 = (x_2)^6$ και $\alpha_3 = x_1$.

6. Με βάση τη διπλανή γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$ να βρείτε:

- (α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)$
- (β) τα όρια $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- (γ) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι συνεχής
- (δ) τις τιμές του x για τις οποίες η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.



7. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1 + \sin x + \sin 2x + \sin 3x}{2 \sin^2 x + \sin x - 1} = 2 \sin x$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f : A \rightarrow f(A)$ με τύπο $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $x \leq 1$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια να ορίσετε πλήρως την $f^{-1}(x)$.
- (β) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τις τιμές $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(0)$ και $(f \circ f^{-1})(5)$.

9. Παραμετρική καμπύλη ορίζεται από τις εξισώσεις: $\begin{cases} x = 2\epsilon\mu\theta \\ y = 2\epsilon\phi\theta \end{cases}$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(α) Να δείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = \sigma\tau\epsilon\mu\theta$.

(β) Αν ισχύει $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 16\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$, να βρείτε τη γωνία θ .

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της καμπύλης στο σημείο της με $\theta = \frac{\pi}{3}$.

10. Το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας (α_n) είναι $\Sigma_n = 3n^2 + n$, $n \in \mathbb{N}$.

- (α) Να βρείτε τον γενικό όρο της ακολουθίας.
- (β) Αν $\alpha_n = 6n - 2$, να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.
- (γ) Να βρείτε τις τιμές του n ώστε $|\alpha_n| \geq 19$.
- (δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{\alpha_n}$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

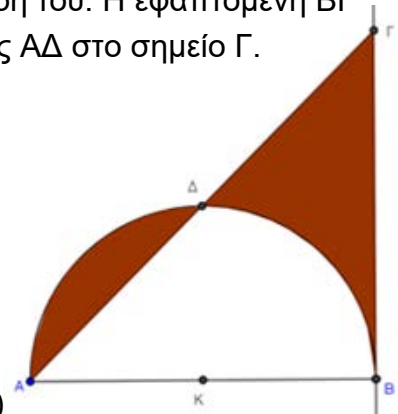
1. (α) Να αποδείξετε ότι: $(\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\eta \mu \alpha - \eta \mu \beta)^2 = 4\eta \mu^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).$

(β) Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $(\sin x - \sin \frac{\pi}{3})^2 + (\eta \mu x - \eta \mu \frac{\pi}{3})^2 = 1.$

2. Δίνεται ημικύκλιο ΑΔΒ ακτίνας $R = \alpha$ και $A\Delta = \lambda_4$ χορδή του. Η εφαπτομένη ΒΓ του ημικυκλίου στο σημείο Β, τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο σημείο Γ.

(α) Να βρείτε συναρτήσει του α το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

(β) Το σκιασμένο χωρίο περιστρέφεται με πλήρη στροφή γύρω από την ΑΒ. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που σχηματίζεται.



(το σχήμα να μεταφερθεί στις κόλλες απαντήσεών σας)

3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$g(x) = \ln(x - 2), \quad k(x) = 2x,$$

$$h(x) = |3 - 2x| - 1, \quad x \in [1, 4] \quad \text{και} \quad f(x) = \frac{x + 3}{x - 1}, \quad x > 3.$$

(α) Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και g^{-1} , δείχνοντας καθαρά τα σημεία τομής με τους άξονες συντεταγμένων.

(β) Να ορίσετε πλήρως τις συναρτήσεις:

(i) $(h + k)(x)$, δίνοντας την σε τμηματική μορφή (χωρίς απόλυτα),

(ii) $(g \circ f)(x)$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \left(\frac{4^x - 2^x}{2^{x+1} + 4} \right).$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = (x - 1)\ln 2 + \ln \left(\frac{2^x - 1}{2^x + 2} \right).$

5. (α) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & x < 2 \\ \frac{\gamma}{x}, & x \geq 2 \end{cases}$

(i) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της πιο πάνω συνάρτησης, στο σημείο της $A(2, g(2))$, να είναι παράλληλη της ευθείας με εξίσωση $2x - y - 3 = 0$.

(ii) Αν $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -6$ και $\gamma = -8$ να δείξετε ότι η g έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[-6, 4]$.

(β) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$4f(x^3 + x + 1) = 2x^2 + 10x + 8, \forall x \in \mathbb{R}$$

(i) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης ευθείας της πιο πάνω συνάρτησης, στο σημείο της $(1, f(1))$.

(ii) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 4}{x^2 - 3x + 2}$. (Υπόδειξη: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$)

ΜΕΡΟΣ Α : Να λύσετε **όλες** τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **πέντε** μονάδες από τις **εκατό**.

1. Να λύσετε την εξίσωση : $3|\chi - 1| = 12$

2. Ένας αθλητικός σύλλογος διοργάνωσε μια εκδρομή για τα μέλη του. Στο πιο κάτω φυλλογράφημα δίνεται η κατανομή των ηλικιών των μελών που συμμετείχαν στην εκδρομή.

4	1	3	3		
3	0	2	3	9	
2	0	3	3	4	6
1	8	9	9		

Να υπολογίσετε τη **διάμεσο** , το **πρώτο** και το **τρίτο τεταρτημόριο** των ηλικιών των συμμετεχόντων στην εκδρομή.

3. Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi + 1}{\chi^2 + 2\chi + 1}$

β) $\lim_{\chi \rightarrow 3} \frac{\chi - 3}{\chi^2 - 9}$

4. Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο $\frac{d\psi}{d\chi}$ των πιο κάτω συναρτήσεων :

α) $\psi = \frac{\ln \chi}{\chi^2 + 5\chi}$

β) $\chi^2 + \psi^2 + \chi \cdot \psi = 25$

5. Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι $\forall v \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι :

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{v \cdot (v+1)} = \frac{v}{v+1}$$

6. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu A = \beta \cdot \sigma\upsilon\nu B$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

7. Παραμετρική καμπύλη (Κ) ορίζεται από τις εξισώσεις :

$$\begin{cases} \chi = t^2 \\ \psi = \frac{t^3}{3} - 4 \end{cases}, t \in (0, +\infty)$$

α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο ($\frac{d\psi}{d\chi}$) και τη δεύτερη παράγωγο ($\frac{d^2\psi}{d\chi^2}$).

β) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης (Κ) στο σημείο της με $t=3$.

8. Δίνονται οι τρεις πρώτοι όροι της ακολουθίας : $\frac{1-\chi}{5\chi}, \frac{1}{5\chi}, \frac{1+\chi}{5\chi}, \dots$

α) Να δείξετε ότι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β) Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{1-\chi}{5\chi} + \frac{1}{5\chi} + \frac{1+\chi}{5\chi} + \dots + \frac{1+8\chi}{5\chi} = \frac{15}{2}$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\chi) = \frac{6 \cdot 2^\chi - 24}{4^\chi - 6 \cdot 2^\chi + 8}$ και $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(\chi) = \frac{6}{|2^\chi - 2|}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και h .

β) Να εξετάσετε κατά πόσο οι πραγματικές συναρτήσεις f , h είναι ίσες. Στην περίπτωση που ισχύει $f \neq h$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο $f = h$.

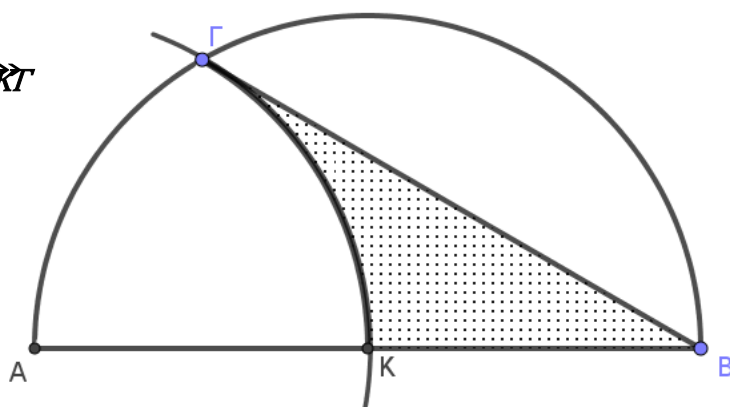
10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο Κ, ακτίνα R και χορδή $B\Gamma = \lambda_3$.

Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΚ φέρουμε τόξο $\overset{\curvearrowright}{\text{ΚΓ}}$ μέσα στο ημικύκλιο.

Να υπολογίσετε συναρτήσει του R:

α) το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους

β) την περίμετρο του σκιασμένου μέρους



ΜΕΡΟΣ Β : Να λύσετε **όλες** τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **δέκα** μονάδες από τις **εκατό**.

1. α) Να δείξετε ότι :

$$\log_{\eta\mu\chi} \sqrt{\sigma\upsilon\nu\chi} + \log_{\eta\mu\chi} \sqrt[4]{\sigma\upsilon\nu\chi} + \log_{\eta\mu\chi} \sqrt[8]{\sigma\upsilon\nu\chi} + \dots = \log_{\eta\mu\chi} \sigma\upsilon\nu\chi, \chi \in (0, \pi / 2) \quad (\mu\text{ον.}4)$$

β) Χρησιμοποιώντας το α) ερώτημα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να λύσετε την εξίσωση :

$$2 - \log_{\sigma\upsilon\nu\chi} \eta\mu\chi = \log_{\eta\mu\chi} \sqrt{\sigma\upsilon\nu\chi} + \log_{\eta\mu\chi} \sqrt[4]{\sigma\upsilon\nu\chi} + \log_{\eta\mu\chi} \sqrt[8]{\sigma\upsilon\nu\chi} + \dots,$$

στο διάστημα $\chi \in (0, \pi / 2)$. (μον.6)

2. Δίνονται οι παραστάσεις : $A = \frac{\eta\mu(2\chi + \psi) + \eta\mu(2\chi - \psi)}{\sigma\upsilon\nu(2\chi + \psi) + \sigma\upsilon\nu(2\chi - \psi)}$ και $B = \frac{\eta\mu 6\chi - 2\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu 5\chi}{\sigma\upsilon\nu 4\chi}$.

Να δείξετε ότι :

α) $A = \epsilon\phi 2\chi$ και $B = \epsilon\phi 4\chi$

β) $A \cdot B = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 4\chi}{\sigma\upsilon\nu 4\chi}$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f : A \rightarrow f(A)$, με τύπο, $f(\chi) = \frac{1}{\chi - 5}$

$g : B \rightarrow g(B)$ με τύπο $g(\chi) = \sqrt{\chi + 1}$ και $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(\chi) = \frac{\chi - 1}{\chi + 2}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} (τύπο και πεδίο ορισμού) (μον.4)

β) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{h}$ (να γίνουν όλες οι δυνατές πράξεις) (μον.3)

γ) Να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο τιμών για το οποίο ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$ και να γράψετε τον τύπο της. (μον.3)

4. Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f(x) = e^x (\sin x + \eta \mu x), \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } g(x) = \begin{cases} x^2 + \eta \mu x, & x \leq 0 \\ x & , x > 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση **g** είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

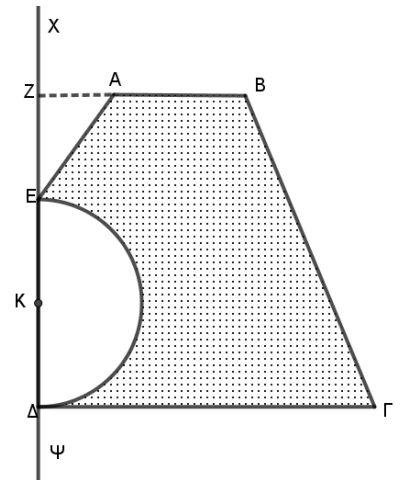
β) Να αποδείξετε ότι : $f'(x) = 2e^x \cdot \sin x$

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση : $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = g'(0) - 1$

δ) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'''(x)}{4x^2 + 5x}$.

5. Στο διπλανό σχήμα $AB=AE=5\text{cm}$, $B\Gamma=\Delta\Gamma=13\text{cm}$, $ZA=3\text{cm}$.

Οι BZ και ΓΔ είναι κάθετες στον άξονα ΧΨ και το τόξο ΕΔ είναι ημικύκλιο. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου σχήματος γύρω από τον άξονα χψ.



ΜΕΡΟΣ Α: Να λυθούν όλες οι ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Στο πιο κάτω θηκόγραμμα παρουσιάζονται τα τέρματα των παιχτών μίας ποδοσφαιρικής ομάδας, σε ένα πρωτάθλημα.



- (α) Να βρείτε τις ακραίες παρατηρήσεις (αν υπάρχουν). (Μονάδες:2)
 (β) Να βρείτε τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο και το ενδοτεταρτομοριακό εύρος. (Μονάδες: 3)

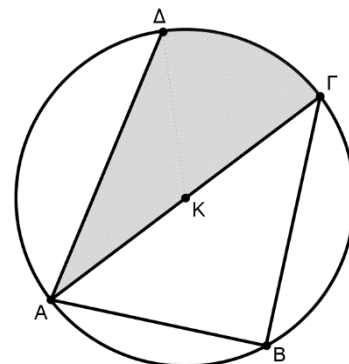
2. Να λύσετε την εξίσωση : $|3x - 1| = 5 - x$

3. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $y = e^x \cdot 2x$ (β) $y = \eta \mu^2 x + 3$

4. Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της τέλει επαγωγής, ότι για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n ισχύει: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) με διάμετρο AG και χορδές $AB=6$ cm, $B\Gamma=8$ cm και $A\Delta=\lambda_3$.
 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους.



6. Σε πρόοδο δίνονται οι όροι $a_1 = \sin 2\theta$, $a_2 = -\eta \mu^2 \theta$ και $a_3 = -1$

, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

- (α) Να δείξετε ότι οι πιο πάνω όροι αποτελούν τρεις διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

(β) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\delta = -\sin^2\theta$.

7. (α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 4x + \eta\mu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu 4x + \sigma\upsilon\nu 2x} = \varepsilon\phi 2x$ (Μονάδες: 3)

(β) Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\eta\mu 4x + \eta\mu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu 4x + \sigma\upsilon\nu 2x} = 1 \quad \text{στο διάστημα } (0, \pi) \quad (\text{Μονάδες: 2})$$

8. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x^3 + 1) = 4x^3 + 5$ $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

(α) την τιμή της $f'(2)$

(β) την εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο της $A(2, f(2))$.

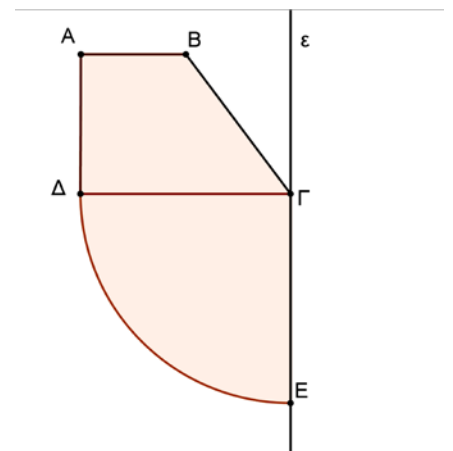
9. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι σχέσεις $\beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma = a^2$ και $4\eta\mu B\eta\mu\Gamma = 3$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

10. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} a + (x-1)^2 + \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} & , x > 1 \\ \frac{x^2 + \beta x + 2}{x-2} & , x \leq 1 \end{cases}$

Να βρεθούν οι τιμές των a και β έτσι ώστε η γραφική παράσταση της f να περνά από το σημείο $A(-1, -2)$.

ΜΕΡΟΣ Β: Να λυθούν όλες οι ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AD = 4$ cm, $\Gamma\Delta = 6$ cm και $AB = 3$ cm. Με διάμετρο $\Gamma\Delta$ φέρουμε τεταρτοκύκλιο εκτός του τραπεζίου. Το σκιασμένο σχήμα περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε) η οποία περνά από το σημείο Γ και είναι κάθετη στην $\Delta\Gamma$. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.



2. (α) Δίνεται η παράσταση $A = \log_2 32 + \log_2 \sqrt{32} + \log_2 \sqrt[4]{32} + \log_2 \sqrt[8]{32} + \dots$

Να δείξετε ότι $A=10$

(β) Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα να λύσετε την εξίσωση: $A^{\log(x^2-2x)} = \log 100^x + \log \frac{1}{1000}$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f: A \rightarrow f(A), A = (3, +\infty), \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x+3}{x-3}, \quad g: B \rightarrow \square, B \subseteq \square$$

$$\text{με τύπο } g(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} \text{ και } h: \Gamma \rightarrow \square, \Gamma \subseteq \square \text{ με τύπο } h(x) = |x - 2|$$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση

f^{-1} (τύπο και πεδίο ορισμού). (Μονάδες:5)

(β) Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις g και h είναι ίσες. Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\square$ έτσι ώστε $g(x) = h(x)$ (Μονάδες:3)

(γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση k με τύπο $k(x) = |x + 2| \cdot h(x)$ είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες:2)

4. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = e^{2x}(\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x)$ και $g(x) = ax^2 + \beta x - 2$, $a, \beta \in \square$.

(α) Να δείξετε ότι $f''(x) - 4f'(x) + 8f(x) = 0$.

(β) Η γραφική παράσταση της καμπύλης g διέρχεται από το σημείο $A(2,2)$ και η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης g στο A ισούται με την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης f στο σημείο με τετμημένη $x=0$. Να βρείτε τις τιμές των a και β .

5. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = \ln\left(\frac{2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4}{2^x - 2}\right)$ και $g(x) = \log_2 x$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

(β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f \circ g$ και το πεδίο ορισμού της.

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**ΤΑΞΗ: Β' ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ****ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις .****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

- Οι αριθμοί $2x + 2$, $x - 2$, $x - 6$ είναι οι τρεις πρώτοι όροι γνησίως φθίνουσας γεωμετρικής προόδου.
Να υπολογίσετε : α) Την τιμή του πραγματικού αριθμού x .
β) Το άθροισμα των άπειρων όρων της γεωμετρικής προόδου.
- Δίνεται το φυλλογράφημα για τις πωλήσεις εισιτηρίων που έκανε ένα ταξιδιωτικό γραφείο τις πρώτες 21 μέρες του Ιουνίου.

4	2 6 8 9
3	1 4 5 5
2	0 2 2 2 5
1	2 8 8 9
0	5 6 7 7

Να υπολογίσετε τη διάμεσο των παρατηρήσεων , το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο καθώς και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος .

- Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \varepsilon\phi 3x + \tau\epsilon\mu x$

(β) $2x^4 - xy^2 = 5y$

- Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$

(β) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x})$

- Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 2n - 1$

α) Να εξετάσετε την ακολουθία ως προς τη μονοτονία .

β) Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι : $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} 3^x \cdot 3^{10-y} = 81 \\ 2\log_2 x - \log_2(y - 3) = 2 \end{cases}$$

- Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A, B \subseteq \mathbb{R}$, με τύπους $f(x) = |x| + 2$ και

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{|x + 1| - 3} .$$

Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι ίσες , να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ώστε οι συναρτήσεις να είναι ίσες.

8. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\eta\mu 5x + 2\eta\mu 4x + \eta\mu 3x}{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 3x + 2\sigma\upsilon\nu 2x}$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 2\eta\mu 2x$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{A}{\sigma\upsilon\nu 2x} = 2\sqrt{3}$, $x \neq \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}$.

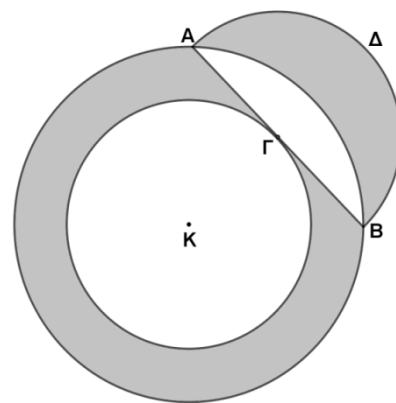
9. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{e^{-2x}}{x-3}$ και $g(x) = \eta\mu^2\left(\frac{x-3}{2}\right)$.

α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο πάνω συναρτήσεων.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h(x) = f'(x) \cdot g'(x)$.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x)$.

10. Στο διπλανό σχήμα δίνονται δυο ομόκεντροι κύκλοι (K, R) και (K, ρ) , με $R > \rho$. Η χορδή AB είναι ίση με πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (K, R) και συγχρόνως εφαπτομένη του κύκλου (K, ρ) . Το τόξο $A\Delta B$ γράφτηκε με διάμετρο την AB . Αν $R = 4 \text{ cm}$, να υπολογίσετε το εμβαδό της σκιασμένης επιφάνειας.



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις .

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. α) Παραμετρική καμπύλη ορίζεται από τις εξισώσεις : $\begin{cases} x = \sqrt{t^3 + 1} \\ y = \frac{2}{t} \end{cases}$, $t \in (0, +\infty)$

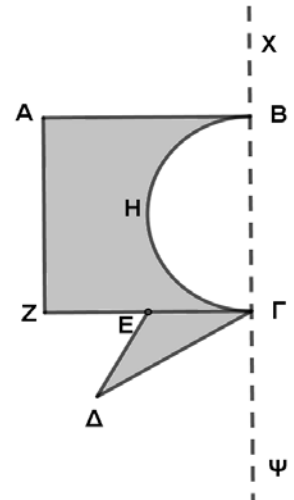
Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με $t = 2$ είναι $(\varepsilon): x + 4y = 7$.

β) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2\alpha x + \beta, & x < 1 \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τις τιμές των α, β έτσι ώστε η εφαπτομένη της f στο σημείο της $A(1, f(1))$ να είναι κάθετη με την πιο πάνω ευθεία (ε) .

2. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση : $\alpha = 4\beta \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Gamma}{2}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\Gamma}{2}\right)$
 α) Να δείξετε ότι $\hat{\Gamma} = 2\hat{B}$.
 β) Αν επιπλέον $\gamma = \beta\sqrt{3}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου, όπου α, β, γ οι πλευρές του τριγώνου.

3. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma Z$ είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με 4cm . Το ημικύκλιο $B\Gamma$ γράφτηκε με διάμετρο την $B\Gamma$. Το E είναι το μέσο της $Z\Gamma$. Το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές με πλευρές $E\Gamma = E\Delta$ και η γωνία $\Gamma\hat{E}\Delta = 120^\circ$. Το σκιασμένο μέρος του σχήματος περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $X\Psi$, που είναι κάθετος στη $Z\Gamma$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



4. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος με όρους $\alpha_1 = \log(\eta\mu\varphi)$, $\alpha_3 = \log\left(\frac{1 + \sin 2\varphi}{2\eta\mu\varphi}\right)$,
 $\delta = \log\sqrt{3}$ και $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
 α) Να δείξετε ότι $\varphi = \frac{\pi}{6}$ και να βρείτε τους τρεις πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου.
 β) Να λύσετε την εξίσωση: $\log\frac{71 \cdot 3^{\log x}}{5^{\log x} - 2 \cdot 3^{\log x}} = \alpha_5 + \log 6$, όπου α_5 ο πέμπτος όρος της αριθμητικής προόδου.
 γ) Να λύσετε την ανίσωση: $(x + 2) \cdot \log 2^{13} - x \cdot \log 3^{13} \leq \Sigma_{13}$, όπου Σ_{13} το άθροισμα των δεκατριών πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου.
 5. Δίνεται η συνάρτηση $f : A \rightarrow f(A)$, με τύπο $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$ και η συνάρτηση $g(x) = 1 - \ln x$
 α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο πάνω συναρτήσεων.
 β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να προσδιορίσετε την αντίστροφη της.
 γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f^{-1} \circ g$.
 δ) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης h .

Τάξη: Β΄

Μάθημα: Μαθηματικά Κατεύθυνσης

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $y = x^3 \cdot \eta\mu 3x + \sqrt{e} + \frac{1}{x}$

(β) $x^2 - y^2 + 2xy = 2$

2. Η βαθμολογία δέκα μαθητών σε ένα διαγώνισμα ήταν:

8, 11, 10, 12, 19, 3, 12, 11, 4, 16

(α) Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα για τις πιο πάνω τιμές.

(β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ακραίες τιμές.

3. Να αποδείξετε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2n^2 (n+1)^2$$

4. Οι όροι $\alpha_1, \alpha_5, \alpha_{11}$ αύξουσας αριθμητικής προόδου είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Αν ο πρώτος όρος (α_1) της αριθμητικής προόδου ισούται με 24 να βρείτε τη διαφορά (δ) της αριθμητικής προόδου και τον λόγο (λ) της γεωμετρικής προόδου.

5. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x) = 5x^2 - 3x$$

6. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει: $\alpha + \beta = 4R \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.7. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = \frac{x+1}{x}$ και $g(x) = \frac{x^3 - x}{x-1}$ (α) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g$ και $\frac{f}{g}$

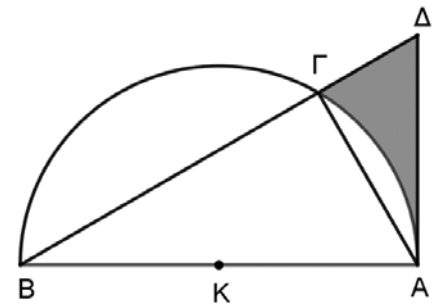
(Να δώσετε το αποτέλεσμα στην πιο απλή του μορφή)

(β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ είναι άρτια ή περιττή ή τίποτα από τα δύο.

8. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η πιο κάτω συνάρτηση g να είναι συνεχής στο $x=2$

$$g(x) = \begin{cases} \alpha \cdot \frac{\eta\mu(x-2)}{x^2 - 5x + 6}, & x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ \frac{|2x - x^2|}{x - 2}, & x > 2 \end{cases}$$

9. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 2R$, και χορδή $AG = \lambda_6$. Αν $A\Delta$ η εφαπτομένη του κύκλου (K, R) στο A , να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R το εμβαδόν και την περίμετρο του μεικτόγραμμου τριγώνου $AG\Delta$. (Η απάντησή σας να δοθεί συναρτήσει του π)



10. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \log_2 \frac{x-2}{x(x-1)} - \log_{\sqrt{2}} 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

(β) Να δείξετε ότι $f(x) = \log_2 \frac{(x-2)(x-1)}{x}$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. (α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\left(\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\eta\mu\alpha + \eta\mu\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}} = \sigma\varphi\frac{\alpha}{4}$$

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(\alpha) = \sigma\varphi\frac{\alpha}{4}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Να λύσετε την εξίσωση $f(8\alpha) \cdot f(4\alpha) = 1$

2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x+3} - 2$

(α) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{f(x)}$

(β) Να βρείτε το σημείο A της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη είναι

παράλληλη στην ευθεία $y = \frac{1}{4}x$

(γ) Να λύσετε την ανίσωση $\log(f(x) - 1) > \log(2f'(x)) + 1$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2 - \frac{x-3}{x-2}$, $g(x) = \ln \sqrt{x-1}$ και $h(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4}$

(α) Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις f και h είναι ίσες. Αν οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο είναι $f = h$

(β) Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση της f όπου $f: A \rightarrow f(A)$

(γ) Να ορίσετε την $(g \circ f^{-1})(x)$

(δ) Να λύσετε την εξίσωση $(g \circ f^{-1})(x) = 2g(3)$

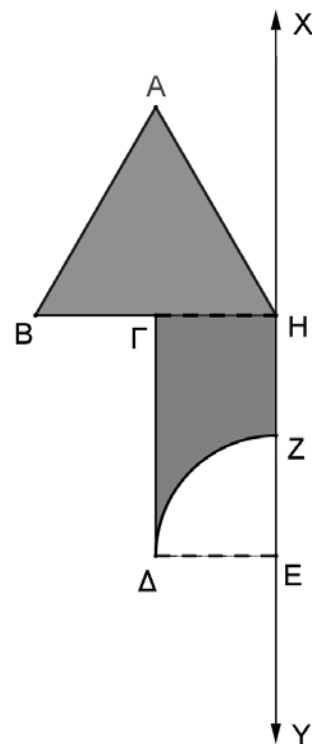
4. Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$ με τύπο $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{\ln(2^x - 3)}{\ln 8}$

(α) Να δείξετε ότι: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3 - 2^x}$

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $5 \frac{d^2 y}{dx^2} = -8 \frac{dy}{dx} \ln 2$

5. Στο παρακάτω σχήμα το $\triangle ABH$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο, το $\triangle DEH$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, και η $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετη της BH . Με κέντρο το E και ακτίνα την ΔE γράφουμε το τόξο ΔZ που έχει μήκος $\pi \text{ cm}$. Το σημείο Z είναι το μέσο της πλευράς EH . Το σκιασμένο σχήμα κάνει πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα XY . Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

(Η απάντησή σας να δοθεί συναρτήσει του π)

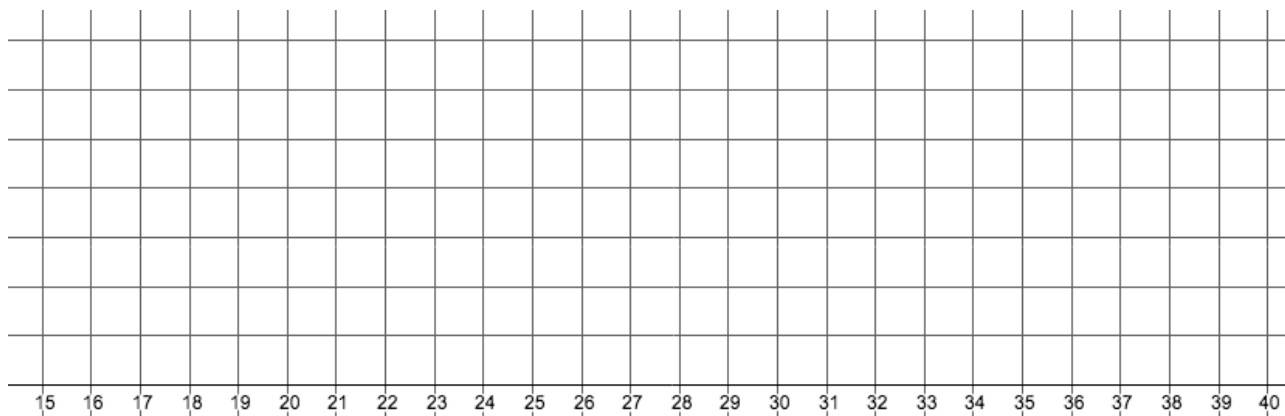


ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση: $|x - 4| = 7$
2. Δίνεται η Γεωμετρική Πρόοδος $1, 2, 4, \dots$. Να υπολογίσετε:
 - α) Τον όγδοο (a_8) όρο της.
 - β) Το άθροισμα των επτά πρώτων όρων της.
3. Στο πιο κάτω φυλλογράφημα παρουσιάζονται οι μέγιστες θερμοκρασίες (σε βαθμούς Κελσίου) στη Λευκωσία από την 1^η μέχρι την 27^η Απριλίου της φετινής χρονιάς. Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο θηκόγραμμα.

3	0 0 1 2 3 3 3 4
2	5 5 5 6 6 7 7 7 8 8 9 9
2	0 0 1 2 2 4
1	9



4. Σφαίρα έχει εμβαδόν $36\pi \text{ cm}^2$. Κώνος έχει ακτίνα ίση με την ακτίνα της σφαίρας και ύψος 4 cm . Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου.
5. Να λύσετε την εξίσωση: $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$
6. Να αποδείξετε με τη μέθοδο της Τέλειας Επαγωγής ότι ισχύει:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

7. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\eta\mu 5x}{\eta\mu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu 5x}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x$
8. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln \left(\frac{x+4}{x-4} \right)$
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.
9. Δίνεται η καμπύλη (K) με εξίσωση: $x^2 - y^3 = 10x - 8$.
- α) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης (K) στο σημείο με $x_0 = 0$.
- β) Να δείξετε ότι: $3y^2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + 6y \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2 = 0$.
10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow f(A)$ και $g: B \rightarrow \square$, $A, B \subseteq \square$ με τύπους
- $$f(x) = \sqrt{x+1} \text{ και } g(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x+1}}.$$
- α) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$ και $\frac{f}{g}$.
- β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(x)$.
- (Να γίνουν όλες οι δυνατές πράξεις)

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Έστω η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} \lambda x^2 + 1 & , x < 1 \\ x^3 - \lambda x^2 - x - 3 & , x \geq 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$
- α) Να βρείτε την τιμή του λ , έτσι ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
- β) Για $\lambda = -2$, να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.
2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ με πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και $g(x) = x - 4$ με πεδίο ορισμού το $B = (1, 10]$.
- α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $(f \circ g)(x)$.
- β) Αν $f(g(x)) = \sqrt{x-4}$, να υπολογίσετε το όριο (αν υπάρχει): $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(g(x)) - 1}{x^2 - 5x}$

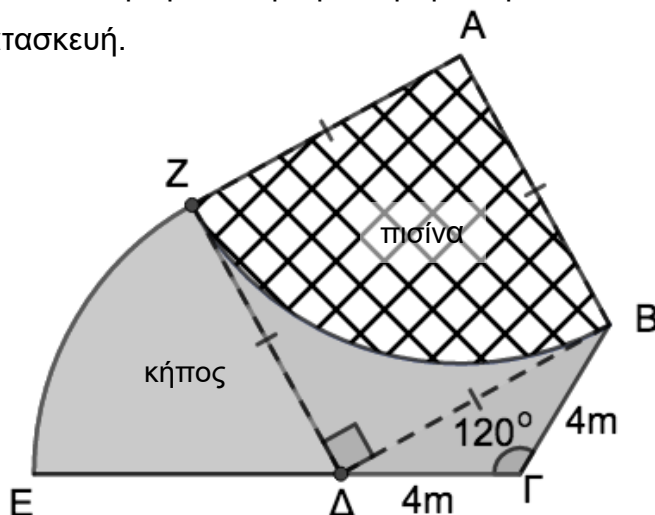
3. α) Αν οι αριθμοί $1, \log_x 2, \log_2 x$ με $x > 0$ και $x \neq 1$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Αριθμητικής Προόδου, να υπολογίσετε τις τιμές του x . (μον. 4)
- β) Το άθροισμα Σ_v των v πρώτων όρων της ακολουθίας (α_v) δίνεται από τον τύπο $\Sigma_v = 2(3^v - 1)$, $v \in \mathbb{N}$.
- i) Να αποδείξετε ότι ο γενικός τύπος της ακολουθίας είναι: $\alpha_v = 4 \cdot 3^{v-1}$, $v \in \mathbb{N}$.
- ii) Να μελετήσετε την ακολουθία (α_v) ως προς τη μονοτονία της.
- iii) Να υπολογίσετε πόσους όρους της ακολουθίας πρέπει να προσθέσουμε, για να έχουμε άθροισμα τουλάχιστον 160. (μον. 6)

4. Παραμετρική καμπύλη (Κ) ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = \alpha \sin^3 \theta \\ y = \alpha \eta \mu^3 \theta \end{cases}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$$

- α) Να βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της καμπύλης (Κ). (μον. 4)
- β) Δίνεται η παράσταση: $A = (\eta \mu \theta - \sigma \nu \theta) \cdot \left(\frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta}\right)$
- i) Να δείξετε ότι: $A = -\frac{3\alpha}{4} \cdot \eta \mu 4\theta$
- ii) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{4}{3\alpha} \cdot A = -1$ (μον. 6)

5. Στην αυλή ενός κτηριακού συγκροτήματος πρόκειται να κατασκευαστεί πισίνα και κήπος με γρασίδι, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Η πισίνα περικλείεται από τις πλευρές ΑΖ, ΑΒ και το τόξο ΒΖ το οποίο κατασκευάστηκε με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΖ. Το γρασίδι περικλείεται από τις πλευρές ΕΓ, ΓΒ, το τόξο ΒΖ και το τόξο ΖΕ το οποίο κατασκευάστηκε με κέντρο το Δ και ακτίνα ΔΕ. Αν το ΑΒΔΖ είναι τετράγωνο, $\widehat{ΕΓΒ} = 120^\circ$ και $\Gamma\Delta = \Gamma B = 4m$, να υπολογίσετε πόσα τετραγωνικά μέτρα γρασίδι για τον κήπο και πόσα τετραγωνικά μέτρα κεραμικά για τον πάτο της πισίνας θα χρειαστούν για την κατασκευή.



ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΤΑΞΗ: Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α' . Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1) Να λύσετε την εξίσωση $|\chi^2 - 3| = 1$
- 2) Σφαίρα έχει εμβαδό επιφάνειας $E_{ολ} = 36\pi cm^2$. Να υπολογίσετε τον όγκο της.
- 3) Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 2n - 5$, $n \in \mathbb{N}$
Να δείξετε ότι η ακολουθία είναι Αριθμητική πρόοδος.
Στη συνέχεια να υπολογίσετε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της.
- 4) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{\chi \rightarrow 3} \frac{\chi^2 - 9}{2\chi - 6}$$

$$\beta) \lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{\sqrt{\chi^2 + 5} - 3}{\chi - 2}$$

- 5) Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(\chi) = e^{3\chi} \cdot \eta\mu 4\chi \quad \beta) \psi = \chi^{\chi+1} \quad \gamma) \chi^2 \psi + e^\chi + \sqrt{\psi} = 9$$

- 6) Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n ισχύει:

$$1 + 4 + 7 + \dots + 3n - 2 = \frac{n(3n-1)}{2}$$

- 7) Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι $\hat{\Gamma} = 45^\circ$, $\alpha = 2cm$, $\beta = \sqrt{2} cm$.

α) Να επιλύσετε το τρίγωνο.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου.

$$8) \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(\chi) = \begin{cases} \alpha\chi + 3 , & \chi < 2 \\ 5 , & \chi = 2 \\ \eta\mu(\chi\pi) + \beta\chi^2 , & \chi > 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των α και β , ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής.

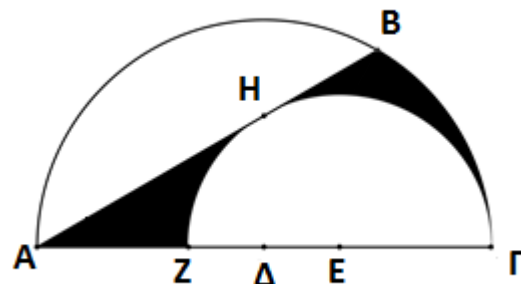
$$9) \text{ Δίνονται οι συναρτήσεις } f(\chi) = \frac{5}{\chi-6} , \quad g(\chi) = \sqrt{2\chi-8}$$

Να εξετάσετε αν ορίζεται η σύνθεση $f \circ g$ και να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.

10) Δίνεται ημικύκλιο ΑΒΓ με κέντρο το σημείο Δ και διάμετρο ΑΓ = 6cm.
Δίνεται επίσης ημικύκλιο ΖΗΓ με κέντρο το σημείο Ε και
διάμετρο ΖΓ.

Η ΑΗΒ είναι εφαπτομένη του ημικυκλίου στο σημείο Η.

Αν η γωνία $B\hat{A}\Gamma = 30^\circ$, να υπολογίσετε το εμβαδόν
της σκιασμένης επιφάνειας.



ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β'. Κάθε άσκηση
βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \frac{\eta\mu x + \eta\mu 3x + \eta\mu 5x}{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 3x + \sigma\upsilon\nu 5x}$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \varepsilon\varphi 3x$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \sqrt{3}$, $x \in [0, \pi]$

2) α) Να υπολογίσετε την τιμή του x , αν τα παρακάτω αποτελούν διαδοχικούς όρους

Αριθμητικής Προόδου:

$$\log 3, \quad \log \sqrt{2^{2x} + 2}, \quad x \log 2$$

β) Σε φθίνουσα Γεωμετρική Πρόοδο με $0 < \lambda < 1$, ο πρώτος όρος της είναι
τετραπλάσιος του τρίτου όρου της. Αν το άθροισμα των απείρων όρων της είναι ίσο
με 4, να βρείτε τους τέσσερις πρώτους όρους της προόδου.

3) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2}{2x-4}$, $g(x) = \frac{x}{x^2-2x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο πάνω συναρτήσεων.

β) Να εξετάσετε αν $f(x) = g(x)$. Αν όχι, να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο
των πραγματικών αριθμών στο οποίο να είναι ίσες.

γ) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g$, $\frac{f}{g}$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού τους.

δ) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ είναι 'ένα προς ένα' και να βρείτε τον τύπο της
αντίστροφης της.

4) α) Δίνεται η συνάρτηση $\psi = 2\sigma\chi^2 + \sqrt{3}\eta\mu 2\chi$

Να δείξετε ότι $\frac{d^2\psi}{d\chi^2} + 4\psi = 4$

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \alpha \ln \chi + \beta \chi^2 + 7$, $\chi > 0$

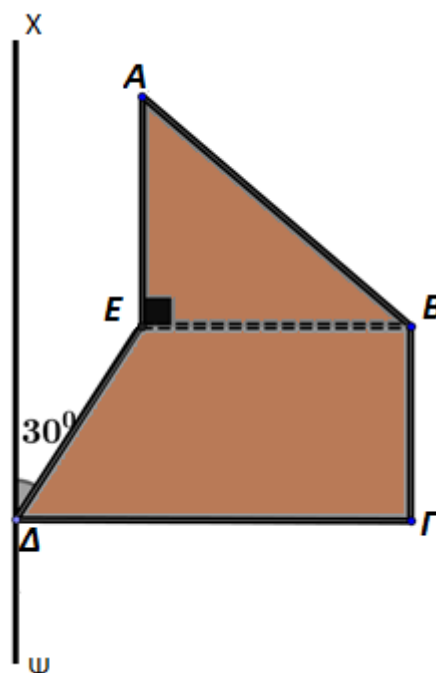
Δίνεται ότι $f(1) = 9$ και η κλίση της εφαπτομένης της συνάρτησης στο σημείο

$A(1,9)$ είναι ίση με 6. Να υπολογίσετε τους αριθμούς α και β .

5) Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABE , $\hat{E} = 90^\circ$, $AB = 10\text{cm}$, $BE = 8\text{cm}$, $AE = DE$, $B\Gamma \parallel \chi\psi$. Το $B\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο ($\hat{\Gamma} = \hat{B} = 90^\circ$) και η πλευρά ΔE σχηματίζει γωνιά 30° με τον άξονα περιστροφής $\chi\psi$. Το σκιασμένο πολύγωνο στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα περιστροφής $\chi\psi$. Να υπολογίσετε:

α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του παραγόμενου στερεού.

β) Τον όγκο του παραγόμενου στερεού.



ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

- 1) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω:

α) $y = \frac{x^3}{x^2+1}$

β) $f(x) = e^x \cdot \varepsilon\varphi 2x$

- 2) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$

β) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}$

- 3) Δίνεται η συνάρτηση $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο με τεταγμένη $\frac{1}{3}$ και $x > 0$.

- 4) Να λύσετε την εξίσωση $2 - 5\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 2x$ στο διάστημα $[0, \pi]$.

- 5) Η πιο κάτω λίστα περιέχει τους λογαριασμούς για τον ηλεκτρισμό σε ευρώ των ενοίκων μιας τετραώροφης πολυκατοικίας για το μήνα Μάιο:

42 58 120 46 63 55 81 60 56 62 61 48 55 31 43

Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα και να ελέγξετε κατά πόσο υπάρχουν ακραίες παρατηρήσεις.

- 6) Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\frac{(\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 3x)^2 + (\eta\mu x + \eta\mu 3x)^2}{\eta\mu 4x + 2\eta\mu 2x} = 2\varepsilon\varphi x.$$

- 7) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x(x-1)^2 = 4$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,3)$.

- 8) Να αποδειχτεί ότι το 64 διαιρεί την παράσταση $A = 9^{n+1} - 8n - 9$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- 9) Να λύσετε την εξίσωση :

$$\ln(\eta\mu x) + \ln(\eta\mu^3 x) + \ln(\eta\mu^5 x) + \dots + \ln(\eta\mu^{99} x) = \ln(2^{-1250}), \quad x \in (0, \pi).$$

10) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 - x + \beta, & x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ x^2 + \gamma x - 4, & x > 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η πιο πάνω συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1) Σε αριθμητική πρόοδο το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της ισούται με 12 και η διαφορά δ είναι η λύση της εξίσωσης $\log_2(2^x - 4) = 2$.

α) Να δείξετε ότι $\delta = 3$ και να σχηματίσετε την πρόοδο.

β) Να βρείτε πόσοι όροι της προόδου έχουν άθροισμα 35.

2) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x - 1, x \in \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{3 - |x|}, x \in [0, 3]$ και $h(x) = x - 2, x \geq 1$.

α) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i. $(g \circ f)(x)$

ii. $\left(\frac{g}{h}\right)(x)$

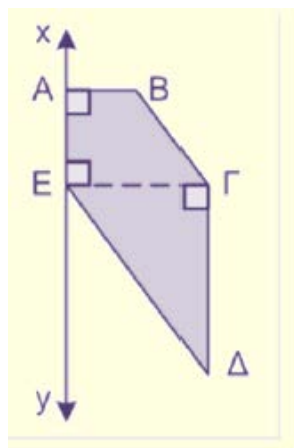
β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη της.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της κάθετης της g^{-1} στο σημείο με $x = 1$.

3) Στο πιο κάτω σχήμα $AE = 4\text{cm}, B\Gamma = 5\text{cm}, \Gamma\Delta = 8\text{cm}, \Delta E = 10\text{cm}$ και $\widehat{E\Gamma\Delta} = \frac{\pi}{2}$.

Οι AB και $E\Gamma$ είναι κάθετες στον άξονα xy .

Το σκιασμένο μέρος του σχήματος περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του παραγόμενου στερεού.



4) Τρίγωνο ΑΒΓ, που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R), έχει πλευρές $\alpha = 2\text{cm}$, $\beta = 4\text{cm}$ και εμβαδόν $E = 2\sqrt{3}\text{cm}^2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του μικρότερου κυκλικού τμήματος που ορίζεται από τον κύκλο και την πλευρά ΑΒ, αν η Γ είναι οξεία γωνία.

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\lambda+1}{5-\lambda}\right)^x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η $f(x)$ είναι εκθετική συνάρτηση.

β) Για $\lambda = 3$, να δείξετε ότι ο όγκος κυλίνδρου με ακτίνα $R = 2\text{cm}$ και ύψος τη συνάρτηση $f(x)$ είναι $V = 4\pi \cdot 2^x \text{cm}^3$.

γ) Αν ο ρυθμός μεταβολής $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\pi} \text{cm/s}$, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του κυλίνδρου $\frac{dV}{dt}$ για $x = 2$.

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29/05/2018

ΩΡΑ: 08.00' -10.30'

ΤΑΞΗ: Β Κατεύθυνσης

ΒΑΘΜΟΣ: -----

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: -----

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2.5 ΩΡΕΣ

ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΚΑΘΗΓΗΤΗ

**ΟΔΗΓΙΕΣ**

- Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού/ταινίας.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο (2) μέρη.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.
- Όλες οι απαντήσεις να δοθούν στις σφραγισμένες κόλλες αναφοράς που σας δόθηκαν.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.

ΜΕΡΟΣ Α: (50 μονάδες)

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

1. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $|2x - 4| = 5$

β) $|x - 2| + 3 = 0$

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^4 - x + 1}{2x^2 - 5x}$

3. Ένας δειγματοληπτικός έλεγχος στην κεντρική αγορά στις τιμές του τυριού και του κρέατος είχε τα αποτελέσματα που φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα:

Τυρί €/kg	2,5	3,3	3,7	3,9	5,2	6,8	6,9	7,4	8,8	9,3
Κρέας €/kg	2,4	4,6	4,2	3,9	4,8	5,6	5,2	6,1	5,9	8

Να κατασκευάσετε φυλλογράφημα διπλής όψης για τα δύο είδη.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \eta\mu^2 x$, $x \in \mathbb{R}$. Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχει $\xi \in [0, \pi]$ ώστε να ισχύει $f(\xi) = 3$.

5. Να αποδείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + v(v+1) = \frac{v(v+1)(v+2)}{3}, v \in \mathbb{N}$$

6. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu(x+a) - \eta\mu(x-a) = 2\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu a$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση και αν επιπλέον ισχύει ότι $\epsilon\phi a = -\frac{1}{2}$, να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $\eta\mu(x+a) - \eta\mu(x-a) = \sigma\upsilon\nu a \cdot \eta\mu x$

7. Σε Αριθμητική Πρόοδο το άθροισμα του τρίτου και του πέμπτου όρου της είναι ίσο με 30, ενώ ο ένατος όρος της είναι πενταπλάσιος του δευτέρου.

Να βρείτε:

α) Την Αριθμητική Πρόοδο.

β) Τον όρο της προόδου που είναι ίσος με 419.

γ) Το πλήθος των όρων της προόδου που έχουν άθροισμα ίσο με 8256.

8. Δίνεται η ακολουθία: $4\eta\mu\theta, 2\eta\mu 2\theta, \eta\mu 3\theta + \eta\mu\theta, \dots$ με $\theta \neq k\pi$, $\theta \neq k\pi + \pi/2$.

α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι φθίνουσα Γ.Π.

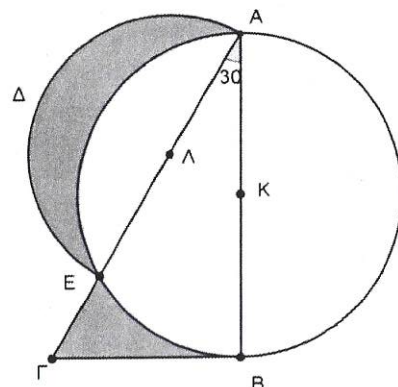
β) Να δείξετε ότι το άθροισμα των απείρων όρων της $\sum_{\infty} = \frac{4\eta\mu\theta}{1-\sigma\upsilon\nu\theta}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sum_{\infty} = 4\sigma\phi\theta$, στο διάστημα $[0, 2\pi)$.

9. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) . Η AB είναι διάμετρος του κύκλου, η $B\Gamma$ εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B και η γωνία $\widehat{B\Lambda\Gamma} = 30^\circ$. Το τόξο $A\Delta E$ είναι ημικύκλιο με κέντρο το Λ . Να υπολογίσετε:

α) Τις γωνίες $\widehat{A\hat{K}E}$ και $\widehat{E\hat{K}B}$

β) Το σκιασμένο εμβαδόν.



10. Να αποδείξετε ότι $\log_{a^2} x^2 = \log_a x$, με $x > 0$ και $1 \neq a > 0$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να λύσετε

την εξίσωση $\log_3 \left(4^x + 2^{x+1} + \frac{5}{2} \right) - 1 = 2 \log_9 (2^{x-1} + 1)$

ΜΕΡΟΣ Β': (50 μονάδες)

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \sqrt{x-2}$ και $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$

α) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$ και $\frac{g}{f}$

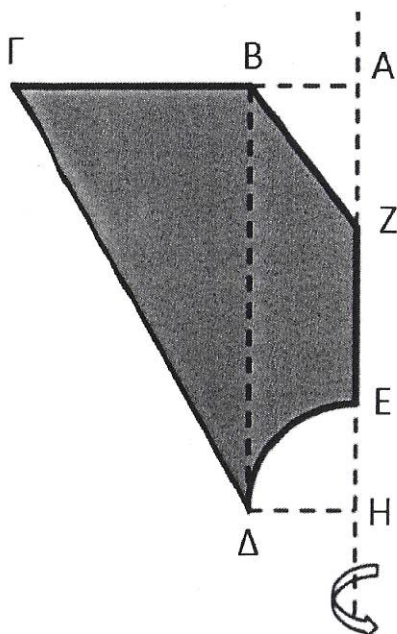
β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ (πεδίο ορισμού και τύπος)

γ) Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τις τιμές $(f \circ g)(4)$ και $(f \circ g)(1)$

δ) Να δείξετε ότι $(f \circ g)'(x) = \frac{-2}{\sqrt{(5-x)(x-1)^3}}$

2. Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, το τεταρτοκύκλιο $\Delta E H$ έχει κέντρο H και ακτίνα $\Delta H = 3 \text{ cm}$, $BZ = ZE = 5 \text{ cm}$ και $B\Gamma = 9 \text{ cm}$.

Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του μικτόγραμμου χωρίου $B\Gamma\Delta E Z$ γύρω από την ευθεία AH .



3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^x, x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι οι όροι $\frac{f(x)}{1 + \ln x}, f(x), f'(x)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Να βρείτε την εξίσωση της καθέτου στην καμπύλη $y = f(x)$, στο σημείο της με τετμημένη $x = 1$.

γ) Αν $g(x) = \ln f(x)$, να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $x^2 g''(x) - x g'(x) + g(x) = 0$

4. Παραμετρική καμπύλη (Κ) ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = \sigma\upsilon\nu 2t + \eta\mu^2 t \\ \quad \quad \quad , t \in (0, \frac{\pi}{4}) \\ y = \eta\mu 2t + \sigma\upsilon\nu^2 t \end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι: i) $\frac{dy}{dx} = -2\sigma\phi 2t + 1$

$$\text{ii) } \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{4}{\eta\mu^3 2t}$$

β) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{t^2}{y-x} \cdot \left(\frac{dy}{dx} - 1 \right) \right]$

5. Δίδεται η τριγωνομετρική συνάρτηση $f(\theta) = \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 2\theta}{(\eta\mu 2\theta + \sigma\upsilon\nu 2\theta - 1)(1 + \sigma\phi\theta)}$ και

η λογαριθμική εξίσωση $2 \cdot \log_4(5^{\kappa+1} - 3^{\kappa+2}) = 2 + 3 \cdot \log_8(4 \cdot 3^\kappa - 5^\kappa)$.

α) Να δείξετε ότι $f(\theta) = \sigma\upsilon\nu 2\theta$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $L = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - f(\theta)}{\sqrt{\theta^2 + 1} - 1}$.

γ) Να δείξετε ότι $L = 2\kappa$, όπου κ η λύση της πιο πάνω λογαριθμικής εξίσωσης.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Σχολική Χρονιά 2016-2017

1. Τριγωνομετρία:

$$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B \pm \sigma\upsilon\nu A \eta\mu B$$

$$\sigma\upsilon\nu(A \pm B) = \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A \eta\mu B$$

$$2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu B = \eta\mu(A - B) + \eta\mu(A + B)$$

$$2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu(A - B) + \sigma\upsilon\nu(A + B)$$

$$2\eta\mu A \eta\mu B = \sigma\upsilon\nu(A - B) - \sigma\upsilon\nu(A + B)$$

$$\eta\mu 2A = 2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu A$$

$$\sigma\upsilon\nu 2A = \sigma\upsilon\nu^2 A - \eta\mu^2 A$$

$$\eta\mu^2 A = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2A}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 A = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2A}{2}$$

$$\eta\mu 2A = \frac{2\varepsilon\varphi A}{1 + \varepsilon\varphi^2 A}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2A = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2 A}{1 + \varepsilon\varphi^2 A}$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \eta\mu \frac{B-A}{2}$$

$$a = 2R \cdot \eta\mu A$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$$

$$E = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu \Gamma}{2}$$

2. Στερεομετρία:

Ορθό Πρίσμα	$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \upsilon$	$V = E_{\beta} \cdot \upsilon$
Κανονική Πυραμίδα	$E_{\pi} = \frac{1}{2} \Pi_{\beta} \cdot h$	$V = \frac{E_{\beta} \cdot \upsilon}{3}$
Κύλινδρος	$E_{\kappa} = 2\pi R \upsilon$	$V = \pi R^2 \upsilon$
Κώνος	$E_{\kappa} = \pi R \lambda$	$V = \frac{\pi R^2 \cdot \upsilon}{3}$
Κόλουρος Κώνος	$E_{\kappa} = \pi(R + \rho)\lambda$	$V = \frac{\pi \cdot \upsilon}{3} (R^2 + R \cdot \rho + \rho^2)$
Σφαίρα	$E = 4\pi R^2$	$V = \frac{4\pi R^3}{3}$