

ΜΕΡΟΣ Α	
1. (α) $f(x) = e^x - \sin 2x + 5 \Rightarrow f'(x) = e^x + 2\eta\mu 2x$	1,25 + 1,25
(β) $h(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$ $\Rightarrow h(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}, x > 0$	1,5 (πηλ.) 0,5 + 0,5
2. (α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3x + 2}{-x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{-x^2} = -5$	2 + 0,5
(β) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{12}{0^+} = +\infty$	2 + 0,5
3. $\log_4(3x + 4) = \log_2 x$ $\Leftrightarrow \frac{\log_2(3x + 4)}{\log_2 4} = \log_2 x$ $\Leftrightarrow \log_2(3x + 4) = 2\log_2 x$ $\Leftrightarrow \log_2(3x + 4) = \log_2 x^2$ $\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$ $\Leftrightarrow (x - 4)(x + 1) = 0$ $\Leftrightarrow \boxed{x = 4}$ ή $x = -1$ (απορρίπτεται)	<u>Περιορισμοί:</u> $\left. \begin{array}{l} x > -\frac{4}{3} \\ x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x > 0$ 1 0,5 (περ.) 1 1 0,5 1
4. (α) (i) Ακραίες παρατηρήσεις: 1,6 και 1,7	1
(ii) $\left. \begin{array}{l} Q_1 = 0,8 \\ Q_3 = 1,1 \end{array} \right\} \Rightarrow IQR = Q_3 - Q_1 = 1,1 - 0,8 = 0,3$	1,5
(β) (i) Για το διάγραμμα Α: $\frac{3}{4} \leftrightarrow 75\%$ άρα 0,9 sec (= Q_3)	0,75
Για το διάγραμμα Β: $\frac{3}{4} \leftrightarrow 75\%$ άρα 1,1 sec (= Q_3)	0,75
(ii) Συμμετρικό είναι το διάγραμμα Α διότι $Q_3 - Q_2 = Q_2 - Q_1 = 0,15$	1

5. (α) $E = \frac{1}{2}(AB)(B\Gamma)\eta\mu B = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 40 \cdot \eta\mu 60^\circ = \underline{\underline{433 \text{ m}^2}}$ (β) $(A\Gamma)^2 = (AB)^2 + (B\Gamma)^2 - 2(AB)(B\Gamma)\sigma\upsilon\nu B$ $= 25^2 + 40^2 - 2 \cdot 25 \cdot 40 \sigma\upsilon\nu 60^\circ$ $= 1225$ $\Rightarrow \underline{\underline{A\Gamma = 35 \text{ m}}}$ (γ) $\frac{AB}{\eta\mu\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\eta\mu B} \Leftrightarrow \frac{25}{\eta\mu\Gamma} = \frac{35}{\eta\mu 60^\circ} \Leftrightarrow \eta\mu\Gamma = \frac{5\sqrt{3}}{14} \Rightarrow \underline{\underline{\Gamma = 38^\circ}}$	0,5 + 0,5 1 0,5 0,5 1 + 0,5 + 0,5
6. $\alpha_v = 7^v + 5, v \in \mathbb{N}$ (α) Είναι $v \geq 1 \Leftrightarrow 7^v \geq 7 \Leftrightarrow 7^v + 5 \geq 7 + 5 \Leftrightarrow \alpha_v \geq 12$ Άρα η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη με μέγιστο κάτω φράγμα το 12. (β) Εφαρμόζουμε τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής: - Για $v = 1 \Rightarrow 7^v + 5 = 12 = \text{πολ}3$ - Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για $v = k$ δηλαδή $7^k + 5 = \text{πολ}3 \Leftrightarrow 7^k + 5 = 3\lambda, 2 \leq \lambda \in \mathbb{N}$ - Θα αποδείξουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για $v = k + 1$: $7^{k+1} + 5 = 7 \cdot 7^k + 5 = 7(3\lambda - 5) + 5$ (από υπόθεση επαγωγής) $= 21\lambda - 30$ $= 3(7\lambda - 10)$ $= \text{πολ}3$ Άρα για κάθε $v \in \mathbb{N}$ ο αριθμός $\alpha_v = 7^v + 5$ είναι πολλαπλάσιος του 3.	1,5 1 0,5 0,5 1,25 0,25
7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - \lambda^2 x, & x \leq 1 \\ 3\eta\mu(x-1) + \lambda, & x > 1 \end{cases} \text{ και } \lambda \in \mathbb{R}$ (α) Η f είναι συνεχής στο $x = 1$ μόνο όταν: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$	1

Έχουμε:	
$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 2 - \lambda^2$	0,5
$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3\eta\mu(x-1) + \lambda) = \lambda$	0,5
Άρα αρκεί	
$\lambda = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda = -2}} \text{ ή } \underline{\underline{\lambda = 1}}$	0,5
(β) Για $\lambda = -2$,	
$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x, & x \leq 1 \\ 3\eta\mu(x-1) - 2, & x > 1 \end{cases}$	0,25
Έχουμε:	
$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3\eta\mu(x-1) - 2 - (-2)}{x - 1} = 3 \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} = 3 \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu u}{u} = 3$	0,75
$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 4x + 2}{x - 1} = 2 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)^2}{x-1} = 2 \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$	0,75
Το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ δεν υπάρχει αφού τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$.	0,75
8. Επειδή $AB = A\Gamma$ και $A = 90^\circ$ τότε $AZ = Z\Gamma = \sqrt{2} \text{ cm}$. Επίσης $AZ \perp B\Gamma$. Άρα, $(A\Gamma)^2 = (AZ)^2 + (Z\Gamma)^2 = 2 + 2 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{A\Gamma = AB = 2 \text{ cm}}}$ $(B\Gamma)^2 = (A\Gamma)^2 + (AB)^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow \underline{\underline{B\Gamma = 2\sqrt{2} \text{ cm}}}$	0,5 0,5 0,5
(α) Όγκος στερεού:	
$V = V_{\kappa\omega\nu\nu} - V_{\eta\mu\sigma\varphi} = \frac{\pi R^2 u}{3} - \frac{2}{3} \pi \rho^3 = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 2}{3} - \frac{2}{3} \pi (\sqrt{2})^3 = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3} (2 - \sqrt{2}) \text{ cm}^3}}$	1,5
(β) Εμβαδόν επιφάνειας στερεού:	
$E = E_{B\Gamma} + E_{\Delta E} + E_{B\Delta} = \pi R \lambda + 2\pi \rho^2 + (\pi R^2 - \pi \rho^2)$	1,5
$= \pi \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} + \pi \sqrt{2}^2 + \pi \cdot 2^2 = \underline{\underline{2\pi (3 + 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2}}$	0,5

9. Οι χρόνοι εργασίας των εργατών αποτελούν Α.Π. με $\delta = -\frac{1}{2}$ ώρες .	0,5
(α) $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\delta \Rightarrow 9 = \alpha_1 + 5\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha_1 = 11,5}}$ Ο πρώτος εργάτης εργάστηκε 11,5 ώρες.	1,5
(β) Πρέπει: $\alpha_v > 0 \Leftrightarrow 11,5 + (v-1)(-0,5) > 0 \Leftrightarrow 0,5v < 12 \Leftrightarrow v < 24$	0,75
Θα μπορούσαν να εργαστούν το πολύ 23 εργάτες.	0,25
(γ) Ο συνολικός αριθμός των ωρών εργασίας θα είναι $560 \div 8 = 70$.	0,5
Άρα $\begin{aligned} \Sigma_v &= 70 \\ \Leftrightarrow \frac{[2\alpha_1 + (v-1)\delta]v}{2} &= 70 \\ \Leftrightarrow \frac{[23 + (v-1)(-0,5)]v}{2} &= 70 \\ \Leftrightarrow 23v - \frac{1}{2}v(v-1) &= 140 \\ \Leftrightarrow v^2 - 47v + 280 &= 0 \\ \Leftrightarrow (v-40)(v-7) &= 0 \\ \Leftrightarrow \boxed{v=7} \quad (v=40 \text{ απορρίπτεται αφού } v < 24) \end{aligned}$	1
Επομένως εργάστηκαν 7 εργάτες.	0,5
10. (α) $D_g = [-1, 6]$ και $R_g = [-5, 4]$	0,5 + 0,5
(β) $D_f = (0, +\infty)$ οπότε $D_{g \circ f} = D_g \cap D_f = (0, 6]$	0,5 + 0,5
(γ) (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$	0,5
(ii) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x) - g(4)}{x - 4}$ δεν υπάρχει αφού η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 4$	0,5
(δ) (i) $g(f(1)) = g(-1) = -5$	0,5
(ii) $f(1) = -1 \Leftrightarrow f^{-1}(-1) = 1$	0,5
(ε) (i) $g'(x) < 0$ για $x \in (2, 4)$	0,5
(ii) $g'(x) = 0$ για $x = 2$	0,5

ΜΕΡΟΣ Β

$$\begin{aligned}
 1. \quad (\alpha) \quad A &= \frac{\eta\mu x + \eta\mu 3x}{1 + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)} \\
 &= \frac{2\eta\mu\left(\frac{x+3x}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-3x}{2}\right)}{1 + \sigma\upsilon\nu 2x} \\
 &= \frac{2\eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{1 + 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1} \\
 &= \frac{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x} \\
 &= \underline{\underline{2\eta\mu x}}
 \end{aligned}$$

1,5 + 0,5

0,5 + 1

1

0,5

$$\begin{aligned}
 (\beta) \quad 1 - \frac{A}{2} + \frac{A^2}{4} - \frac{A^3}{8} + \frac{A^4}{16} - \dots &= \frac{\tau\epsilon\mu^2 x}{2} \\
 1 - \eta\mu x + \eta\mu^2 x - \eta\mu^3 x + \dots &= \frac{\tau\epsilon\mu^2 x}{2}
 \end{aligned}$$

0,5

Η ακολουθία $1, -\eta\mu x, +\eta\mu^2 x, -\eta\mu^3 x, \dots$ είναι απολύτως φθίνουσα

1

Γεωμετρική Πρόοδος με $\alpha_1 = 1, |\lambda| = |-\eta\mu x| = |\eta\mu x| < 1$, στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Sigma_{\infty} = \frac{1}{1 - \lambda}$$

1

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - (-\eta\mu x)} = \frac{\tau\epsilon\mu^2 x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 + \eta\mu x} = \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

0,5

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 + \eta\mu x$$

0,5

$$\Leftrightarrow 2(1 - \eta\mu^2 x) = 1 + \eta\mu x$$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x + \eta\mu x - 1 = 0$$

1

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \eta\mu x = -1 \quad (\text{απορρίπτεται})$$

$$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

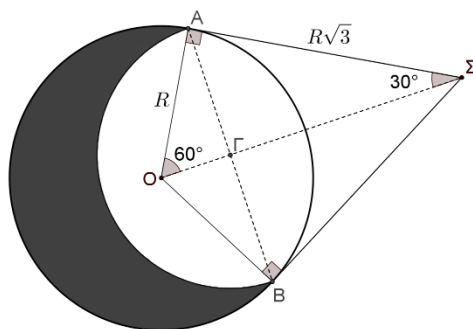
0,5

$$\text{Για } \kappa = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6}} \text{ στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

2. (α) Για $t=0 \Rightarrow \theta_B(0) = 36 + 4 \cdot 2^0 = 40^\circ\text{C}$ $t=1 \Rightarrow \theta_B(1) = 36 + 4 \cdot 2^{-2} = 37^\circ\text{C}$	0,75 0,75
Η διαφορά της θερμοκρασίας είναι 3°C μείωση.	0,5
(β) Έχουμε $\theta_B(t) = \theta_A(t)$ $\Leftrightarrow 36 + 4 \cdot 2^{-2t} = 35 + 5 \cdot 2^t$ $\Leftrightarrow 4 \cdot 2^{-2t} - 5 \cdot 2^t + 1 = 0$ $\Leftrightarrow 4\omega^2 - 5\omega + 1 = 0 \quad (\text{όπου } \omega = 2^{-t})$ $\Leftrightarrow (4\omega - 1)(\omega - 1) = 0$ $\Leftrightarrow \omega = \frac{1}{4} \text{ ή } \omega = 1$	1 0,5 1 1
Για $\omega = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{-t} = 2^{-2} \Leftrightarrow \underline{\underline{t = 2 \text{ ώρες}}}$	0,75
Για $\omega = 1 \Leftrightarrow 2^{-t} = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{t = 0 \text{ ώρες}}}$	0,75
(γ) $\theta_B(t) = 36 \Leftrightarrow 36 + 4 \cdot 2^{-2t} = 36 \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{-2t} = 0$ αδύνατη	1
$\theta_A(t) = 36 \Leftrightarrow 35 + 4 \cdot 2^{-t} = 36 \Leftrightarrow 2^{-t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow t = -\log_2 \frac{1}{5} \Leftrightarrow \underline{\underline{t = 2,3 \text{ ώρες}}}$	1,5
Η θερμοκρασία του ασθενούς Α θα είναι 36°C σε περίπου 2,3 ώρες.	0,5
3. $f: A \rightarrow \mathbb{R}, g: B \rightarrow \mathbb{R}, h: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $\Gamma = [1, +\infty)$ $f(x) = \sqrt{1-x^2}, g(x) = \frac{\sqrt{x^2-x^4}}{x}$ και $h(x) = x^2 - 2x$ (α) $A = \{x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (1-x)(1+x) \geq 0\} = [-1, 1]$ Έχουμε: $x \in A \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 1 \Leftrightarrow -x \in A$ $f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f(x)$	1,5 0,5 1
Άρα η f είναι άρτια στο πεδίο ορισμού της.	

(β) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x^4 \geq 0 \text{ και } x \neq 0\}$ $= \{x \in \mathbb{R} : x^2(1 - x^2) \geq 0 \text{ και } x \neq 0\}$ $= \{x \in \mathbb{R} : (1 - x^2) \geq 0 \text{ και } x \neq 0\}$ $= [-1, 1] - \{0\}$	1,25
Επίσης, αν $x > 0$ $g(x) = \frac{\sqrt{x^2(1-x^2)}}{x} = g(x) = \frac{ x \sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{x} = \sqrt{1-x^2}$	1,25
Από όλα τα πιο πάνω συμπεραίνουμε ότι $f(x) = g(x)$ στο $(0, 1] \cup \{-1\}$.	0,5
(γ) Επειδή $h: \Gamma \rightarrow h(\Gamma)$ η συνάρτηση h είναι επί. Αν $x_1, x_2 \in \Gamma = [1, +\infty)$ με $h(x_1) = h(x_2)$, τότε	0,5
$x_1^2 - 2x_1 = x_2^2 - 2x_2$ $\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 - x_2^2 + 2x_2 = 0$ $\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 2(x_1 - x_2) = 0$ $\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2) = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ ή } x_1 + x_2 = 2$ $\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ ή } (x_1 = x_2 = 1 \text{ στο } \Gamma)$ $\Leftrightarrow x_1 = x_2$	1
Επομένως η συνάρτηση h είναι ένα προς ένα.	
Από όλα τα πιο πάνω προκύπτει ότι η h^{-1} ορίζεται:	
$x \in \Gamma = [1, +\infty) \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x \geq -1 \Leftrightarrow h(x) \geq -1$	1
Οπότε είναι $D_{h^{-1}} = R_h = [-1, +\infty)$.	
Επιπλέον, $y = x^2 - 2x$ $\Leftrightarrow x^2 - 2x - y = 0$ $\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4y}}{2}$ $\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1 + y}$	1
Αφού $x \geq 1$ τελικά παίρνουμε $x = 1 + \sqrt{1 + y}$, οπότε $h^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1 + x}, \quad D_{h^{-1}} = [-1, +\infty)$	0,5

4.



Φέρουμε τη ΣΟ.

Π.Θ. στο τρίγωνο ΑΟΣ: $\Rightarrow \Sigma\text{Ο} = 2\text{R}$

Στο τρίγωνο ΑΟΣ: $AO = \frac{\Sigma O}{2} \Rightarrow \angle A\hat{S}O = 30^\circ$ (θεώρημα 30°) $\Rightarrow \angle A\hat{O}S = 60^\circ$

$\Rightarrow$ Η κυρτή γωνία $\text{AOB} = 120^\circ$ (από ισότητα των τριγώνων AOS και BOS)

$\Rightarrow AB = \lambda_3 = R\sqrt{3}$ και η μη κυρτή γωνία AOB είναι 240°

$$\Rightarrow A\Gamma = \frac{R\sqrt{3}}{2} \quad \text{ακτίνα ημικυκλίου AB}$$
$$E(\mu\eta\gamma\iota\sigma\kappa\upsilon) = E(\mu\epsilon\gamma\acute{\alpha}\lambda\omicron\upsilon \kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\kappa\acute{o}\upsilon \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau\omicron\varsigma \text{ AB}) - E(\eta\mu\iota\kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\omicron\upsilon \text{ AB})$$

$$= [E(\text{μη κυρτού τομέα AOB}) + E(\text{τριγ. AOB})] - E(\text{ημικυκλίου AB})$$

$$= \left(\frac{\pi R^2 \cdot 240^\circ}{360^\circ} + \frac{1}{2} R^2 \eta \mu 120^\circ \right) - \frac{\pi}{2} \left(\frac{R\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

$$= \frac{(7\pi + 6\sqrt{3})R^2}{24} \quad \text{т.п.}$$

$$\Pi = \frac{2\pi R \cdot 240^\circ}{360^\circ} + \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pi R}{6} (8 + 3\sqrt{3}) \mu.$$

5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη

$$(1) \quad f(x^2) + x \cdot f(x) = 4x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(α) Θέτοντας $x=1$:

$$f(1) + 1 \cdot f(1) = 4 \Leftrightarrow 2f(1) = 4 \Leftrightarrow \underline{\underline{f(1)=2}}$$

1

Παραγωγίζοντας στην (1):

$$\begin{aligned} f'(x^2) \cdot (x^2)' + f(x) + xf'(x) &= 8x \\ \Leftrightarrow 2xf'(x^2) + f(x) + xf'(x) &= 8x \end{aligned}$$

3

Θέτοντας $x=1$:

$$2f'(1) + f(1) + f'(1) = 8 \Leftrightarrow 3f'(1) + 2 = 8 \Leftrightarrow \underline{\underline{f'(1)=2}}$$

1

(β) Έχουμε ότι $\lambda_{\text{εφ}}|_{x=1} = f'(1) = 2$ και το σημείο είναι το $(1, f(1)) = (1, 2)$.

1

Εξίσωση εφαπτομένης:

$$y - y_1 = \lambda(x - x_1) \Leftrightarrow y - 2 = 2(x - 1) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2x}}.$$

1

(γ) Για $x=-1$, από την (1) παίρνουμε

$$f(1) + (-1) \cdot f(-1) = 4 \Leftrightarrow f(1) - f(-1) = 4 \Leftrightarrow \underline{\underline{f(-1)=-2}}$$

1

Αφού $f(1)=2>0$, $f(-1)=-2<0$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο $\mathbb{R}$, από το Θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\xi)=0$. Επομένως η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα των x τουλάχιστον σε ένα σημείο στο διάστημα $(-1, 1)$.

2