

ΛΑΝΙΤΕΙΟ ΛΥΚΕΙΟ (ΛΕΜΕΣΟΥ) - ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ –
ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Β' Προσανατολισμού

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πηγή Θεμάτων: <http://mathm.schools.ac.cy/index.php/el/yliko/exetastika-dokimia>

ΜΕΡΟΣ Α'

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του μέρους Α'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Θέμα 1

Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

(α) $f(x) = e^x - \sin(2x) + 5$

(β) $h(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$

Προτεινόμενη λύση

(α) Κατ'αρχάς, η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^x - \sin(2x) + 5$ είναι παντού παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως σύνθεση παντού παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεων) με

$$f'(x) = (e^x - \sin(2x) + 5)' = (e^x)' - (\sin(2x))' + (5)' = e^x + (2x)' \eta \mu(2x) + 0 = e^x + 2\eta \mu(2x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Κατ'αρχάς, η συνάρτηση h με τύπο $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της (ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο σύνολο αυτό) με

$$h'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

για κάθε $x > 0$.

Θέμα 2

Να υπολογίσετε τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3x + 2}{-x^2 + 2x + 1}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x + 6}{x - 2}$

Προτεινόμενη λύση

(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3x + 2}{-x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{-x^2} = 5 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-x^2} = 5 \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1) = 5 \cdot (-1) = -5$

(β) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x + 2)}{x - 2} = 3 \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 2}{x - 2} = 3 \cdot (+\infty) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 2}{x - 2} = \frac{2 + 2}{2 - 2} = \frac{4}{0^+} = 4 \cdot \frac{1}{0^+} = +\infty$ (χρησιμοποιήσαμε τις γνωστές συντμήσεις)

ή

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x + 2)}{x - 2} = 3 \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 2}{x - 2} = 3 \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2}$

και αφού το όριο $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2)$ υπάρχει και είναι ίσο με $2 + 2 = 4$ ενώ το όριο $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2}$ υπάρχει (στο εκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών) και είναι ίσο με $+\infty$ έπεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x + 6}{x - 2} = +\infty$$

Θέμα 3

Να λύσετε την εξίσωση

$$\log_4(3x + 4) = \log_2 x$$

Προτεινόμενη λύση

Καταρχάς, η συνάρτηση $x \mapsto \log_4(3x + 4)$ ορίζεται για $3x + 4 > 0$, δηλ. $x > -\frac{4}{3}$ και η $x \mapsto \log_2 x$ ορίζεται για $x > 0$. Έτσι, η συνάρτηση

$$x \mapsto \log_4(3x + 4) - \log_2 x$$

ορίζεται στο σύνολο $\{x > 0\}$ (δηλ. στην τομή των δυο προτέρων συνόλων). Έτσι, για $x > 0$ έχουμε (εκ του τύπου αλλαγής βάσης στο λογάριθμο)

$$\log_4(3x + 4) = \log_2 x \Leftrightarrow \log_4(3x + 4) = \frac{\log_2 x}{\log_2 2} \Leftrightarrow \log_4(3x + 4) = \frac{\log_2 x}{2} \quad (*)$$

Αλλά,

$$\log_4 2 = \log_{2^2} 2 = \frac{1}{\log_2 2^2} = \frac{1}{2 \log_2 2} = \frac{1}{2}$$

και αρα

$$(*) \Leftrightarrow \log_4(3x + 4) = 2 \log_4 x \Leftrightarrow \log_4(3x + 4) = \log_4 x^2$$

$$(1 - 1 \text{ της λογαριθμικής συνάρτησης}) \Leftrightarrow 3x + 4 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x = -1) \vee (x = 4)$$

Η λύση $x = -1$ δεν ανήκει στο διάστημα $(0, +\infty)$. Έτσι, τελικά, η μόνη λύση που επαληθεύει την εξίσωση είναι η $x = 4$.

Θέμα 4

Το διπλανό διάγραμμα παρουσιάζει σε (sec) τους χρόνους αντίδρασης στον κίνδυνο ενός δείγματος οδηγών:

A. Σε φυσιολογική κατάσταση

B. Υπό την επήρεια αλκοόλ

(α) Για το διάγραμμα B να βρείτε:

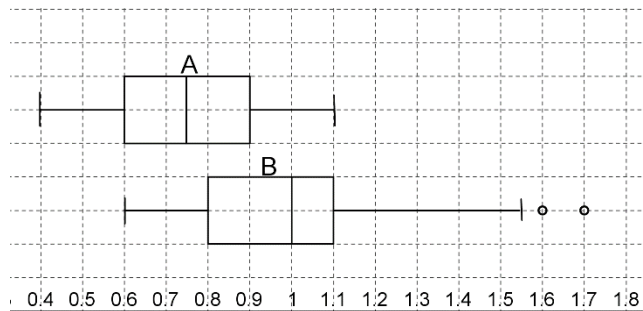
(i) τις ακραίες παρατηρήσεις

(ii) το ενδοτεταρτημοριακό εύρος

(β) Για τα διαγράμματα A και B:

(i) να βρείτε τη χρονική στιγμή μέχρι την οποία αντιδρούν τα $\frac{3}{4}$ των οδηγών

(ii) να αναφέρετε ποιο από τα δύο είναι συμμετρικό δικαιολογώντας την απάντησή σας



Προτεινόμενη λύση

(α) (i) Οι ακραίες παρατηρήσεις του διαγράμματος (θηκογράμματος) B είναι οι 1.6 sec και 1.7 sec

(ii) Από το διάγραμμα (θηκόγραμμα) B έχουμε ότι $Q_1 = 0.8 \text{ sec}$ και $Q_3 = 1.1 \text{ sec}$ και αρα το ενδοτεταρτημοριακό εύρος IQR είναι $IQR = Q_3 - Q_1 = 1.1 - 0.8 = 0.3 \text{ sec}$

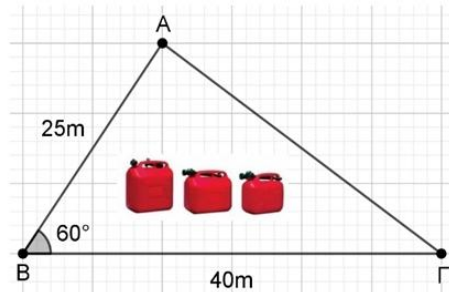
(β) (i) Μας ζητάνε το Q_3 σε κάθε θηκόγραμμα:

στο θηκόγραμμα Α είναι $Q_3 = 0.9 \text{ sec}$ και στο θηκόγραμμα Β είναι $Q_3 = 1.1 \text{ sec}$. Δηλ. στο διάγραμμα Α τα $\frac{3}{4}$ των οδηγών αντιδρούν σε χρόνο 0.9 sec ενώ στο Β σε χρόνο 1.1 sec .

(ii) Το διάγραμμα (θηκόγραμμα) Α είναι συμμετρικό αφού η διάμεσος είναι στο κεντρο του IQR .

Θέμα 5

Μία περιοχή φύλαξης καυσίμων ενός στρατοπέδου έχει σχήμα τριγώνου ΑΒΓ. Στα σημεία Α, Β και Γ τοποθετούνται συσκευές παρακολούθησης, ώστε η συσκευή στο Β να απέχει από τις συσκευές στα Α και Γ αποστάσεις 25 m και 40 m αντίστοιχα. Αν η γωνία με την



οποία η συσκευή στο Β παρατηρεί τη συνοριακή γραμμή ΑΓ είναι 60° , να υπολογίσετε στον πλησιέστερο ακέραιο:

- (α) το εμβαδόν της περιοχής φύλαξης των καυσίμων
- (β) την απόσταση μεταξύ των συσκευών στα Α και Γ
- (γ) τη γωνία με την οποία η συσκευή στο Γ παρατηρεί τη γραμμή ΑΒ

Προτεινόμενη λύση

(α) Έχουμε

$$E_{AB\Gamma} = \frac{\alpha \cdot \gamma \cdot \eta\mu\hat{B}}{2} = \frac{40 \cdot 25 \cdot \eta\mu 60^\circ}{2} = 20 \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 250\sqrt{3} \approx 433 \text{ m}^2$$

(β) Έχουμε

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sin\hat{B} = 40^2 + 25^2 - 2 \cdot 40 \cdot 25\sin 60^\circ = 1600 + 625 - 1000 = 1225$$

και αρα (αφού $\beta > 0$) $\beta = \sqrt{1225} = 35 \text{ m}$.

(γ) Έχουμε

$$\sin\hat{\Gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} = \frac{1600 + 1225 - 625}{2 \cdot 40 \cdot 35} = 0.7857$$

και αρα (αφού $0^\circ < \hat{\Gamma} < 180^\circ$) έχουμε ότι $\hat{\Gamma} \approx 38,21^\circ$

Θέμα 6

Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 7^n + 5$, $n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι:

- (α) η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη και να βρείτε το μέγιστο κάτω φράγμα της
- (β) ο αριθμός $(7^n + 5)$ είναι πολλαπλάσιο του 3, $\forall n \in \mathbb{N}$

Προτεινόμενη λύση

(α) Η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη. Πράγματι, αφού $\forall n \in \mathbb{N}$ είναι $7^n \geq 7$ και αρα $7^n + 5 \geq 7+5=12$, δηλ. $a_n \geq 12, \forall n \in \mathbb{N}$. Από αυτό έπεται ότι ο αριθμός 12 (ο οποίος είναι και ο πρώτος όρος της ακολουθίας) είναι **ενα** κάτω φράγμα αυτής και μάλιστα το μέγιστο κάτω φράγμα αυτής.

(β) Θα το δείξουμε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής:

Ο προτασιακός τύπος $P(n)$ του οποίου πρέπει να αποδείξουμε την αλήθεια στο σύνολο των φυσικών αριθμών είναι ο $P(n)$: ο αριθμός $(7^n + 5)$ είναι πολλαπλάσιο του 3, δηλ.

$$P(n): \text{υπάρχει } \alpha \in \mathbb{Z} \text{ τέτοιος ώστε } 7^n + 5 = 3\alpha$$

Βήμα 1

Για $n = 1$ είναι $7^1 + 5 = 12 = 3 \cdot 4$ και αρα ισχύει, δηλ. ο ο $P(1)$ είναι αληθής.

Βήμα 2

Υποθέτουμε ότι ο $P(k)$ είναι αληθής για κάποιο $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, δηλ. ότι

$$\text{υπάρχει } \alpha \in \mathbb{Z} \text{ τέτοιος ώστε } 7^k + 5 = 3\alpha$$

Θα δείξουμε ότι ο προτασιακός τύπος $P(k+1)$ είναι αληθής, δηλ. ότι

$$\text{υπάρχει } \beta \in \mathbb{Z} \text{ τέτοιος ώστε } 7^{k+1} + 5 = 3\beta$$

Έχουμε:

$$7^{k+1} + 5 = 7 \cdot 7^k + 5 = 7 \cdot (3\alpha - 5) + 5 = 21\alpha - 30 = 3(7\alpha - 10)$$

και αρα (αφού $(7\alpha - 10) \in \mathbb{Z}$) έπεται ότι ο αριθμός $7^{k+1} + 5$ είναι πολλαπλάσιο του 3

και το αποτέλεσμα ισχύει, δηλ. ο προτασιακός τύπος $P(k+1)$ είναι αληθής

Βήμα 3

Από την Αρχή της Μαθηματικής επαγωγής, έπεται ότι ο προτασιακός τύπος $P(n)$ έχει σύνολο αλήθειας το $\mathbb{N}$.

Θέμα 7

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - \lambda^2 x, & x \leq 1 \\ 3\eta\mu(x-1) + \lambda, & x > 1 \end{cases} \quad (\text{όπου } \lambda \in \mathbb{R})$$

(α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η f είναι συνεχής στο $x = 1$

(β) Για $\lambda = -2$ να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$.

Προτεινόμενη λύση

(α) Η f είναι συνεχής στο $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$. Είναι $f(1) = 2 \cdot 1^2 - \lambda^2 \cdot 1 = 2 - \lambda^2$ και το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ υπάρχει $\Leftrightarrow$ τα (πλευρικά) όρια $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ υπάρχουν και είναι ίσα μεταξύ τους. Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 - \lambda^2 x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 - \lambda^2 x) = 2 - \lambda^2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (3\eta\mu(x-1) + \lambda) = 3\eta\mu(0) + \lambda = \lambda \end{aligned}$$

(β) Για $\lambda = -2$ η συνάρτηση είναι συνεχής. Θα ελέγξουμε αν είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Η συνάρτηση είναι η

$$f(x) = \begin{cases} 2x(x-2), & x \leq 1 \\ 3\eta\mu(x-1) - 2, & x > 1 \end{cases}$$

Έχουμε

$$f_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3\eta\mu(x-1) - 2 - (-2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3\eta\mu(x-1)}{x - 1} = 3 \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\eta\mu(x-1)}{x - 1}$$

Το δε όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\eta\mu(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

και αρα $f_+(1) = 3$. και $= +\infty$.

Επίσης

$$f_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x(x-2) - (-2)}{x - 1} = 2 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 1} = 2 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)^2}{x - 1}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 2 \cdot 0 = 0$$

Συνεπώς, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 1$.

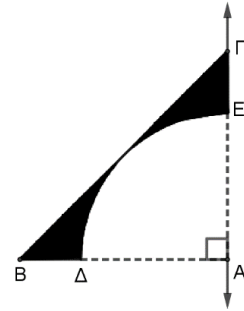
Θέμα 8

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($A = 90^\circ$) και ισοσκελές και το τεταρτοκύκλιο ΔE με κέντρο το A και ακτίνα $AE = \sqrt{2} \text{ cm}$ εφάπτεται της $B\Gamma$. Το σκιασμένο σχήμα $B\Gamma E\Delta B$ περιστρέφεται πλήρως γύρω από την AG .

Να υπολογίσετε:

(α) τον όγκο και

(β) την ολική επιφάνεια του στερεού που παράγεται



Προτεινόμενη λύση

Αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, έπεται ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$. Συνεπώς,

$$\eta\mu\hat{B} = \frac{AG}{BG} \Rightarrow \eta\mu 45^\circ = \frac{AG}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AG}{\sqrt{2}} \Rightarrow (AG) = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} = 1 \text{ cm}$$

Έτσι, $AG = AB = 1 \text{ cm}$. Η πλευρά $B\Gamma$ είναι γενέτειρα λ κώνου. Η βάση R του κώνου είναι η πλευρά AB .

Για των κώνο έχουμε: $R = (AB) = 1 \text{ cm}$ και $v = (AG) = 1 \text{ cm}$. Επίσης, $\lambda = (B\Gamma) = \sqrt{2} \text{ cm}$. Έτσι,

$$V_{\text{κώνου}} = \frac{\pi R^2 v}{3} = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 1}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ cm}^3 \text{ και } E_{\text{κυρτής κώνου}}^{\text{κυρτής}} = \pi R \lambda = \pi \sqrt{2} \text{ cm}^2$$

Το ευθύγραμμο τμήμα $B\Delta$ δημιουργεί δακτύλιο εμβαδού

$$E_{(\Delta)} = \pi(AB)^2 - \pi(B\Delta)^2$$

Θα πρέπει λοιπόν να βρούμε το μήκος της $(B\Delta)$. Αλλά, το μήκος της $(B\Delta)$ είναι ίσο με το απόστημα α_4 του αντίστοιχου εγγεγραμμένου τετραγώνου δηλ.

$$(B\Delta) = \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

Έτσι,

$$E_{(\Delta)} = \pi 1^2 - \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ cm}^2$$

Επίσης, το τεταρτοκύκλιο, κατά την πλήρη περιστροφή του, δημιουργεί ημισφαίριο. Είναι

$$V_{\text{ημισφ.}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi (A\Delta)^3 = \frac{2}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{6} \pi \text{ cm}^3$$

και

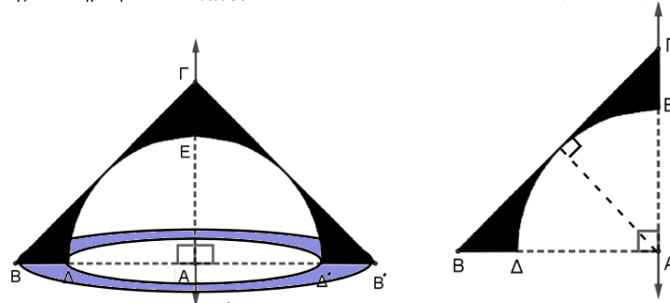
$$E_{\text{ημισφ.}}^{\text{κυρτ ής}} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \pi \text{ cm}^2$$

Έτσι, ο όγκος $V_{\text{στερεο}} \hat{=}$ του στερεού που παράγεται δίνεται από

$$V_{\text{στερεο}} = V_{\text{κώνου}} - V_{\text{ημισφ.}} = \pi\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{6} \pi = \frac{5\sqrt{2}}{6} \pi \text{ cm}^3$$

και (β) το εμβαδόν της κυρτής του επιφάνειας

$$E_{\text{κυρτ ής}} = E_{\text{ημισφ.}}^{\text{κυρτ ής}} + E_{\text{κώνου}}^{\text{κυρτ ής}} + E_{(\Delta)} = \pi + \pi\sqrt{2} + \pi = (2 + \sqrt{2})\pi \text{ cm}^2$$



Θέμα 9

Ένας επιστάτης κατέγραψε σε μία λίστα τις ώρες εργασίας v εργατών για την εκτέλεση ενός έργου. Παρατήρησε ότι ο κάθε εργάτης εργάστηκε 30 λεπτά λιγότερα από τον αμέσως προηγούμενό του. Αν ο έκτος εργάτης εργάστηκε 9 ώρες, να υπολογίσετε:

- (α) τις ώρες εργασίας του πρώτου εργάτη στη λίστα
- (β) το μέγιστο αριθμό εργατών που θα μπορούσαν να εργαστούν
- (γ) το πλήθος v των εργατών που τελικά εργάστηκαν, αν το έργο στοίχισε συνολικά €560 για να ολοκληρωθεί και κάθε ώρα εργασίας κόστιζε €8.

Προτεινόμενη λύση

30 λεπτά = $\frac{1}{2}$ ώρες

Ο τυχαίος k εργάτης ($k = 1, 2, \dots, v$) εργάζεται α_k ώρες. Τότε $\alpha_k = \alpha_{k-1} - \frac{1}{2}$. Έτσι,

$$\alpha_k - \alpha_{k-1} = -\frac{1}{2}$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι της ακολουθίας (α_k) σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\delta = -\frac{1}{2}$. Τότε

$$\alpha_6 = \alpha_1 + (6-1)\delta \Leftrightarrow 9 = \alpha_1 + 5\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \alpha_1 = 11,5 \text{ ώρες}$$

(β) Εντός ποιών χρονικών πλαισίων; Μια απαραίτητη συνθήκη είναι η $\alpha_v > 0$. Έχουμε:

$$\alpha_v > 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + (v-1)\left(-\frac{1}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow v < 24$$

Δηλ. αρκούν το πολύ 23 εργάτες.

(γ) Χρειάστηκαν συνολικά

$$\frac{560}{8} = 70 \text{ ώρες}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \sum_v = 70 &\Leftrightarrow \frac{v[2\alpha_1 + (v-1)\delta]}{2} = 70 \Leftrightarrow v \left[22 + (v-1)\left(-\frac{1}{2}\right) \right] = 140 \\ &\Leftrightarrow 22v + \frac{1-v}{2} = 140 \Leftrightarrow 44v + 1 - v = 280 \Leftrightarrow 43v = 281 \Leftrightarrow v = 6.53 \end{aligned}$$

Τελικά εργάστηκαν 7 εργάτες.

Θέμα 10

Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g . Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

- (α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της g
- (β) το πεδίο ορισμού της $g - f$.
- (γ) τις τιμές των ορίων (αν υπάρχουν):

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x) - g(4)}{x - 4}$$

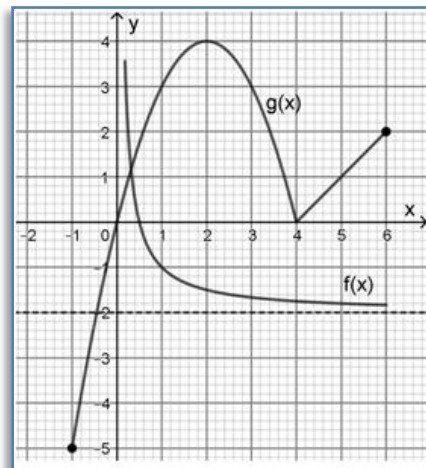
(δ) τις τιμές των συναρτήσεων (αν υπάρχουν):

$$(i) g(f(1)) \quad (ii) f^{-1}(-1)$$

(ε) τις τιμές του x για τις οποίες:

$$(i) g'(x) < 0$$

(ii) η γραφική παράσταση της g δέχεται οριζόντια εφαπτομένη



Προτεινόμενη λύση

(α) Είναι $D(f) = (0, +\infty)$ και $R(g) = [-5, 4]$

(β) Το πεδίο ορισμού της $g - f$ είναι το $D(f) \cap D(g)$. Έχουμε $D(g) = [-1, 6]$ και άρα
 $D(f) \cap D(g) = (0, +\infty) \cap [-1, 6] = (0, 6]$.

(γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ και
 και

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x) - g(4)}{x - 4}$$

το οποίο δεν υπάρχει, αφού η συνάρτηση g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 4$.¹⁸

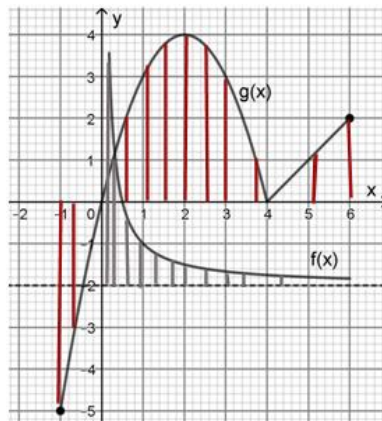
(δ)

(i) $g(f(1)) = g(-1) = -5$ και

(ii) $f^{-1}(-1) = 1$ (το συμμετρικό του $f(-1)$ ως προς την ευθεία με εξίσωση $y = x$).

(ε) Είναι $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2, 4)$.

(στ) η γραφική παράσταση της g δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στα σημεία x του π.ο. της στα οποία είναι $g'(x) = 0$. Είναι $g'(x) = 0$ μόνο στο σημείο με $x = 2$, δηλ. το γράφημα της συνάρτησης έχει οριζόντια εφαπτομένη στο $(2, g(2)) = (2, 4)$.



Μέρος Β'

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Θέμα 1

(α) Αν

$$A = \frac{\eta\mu x + \eta\mu(3x)}{1 + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)},$$

να αποδείξετε ότι $A = 2\eta\mu x$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση

$$1 - \frac{A}{2} + \frac{A^2}{4} - \frac{A^3}{8} + \frac{A^4}{16} - \dots = \frac{\tau\epsilon\mu^2 x}{2}$$

στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Προτεινόμενη λύση

(α) Έχουμε

¹⁸ Αυστηρότερα:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x) - g(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x) - 0}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x)}{x - 4}$$

και αφού η συνάρτηση g είναι φραγμένη σε μια περιοχή του σημείου $x = 4$, έπεται από το γνωστό Θεώρημα

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x)}{x - 4} = +\infty$$

$$A = \frac{\eta\mu x + \eta\mu(3x)}{1 + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)} = \frac{2\eta\mu\left(\frac{3x+x}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3x-x}{2}\right)}{1 + \sigma\upsilon\nu(2x)} = \frac{2\overbrace{\eta\mu(2x)}^{2\eta\mu\sigma\upsilon\nu x} \cdot \sigma\upsilon\nu x}{2\sigma\upsilon\nu^2 x} = 2\frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 2\eta\mu x$$

(β) Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι

$$\begin{aligned} 1 - \frac{A}{2} + \frac{A^2}{4} - \frac{A^3}{8} + \frac{A^4}{16} - \dots &= \frac{\tau\epsilon\mu^4 x}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{2\eta\mu x}{2} + \frac{2^2\eta\mu^2 x}{2^2} - \frac{2^3\eta\mu^3 x}{2^3} + \frac{2^4\eta\mu^4 x}{2^4} - \dots = \frac{\tau\epsilon\mu^2 x}{2} \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{2\eta\mu x}{2} + \frac{2^2\eta\mu^2 x}{2^2} - \frac{2^3\eta\mu^3 x}{2^3} + \frac{2^4\eta\mu^4 x}{2^4} - \dots &= \frac{\tau\epsilon\mu^2 x}{2} \\ \Leftrightarrow 1 - \eta\mu x + \eta\mu^2 x - \eta\mu^3 x + \eta\mu^4 x - \dots &= \frac{\tau\epsilon\mu^2 x}{2} \\ \Leftrightarrow 1 - \eta\mu x + \eta\mu^2 x - \eta\mu^3 x + \eta\mu^4 x - \dots &= \frac{\tau\epsilon\mu^2 x}{2} \\ \Leftrightarrow 1 + (-\eta\mu x + \eta\mu^2 x - \eta\mu^3 x + \eta\mu^4 x - \dots) &= \frac{\tau\epsilon\mu^2 x}{2} \\ \Leftrightarrow 1 + ((-1)^1\eta\mu x + (-1)^2\eta\mu^2 x + (-1)^3\eta\mu^3 x &+ (-1)^4\eta\mu^4 x + \dots) = \frac{\tau\epsilon\mu^2 x}{2} \end{aligned}$$

Οι όροι

$$\overbrace{(-1)^1\eta\mu x}^{\alpha_1}, \quad \overbrace{(-1)^2\eta\mu^2 x}^{\alpha_2}, \quad \overbrace{(-1)^3\eta\mu^3 x}^{\alpha_3}, \quad \overbrace{(-1)^4\eta\mu^4 x}^{\alpha_4}, \dots$$

αποτελούν διαδοχικούς όρους Γ.Π.:

$$\begin{cases} \alpha_2^2 = \eta\mu^4 x \\ \alpha_1 \cdot \alpha_3 = \eta\mu^4 x \end{cases} \Rightarrow \alpha_2^2 = \alpha_1 \cdot \alpha_3$$

Ο λόγος λ της προόδου είναι

$$\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\eta\mu x$$

Επίσης, αφού $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, έπεται ότι $|\lambda| = |-\eta\mu x| = |\eta\mu x| < 1$ και αρα έχει νόημα το $\sum_{\infty}$ και

$$\sum_{\infty} = \frac{\alpha_1}{1 - \lambda} = \frac{-\eta\mu x}{1 - (-\eta\mu x)} = \frac{-\eta\mu x}{1 - (-\eta\mu x)} = -\frac{\eta\mu x}{1 + \eta\mu x}$$

Έτσι, η εξίσωσή μας είναι ισοδύναμη με την

$$1 - \frac{\eta\mu x}{1 + \eta\mu x} = \frac{\tau\epsilon\mu^4 x}{2}, \text{ δηλ. } \frac{1}{1 + \eta\mu x} = \frac{\tau\epsilon\mu^2 x}{2}$$

Αλλά, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x > 0 \Rightarrow \tau\epsilon\mu x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} > 0$ και $1 + \eta\mu x \neq 0$ και αρα

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \eta\mu x} = \frac{\tau\epsilon\mu^2 x}{2} &\Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1 + \eta\mu x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1 - \eta\mu^2 x}{1 + \eta\mu x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{(1 - \eta\mu x)(1 + \eta\mu x)}{1 + \eta\mu x} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 1 - \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

(στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$)

Θέμα 2

Σε δύο ασθενείς Α και Β χορηγήθηκε την ίδια χρονική στιγμή ένα αντιπυρετικό φάρμακο. Οι θερμοκρασίες σώματος (σε $^{\circ}\text{C}$) των δύο ασθενών, t ώρες μετά τη λήψη του φαρμάκου, δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$\theta_A(t) = 35 + 5 \cdot 2^{-t} \quad \text{και} \quad \theta_B(t) = 36 + 4 \cdot 2^{-2t}, \quad \theta \in [0, 4]$$

Να υπολογίσετε τη διαφορά της θερμοκρασίας του σώματος του ασθενούς Β από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 1$.

Να βρείτε τις χρονικές στιγμές στις οποίες οι δύο ασθενείς έχουν την ίδια θερμοκρασία σώματος. Αν η φυσιολογική θερμοκρασία του ανθρώπινου σώματος είναι 36°C :

(i) να εξετάσετε ποιου εκ των δύο ασθενών η θερμοκρασία θα φτάσει στη φυσιολογική

(ii) να βρείτε τη χρονική στιγμή που θα συμβεί αυτό

(Η απάντησή σας να δοθεί με προσέγγιση δεκάτου)

Προτεινόμενη λύση

(α) Ζητάμε τη διαφορά $\theta_B(1) - \theta_B(0)$. Είναι

$$\begin{cases} \theta_B(1) = 35 + 5 \cdot 2^{-1} = 35 + \frac{5}{2} = \frac{75}{2} \\ \theta_B(0) = 35 + 5 \cdot 2^0 = 35 + 5 = 40 \end{cases} \Rightarrow \theta_B(1) - \theta_B(0) = \frac{75}{2} - 40 = -\frac{5}{2}$$

δηλ. μεταξύ των χρονικών στιγμών $t = 0$ και $t = 1$ η θερμοκρασία του ασθενούς Β έπεσε κατά 2.5°C .

(β) Είναι

$$\begin{aligned} \theta_A(t) = \theta_B(t) &\Leftrightarrow 35 + 5 \cdot 2^{-t} = 36 + 4 \cdot 2^{-2t} \Leftrightarrow 5 \cdot 2^{-t} - 4 \cdot 2^{-2t} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4 \cdot 2^{-2t} - 5 \cdot 2^{-t} + 1 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot (2^{-t})^2 - 5 \cdot 2^{-t} + 1 = 0 \end{aligned}$$

Θεωρούμε τον 1-1 (αντιστρέψιμο) μετασχηματισμό $w = 2^{-t}$. Τότε η πιο πάνω εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$4 \cdot w^2 - 5 \cdot w + 1 = 0$$

δηλ. την

$$(4w - 1)(w - 1) = 0$$

η οποία έχει λύσεις τις $w = \frac{1}{4}$ και $w = 1$. Επιστρέφουμε (αντιστρέφουμε το μετασχηματισμό) στην αρχική μεταβλητή:

$$w = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{-t} = 2^{-2} \Leftrightarrow -t = -2 \Leftrightarrow t = 2$$

και

$$w = 1 \Leftrightarrow 2^{-t} = 1 \Leftrightarrow 2^{-t} = 2^0 \Leftrightarrow t = 0$$

δηλ. τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 2$ οι δυο ασθενείς είχαν τις ίδιες θερμοκρασίες.

(γ) Ο ασθενής Β δεν μπορεί να φτάσει ποτέ τη φυσιολογική θερμοκρασία αφού η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει είναι η τιμή για $t = 0$:

$$\forall t \in [0,4], \quad 4 \cdot 2^{-2t} > 0 \Rightarrow 36 + 4 \cdot 2^{-2t} > 36 = \theta_B(0)$$

Ο ασθενής Α όμως:

$$35 + 5 \cdot 2^{-t} = 36 \Leftrightarrow 5 \cdot 2^{-t} = 1 \Leftrightarrow 2^{-t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \log_2 2^{-t} = \log_2 5^{-1} \Leftrightarrow -t = -\log_2 5$$

$$\Leftrightarrow t = \log_2 5 \approx 2.32$$

Θέμα 3 (εναλλακτική εκφώνηση)

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g και h με τύπους:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x^4}}{x} \quad \text{και} \quad h(x) = x^2 - 2x, x \in [1, +\infty]$$

αντίστοιχα.

(α) Να δείξετε ότι η f είναι άρτια στο πεδίο ορισμού της.

(β) Να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f = g$.

(γ) Να δείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της h υπάρχει και να την ορίσετε

Προτεινόμενη λύση

(α) Είναι $D(f) = \{1 - x^2 \geq 0\}$. Λύνουμε την ανίσωση $1 - x^2 \geq 0$ (στο σύνολο των πραγματικών αριθμών). Είναι $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (1 - x)(1 + x) \geq 0$. Κατασκευάζουμε τον αντίστοιχο πίνακα προσήμου: (ξεκινάμε με - από τα δεξιά, όπως είναι το πρόσημο του x^2)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
πρόσημο $1 - x^2$	$-$	$\bigcirc$	$+$	$\bigcirc$	$-$

και αρα $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$. Η f είναι άρτια στο πεδίο ορισμού της:

- Για κάθε $x \in D(f) = [-1, 1]$, είναι $(-x) \in D(f)$. Πράγματι, αν $x \in [-1, 0]$, τότε $(-x) \in [0, 1]$ το οποίο σύνολο είναι υποσύνολο του $D(f) = [-1, 1]$. Ομοίως, αν $x \in [0, 1]$, τότε $(-x) \in [-1, 0]$ το οποίο σύνολο είναι υποσύνολο του $D(f) = [-1, 1]$.

- Για κάθε $x \in D(f) = [-1, 1]$,

$$f(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2} = f(x)$$

(β) Το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f = g$ είναι το υποσύνολο εκείνο του $D(f) \cap D(g)$ στο οποίο οι τύποι των δυο συναρτήσεων συμφωνούν. Όπως ακριβώς με το $D(f)$, βρίσκουμε ότι $D(g) = [-1, 1] - \{0\}$ και αρα

$$D(f) \cap D(g) = [-1, 1] - \{0\} = [-1, 0) \cup (0, 1]$$

και για $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ έχουμε

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x^4}}{x} = \frac{\sqrt{x^2(1 - x^2)}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

Έτσι,

$$g(x) = \frac{|x|\sqrt{1 - x^2}}{x} = \begin{cases} \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{x}, & x \in (0, 1] \\ \frac{-x\sqrt{1 - x^2}}{x}, & x \in [-1, 0) \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & x \in (0, 1] \\ -\sqrt{1 - x^2}, & x \in [-1, 0) \end{cases}$$

και αρα $f(x) = g(x)$ στο σύνολο $(0, 1] \cup \{-1\}$ (μην ξεχνάτε πως αποδείξαμε ότι η f είναι άρτια).

(γ) Έχουμε

$$\begin{aligned} y \in R(h) &\Leftrightarrow \exists x \in D(h): h(x) = y \\ &\Leftrightarrow \exists x \in [1, +\infty): x^2 - 2x = y \\ &\Leftrightarrow \exists x \in [1, +\infty): x^2 - 2x - y = 0 \end{aligned}$$

Είναι δε $x^2 - 2x - y = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{y + 1}$. Έτσι, $\exists x \in [1, +\infty): x^2 - 2x - y = 0 \Leftrightarrow y \geq -1$

δηλ. $R(f) = [-1, +\infty)$ και μάλιστα αφού

$$y \geq -1 \Leftrightarrow \sqrt{y + 1} \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{y + 1} \geq 1$$

έπεται ότι η h είναι 1-1. Συνεπώς, η h είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφη την

$$h^{-1}: [-1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty) \text{ με } h^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y + 1}$$

Θέμα 4

Από σημείο Σ που βρίσκεται εξωτερικά ενός κύκλου (O, R) φέρουμε εφαπτόμενα τμήματα ΣA και $\Sigma B = R\sqrt{3}$, όπου A, B σημεία του κύκλου. Με διάμετρο τη χορδή AB γράφουμε ημικύκλιο εντός του κύκλου (O, R) . Να βρείτε, συναρτήσει του R ,

- (α) το εμβαδόν και (β) την περίμετρο του μηνίσκου που σχηματίζεται

Προτεινόμενη λύση

(α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AK\Sigma$ ($\widehat{AK\Sigma} = 90^\circ$) έχουμε

$$\varepsilon\varphi\widehat{K_1} = \frac{A\Sigma}{KA} = \frac{R\sqrt{3}}{R} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{K_1} = 60^\circ$$

Αλλά, τα τρίγωνα $AK\Sigma$ και $BK\Sigma$ είναι ίσα (Π-Π-Ο) και αρα $\widehat{K_1} = \widehat{K_2} = 60^\circ$. Συνεπώς, $\widehat{K} = 120^\circ$. Προκύπτει λοιπόν ότι $KO = a_3 = \frac{R}{2}$ και $AB = \lambda_3 = R\sqrt{3}$, οπότε το τρίγωνο $AB\Sigma$ είναι ισόπλευρο. Έτσι, $\widehat{KBA} = \widehat{KAB} = 30^\circ$. Έχουμε λοιπόν

$$E_{\text{ημικυκλίου}} = \frac{\pi \left(\frac{R\sqrt{3}}{2} \right)^2}{2} = \frac{3\pi R^2}{8} \quad \text{και} \quad E_{\Delta AKB} = E_3 = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

Επίσης,

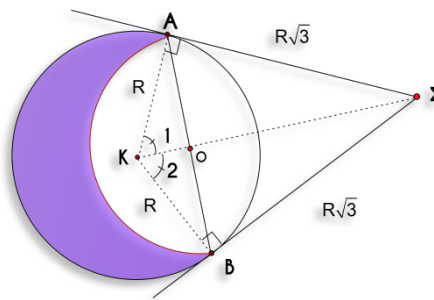
$$E_{\text{μεγάλου κυκλικού τόξου } AB} = E_{\text{κυκλικού τόξου } AB} - E_{\Delta AKB} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{2\pi R^2}{3}$$

και αρα

$$E_{\text{μηνίσκου}} = E_{\text{μεγάλου κυκλικού τόξου } AB} - E_{\text{ημικυκλίου } AB} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{2\pi R^2}{3} - \frac{3\pi R^2}{8} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{7\pi R^2}{24} = \frac{R^2}{24} (6\sqrt{3} + 7\pi) \text{ τ.μ.}$$

(β)

$$\Pi_{\text{μηνίσκου}} = \gamma_{\widehat{AB}} \text{ μικρό} - \gamma_{\widehat{AB}} \text{ μεγάλο} = \frac{R\sqrt{3}}{2}\pi + \frac{240^\circ}{360^\circ}2\pi R = \frac{R\sqrt{3}}{2}\pi + \frac{4}{3}\pi R = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{3} \right) \pi R = (3\sqrt{3} + 8) \frac{\pi R}{6}$$



Θέμα 5

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x^2) + x \cdot f(x) = 4x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(α) Να δείξετε ότι $f(1) = f'(1) = 2$

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με $x = 1$.

(γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα XX' τουλάχιστον σε ένα σημείο στο διάστημα $(-1,1)$

Προτεινόμενη λύση

(α) Η f είναι παντού παραγωγίσιμη και αρα η f' υπάρχει παντού. Έχουμε $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x^2) + x \cdot f(x) = 4x^2 \Rightarrow (f(x^2) + x \cdot f(x))' = (4x^2)' \Rightarrow (f(x^2))' + (x \cdot f(x))' = 8x$$

$$\Rightarrow (x^2)' \cdot f'(x^2) + x' \cdot f(x) + x \cdot f'(x) = 8x$$

$$\Rightarrow 2xf'(x^2) + f(x) + x \cdot f'(x) = 8x$$

$$\begin{aligned} (\text{για } x = 1) \quad & \Rightarrow 2f'(1) + f(1) + 1 \cdot f'(1) = 8 \\ & \Rightarrow 3f'(1) + f(1) = 8 \end{aligned}$$

Για $x = 1$ στην αρχική μας εξίσωση: $f(1) + f(1) = 4 \Rightarrow 2f(1) = 4 \Rightarrow f(1) = 2$. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην προηγούμενη σχέση:

$$\begin{cases} 3f'(1) + f(1) = 8 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow 3f'(1) + 2 = 8 \Rightarrow f'(1) = 2$$

(γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με $x = 1$ είναι η $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$, δηλ. $y - 2 = 2 \cdot (x - 1)$, δηλ. $y = 2x$

(δ) Ισοδύναμα, θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(-1,1)$. (Προφανώς) έχουμε

$$\begin{cases} f(x^2) + x \cdot f(x) = 4x^2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow f(0) + 0 \cdot f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0.$$

[αυτό το σκεφτήκαμε λόγω της συνέχειας της συνάρτησης στο συμμετρικό περί του μηδενός διαστήματος $[-1,1]$]

■ Με χρήση του Θεωρήματος του Bolzano:

$$\begin{cases} f(x^2) + x \cdot f(x) = 4x^2 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{f(1)}_2 - f(-1) = 4 \Rightarrow f(-1) = -2$$

και αφού $f(-1) < 0$, $f(1) = 2 > 0$ και λόγω της συνέχειας της συνάρτησης στο διάστημα $[-1,1]$, έπεται από το Θεώρημα του Bolzano ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(-1,1)$.