

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ–ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

Μάθημα: **Μαθηματικά**Διάρκεια: **2,5 ώρες**Τάξη: **Α' προσανατολισμού**Ημερομηνία: **27/05/2019****Οδηγίες:**

1. Να γράφετε με μελάνι μπλε ή μαύρο (για τα σχήματα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι).
2. Τα σχήματα των ασκήσεων να αντιγράφονται στη θέση που λύνεται η άσκηση.
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
5. Το δοκίμιο αποτελείται από **4** σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε **όλες** τις ασκήσεις.Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **πέντε** μονάδες από τις **εκατό**.

1. Ο Αντρέας και η Μαρία είναι μαθητές της Α' Λυκείου και πήραν στο μάθημα των μαθηματικών τους πιο κάτω βαθμούς:

Όνομα μαθητή	Βαθμός Α' τετραμήνου	Βαθμός Β' τετραμήνου	Τελική εξέταση
Αντρέας	20	19	18
Μαρία	19	18	19

Αν οι βαθμοί των δύο τετραμήνων έχουν βαρύτητα 35% και της τελικής εξέτασης 30%, να βρείτε ποιος από τους δύο θα πάρει το βραβείο των μαθηματικών στην τελική γιορτή του σχολείου.

2. Να λύσετε την ανίσωση:

$$3x^2 - 5x - 2 > 0$$

3. Να απλοποιήσετε το κλάσμα:

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3}$$

4. Να βρείτε την τιμή του x έτσι ώστε οι κύκλοι (Κ, 4cm) και (Λ, $3x-3$) με διάκεντρο (ΚΛ) = 10 cm, να εφάπτονται εξωτερικά.

5. Δίνονται τα σημεία $A(0,1)$, $B(2,3)$ και $\Gamma(-4,0)$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

6. Δίνονται τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(2,3)$. Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

β) το μοναδιαίο διάνυσμα, του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

7. Να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού που να έχει λύσεις:

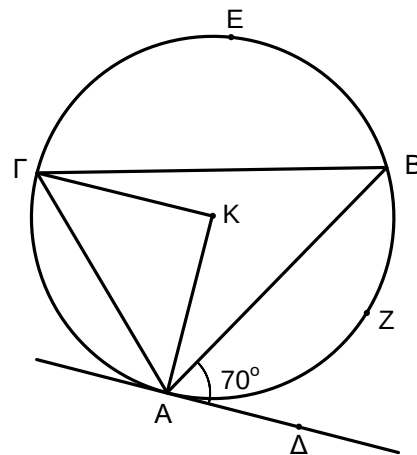
$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

8. Αν $1 < \alpha < 4$ και $-3 < \beta < -2$ να αποδείξετε ότι:

α) $-5 < \alpha + 2\beta < 0$

β) $-6 < \frac{3\alpha}{\beta} < -1$

9. Στο διπλανό σχήμα η $A\Delta$ είναι η εφαπτομένη του κύκλου (K,R) στο σημείο A και $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = 70^\circ$. Αν τα τόξα $\widehat{EB} = \widehat{BZ}$ να βρείτε τις γωνίες $AB\Gamma$ και $KA\Gamma$, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



10. Αν $25\sigma\upsilon\nu\theta = 16\tau\epsilon\mu^3\theta - 16\epsilon\varphi^2\theta \cdot \tau\epsilon\mu\theta$ και $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

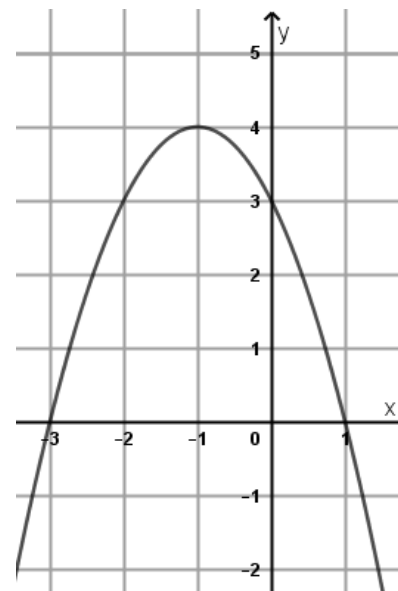
$$A = 15\eta\mu\theta + 6\sigma\varphi\theta$$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα μονάδες από τις εκατό.

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Με βάση το σχήμα να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.
- β) τις συντεταγμένες της κορυφής και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της.
- γ) τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$.
- δ) τις τιμές των a, b και c .
- ε) να εξετάσετε κατά πόσο η ευθεία $\varepsilon: 4x - y - 4 = 0$ τέμνει (και σε ποια σημεία) την παραβολή.



2. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει λύσεις πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει λύσεις αντίθετες.
- γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι λύσεις της πιο πάνω εξίσωσης:
 - i) να βρείτε τις τιμές του λ ώστε να ισχύει η σχέση: $x_1^3 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^3 = 0$.
 - ii) να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(x_1 + x_2)^2 - 3}{x_1 \cdot x_2} \geq 1$.

3. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με $A(-1, 0)$, $B(1, 4)$. Αν η πλευρά ΑΔ έχει εξίσωση $x - 2y = -1$ και μια διαγώνιος του έχει εξίσωση $x - y = -3$.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x - y = -3$ είναι η εξίσωση της διαγώνιου ΒΔ.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της άλλης διαγώνιου.
- γ) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΔΓ.
- δ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΒΔΓ.
- ε) Αν το σημείο $Z(2\kappa, -\kappa)$ είναι σημείο της διαγώνιου ΒΔ, να βρείτε την απόσταση του σημείου Z από την πλευρά ΑΔ.

4. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{1-\sigma\phi\chi}{1+\sigma\phi^2\chi} + \frac{1+\epsilon\phi\chi}{1+\epsilon\phi^2\chi} = 1$.

β) Αν $\frac{\sigma\upsilon\nu(270^\circ-\theta)\cdot\eta\mu(-\theta)+\epsilon\phi(90^\circ-\theta)\cdot\epsilon\phi(180^\circ-\theta)}{\eta\mu(360^\circ+\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(180^\circ-\theta)} = \sqrt{2}$, να δείξετε ότι:

i) $\sigma\phi\theta = \sqrt{2}$

ii) η εξίσωση $3\chi^2 - 5\chi + \sigma\tau\epsilon\mu^2\theta = 0$ έχει λύσεις αντίστροφες.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ, R) με ΒΓ διάμετρο και ΔΗ // ΑΒ . Στο σημείο Β φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου η οποία τέμνει τις προεκτάσεις των ΓΑ και ΔΗ στα σημεία Μ και Ζ αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι:

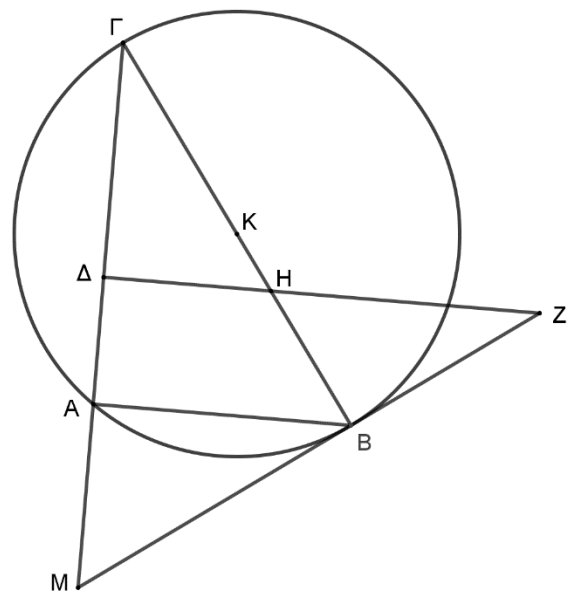
i) τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΒΗΖ είναι όμοια.

ii) $(BM) \cdot (BZ) = (BG) \cdot (BH)$.

β) Αν $(AM) = 2 \text{ cm}$ και $(AG) = 6 \text{ cm}$, να υπολογίσετε:

i) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΜΒ.

ii) την ακτίνα R του κύκλου.



Ο Διευθυντής

Ευάγγελος Ευαγγέλου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 21/05/2019

Χρόνος : 2:30΄

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- (α) Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (μόνο τα σχήματα με μολύβι).
(β) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
(γ) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 5 σελίδες.
(δ) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
(ε) Τα σχήματα να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου χρειάζεται).

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να απαντήσετε και στα δέκα θέματα του μέρους Α΄.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες (5/100).

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε :

- (α) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$ και (2 μονάδες)
(β) τις συντεταγμένες του διανύσματος $2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$. (3 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^ο

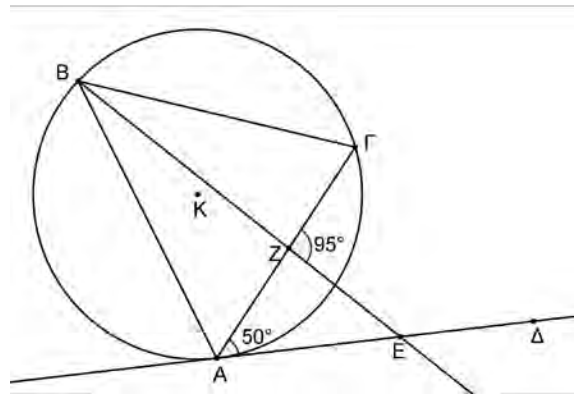
Ο βαθμός σε ένα εξεταζόμενο μάθημα στο τέλος του χρόνου συνυπολογίζεται από τους βαθμούς των δύο τετραμήνων με βαρύτητα 35% στο κάθε τετράμηνο και 30% στην τελική εξέταση. Αν ένας μαθητής είχε στα Μαθηματικά 12 στο Α΄ τετράμηνο, 14 στο Β΄ τετράμηνο και ο βαθμός της τελικής εξέτασης ήταν 10 να βρείτε τον τελικό του βαθμό.

ΘΕΜΑ 3^ο

Να λύσετε την εξίσωση : $\begin{vmatrix} x+1 & -2 \\ 4x & x-9 \end{vmatrix} = 0$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (K, R) . Η AD είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A και η διχοτόμος της $\angle B\hat{A}\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z . Αν $\angle \Gamma\hat{A}E = 50^\circ$ και $\angle \Gamma\hat{Z}E = 95^\circ$ να υπολογίσετε τις γωνίες $\angle \Gamma\hat{B}Z$ και $\angle Z\hat{E}\Delta$ δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



ΘΕΜΑ 5^ο

(α) Να λύσετε την εξίσωση : $\sqrt[3]{x-2} = 2$, $x \geq 2$.

(β) Να απλοποιήσετε την παράσταση : $\frac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[8]{x^{12}}}$, $x > 0$.

ΘΕΜΑ 6^ο

Αν $2 < x < 5$ και $-3 < y < -1$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή κάθε μιας από τις παραστάσεις :

(α) $3x+y$

(β) xy

ΘΕΜΑ 7^ο

Να αποδείξετε την ταυτότητα : $\epsilon\phi x + \sigma\phi x = \tau\epsilon\mu x \cdot \sigma\tau\epsilon\mu x$

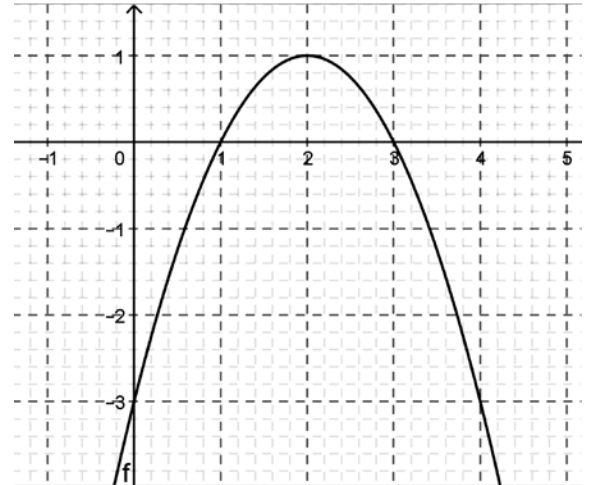
ΘΕΜΑ 8^ο

Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{(2x-1)(x^2-1)(x^2-5x+6)}{x^2+6x+9} \leq 0$

ΘΕΜΑ 9^ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$. Να βρείτε :

- (α) το πρόσημο της διακρίνουσας
- (β) το πρόσημο του a
- (γ) τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$
- (δ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας
- (ε) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x)<0$



ΘΕΜΑ 10^ο

Δίνεται η εξίσωση $4x^2 - 2(1 + \sqrt{3})x + \kappa = 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Αν $x_1 = \eta\mu\theta$ και $x_2 = \sigmaυν\theta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης να δείξετε ότι $\kappa = \sqrt{3}$.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να απαντήσετε και στα πέντε (5) θέματα του μέρους Β΄.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες (10/100).

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (2\kappa - 1)x + \kappa^2 - 4 = 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$ με ρίζες x_1 και x_2 . Να βρείτε για ποιες τιμές του κ :

- (α) η εξίσωση έχει ρίζες αντίθετες (3 μονάδες)
- (β) ισχύει η σχέση $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 0$ (3 μονάδες)
- (γ) έχει δύο άνισες ρίζες πραγματικές και θετικές (4 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 5x + 2y = 7$ και $\varepsilon_2: (\sin^2\theta)x - (1 - \eta\mu\theta)y + 3 = 0$, $180^\circ < \theta < 270^\circ$.

(α) Αν οι πιο πάνω ευθείες είναι κάθετες να δείξετε ότι $\eta\mu\theta = -\frac{3}{5}$

(β) Στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $A = \frac{16\tau\epsilon\mu\theta + 8\varepsilon\phi\theta + 30\eta\mu\theta}{9\sigma\phi^2\theta - 5\sigma\upsilon\upsilon\theta}$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι παραστάσεις : $A = \eta\mu^2(\pi - x) + \sigma\upsilon\upsilon(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\upsilon(2\pi - x) + 2\eta\mu^2(\frac{\pi}{2} - x) + \eta\mu(\frac{\pi}{2} - x)$ και

$$B = \eta\mu^4x + \sigma\upsilon\upsilon^4x + 3\eta\mu^2x \cdot \sigma\upsilon\upsilon^2x$$

Να δείξετε ότι :

(α) $A = 1 + \sigma\upsilon\upsilon x$ (3 μονάδες)

(β) $B = 1 + \eta\mu^2x \cdot \sigma\upsilon\upsilon^2x$ (4 μονάδες)

(γ) $A^2 - B = \sigma\upsilon\upsilon x(2 + \sigma\upsilon\upsilon^3x)$ (3 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Από σημείο E της AB για το οποίο ισχύει $AB = 4(AE)$ φέρουμε κάθετη στην $B\Gamma$ η οποία τέμνει την $B\Gamma$ στο Δ . Αν οι προεκτάσεις των $A\Gamma$ και $E\Delta$ τέμνονται στο σημείο Z να δείξετε ότι :

(α) Τα τρίγωνα $\triangle ZEA$ και $\triangle BED$ είναι όμοια

(β) $(ZE)(ED) = \frac{3}{16}(AB)^2$

ΘΕΜΑ 5^ο

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(5,-2)$, $\Gamma(10,3)$ και $\Delta(3,2)$.

(α) Να δείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο (3 μονάδες)

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ (3 μονάδες)

(γ) Το σημείο E βρίσκεται πάνω στην ευθεία $B\Gamma$. Να βρείτε τις συντεταγμένες

του σημείου E έτσι ώστε η γωνία $\hat{\Delta E \Gamma} = 90^\circ$. (4 μονάδες)

ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Ιωσήφ Ανδρέας

.....

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά προσανατολισμού
ΤΑΞΗ: Α' Λυκείου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 28/05/2019
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ώρες

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- (α) Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (στα σχήματα επιτρέπεται μολύβι).
- (β) Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
- (γ) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- (δ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- A1.** Να σχηματίσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με λύσεις (ρίζες) $x_1 = 2$ και $x_2 = -3$
- A2.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές $A(0, 5)$, $B(-2, 1)$ και $\Gamma(2, -3)$
- A3.** Δίνονται τα διανύσματα
- $$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ και } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
- (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$
- (β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{a}$
- A4.** Αν ισχύει $1 < \alpha < 2$ και $-4 < \beta < -3$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων (i) $2\alpha - \beta$ (ii) $\alpha\beta$

- A5.** Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{\frac{2^{10} + 4^6}{16^2 + 4^5}} = 2$$

- A6.** Σε μια τάξη ενός Λυκείου οι βαθμολογίες 10 μαθητών στα Μαθηματικά είναι 20, 18, 20, 17, 18, 17, 16, 18, 16, 10.
Να υπολογίσετε τη μέση τιμή ($\bar{x}$), τη διάμεσο (x_δ), την επικρατούσα τιμή (x_ϵ), την τυπική απόκλιση (s) και το εύρος (R) των παραπάνω βαθμολογιών.

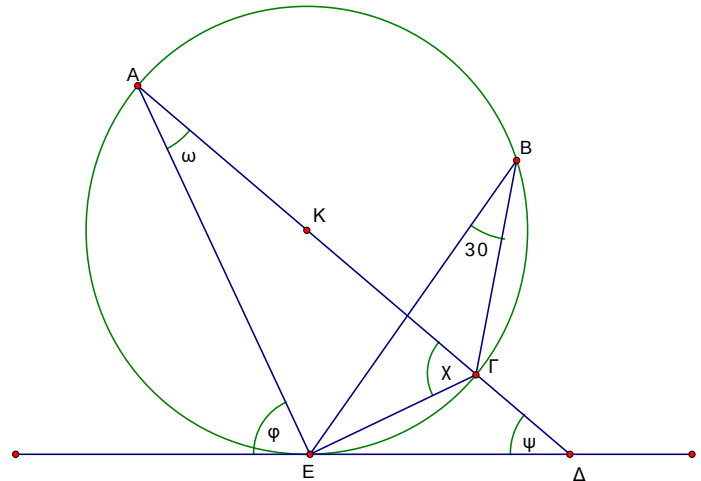
- A7.** Αν $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$ και $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{10\sigma\upsilon\nu\theta + 18\sigma\varphi\theta}{3\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$$

- A8.** Στο διπλανό σχήμα η ED είναι εφαπτομένη του κύκλου (K, R) και $\angle EBG = 30^\circ$

Να υπολογίσετε τα $\chi, \psi, \omega, \varphi$,

δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



- A9.** Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{(-x^2 + x - 9)(x - 3)^2}{x^2 - 3x - 4} \geq 0$$

- A10.** Αν ισχύει η σχέση $\epsilon\varphi(180^\circ + \omega) + 2\sigma\varphi(90^\circ + \omega) = 5\sigma\varphi(270^\circ - \omega) - 6$ και η εξίσωση $x^2 + (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)x - 5 = 0$ έχει ρίζες αντίθετες, να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) με εξισώσεις $y = x \cdot \epsilon\varphi\omega - 20$ και $x \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - y = 0$ αντίστοιχα, είναι κάθετες.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- B1.** Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{\eta\mu(\pi - \theta) \cdot \epsilon\varphi\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} - \theta\right)}{\epsilon\varphi(3\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(-\theta)}, \quad \mu\epsilon \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

(α) Να δείξετε ότι $A = \sigma\upsilon\nu\theta$

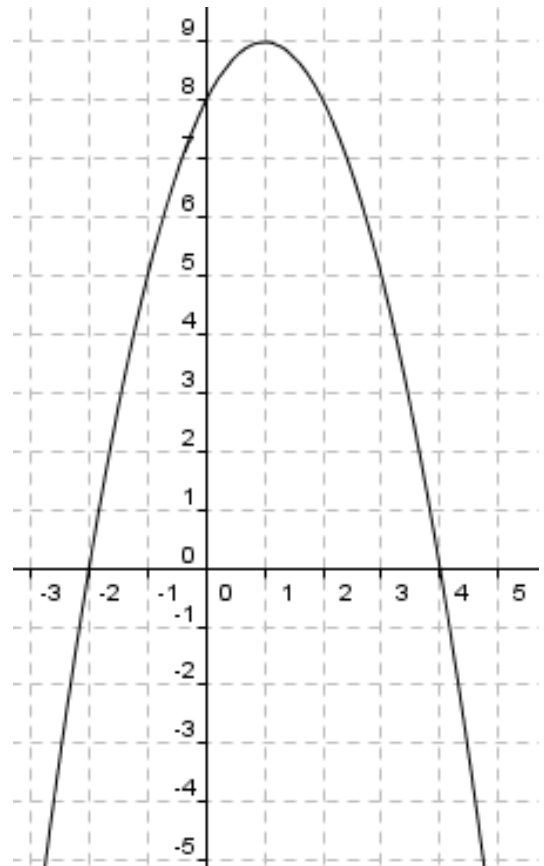
(β) Να απλοποιήσετε την παράσταση $B = \eta\mu\theta + \frac{1}{1 + \sigma\varphi^2\theta} - \epsilon\varphi\theta\sigma\upsilon\nu\theta$ και να αποδείξετε ότι

$$A^2 + B = 1$$

B2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ είναι η παραβολή του διπλανού σχήματος. Να βρείτε:

- Το πεδίο ορισμού της f
- Το σύνολο τιμών της f
- Το πρόσημο της Διακρίνουσας του τριωνύμου $f(x)$
- Το πρόσημο του a
- Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής
- Τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής
- Τις λύσεις (ρίζες) της εξίσωσης $f(x) = 0$
- Το πρόσημο των τιμών $f(-2019)$ και $f(2)$
- Τις τιμές του x που επαληθεύουν την ανίσωση $f(x) \geq 8$
- Τις τιμές των a, b, c



B3. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-1,3)$, $B(1,2)$, $\Gamma(3,6)$, που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

(α) Να βρείτε τις κλίσεις των πλευρών AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$ και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο

(β) Να αποδείξετε ότι η διάμετρος του κύκλου έχει μήκος 5 μονάδες

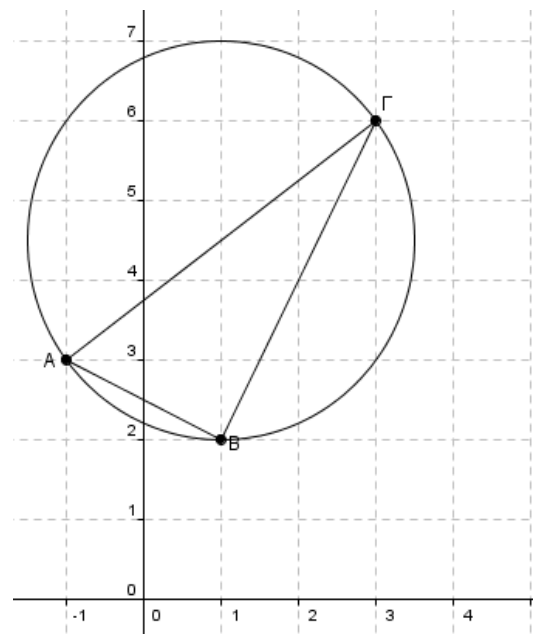
(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου

(δ) Να υπολογίσετε το ύψος BE του τριγώνου $AB\Gamma$

(ε) Να φέρετε την εφαπτομένη (ε) του κύκλου στο σημείο B , την κάθετη AD πάνω στην (ε)

(Δ σημείο (ε)) και να αποδείξετε ότι

$$(AB)^2 = (A\Gamma)(AD)$$



- B4.** Δίνεται κύκλος (O, R) και AB μια διάμετρος του.
 Στην προέκταση της AB , προς το μέρος του B , παίρνουμε σημείο Γ .
 Φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα $\Gamma\Delta$ και ευθεία (ε) κάθετη στην $A\Gamma$, στο σημείο Γ .
 Η προέκταση της χορδής $A\Delta$ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο E .
 Να αποδείξετε ότι: **(α)** $(A\Delta)(AE) = (AB)(A\Gamma)$
(β) $(\Gamma\Delta)^2 = (A\Gamma)(B\Gamma)$
- B5.** Θεωρούμε την εξίσωση $(\sigma\tau\epsilon\mu\theta) \cdot x^2 + 2(1 + \sigma\phi\theta) \cdot x + (2\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\tau\epsilon\mu\theta) = 0$,
 με παράμετρο $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ και ρίζες (λύσεις) x_1, x_2 .
- (α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και ίσες, για κάθε τιμή της
 παραμέτρου $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$
- (β)** Να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = -2(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)$
- (γ)** Να αποδείξετε ότι $x_1 x_2 = 1 + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$
- (δ)** Να αποδείξετε ότι $(x_1 + x_2)^2 + 2x_1 x_2 - 12\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = 6$
- (ε)** Αν ισχύει $x_1 x_2 = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta$, να βρείτε τις τιμές του θ .

Οι Εισηγητές

Ο Συντονιστής

Η Διευθύντρια

.....
 Δημήτρης Καραντάνος

.....
 Δημήτρης Καραντάνος ΒΔ

.....
 Ελένη Κοντογιάννη

.....
 Ρηγίνα Τσιήρτου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2,5 ώρες

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 28/05/2019

ΟΔΗΓΙΕΣ :

- (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- (β) Να γράφετε με μπλε μελάνι (στα σχήματα επιτρέπεται το μολύβι).
- (γ) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
- (δ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- (ε) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να απαντήσετε και στα δέκα θέματα του Μέρους Α΄.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες (5/100).

ΘΕΜΑ 1^ο

Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής και να απλοποιήσετε την απάντησή σας:

α) $\frac{4}{\sqrt{2}}$

β) $\frac{8}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:

α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$,β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.**ΘΕΜΑ 3^ο**

Αν $2 < x < 7$ και $-5 < y < -1$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή κάθε μιας από τις παραστάσεις:

α) $3x$

β) $x - y$

ΘΕΜΑ 4^ο

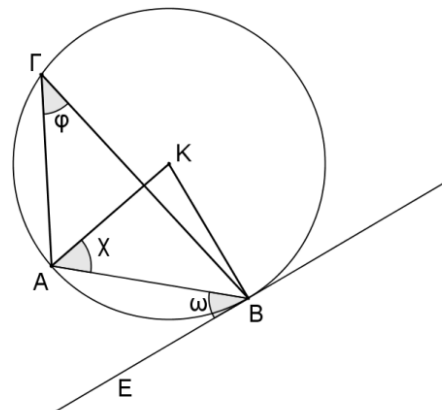
Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες: $\chi_1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$, $\chi_2 = \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$.

ΘΕΜΑ 5^ο

Δίνεται κύκλος με κέντρο Κ και ακτίνα ΚΒ. Το μέτρο της γωνίας $KAB = 70^\circ$ και η ευθεία ΒΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β. Να υπολογίσετε τις γωνίες

φ , γ , ω και το μέτρο του μικρού τόξου AB .

(Αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας) .

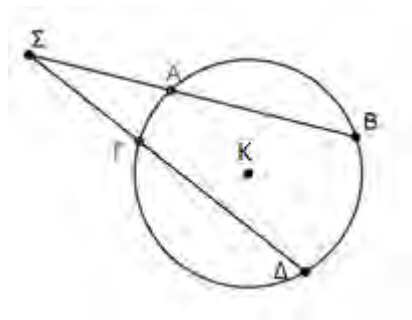


ΘΕΜΑ 6^ο

Να αποδείξετε ότι: $\frac{\omega_{\theta}(180^\circ + \theta)}{\omega_{\theta}(180^\circ + \theta)} = \omega_{\theta}$, όταν $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

ΘΕΜΑ 7^ο

Στο πιο κάτω σχήμα, οι ημιευθείες ΣAB και $\Sigma \Gamma \Delta$ είναι τέμνουσες του κύκλου (K, R) . Αν $\Sigma \Delta = 10m$, $\Sigma \Gamma = 3m$ και $\Sigma A = 2m$, να υπολογίσετε το μήκος της χορδής AB .



ΘΕΜΑ 8^ο

Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x - \psi = 1 \\ x^2 + \psi^2 = 25 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 9^ο

Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(x-3)(x^2-x-6)}{1-x} \leq 0$

ΘΕΜΑ 10^ο

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \psi = (3\kappa - 5)\chi - 7$, $\varepsilon_2: 2\chi + 4\psi = 5$.

Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες, να υπολογίσετε την τιμή του κ .

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να απαντήσετε και στα πέντε (5) θέματα του μέρους Β΄.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες (10/100).

ΘΕΜΑ 1^ο Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha \neq 0.$$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω:

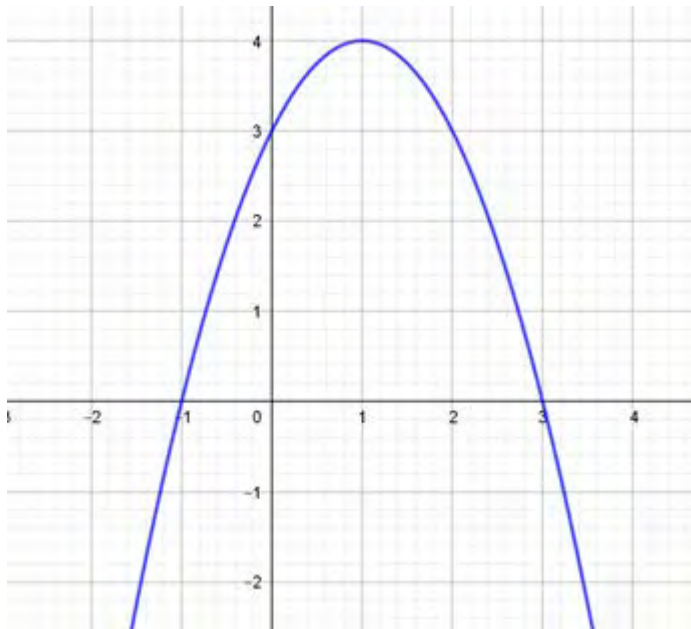
- α) Το πρόσημο του α .
- β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- γ) Το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
- δ) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας.
- ε) Τις ρίζες της εξίσωσης

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0.$$

ζ) Να αναφέρετε τις συντεταγμένες της κορυφής και να βρείτε την μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.

η) Να υπολογίσετε τα α , β , γ .

θ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 0$



ΘΕΜΑ 2^ο Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(5,6), Β(2,0), Γ(6,2)

- α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΒ.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ.
- γ) Να βρείτε το μήκος του ύψους ΒΔ.
- δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ε, έτσι ώστε το ΑΓΕΒ να είναι παραλληλόγραμμο.

ΘΕΜΑ 3^ο α) Αν $5\eta\mu\theta = -3$ και $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{8\epsilon\phi\theta - 6\sigma\tau\epsilon\mu\theta}{-5\sigma\upsilon\upsilon\theta}$$

β) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\eta\mu\omega}{1+\sigma\upsilon\upsilon\omega} + \frac{1+\sigma\upsilon\upsilon\omega}{\eta\mu\omega} = 2\sigma\tau\epsilon\mu\omega$

ΘΕΜΑ 4^ο α) Να λύσετε την εξίσωση:
$$\begin{vmatrix} \chi & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2\chi & -1 \end{vmatrix} = 28$$
 (μονάδες 4)

β) ι) Οι βαθμολογίες 6 φοιτητών ενός τμήματος Πανεπιστημίου σε μία εξέταση ήταν οι εξής: 6, 6, ψ, 7, 8, 9. Αν η μέση τιμή $\bar{\chi} = 7$, να δείξετε ότι $\psi = 6$. (μονάδες 2)

ii) Να βρείτε το εύρος (R), την τυπική απόκλιση (s) και τον συντελεστή μεταβολής (C.V.) των πιο πάνω παρατηρήσεων. (μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 5^ο

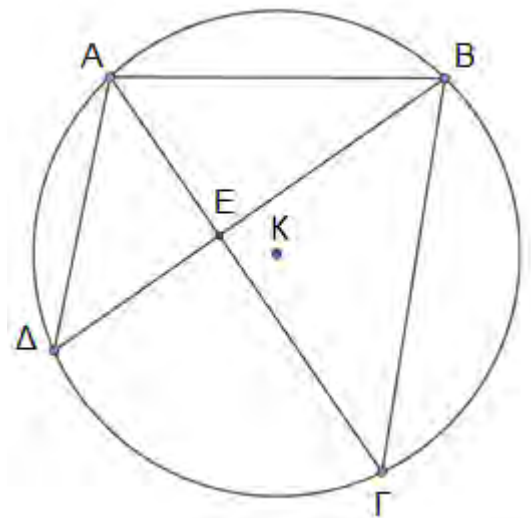
Σύμφωνα με το πιο κάτω σχήμα, δίνεται κύκλος (K,R) με τεμνόμενες χορδές ΑΓ και ΒΔ στο σημείο τομής Ε. Να δείξετε ότι :

α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΕ είναι όμοια. (μονάδες 4)

β) $(ΑΔ) \cdot (ΓΕ) = (ΒΓ) \cdot (ΔΕ)$ (μονάδες 3)

γ) Αν $(ΑΔ) = 3\text{cm}$, $(ΓΕ) = (\sqrt[3]{\chi - 2})\text{cm}$,

$(ΒΓ) = 6\text{cm}$, $(ΔΕ) = 2\text{cm}$, να υπολογίσετε την τιμή του χ . (μονάδες 3)



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2019ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΤΑΞΗ : Α΄ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 28 / 05 / 2019ΔΙΑΡΚΕΙΑ : 2,5 ΩΡΕΣΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 7:45 π.μ (7:45-10:15)

Ονοματεπώνυμο:..... Τμήμα:..... Αρ.:.....

- ΟΔΗΓΙΕΣ :
- α) Απαγορεύεται η μεταφορά στην αίθουσα κινητού τηλεφώνου και έξυπνου ρολογιού
 - β) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης σφραγισμένης υπολογιστικής μηχανής
 - γ) Να γράψετε **μόνο με μπλε μελάνι** (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
 - δ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού
 - ε) Να γράψετε τις απαντήσεις σας στις κόλλες που σας δόθηκαν
 - στ) Τα σχήματα των ασκήσεων, όπου χρειάζεται, να μεταφέρονται στις κόλλες που σας δόθηκαν
 - ζ) Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνεται η πορεία σκέψης σας (τα ενδιάμεσα βήματα και οι πράξεις)

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 5 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α :

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

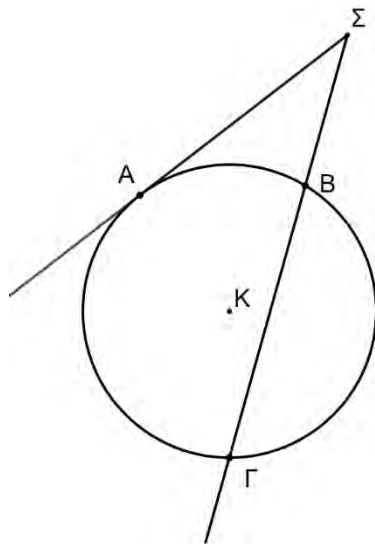
1. Σε ένα διαγωνισμό τραγουδιού η κριτική επιτροπή βαθμολογεί τη σκηνική παρουσία με βαρύτητα 30%, την εκτέλεση του τραγουδιού 60% και η ψήφος του κοινού έχει βαρύτητα 10%. Να υπολογίσετε τον σταθμισμένο μέσο όρο μιας διαγωνιζόμενης η οποία εξασφάλισε 8 στη σκηνική παρουσία, 7 στην εκτέλεση του τραγουδιού και το κοινό της έδωσε 10 μονάδες.

2. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 3x < 0$

3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (Κ , R).

Από το σημείο Σ εκτός του κύκλου φέρουμε εφαπτομένη του κύκλου ΣΑ στο Α και τέμνουσα ΣΒΓ .

Αν ΣΒ=4 cm, ΣΑ = (x) cm και ΒΓ = (x-1) cm, να υπολογίσετε το μήκος του ΣΓ.



4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(μον. 2,5/2,5)

(α) $(x - 2\sqrt{3}) \cdot (x + 2\sqrt{3}) = 13$ (β) $(2x - 1)^{\frac{1}{3}} = 2$, $x \geq \frac{1}{2}$

5. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 6x + 3 = 0$, με λύσεις x_1 και x_2 . Χωρίς να λύσετε την εξίσωση, να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $x_1 + x_2$

(μον. 1)

(β) $x_1 \cdot x_2$

(μον. 1)

(γ) $8x_1^2 x_2 - 5x_1 - 5x_2 + 8x_1 x_2^2$

(μον. 3)

6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο Κ.

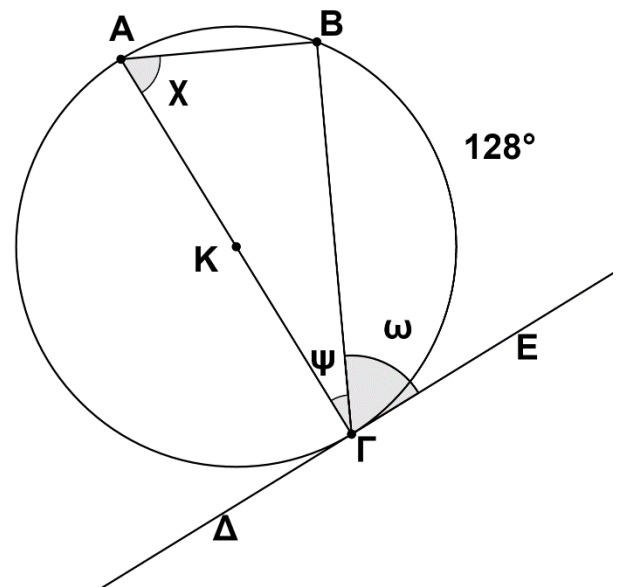
Η ΔΓΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο Γ.

Αν $\widehat{B\Gamma} = 128^\circ$ να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών

$\widehat{x}$, $\widehat{\psi}$, $\widehat{\omega}$, $\widehat{AB\Gamma}$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(μον. 1,25/1,25/1,25/1,25)



7. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της

παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Να βρείτε:

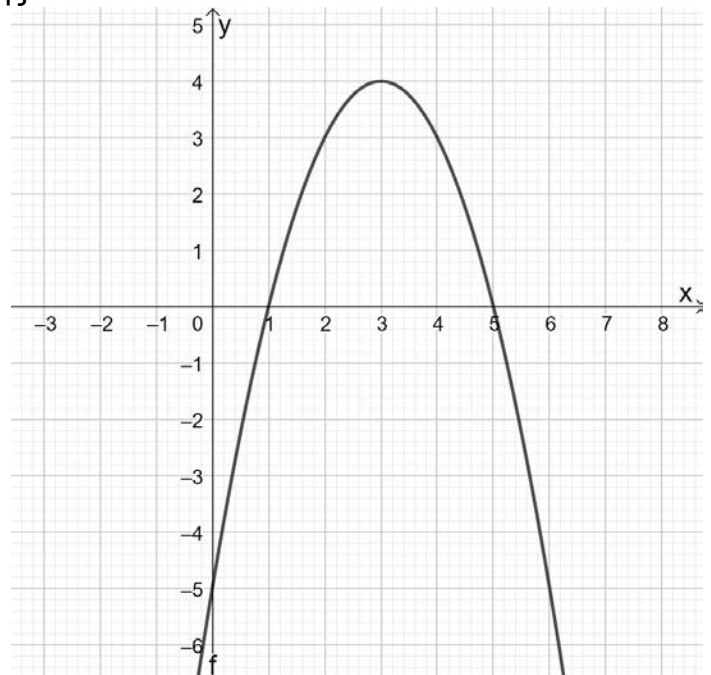
(α) την τιμή του c

(β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της

(γ) τις λύσεις της ανίσωσης $ax^2 + bx + c \leq 0$

(δ) την τιμή του a

(μον. 1/1/1,5/1,5)



8. Αν $4 < \alpha < 9$ και $-5 < \beta < -3$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

(α) $3\alpha + \beta$ (μον. 2)

(β) $\frac{11-\alpha}{\beta^2}$ (μον. 3)

9. Αν $\sin\theta = -\frac{8}{17}$ και $\epsilon\phi\theta > 0$, να υπολογίσετε, με τη χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων, την

τιμή της παράστασης $A = \frac{30 \cdot \sigma\phi\theta - 15 \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\theta}{16 \cdot \epsilon\phi\theta + 8 \cdot \tau\epsilon\mu\theta - 2}$

10. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού μ , σε κάθε περίπτωση ξεχωριστά, ώστε η ευθεία $\epsilon_1: (5-\mu)x + 4y - 9 = 0$

(α) να είναι παράλληλη με την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία

$A(-7, 6)$ και $B(1, 2)$, (μον. 3)

(β) να είναι κάθετη με τον άξονα των τεταγμένων (μον. 2)

ΜΕΡΟΣ Β :

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$. Να υπολογίσετε:

(α) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$

(β) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

(γ) ένα μοναδιαίο διάνυσμα αντίρροπο του $\vec{\alpha}$

(δ) την τιμή της παραμέτρου $k \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ να είναι παράλληλο

με το διάνυσμα $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 - k \\ 5k \end{pmatrix}$

(μον. 2,5/2,5/2,5/2,5)

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ με λύσεις x_1, x_2

(α) Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ , $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η πιο πάνω εξίσωση έχει:

(i) λύση τον αριθμό -1

(μον. 2)

(ii) δυο λύσεις πραγματικές και ίσες

(μον. 2,5)

(β) (i) Να αποδείξετε ότι $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 2 = \frac{(2\lambda - 1)^2}{\lambda^2 - 1}$

(μον. 2)

(ii) Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ , $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 2 \geq 0$

(μον. 3,5)

3. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος με διάμετρο $B\Gamma$, κέντρο το σημείο O και $AD \perp B\Gamma$.

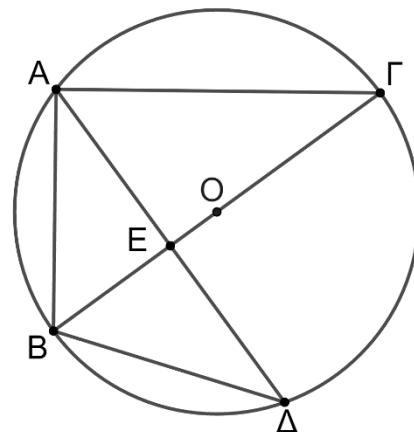
(α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $BE\Delta$ είναι όμοια

(μον. 6)

(β) Να δείξετε ότι $(\Gamma B)(EB) = (\Delta B)(AB)$

(μον. 2)

(γ) Αν $B\Delta = 4$ cm και $B\Gamma = 6$ cm, να βρείτε τον λόγο του εμβαδού του τριγώνου $BE\Delta$ προς το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



(μον. 2)

4. Ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ έχει κορυφή $A(3, 2)$, πλευρά $A\Delta$ με εξίσωση $-x + 2y = 1$ και διαγώνιο $B\Delta$ με εξίσωση $x + y = -1$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου $A\Gamma$.

(μον. 2)

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών B, Δ

(μον. 3)

και του σημείου K , όπου K το σημείο τομής των διαγωνίων του ρόμβου.

(γ) Αν $B(1, -2)$ και $\Delta(-1, 0)$, να υπολογίσετε:

(i) την απόσταση του σημείου B από την πλευρά $A\Delta$

(μον. 2)

(ii) τη **περίμετρο** και το **εμβαδόν** του ρόμβου

(μον. 3)

5. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 - 1}{\sigma\phi x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} \quad \text{και} \quad B = \frac{\epsilon\phi(270^\circ - x) \cdot \eta\mu(180^\circ + x) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - x)}{\epsilon\phi(180^\circ + x) \cdot \tau\epsilon\mu(x - 90^\circ) \cdot \sigma\upsilon\nu(270^\circ - x)}$$

(α) Να δείξετε ότι η $A = 2\epsilon\phi^2 x$ και $B = \sigma\upsilon\nu^2 x$ (μον. 7,5)

(β) Να υπολογίσετε τη γωνία x , $90^\circ < x < 180^\circ$, έτσι ώστε οι αριθμοί A και B να είναι αντίστροφοι. (μον. 2,5)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

Ο Διευθυντής

Νεόφυτος Παπαϊωάννου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 28/05/2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΩΡΑ: 7:45-10:15

ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 5 σελίδες.
- Να γράφετε με μελάνι μπλε (με μολύβι μόνο τα σχήματα).
- Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

ΜΕΡΟΣ Α : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Αν $2 < x < 5$ και $4 < y < 9$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α) $x + y$

β) $2xy$

A2. Δίνεται η γωνία $\hat{\varphi} = \frac{5\pi}{6} rad$.

α) Να εκφράσετε τη γωνία σε μοίρες.

β) Να γράψετε σε πιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας.

A3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $A(-2,3)$ και σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα των τετμημένων.

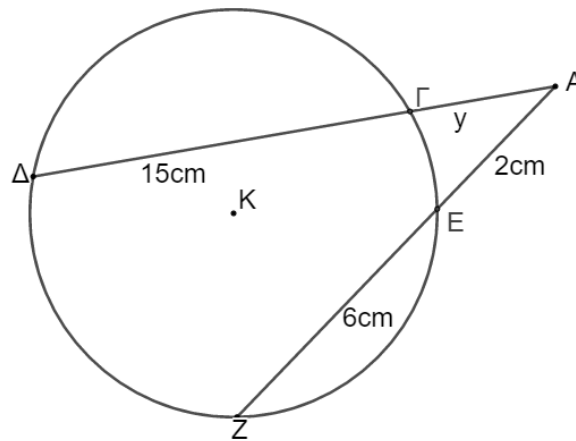
A4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ και $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$. (2 μονάδες)

β) Τι ονομάζουμε μοναδιαίο διάνυσμα; (1 μονάδα)

γ) Να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι ομόρροπο με το διάνυσμα $\vec{a}$. (2 μονάδες)

- A5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K, ρ) . Οι $A\Gamma\Delta$ και AEZ είναι τέμνουσες του κύκλου. Αν $A\Gamma = y$, $\Gamma\Delta = 15\text{cm}$, $AE = 2\text{cm}$ και $EZ = 6\text{cm}$, να βρείτε το y όπου $y \in \mathbb{R}^+$.



- A6. Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζεται το πλήθος των ενήλικων επιβατών που μπορεί να μεταφέρει καθένα από 30 διαφορετικά αυτοκίνητα.

Αριθμός ενήλικων επιβατών x_i	Αριθμός αυτοκινήτων f_i
3	10
4	12
5	6
6	2

Να βρείτε το συντελεστή μεταβλητότητας των πιο πάνω παρατηρήσεων.

- A7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 - (2a + 3)x + 3a^2 - 8a + 5$, $a \in \mathbb{R}$.
- α) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου a , ώστε η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει λύσεις αντίθετες.
- β) Αν $a = 2$, να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $x - y = 6$.

- A8. Να δείξετε ότι:

$$\frac{\varepsilon\varphi(-\theta) \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \cdot \eta\mu(2\pi - \theta) - [\eta\mu(\pi + \theta)]^2}{\sigma\upsilon\nu(2\pi + \theta) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)} = \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta.$$

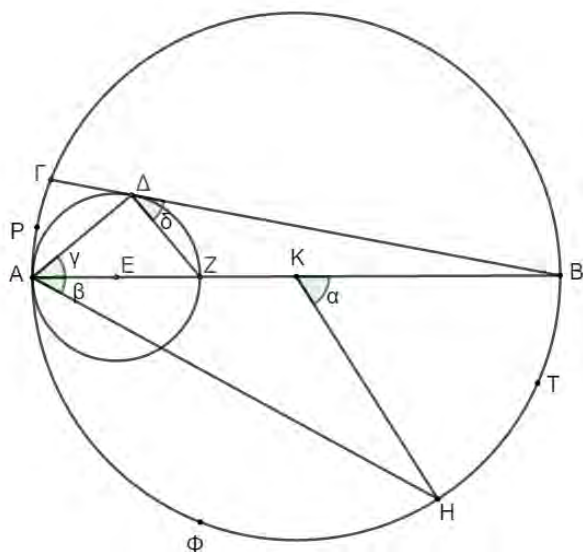
- A9. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{4x(x-1)}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 3x-1 \end{vmatrix}} \leq 2$$

A10. Οι κύκλοι (K, R) και (E, ρ) εφάπτονται στο σημείο A . Η $B\Gamma$ εφάπτεται του (E, ρ) στο σημείο Δ ,

$$\widehat{BTH} = \frac{\widehat{A\Phi H}}{2} \text{ και } \hat{\gamma} = \hat{\beta} + 10^\circ.$$

Να βρείτε το μέτρο της γωνίας δ και το μέτρο του τόξου $\widehat{AP\Gamma}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Δίνεται η παραβολή $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$,

Με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα να βρείτε:

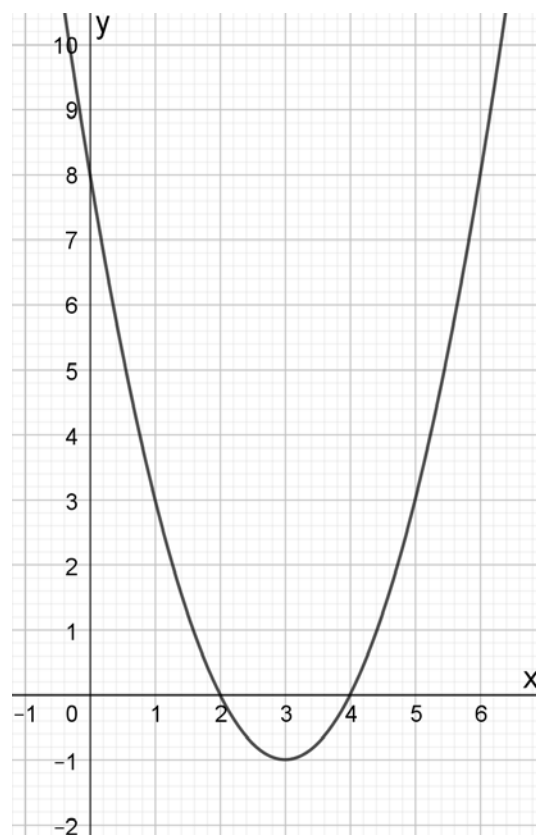
α) Το πρόσημο της διακρίνουσας της $f(x) = 0$.
(1 μονάδα)

β) Τις συντεταγμένες της κορυφής Κ.
(1 μονάδα)

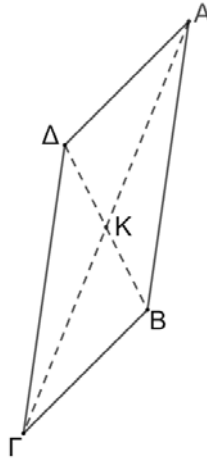
γ) Την τιμή των α , β και γ .
(3 μονάδες)

δ) Τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 3$.
(2 μονάδες)

ε) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΒ, όπου Κ η κορυφή της παραβολής, Α το σημείο τομής της παραβολής με τον άξονα των τεταγμένων και Β το σημείο τομής της με τον άξονα των τετμημένων που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη τιμή.
(3 μονάδες)

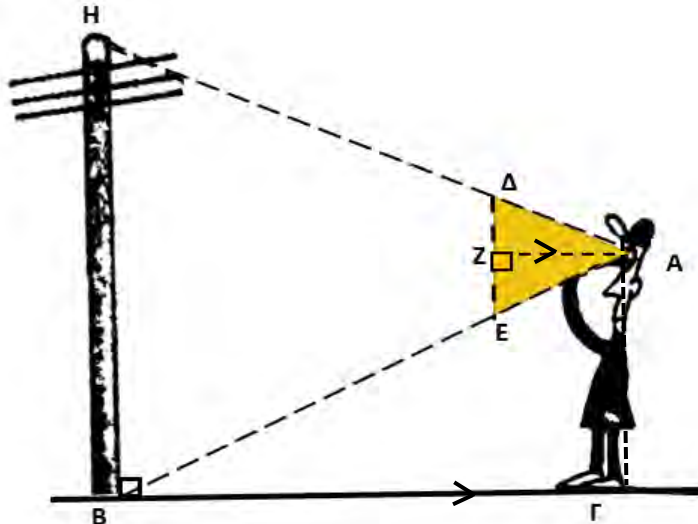


- B2. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Οι εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$ είναι αντίστοιχα $\varepsilon_1: x - y = 4$ και $\varepsilon_2: y = 7x + 2$, ενώ οι συντεταγμένες του σημείου τομής των διαγωνίων του είναι $K(0, -7)$.



- α) Να δείξετε ότι $\Delta(-1, -5)$ και $B(1, -9)$. (2.5 μονάδες)
- β) Να υπολογίσετε:
- i) Την απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία AB . (2.5 μονάδες)
 - ii) Την εφαπτομένη της γωνίας B . (1 μονάδα)
 - iii) Τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας B , $(\eta\mu B, \sigma\upsilon\nu B, \sigma\varphi B, \tau\epsilon\mu B, \sigma\tau\epsilon\mu B)$, αν γνωρίζετε ότι $\varepsilon\varphi B = -\frac{3}{4}$. (4 μονάδες)

- B3. Ο Αντρέας βλέπει μέσα από ένα χωνί την κεραία ενός ραδιοφωνικού σταθμού, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα ($AZ \perp \Delta E$, $HB \perp B\Gamma$, $AZ \parallel B\Gamma$).



- α) Να δείξετε ότι $\frac{ZE}{A\Gamma} = \frac{AE}{AB}$. (4 μονάδες)
- β) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΔEA και HBA είναι όμοια. (3 μονάδες)
- γ) Να δείξετε ότι $(HB) \cdot (ZE) = (A\Gamma) \cdot (\Delta E)$. (3 μονάδες)

B4. Από σημείο Γ που βρίσκεται έξω από κύκλο (O, ρ) , φέρνουμε τέμνουσα $\Gamma B O A$ του κύκλου ($\Gamma B < \Gamma A$) και εφαπτομένη $\Gamma \Delta$ (Δ το σημείο επαφής). Από το A φέρνουμε την AE κάθετη στη $\Gamma \Delta$ (E σημείο της $\Gamma \Delta$). Η AE τέμνει την προέκταση της $B \Delta$ στο P .

α) Να δείξετε ότι:

i. η $A \Delta$ είναι διχοτόμος της $\Gamma \hat{A} P$. (2 μονάδες)

ii. $AP = AB$. (2 μονάδες)

β) Αν επιπλέον $AP = (y + w)(\sqrt{3} + \sqrt{2})cm$ και $AB = zcm$, όπου

$$y = 6^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[12]{6^5}, \quad w = \sqrt{22 + \sqrt{3 \cdot \sqrt{7 + \sqrt{4}}}} \quad \text{και} \quad z = \frac{\left(x^{\frac{2}{3}} - \sqrt{5}\right) \cdot \left(x^{\frac{2}{3}} + \sqrt{5}\right)}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} :$$

i. Να γράψετε τις παραστάσεις y και w στην πιο απλή τους μορφή. (2 μονάδες)

ii. Να δείξετε ότι $z = (x^{\frac{4}{3}} - 5) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})$. (2 μονάδες)

iii. Να βρείτε την τιμή του x , $x \in \mathbb{R}$. (2 μονάδες)

B5. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \frac{\varepsilon\varphi\theta \cdot \tau\epsilon\mu\theta + \varepsilon\varphi^2\theta}{\eta\mu\theta(1 + \varepsilon\varphi^2\theta)}x + \frac{\varepsilon\varphi\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\tau\epsilon\mu^2\theta} + \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta = 0$, $0 < \theta < \pi$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$,

με λύσεις x_1, x_2 .

α) Να δείξετε ότι $S = 1 + \eta\mu\theta$ και $P = \eta\mu\theta$. (3 μονάδες)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του θ , ισχύει η σχέση: (3 μονάδες)

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{3}{2}$$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει λύσεις πραγματικές $\forall x \in \mathbb{R}$. (2 μονάδες)

δ) Αν $\Delta = 0$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: (2 μονάδες)

$$\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2}$$

Η Διευθύντρια

Οικονομίδου Σύλβια

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τα 10 θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

ΘΕΜΑ Α1:

Να μετατρέψετε το πιο κάτω κλάσμα σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή:

$$\frac{1}{4-\sqrt{5}} =$$

ΘΕΜΑ Α2:

Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες $\chi_1 = -8$ και $\chi_2 = 5$.

ΘΕΜΑ Α3:

Αν $1 < \chi < 4$ και $3 < \psi < 7$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α) $\chi + \psi$

β) $\chi \cdot \psi$

ΘΕΜΑ Α4:

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = 3\vec{i} - 10\vec{j}$ και $\vec{\beta} = \vec{i} + 7\vec{j}$. Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$

ΘΕΜΑ Α5:

Να αποδείξετε ότι:

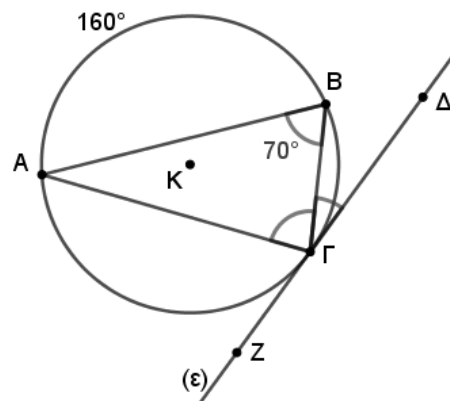
$$\frac{\eta\mu(90^\circ - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(360^\circ - \omega) - \eta\mu(180^\circ + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(270^\circ + \omega)}{\epsilon\varphi(180^\circ + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(-\omega) \cdot \epsilon\varphi(270^\circ - \omega)} = \tau\epsilon\mu\omega$$

ΘΕΜΑ Α6:

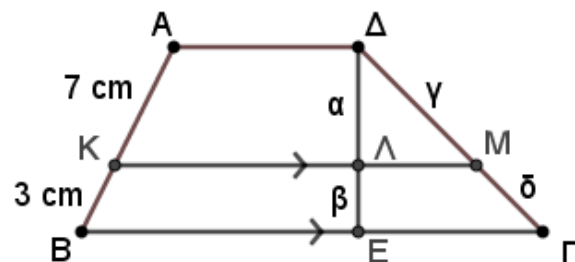
Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος AB , όταν $A(-1,6)$ και $B(5,-2)$.

ΘΕΜΑ Α7:

Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) . Η ευθεία (ε) εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Γ . Αν το τόξο $AB = 160^\circ$ και η γωνία $\widehat{AB\Gamma} = 70^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{AKB}$, $\widehat{A\Gamma B}$ και $\widehat{B\Gamma\Delta}$ δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας

**ΘΕΜΑ Α8:**

Στο διπλανό τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ έχουμε $KM \parallel B\Gamma$, $\Delta E = 8\text{ cm}$ και $\Delta\Gamma = 13\text{ cm}$. Να υπολογίσετε τα μήκη α, β, γ και δ .

**ΘΕΜΑ Α9:**

Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $3\lambda\chi^2 + (5\lambda - 7)\chi + \lambda^2 - 4 = 0$, $\lambda \neq 0$ έχει ρίζες που ικανοποιούν τη σχέση $\frac{\chi_2}{\chi_1} + \frac{\chi_1}{\chi_2} < -2$.

ΘΕΜΑ Α10:

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ελάχιστες θερμοκρασίες (σε βαθμούς Κελσίου) που παρατηρήθηκαν στη Λάρνακα για 10 διαδοχικές μέρες:

Θερμοκρασία (χ_i)	Συχνότητα
5	2
6	2
7	2
8	3
10	1

Να υπολογίσετε:

- α) τη μέση τιμή των θερμοκρασιών
β) την τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών

(μον. 2)

(μον. 3)

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τα 5 θέματα.

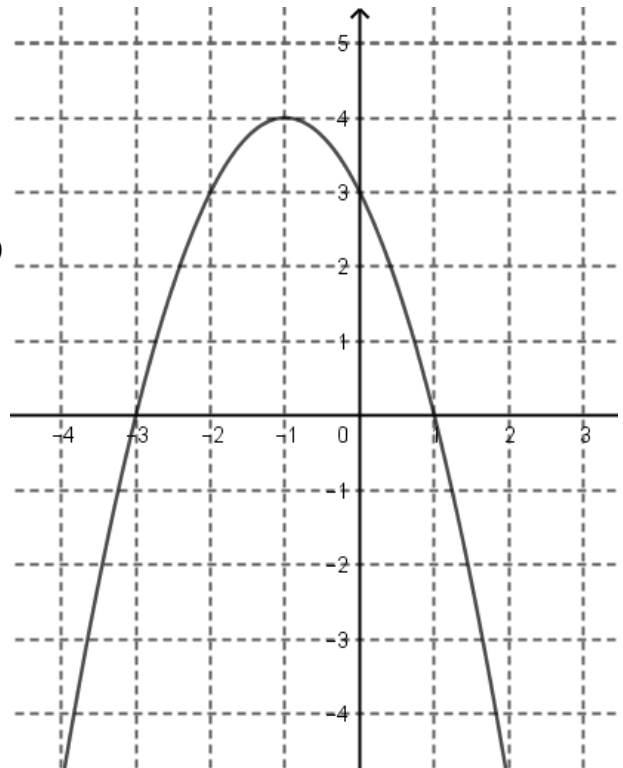
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΘΕΜΑ Β1:

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

Να βρείτε :

- α) (i) το πεδίο ορισμού (μον. 0,5)
(ii) το σύνολο τιμών (μον. 0,5)
β) (i) το πρόσημο του a (μον. 0,5)
(ii) το πρόσημο της διακρίνουσας Δ (μον. 0,5)
γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας (μον. 1)
δ) τις ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$ (μον. 1)
ε) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = 3$ (μον. 1)
στ) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) > 3$ (μον. 1)
ζ) την τιμή των a, b και c (μον. 2)
η) την εξίσωση της ευθείας που περνά από την κορυφή της f και είναι παράλληλη με την ευθεία $\psi = 2x + 1$ (μον. 2)



ΘΕΜΑ Β2:

α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{\varepsilon\phi\chi - \eta\mu\chi}{\eta\mu^3\chi} = \frac{\tau\epsilon\mu\chi}{1 + \sigma\upsilon\nu\chi}$$

β) Να υπολογίσετε το $\eta\mu\chi$, αν $2\eta\mu^2\chi - 9\eta\mu\chi + 2 = 0$.

ΘΕΜΑ Β3:

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(0,0)$, $B(x,y)$ και $\Gamma(-7,1)$ με ύψος BE : $-7x + y = 10$.

Η κορυφή B βρίσκεται πάνω στην ευθεία $-2x - 3y = -7$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής B . (μον. 2)

Αν η κορυφή B έχει συντεταγμένες $(-1,3)$.

β) Δείξτε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να καθορίσετε την ορθή γωνία του (μον. 2)

γ) Βρείτε το μήκος του ύψους BE του τριγώνου (μον. 2)

δ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας Γ του τριγώνου (μον. 1)

ε) Βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (μον. 2)

στ) Βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. (μον. 1)

ΘΕΜΑ Β4:

Δίνεται ο κύκλος (K, R) με διάμετρο την AB . Σε σημείο A του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη (ε) και από το A τη χορδή AG . Από το Γ φέρουμε την $\Gamma\Delta$ κάθετη στην (ε) . Η $\Gamma\Delta$ τέμνει τον κύκλο στο E . Να δείξετε ότι:

α) $\Delta\Gamma \parallel AB$ (μον. 2)

β) $(AG)^2 = (AB)(\Delta\Gamma)$ (μον. 3)

γ) $(\Delta A)^2 = (\Delta E)(\Delta\Gamma)$ (μον. 2)

δ) $(\Delta A)^2 = \frac{(\Delta E)(AG)^2}{2R}$ (μον. 3)

ΘΕΜΑ Β5:

Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x) = x^2 + 4(\alpha - 2)x - 4(\beta + 1)^2, \text{ όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (μον. 4)

β) Για $\alpha = 2$ και $\beta = -1$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$-x - 2019 < f(x) \leq x + 6 \quad (\text{μον.2})$$

γ) Για $\alpha = 1$ και $\beta = -3$ να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς:

$$\rho_1 = \chi_1 + 1 \text{ και } \rho_2 = \chi_2 + 1, \text{ όπου } \chi_1 \text{ και } \chi_2 \text{ οι ρίζες της εξίσωσης } f(x) = 0 \quad (\text{μον. 4})$$

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α' Λυκείου – Προσανατολισμού

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 24/05/2019

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες και 30 λεπτά

Ονοματεπώνυμο: _____ Βαθμός: _____

Τμήμα: _____ Αριθμός: _____ Βαθμός ολογράφως: _____

Υπογραφή καθηγητή: _____

ΟΔΗΓΙΕΣ :

- (α) Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
(β) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
(γ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
(δ) Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία διαδικασία.

Το δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.ΜΕΡΟΣ Α'**Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

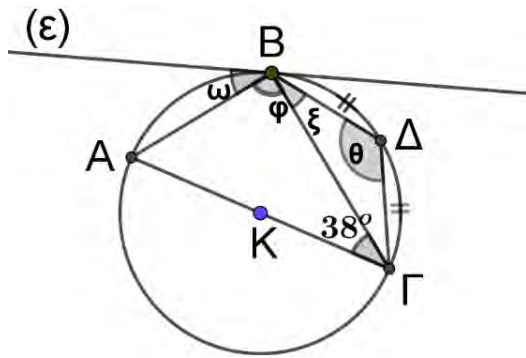
- Να σχηματίσετε μια εξίσωση β' βαθμού που να έχει λύσεις τους αριθμούς $3 + \sqrt{5}$ και $3 - \sqrt{5}$.
- Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα: $\sigma\varphi^2\theta \cdot \tau\epsilon\mu^2\theta - \sigma\varphi^2\theta = 1$.
- Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει το βάρος 10 μαθητών σε κιλά. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβλητότητας.

Βάρος σε κιλά	Αριθμός μαθητών
50	4
52	3
57	2
60	1

4. Αν $\sin \theta = \frac{15}{17}$ και $270^\circ < \theta < 360^\circ$ να υπολογίσετε με χρήση των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων την τιμή της παράστασης $A = 34 \eta \mu \theta - 45 \epsilon \phi \theta$.

5. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία $A(-3,2)$, $B(-1,6)$ και $\Gamma(5,4)$. Να βρείτε:
 α) την εξίσωση της διαμέσου BM.
 β) το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

6. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) με διάμετρο AΓ και τα σημεία του B και Δ έτσι ώστε τα τόξα $\widehat{B\Delta}$, $\widehat{\Delta\Gamma}$ να είναι ίσα και η γωνία $\widehat{A\Gamma B} = 38^\circ$. Η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\omega}$, $\hat{\phi}$, $\hat{\theta}$ και $\hat{\xi}$.



7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$.

- α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$.
 β) Να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι αντίρροπο με το $\vec{u}$.
 γ) Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u}$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\vec{\gamma}$.

8. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(x-5)(1-x)^2}{(2x^2-x-6)(x^2+4x+5)} \leq 0$.

9. Δίνονται οι κύκλοι $(K, 8cm)$ και $(\Lambda, 2cm)$ με $K\Lambda = 10cm$.

- α) Να βρείτε τη θέση των δύο κύκλων.
 β) Από το κέντρο Λ φέρουμε ευθεία η οποία τέμνει τον κύκλο $(K, 8cm)$ στα σημεία B και Γ έτσι ώστε $B\Gamma = 9cm$. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΛB.

10. Δίνεται ότι $2 < x < 7$, $-6 < y < -4$ και $\omega < y$

- α) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις $x - 3y$ και $\frac{x}{y+1}$
 β) Να δείξετε ότι $y^2 < \omega y < \omega^2$

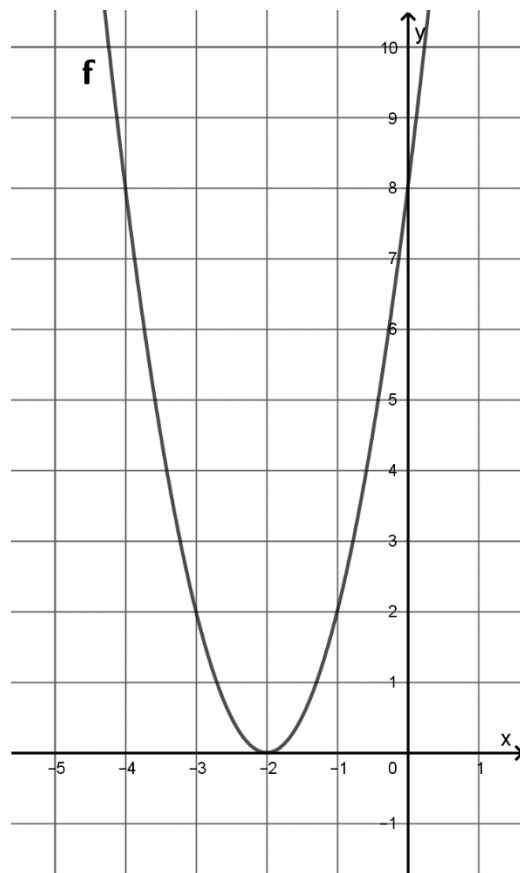
ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$.
Με βάση το σχήμα:

- α) να βρείτε το πρόσημο του α .
- β) να βρείτε το πρόσημο της διακρίνουσας Δ της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- γ) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- δ) να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.
- ε) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

στ) να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \frac{x \cdot f(x)}{3x^2 + 6x}$



2. α) Να δείξετε ότι:
$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \eta\mu(2\pi - \varphi) - \epsilon\varphi(\pi - \varphi) \sigma\varphi(-\varphi)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \sigma\tau\epsilon\mu(2\pi - \varphi)} = -\sin\varphi$$

β) Δίνεται η εξίσωση $3\chi^2 + 2\sqrt{3}\tau\epsilon\mu\theta\chi + \epsilon\varphi^2\theta = 0$ με λύσεις χ_1, χ_2 όπου $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

- i) Να βρείτε το είδος των λύσεων της εξίσωσης.
- ii) Αν οι λύσεις χ_1, χ_2 της εξίσωσης είναι αντίστροφες, να υπολογίσετε τη γωνία θ .
- iii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $(\chi_1 - \chi_2)^2$.

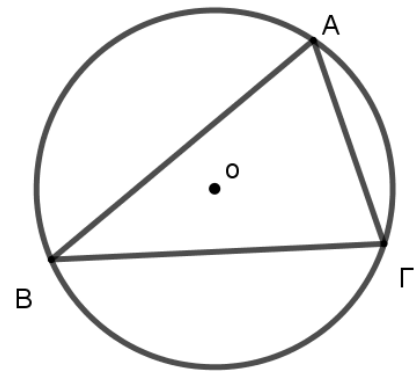
3. Δίνονται οι ευθείες (ϵ_1) : $\alpha\chi - \psi = 1$ και (ϵ_2) : $(\beta + 2)\chi - \alpha\psi + 2\alpha = 0$ που τέμνονται στο σημείο $A(2,3)$.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς α και β .

β) Δεδομένου ότι $\alpha = 2$ και $\beta = -1$, να βρείτε:

- i. τα σημεία της ευθείας (ϵ_1) που απέχουν από την (ϵ_2) απόσταση ίση με $3\sqrt{5}$.
- ii. την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και σχηματίζει γωνία 45° με την ευθεία (ϵ_1) .

4. Δίνονται οι παραβολές: $f(x) = 3(x - 2\mu - \lambda)^2 - 1$ και $g(x) = -x^2 + 6x + \lambda^2 - 3\mu - 5$
- α) Να αναφέρετε το σύνολο τιμών της f .
- β) Να βρείτε τους άξονες συμμετρίας των παραβολών συναρτήσει των λ και μ .
- γ) Να βρείτε την ελάχιστη ή μέγιστη τιμή της g συναρτήσει των λ και μ .
- δ) Αν οι κορυφές των παραβολών συμπίπτουν, να υπολογίσετε τις τιμές των λ και μ .
- ε) Δεδομένου ότι $\mu = 2$, $\lambda = -1$, να λυθεί η εξίσωση $(x^2 - 2\mu)^4 - 27\lambda(x^2 - 2\mu) = 0$.
5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο στον κύκλο (O, R) . Φέρουμε την εφαπτομένη (ε_1) του κύκλου στο σημείο B . Από το σημείο Γ φέρουμε παράλληλη ευθεία (ε_2) με την AB , που τέμνει τον κύκλο στο σημείο E και την ευθεία (ε_1) στο σημείο D . Να δείξετε ότι:
- α) $(B\Gamma)^2 = (AB) \cdot (\Delta\Gamma)$
- β) $(B\Delta) \cdot (A\Gamma) = (B\Gamma) \cdot (\Delta E)$



Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Έλση Μαργνερίδου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΤΑΞΗ Α΄

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 03/06/2019

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ώρες

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
(β) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (στα σχήματα επιτρέπεται μολύβι).
(γ) Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
(δ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

A1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^3 + 6 = 70$

β) $(2 - x)^{\frac{2}{3}} = 4, x \leq 2$

A2. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες $x_1 = \sqrt{3} + 2$ και $x_2 = \sqrt{3} - 2$.A3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Να βρείτε:

α) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

A4. Ένας φοιτητής στο πρώτο εξάμηνο παρακολουθεί πέντε μαθήματα. Στα τέσσερα από αυτά πήρε τους βαθμούς 6, 7, 9, και 10. Τα μαθήματα αυτά έχουν βαρύτητα (ανάλογα με τις περιόδους διδασκαλίας) 1, 3, 1 και 2, αντίστοιχα. Αν το πέμπτο μάθημα έχει βαρύτητα 3, να βρείτε τι βαθμό πρέπει να πάρει σε αυτό ο φοιτητής, έτσι ώστε ο μέσος όρος της βαθμολογίας του και των πέντε μαθημάτων να είναι 8.

A5. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τη $\Delta E \parallel B\Gamma$.

Αν $B\Delta = 4\text{cm}$, $A\Delta = 5\text{cm}$ και $A\Gamma = 18\text{cm}$,

να υπολογίσετε το μήκος του AE .

A6. Αν $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 5\eta\mu\theta - 10\sigma\upsilon\nu\theta + 6\varepsilon\varphi\theta - 8\sigma\varphi\theta.$$

A7. Αν $3 < x < 5$ και $-4 < y < -1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις :

α) $A = x + 2y$

β) $B = x \cdot y$

γ) $\Gamma = \frac{x+5}{y}$

A8. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο K και διάμετρο AD .

Η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του

κύκλου στο σημείο A ,

το τόξο AZE είναι διπλάσιο του τόξου

$$BHA \text{ και } \widehat{A\Gamma B} = 32^\circ.$$

Να υπολογίσετε τις γωνίες

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta.$$

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις

απαντήσεις σας)

A9. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση:

$$A = \sqrt{\frac{(x^2+3x-4) \cdot (x^2-1)}{x-2}}$$

A10. Αν η ευθεία (ε): $4x - 3y = 1$ εφάπτεται του κύκλου (K, R) με κέντρο $K(\alpha, 1)$ και ακτίνα $R = 4\text{cm}$. Να υπολογίσετε το α .

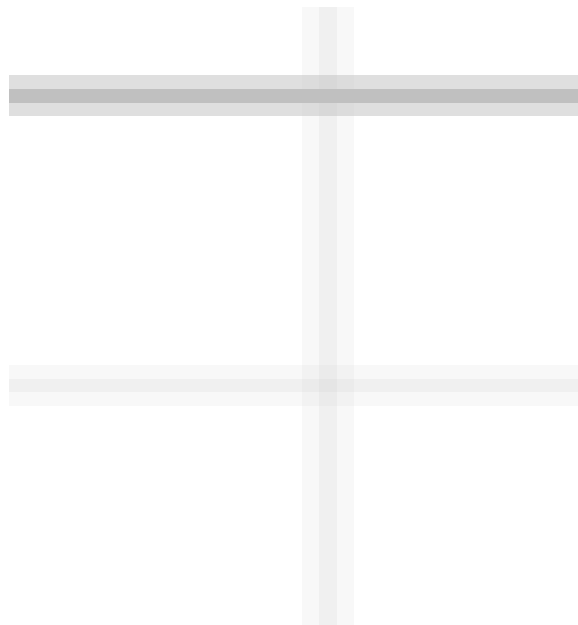
ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

Να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης
- β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής
- γ) τις τιμές των a, b, c
- δ) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) < -3$
- ε) το πρόσημο της παράστασης $A = \frac{f(2019)+2f(-1)}{f(\sqrt{5})}$



B2. Αν $A = \frac{\eta\mu(270^\circ - \alpha)\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha) + \eta\mu(180^\circ - \alpha)\sigma\varphi(90^\circ + \alpha)\eta\mu(270^\circ + \alpha)}{\sigma\tau\epsilon\mu(90^\circ + \alpha)\epsilon\varphi(270^\circ - \alpha)}$ και $B = \epsilon\varphi\alpha + \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \eta\mu\alpha}$

α) Να δείξετε ότι: $A = \eta\mu\alpha$ και $B = \tau\epsilon\mu\alpha$.

β) Αν $5A^2 + \frac{1}{B^2} = 4$ και $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$,

i. να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2\alpha = \frac{3}{4}$ και

ii. να υπολογίσετε τη γωνιά α .

- B3. Από σημείο Σ εκτός κύκλου (K, R) φέρουμε εφαπτομένη ΣA (A σημείο επαφής) και τέμνουσα $\Sigma B\Gamma$ του κύκλου. M είναι το μέσο του μικρού τόξου $B\Gamma$ και Δ το σημείο τομής της AM με την $B\Gamma$.
- α) Να αποδείξετε ότι $(\Sigma A)^2 = (\Sigma B) \cdot (\Sigma \Gamma)$
- β) Αν Δ είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $(B\Gamma)^2 = 4(\Delta M) \cdot (\Delta A)$
- B4. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 4) \cdot x + 1 - 2\lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α) Να βρείτε το είδος των ριζών της εξίσωσης.
- β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:
- $$3x_1 + 3x_2 - x_1^2 \cdot x_2 - x_2^2 \cdot x_1 > 0.$$
- γ) Να βρείτε για ποια τιμή του λ , το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της εξίσωσης παίρνει ελάχιστη τιμή.
- B5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με κορυφές $B(2,1)$, $\Gamma(6,3)$. Η κορυφή A βρίσκεται στην ευθεία $(\varepsilon): x - 3y - 5 = 0$.
- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της διαμέσου AM είναι $y = -2x + 10$.
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής A .
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ , έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ να είναι παραλληλόγραμμο.

ΕΠΩΝΥΜΟ:.....

ΟΝΟΜΑ:.....

ΤΜΗΜΑ:.....

ΣΧΟΛΕΙΟ: Λύκειο Αγίου Νικολάου Λεμεσού

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2018 - 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ	ΧΡΟΝΟΣ: 2.5 ώρες	ΤΑΞΗ: Α΄
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 3 / 6 / 2019		ΒΑΘΜΟΣ: ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:.....
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ/ΤΡΙΑ:.....		ΥΠΟΓΡΑΦΗ:

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού και διορθωτικής ταινίας (tiprex).
- Να χρησιμοποιείται μόνο μπλε μελάνι. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Το γραπτό αποτελείται από 10 σελίδες.

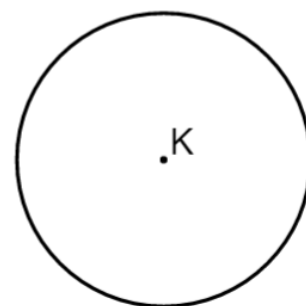
ΜΕΡΟΣ Α' (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 5 \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

- 2) Από σημείο Σ εκτός του κύκλου (Κ, R) φέρνουμε τις τέμνουσες ΣΑΒ και ΣΓΔ του κύκλου.
Να υπολογίσετε το μήκος ΣΓ αν (ΑΒ) = 7cm, (ΣΑ) = 2cm, (ΓΔ) = 3cm.



- 3) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με λύσεις $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ και $x_2 = 2 - \sqrt{3}$

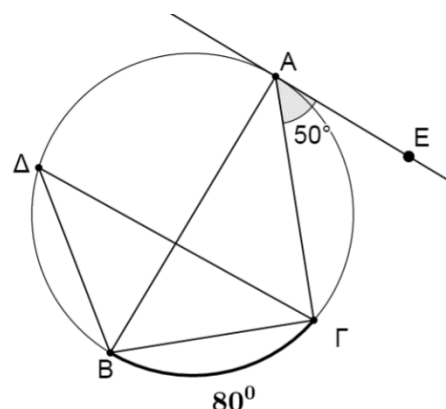
- 4) Στο διπλανό σχήμα η ΑΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του Α. Το τόξο ΒΓ = 80° και η γωνία ΕΑΕ = 50° .

(α) Να υπολογίσετε τις γωνίες:

$\angle \Delta \Gamma$, $\angle \Delta \Gamma$, $\angle \Delta \Gamma$, $\angle \Delta \Gamma$. (4 μονάδες)

(β) Τι συμπεραίνετε για την χορδή ΑΒ;
(1 μονάδα)

(Να δικαιολογείτε πλήρως τις απαντήσεις σας)



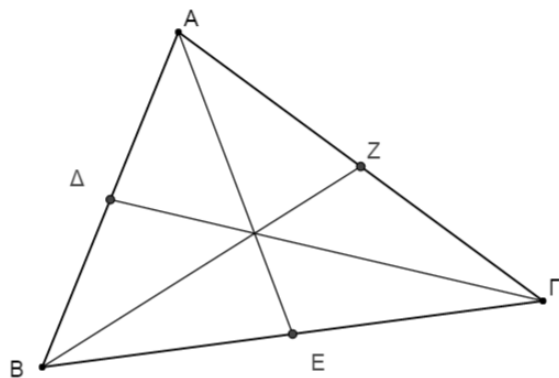
- 5) Αν $\tan \theta = -\frac{13}{12}$, $\theta \in (0, \pi)$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{6 \cdot \epsilon \phi \theta - 26 \cdot \eta \mu \theta}{10 \cdot \sigma \phi \theta}.$$

- 6) (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$, παριστάνει ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α(-2,3).

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν τριγώνου ΚΛΜ με κορυφές Κ(1,2), Λ(3,-1) και Μ(3,-2).

- 7) Δίνονται οι αριθμοί: 5, 7, 6, 8, 4, 7, 7, 9, 4, 3. Να υπολογίσετε:
 (α) Τη μέση τιμή των αριθμών.
 (β) Την τυπική απόκλιση των αριθμών.
- 8) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις χ και ψ . Οι διαστάσεις του ικανοποιούν τις ανισότητες: $3 < \chi < 5$ και $8 < \psi < 11$. Αν αυξήσουμε το πλάτος χ κατά 1 και ελαττώσουμε το μήκος ψ κατά 2, να υπολογίσετε τις δυνατές τιμές:
 (α) Της περιμέτρου του νέου ορθογώνιου.
 (β) Του εμβαδού του νέου ορθογώνιου .
- 9) (i) Αν α, β θετικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$ να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta}{\alpha + \beta}} = \sqrt{\alpha + \beta}$.
 (ii) Να λύσετε την εξίσωση $(x^2 - 5)^{\frac{3}{2}} = 8$.
- 10) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\gamma}$ και $AE, BZ, \Gamma\Delta$ διάμεσοί του.
 (α) Να εκφράσετε τις διαμέσους $AE, BZ, \Gamma\Delta$ σε συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.
 Να αποδείξετε ότι:
 (β) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BZ} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{0}$.



ΜΕΡΟΣ Β' (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ να βρείτε:

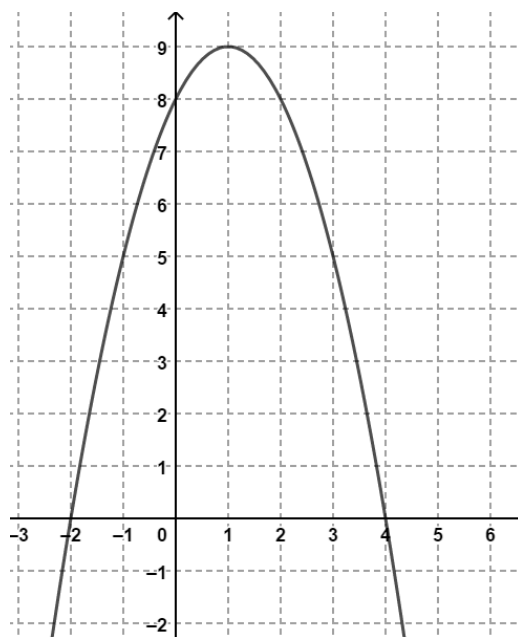
(α) Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $f(x)$.

(β) Το πρόσημο του a και το πρόσημο της διακρίνουσας.

(γ) Τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$.

(δ) Τις τιμές των a , b και γ .

(ε) Τις λύσεις της ανίσωσης $f(x)<0$.



- 2) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda^2 - 3 = 0$ και x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης. Να υπολογίσετε την τιμή του λ αν :

(α) Έχει ρίζες αντίστροφες.

(β) Έχει ρίζα το 1.

(γ) Έχει ρίζες ίσες.

(δ) Ισχύει η ανισότητα $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} < -2$.

- 3) Δίνονται: $A = \frac{\sin\theta}{1+\eta\mu\theta} + \frac{1+\eta\mu\theta}{\sin\theta}$ και $B = \frac{\epsilon\phi(180^\circ - \theta) \cdot \sin(90^\circ - \theta)}{\eta\mu(360^\circ - \theta) \cdot \sin(-\theta) \cdot \sigma\phi(270^\circ + \theta)}$.

Να υπολογίσετε την τιμή της γωνιάς θ αν $A + B = -\sqrt{2}$, $\theta \in (0, \pi)$.

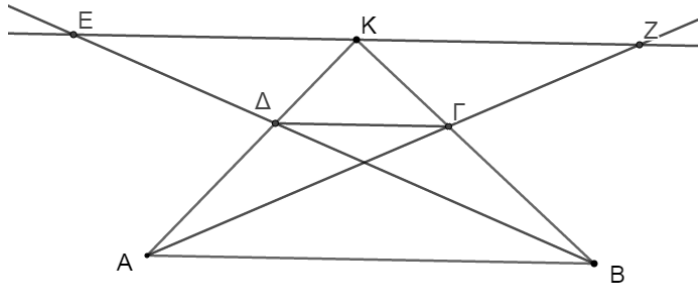
- 4) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει κορυφή Α(3,4), εξίσωση μιας πλευράς την $2x - y - 2 = 0$ και εξίσωση μιας διαγωνίου την $3x + y - 3 = 0$. Να βρείτε:

(α) Τις συντεταγμένες των άλλων κορυφών του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. (6 μον.)

(β) Το μήκος της διαγωνίου του ΑΓ. (2 μον.)

(γ) Την απόσταση της κορυφής Α από τη διαγώνιο του ΒΔ. (2 μον.)

- 5) Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$. Οι μη παράλληλες πλευρές $A\Delta$ και $B\Gamma$ του τραπέζιου τέμνονται στο σημείο K . Από το K φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς τις βάσεις του τραπέζιου, που τέμνει τις προεκτάσεις των διαγώνιων του τραπέζιου $B\Delta$ και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα.



- (α) (i) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και BKE είναι όμοια. (4 μονάδες)
- (ii) Να γράψετε τους λόγους ομοιότητας που προκύπτουν. (2 μονάδες)
- (β) Να δείξετε ότι $EK=KZ$. (4 μονάδες)

Διευθύντρια
Κυριακή Θεοδώρου

.....

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Πρακτικής Κατεύθυνσης (4-ωρο)

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22/05/2019

ΤΑΞΗ: Β΄ Ξενοδοχειακής Σχολής

Διάρκεια: 2:30΄

ΟΔΗΓΙΕΣ: Να γράφετε με μπλε μελάνι (μόνο τα σχήματα με μολύβι).
Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από πέντε (5) σελίδες.
Το εξεταστικό δοκίμιο βαθμολογείται με 100 μονάδες.
Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

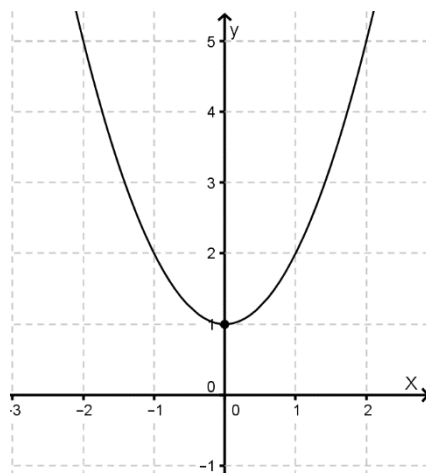
ΜΕΡΟΣ Α': (Μονάδες 50/100)

Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε μονάδες (5/100).

A1. Να λύσετε την ανίσωση: $(x - 2)(x + 4) \leq 0$ **A2.** Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha \cdot \eta\mu A = \beta \cdot \eta\mu B$, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.**A3.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των πιο κάτω συναρτήσεων:

α)



β)

A4. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = 2x - 5$ και $g(x) = x + 3$, να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f + g$ και $f - g$.

A5. Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $7^{x+1} = 7^3$

β) $\log(x + 21) = \log x + 3\log 2$

A6. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις στο φύλλο απαντήσεών σας.

α) $\eta\mu 70^\circ = \sigma\upsilon\nu 20^\circ$

β) $\eta\mu(180^\circ - \theta) = \eta\mu\theta$

γ) Αν $\eta\mu\theta > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$ τότε η γωνιά θ έχει τελική πλευρά στο 2^ο τεταρτημόριο.

δ) Η τελική πλευρά της γωνίας -190° σε κανονική θέση είναι στο 3^ο τεταρτημόριο.

ε) Αν η τελική πλευρά μιας γωνίας θ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο με συντεταγμένες $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, τότε το $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$

A7. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^3 + 5x^2 + 2x - 4)$

β) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} \right)$

A8. Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - \sqrt{2}$

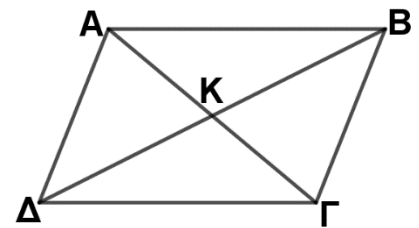
β) $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 3}$

A9. Σε δύο δείγματα ενός πληθυσμού A και B δίνονται: $\bar{X}_A = 50$, $S_A = 4$, $\bar{X}_B = 70$, $S_B = 6$.

- α) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής για το καθένα από τα πιο πάνω δείγματα.
 β) Να βρείτε ποιο από τα δείγματα A και B παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια.

A10. Στο ακόλουθο σχήμα, το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο του οποίου οι διαγώνιοι τέμνονται στο K. Να αντιστοιχίσετε τα διανύσματα της στήλης A με τα αντίστοιχα διανύσματα της στήλης B στο φύλλο απαντήσεών σας, έτσι ώστε να ισχύουν οι ισότητες.

Στήλη A	Στήλη B
α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} =$	i) $\overrightarrow{\Gamma B}$
β) $\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{AB} =$	ii) $\overrightarrow{B\Gamma}$
γ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta A} =$	iii) $-2 \cdot \overrightarrow{K\Delta}$
δ) $\overrightarrow{\Delta B} =$	iv) $\overrightarrow{BA}$
ε) $\overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{A\Delta} =$	v) $\overrightarrow{A\Gamma}$
	vi) $2 \cdot \overrightarrow{K\Delta}$
	vii) $\vec{0}$



ΜΕΡΟΣ Β': (Μονάδες 50/100)

Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα μονάδες (10/100).

B1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - x^2 + 4$

Να βρείτε:

- α) την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f
 β) την κλίση και την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A (1,4)

B2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (2\lambda - 4)x + \lambda + 4 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

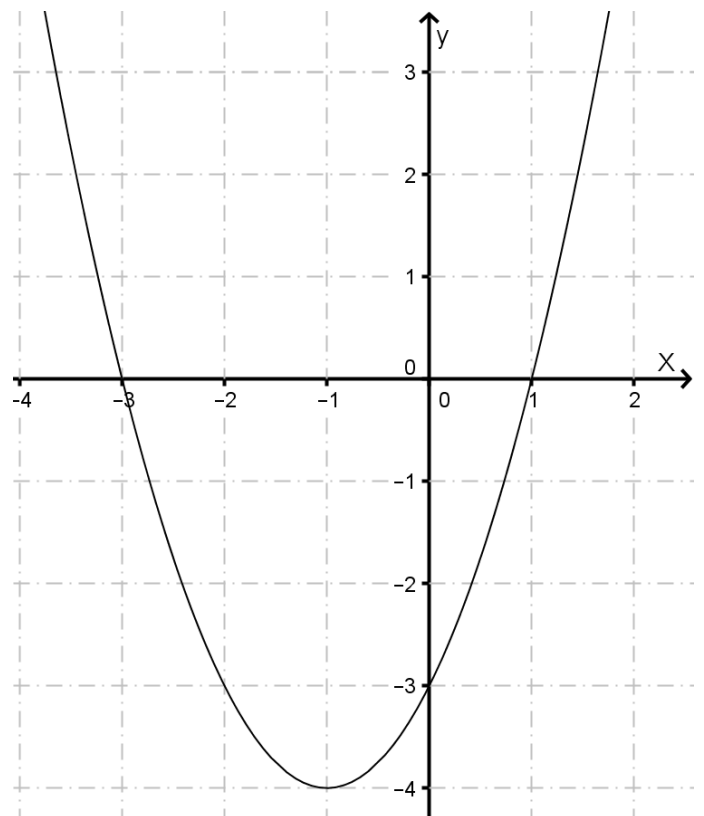
Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει:

- α) λύση τον αριθμό 3
- β) λύσεις αντίθετες
- γ) λύσεις αντίστροφες
- δ) άθροισμα ριζών ίσο με 10

B3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η παραβολή με εξίσωση $\psi = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f
- β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής της
- γ) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \leq 0$
- δ) την εξίσωση της παραβολής
- ε) Να αναφέρετε πόσες μονάδες οριζόντια και πόσες κατακόρυφα πρέπει να μετατοπιστεί η πιο πάνω γραφική παράσταση για να προκύψει η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $g(x) = x^2$



B4. Το κόστος κατασκευής έξι (6) γλυκών είναι: 12, 15, 15, 17, 18, 19 ευρώ.

Να υπολογίσετε:

α) την επικρατούσα τιμή (X_ε)

β) τη διάμεσο τιμή (X_δ)

γ) τη μέση τιμή ($\bar{X}$)

δ) την τυπική απόκλιση (S)

ε) τον συντελεστή μεταβλητότητας (CV) των πιο πάνω παρατηρήσεων.

B5. α) Αν $\eta\mu\theta = \frac{5}{13}$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να υπολογίσετε με χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων, την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{24\varepsilon\phi\theta - 13\sigma\upsilon\nu\theta}{5\sigma\phi\theta + 11}$$

β) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \eta\mu^2 x} = \sigma\phi x$

-ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ-

Η Διευθύντρια

.....

Τέρψα Δημητρίου

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$. Να βρείτε:

(α) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

(β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

2. Αν $-5 < x < -2$ και $-6 < y < -3$, να βρείτε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $2x + y$

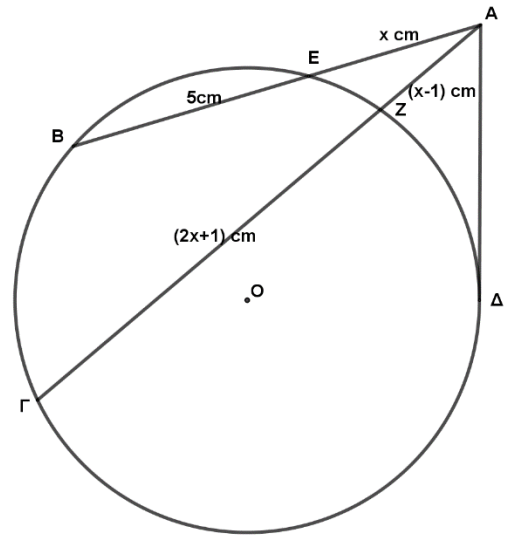
(β) $\frac{xy}{2x + y}$

3. Σύμφωνα με τον νέο θεσμό των τετραμήνων στα Λύκεια, ο βαθμός σε ένα εξεταζόμενο μάθημα στο τέλος του χρόνου συνυπολογίζεται από τους βαθμούς των δύο τετραμήνων με βαρύτητα 35% στο κάθε τετράμηνο και 30% στην τελική εξέταση. Αν ο βαθμός ενός μαθητή στο μάθημα της Ιστορίας ήταν 9 στο Α΄ Τετράμηνο και 10 στο Β΄ Τετράμηνο, ποιος πρέπει να είναι ο ελάχιστος βαθμός του στην τελική εξέταση, ώστε να πάρει γενικό βαθμό 11;

4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης A : (χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής και να φαίνονται όλα τα βήματα που θα ακολουθήσετε)

$$A = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \right)$$

5. Στο πιο κάτω σχήμα, η AD είναι η εφαπτομένη του κύκλου (O, R) στο σημείο του Δ . Αν AEB και $AZ\Gamma$ είναι τέμνουσες του κύκλου (B, Γ, E και Z σημεία του κύκλου) με $(AE) = x \text{ cm}$, $(EB) = 5 \text{ cm}$, $(AZ) = (x - 1) \text{ cm}$ και $(Z\Gamma) = (2x + 1) \text{ cm}$, να υπολογίσετε την τιμή του x και το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AD .



6. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt[3]{x^2 - 6x} = 3$

7. Ευθεία (ε_1) , σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων γωνία $\frac{\pi}{4}$ και διέρχεται από το σημείο $A(4, 1)$. Αν η (ε_1) είναι κάθετη σε ευθεία (ε_2) , που διέρχεται από το σημείο $\Gamma(1, 2)$:
- (α) να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των (ε_1) και (ε_2) είναι $(\varepsilon_1): y = x - 3$ και $(\varepsilon_2): y + x - 3 = 0$
- (β) να αποδείξετε ότι το σημείο τομής M των (ε_1) και (ε_2) είναι το $(3, 0)$
- (γ) να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B , ώστε το M να είναι το μέσο του $B\Gamma$

8. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{-x^2 - x + 6}}$$

9. Οι ευθείες (ε_1) : $\alpha x + \beta y = 10$ και (ε_2) : $a^2 y - \beta x = 6$ έχουν σημείο τομής την κορυφή της παραβολής $y = x^2 - 6x + 10$.

(α) Να βρείτε τις πραγματικές τιμές των αριθμών α και β

(β) Αν $\alpha = 3$ και $\beta = 1$, να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2)

10. Η εξίσωση $x^2 - x \cdot \text{τεμ}\omega + 2(1 - \text{συν}\omega) = 0$, $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, έχει ρίζες αντίστροφες. Να αποδείξετε, χωρίς την χρήση υπολογιστικής μηχανής, ότι:

$$\frac{\eta\mu(\pi - \omega) \cdot \text{συν}\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right) \cdot \varepsilon\varphi(\omega - \pi)}{\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right)} = \frac{3}{2}$$

ΜΕΡΟΣ Β΄ Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β΄.

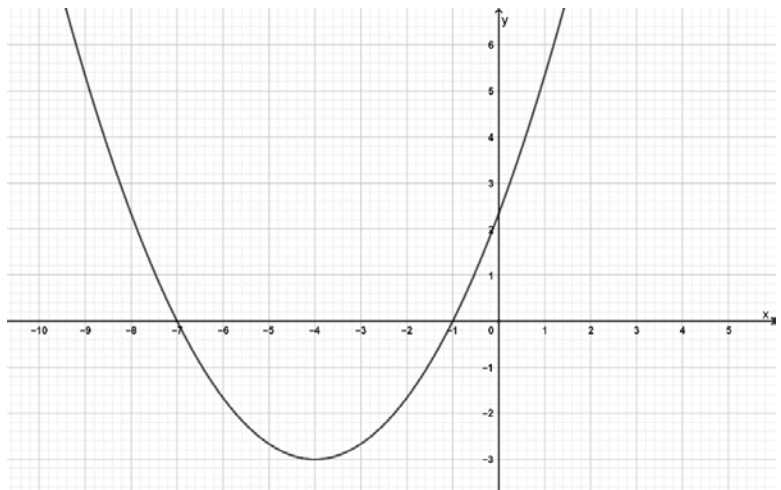
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Δίνεται η εξίσωση $(\text{τεμ}\theta + \varepsilon\varphi\theta) \cdot x^2 - (2\text{τεμ}\theta - \text{συν}\theta) \cdot x + (1 - \eta\mu\theta) \cdot \varepsilon\varphi\theta = 0$, με ρίζες τις $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 + x_1 x_2 + 1 = 2$.

(β) Να βρείτε τις τιμές του $\eta\mu\theta$, αν η εξίσωση έχει μια ρίζα το 2.

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Από τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

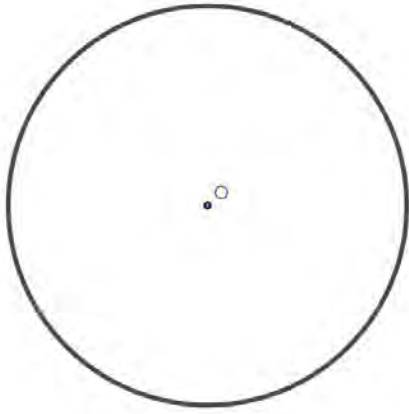


- (α) (i) το πρόσημο του a και το πρόσημο της διακρίνουσας Δ
- (ii) τις λύσεις x_1 και x_2 της εξίσωσης $f(x) = 0$
- (β) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f
- (γ) την τιμή της παράστασης $\frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha^2}$
- (δ) εξίσωση β' βαθμού με λύσεις τις $\rho_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ και $\rho_2 = \sqrt{-x_1 - x_2}$
- (ε) τις τιμές των α, β και γ

3. Τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Η προέκταση της διχοτόμου AD του τριγώνου, τέμνει τον κύκλο στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

(α) $(AB) \cdot (A\Gamma) = (AD) \cdot (AE)$

(β) $(EB)^2 = (EA) \cdot (ED)$



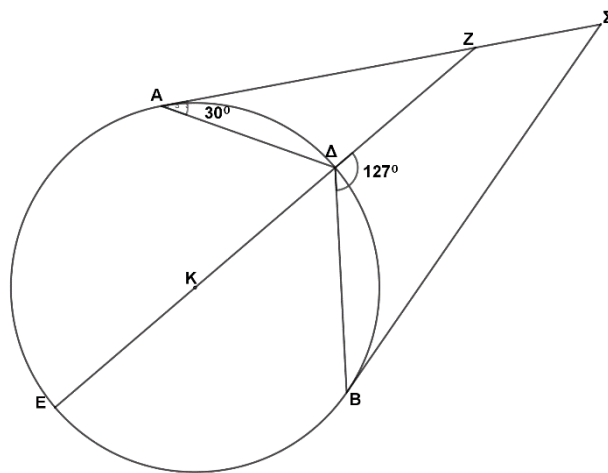
4. Παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ έχει κορυφή $A(1, 1)$ και διαγωνίους που δίνονται από τις

εξισώσεις: $\begin{vmatrix} 2 & 1-2x \\ 2 & 2y-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & x-2 \\ 2 & x \end{vmatrix}$ και $3x - 2y - 1 = 0$. Αν η κορυφή Δ βρίσκεται πάνω στον

άξονα των τεταγμένων, να βρείτε:

- (α) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των διαγωνίων του
- (β) τις συντεταγμένες των άλλων κορυφών του παραλληλογράμμου
- (γ) την απόσταση της κορυφής A από την πλευρά $\Gamma\Delta$
- (δ) το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$

5. Στο σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) και ΔE μια διάμετρος του. Από σημείο Σ εκτός του κύκλου φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣA και ΣB . Η προέκταση της διαμέτρου ΔE τέμνει το ΣA στο Z . Αν η γωνία $\Sigma \hat{A} \Delta = 30^\circ$ και η γωνία $Z \hat{\Delta} B = 127^\circ$:



- (α) να αποδείξετε ότι $\Sigma A = \Sigma B$
 (β) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta A K$ είναι ισόπλευρο
 (γ) να υπολογίσετε το μέτρο του μικρού τόξου ΔB
 (δ) να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $\Sigma Z \Delta B$
 (Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)

Ο Διευθυντής

Σόλων Χαραλάμπους

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.
- Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.
- Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α':

- Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

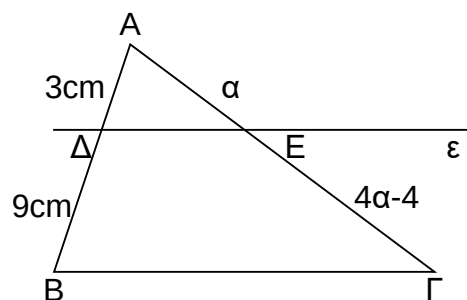
1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ και $\vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Να υπολογίσετε:

- α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$
 β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{w}$.

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που περνά από το σημείο B(-2,1) και σχηματίζει με τον άξονα Ox γωνία ίση με 135° .

3. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, ΑΔ = 3cm, ΔΒ = 9cm, ΑΕ = α και ΕΓ = 4α - 4. Να υπολογίσετε την τιμή του α.



4. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $3x^2 + 5x - 9 = 0$, να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων, χωρίς να λύσετε την εξίσωση:

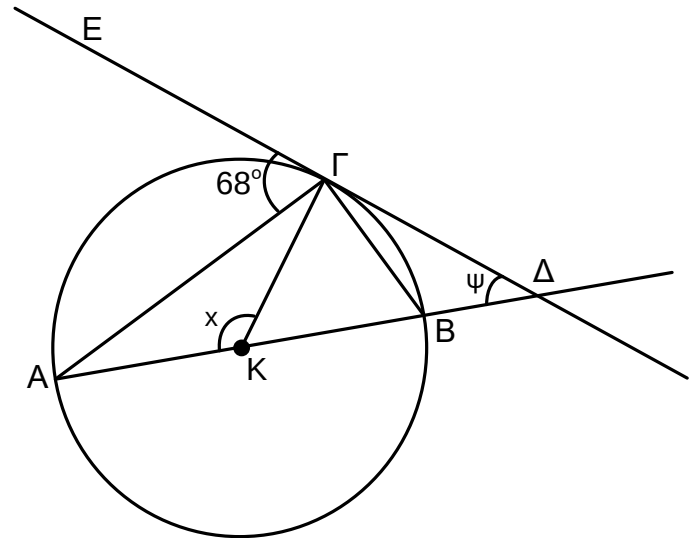
α) $x_1 + x_2$

β) $x_1 \cdot x_2$

γ) $4x_1^2 \cdot x_2^3 + 4x_1^3 \cdot x_2^2$

5. Στο νέο σύστημα αξιολόγησης ο τελικός βαθμός κάθε τετραμήνου θα προκύπτει από την προφορική επίδοση, με βαρύτητα 60% και τη γραπτή εξέταση στο τέλος του τετραμήνου, με βαρύτητα 40%. Να υπολογίσετε τον βαθμό ενός τετραμήνου, μαθητή ο οποίος βαθμολογήθηκε με 16 στην προφορική επίδοση και 11 στην γραπτή εξέταση.

6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο K. Η AB είναι διάμετρος του κύκλου και η ευθεία ΔΕ εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του Γ. Αν η γωνία $\widehat{A\Gamma E} = 68^\circ$ να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{x}$ και $\widehat{\psi}$.
(Να δώσετε επαρκείς δικαιολογίες στις απαντήσεις σας)



7. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 - x} \geq 0$
8. Αν $5 < x < 7$ και $-3 < y < -1$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:
α) $x + y$ β) $x \cdot y^2$ γ) $\frac{x}{y-1}$
9. Αν $\epsilon\phi\theta = -\frac{1}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
 $A = 5\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \epsilon\phi\theta \cdot \sigma\phi\theta + 2$
10. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^2 - (3\kappa + \lambda)x + \kappa^2 - \lambda^2 = 0$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει πραγματικές λύσεις.
β) Δίνεται η παραβολή $f(x) = 2x^2 - (3\kappa + \lambda)x + \kappa^2 - \lambda^2$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$
Αν η πιο πάνω παραβολή εφάπτεται στον άξονα των τετμημένων, να δείξετε ότι έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -2\lambda$.

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α'

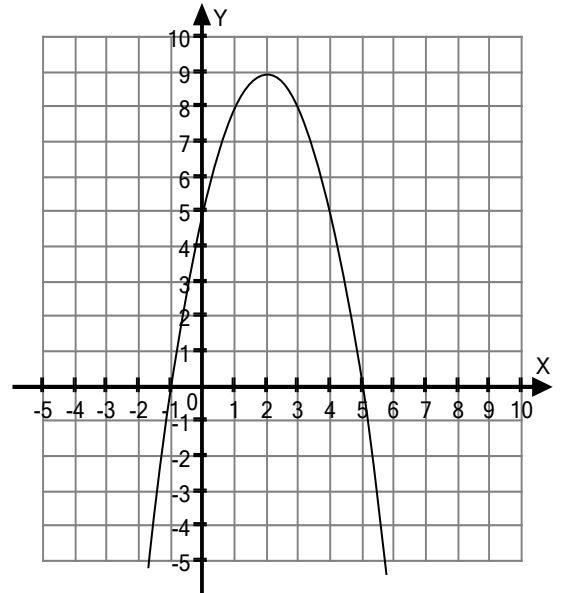
ΜΕΡΟΣ Β΄:

- Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$.

Να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού της
- β) το σύνολο τιμών της
- γ) το πρόσημο του a
- δ) τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$
- ε) το πρόσημο της διακρίνουσας
- στ) την τιμή του $f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- ζ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της
- η) τον τύπο της συνάρτησης.



2. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{2019} - \sqrt{2018}$ και $\beta = \sqrt{2019} + \sqrt{2018}$

α) Να δείξετε ότι α και β είναι αντίστροφοι αριθμοί

β) Να δείξετε ότι $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = 2\sqrt{2018}$

γ) Να δείξετε ότι $\sqrt{\beta - \alpha} \cdot \sqrt{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}} \cdot \sqrt{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$

3. Ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

Έστω M τυχαίο σημείο του μικρού τόξου $B\Gamma$. Η AM τέμνει την $B\Gamma$ στο Δ και η εφαπτομένη (ϵ) του κύκλου στο σημείο Γ , τέμνει την προέκταση της AM στο E .

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ABM και $M\Delta\Gamma$ είναι όμοια

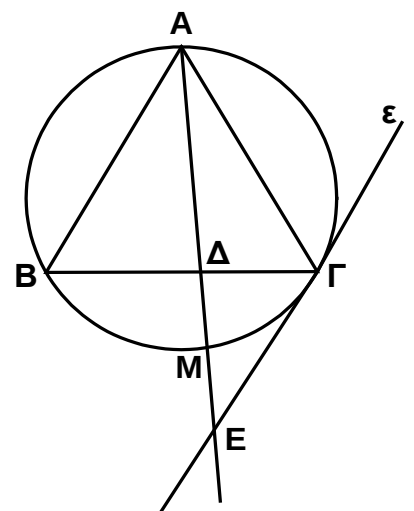
β) Αν για τα εμβαδά των τριγώνων ABM και $M\Delta\Gamma$ ισχύει η

σχέση $E_{\triangle ABM} = 9 \cdot E_{\triangle M\Delta\Gamma}$ και η περίμετρος του τριγώνου

$M\Delta\Gamma$ είναι ίση με 12 cm, να βρείτε την περίμετρο του

τριγώνου ABM

γ) Να δείξετε ότι $(E\Gamma)^2 = (AE) \cdot (EM)$



4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με Β(-2,-4) η διάμεσος ΑΜ και το ύψος ΒΔ τέμνονται στο σημείο Σ(-1,-7). Το σημείο Μ έχει συντεταγμένες (2,-1).

α) Να δείξετε ότι οι κορυφές Α και Γ του τριγώνου έχουν συντεταγμένες Α(3,1) και Γ(6,2).

β) Να βρείτε:

i) Την εφαπτομένη της γωνίας $\hat{A}MB$

ii) Το μήκος του ύψους ΒΔ

iii) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

5. Δίνονται οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$,

$$x_1 = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{1 + \eta\mu(-\theta)} + \frac{1 + \eta\mu(\pi + \theta)}{\sigma\upsilon\nu(2\pi - \theta)} \quad \text{και} \quad x_2 = (\eta\mu\theta - \epsilon\phi\theta)^2 + (\sigma\upsilon\nu\theta - 1)^2 \quad \text{με} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi.$$

α) Να δείξετε ότι: $x_1 = 2\tau\epsilon\mu\theta$ και $x_2 = \tau\epsilon\mu^2\theta \cdot (\sigma\upsilon\nu\theta - 1)^2$

β) Αν το άθροισμα των λύσεων της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$ είναι ίσο με 5, να δείξετε ότι $\tau\epsilon\mu\theta = -2$ και να υπολογίσετε τη γωνία θ .

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

Η Διευθύντρια

Κλειώ Σαββίδου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 31/05/2019

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ΩΡΕΣ ΚΑΙ 30 ΛΕΠΤΑ

ΩΡΑ: 7:45-10:15

ΒΑΘΜΟΣ

Αριθμητικώς: _____

Ολογράφως: _____

Υπογραφή: _____

Ονοματεπώνυμο μαθητή/τριας: _____ Τμήμα: _____ Α/Α : _____

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να γράψετε τις απαντήσεις σας στο εξεταστικό δοκίμιο.
2. Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
3. Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η πορεία της εργασίας σας.
4. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 10 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 \leq 4$.

2. (α) Να κάνετε τις πράξεις: $\frac{\sqrt{18x^5y^3}}{\sqrt{2xy^3}}$ με $x, y > 0$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $x^{\frac{3}{2}} = 27$.

3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:

(α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

(β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\alpha}$.

(γ) το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{w}$ που να είναι αντίρροπο του διανύσματος $\vec{v}$.

4. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + 3x - 4 = 0$ με ρίζες x_1, x_2 . Χωρίς να λύσετε την εξίσωση να βρείτε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $x_1 + x_2$

(β) $x_1 \cdot x_2$

(γ) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

5. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu(180^\circ - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \alpha) \cdot \epsilon\varphi(90^\circ + \alpha)}{\eta\mu(360^\circ + \alpha) \cdot \eta\mu(270^\circ + \alpha)} = 1$$

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(2,3) και Γ(4, -1) και Μ(2, -3) είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ. Να βρείτε:

(α) τις συντεταγμένες της κορυφής Β.

(β) το εμβαδόν του τριγώνου.

7. (α) Ένας μαθητής του σχολείου μας πήρε τους πιο κάτω βαθμούς στα εξεταζόμενα του μαθήματα: Νέα Ελληνικά 14, Μαθηματικά 16, Φυσική 12, Πληροφορική 18.

Αν ο μέσος όρος είναι 15 να υπολογίσετε:

(i) την τυπική απόκλιση.

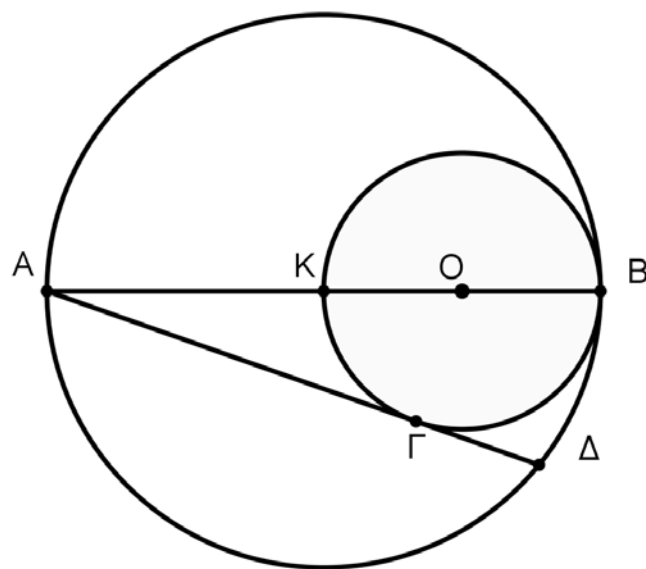
(ii) τον συντελεστή μεταβλητότητας (CV).

(β) Σε κάποια χώρα της ευρωπαϊκής ένωσης ο βαθμός των μαθητών υπολογίζεται με χρήση του σταθμισμένου μέσου όρου. Αν ο πιο πάνω μαθητής βρισκόταν σ' αυτή τη χώρα και ο συντελεστής βαρύτητας των πιο πάνω μαθημάτων είναι 3, 4, 2, 1 αντίστοιχα να υπολογίσετε τον σταθμισμένο μέσο όρο των βαθμών του μαθητή.

8. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) όπου $\widehat{KAB} = 40^\circ$ και (ε) η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ .
- (α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{AKB}$ και $\widehat{A\Gamma B}$.
- (β) Αν τα τόξα $A\Gamma = x$ και $B\Gamma = x + 40^\circ$ να βρείτε την τιμή x και τις γωνιές $\widehat{A\Gamma B}$ και $\widehat{A\Gamma\Delta}$.

9. Να αποδείξετε ότι:
$$\frac{1}{\sigma\tau\epsilon\mu\theta-1} - \frac{\varepsilon\varphi\theta}{\tau\epsilon\mu\theta+\varepsilon\varphi\theta} = 2\varepsilon\varphi^2\theta$$

10. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται δύο κύκλοι, (K, R) και $\left(O, \frac{R}{2}\right)$, που εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο B . Αν η $A\Delta$ είναι εφαπτομένη του κύκλου $\left(O, \frac{R}{2}\right)$, στο σημείο Γ , να δείξετε ότι:
- (α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AO\Gamma$ είναι όμοια.
- (β) ισχύει η σχέση $B\Delta = \frac{2R}{3}$



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$.

Να βρείτε:

(α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

(β) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

(γ) την κορυφή της παραβολής

(δ) το πρόσημο του a .

(ε) τις ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$.

(στ) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 3$.

(ζ) την τιμή της παράστασης $A = \frac{2\gamma - \beta}{a}$

(η) την εξίσωση της συνάρτησης που θα προκύψει από την μετατόπιση της $f(x)$ τέσσερις μονάδες πάνω και δύο μονάδες δεξιά.

2. (α) Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

(i) $\frac{9}{\sqrt{3}}$

(ii) $\frac{16-x^2}{2-\sqrt{x}}$

(β) Αν $-2 \leq \alpha \leq -1$ και $5 \leq \beta \leq 6$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις :

(i) $3\alpha + 2\beta$

(ii) $\alpha \cdot \beta$

3. (α) Δίνεται $\eta\mu\theta = \frac{5}{13}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης με χρήση ταυτοτήτων:

$$A = \frac{13\sigma\upsilon\upsilon\theta + 26\eta\mu\theta}{5\sigma\varphi\theta - 10\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$$

(β) Δίνεται η εξίσωση $3x^2 - 3(1 + 2\sigma\upsilon\upsilon\theta)x + \sigma\upsilon\upsilon\theta = 0$, με ρίζες x_1, x_2 . Να βρείτε τη γωνία θ , αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίθετες και $90^\circ < x < 270^\circ$.

4. Τραπεζίο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) έχει κορυφές $B(10,3)$, $\Gamma(5,4)$, $\Delta(2,2)$ και η εξίσωση της μιας διαγωνίου του δίνεται από την ορίζουσα $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ y & x \end{vmatrix} = 19$. Να βρείτε:

(α) την εξίσωση της άλλης διαγωνίου.

(β) τις συντεταγμένες της κορυφής A .

(γ) τη γωνία $B\Gamma\Delta$.

(δ) την απόσταση μεταξύ των παραλλήλων πλευρών του.

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) και P σημείο εκτός αυτού. Από το σημείο P φέρουμε εφαπτομένη $P\Gamma$ και τέμνουσα PBA . Αν E είναι το μέσο του τόξου AB και $GE \parallel ZB$, να αποδείξετε ότι:
- (α) $(A\Gamma) \cdot (\Gamma Z) = (A\Delta) \cdot (B\Gamma)$
- (β) $\hat{\Gamma\Delta B} = \hat{\Delta\Gamma Z}$
- (γ) $(P\Delta)^2 = (PB) \cdot (PA)$

Οι Εισηγητές:

Κοκκαλή Θεονίτσα

Μήτσίου Γιάννος

Πετρακκίδου Μαριάννα

Ο Διευθυντής

Ανδρέας Λοΐζου

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

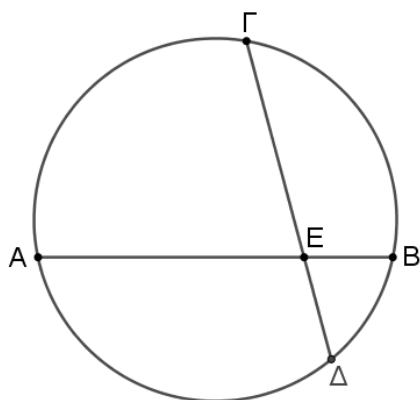
1. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 7x - 19 = 0$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

(α) $x_1 + x_2 =$

(β) $x_1 \cdot x_2 =$

(γ) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} =$

2. Στον πιο κάτω κύκλο οι χορδές AB και ΓΔ τέμνονται στο σημείο E. Αν $(AE) = 12\text{ cm}$, $(EB) = 4\text{ cm}$ και $(ΓΕ) = 10\text{ cm}$ να υπολογίσετε το $(ΕΔ)$.



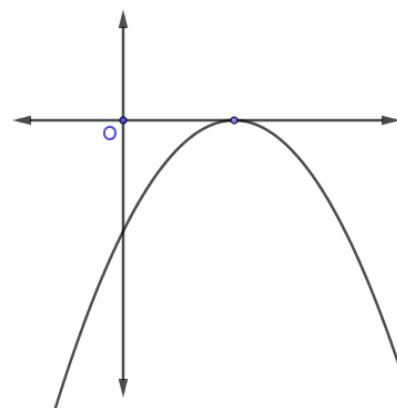
3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$. Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο σύμβολο $>$, $=$, $<$.

(α) $\Delta \dots\dots\dots 0$

(β) $\alpha \dots\dots\dots 0$

(γ) $\gamma \dots\dots\dots 0$

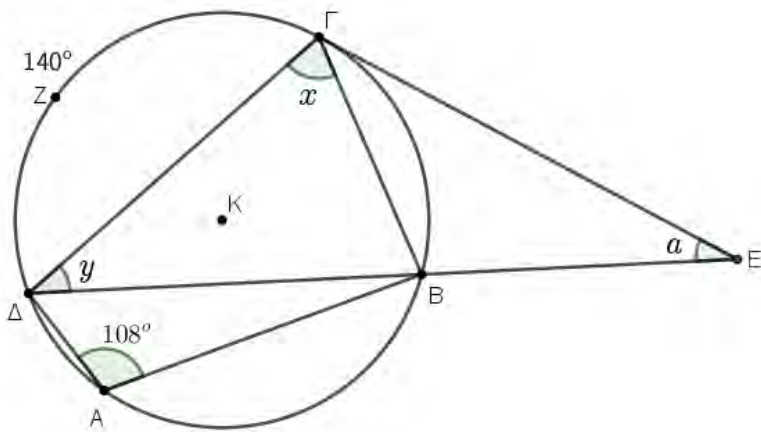
(δ) $f(-1) \dots\dots\dots 0$



4. Αν $\sin\theta = -\frac{5}{13}$ και $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 26\eta\mu\theta - 25\varepsilon\phi\theta - 12\sigma\tau\epsilon\mu\theta$$

5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) και τα σημεία του A, B, Γ και Δ . Αν η ΓE είναι εφαπτόμενη του κύκλου και $\angle Z\Gamma = 140^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες x, y και a δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



6. Για τον τελικό βαθμό, στο μάθημα της Στατιστικής, οι φοιτητές βαθμολογούνται με 20% για τις εβδομαδιαίες εργασίες, 35% για την ενδιάμεση εξέταση και 45% για την τελική εξέταση. Ένας φοιτητής πήρε βαθμό 18 στις εβδομαδιαίες ασκήσεις και 14 στην ενδιάμεση εξέταση. Αν ο τελικός βαθμός του φοιτητή ήταν 13, να βρείτε τον βαθμό του στην τελική εξέταση.

7. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(2, 4)$, $B(-7, -3)$ και $\Gamma(8, 0)$. Να βρείτε το μήκος του ύψους AA' .

8. Αν $2 < x < 10$ και $-5 < y < -1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

(α) $2x + 3y$

(β) $xy - 4$

(γ) $\frac{y^2}{x - y}$

9. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{(2x-3)^2(x^2-2x+7)}{x^4-x^2} \leq 0$$

10. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται $A(-2, 3)$, $B(1, -1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$. Να βρείτε:

(α) Τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(β) Τις συντεταγμένες της κορυφής Γ .

(γ) Τις συντεταγμένες του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{u}$ το οποίο είναι αντίρροπο με το $\overrightarrow{A\Gamma}$.

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

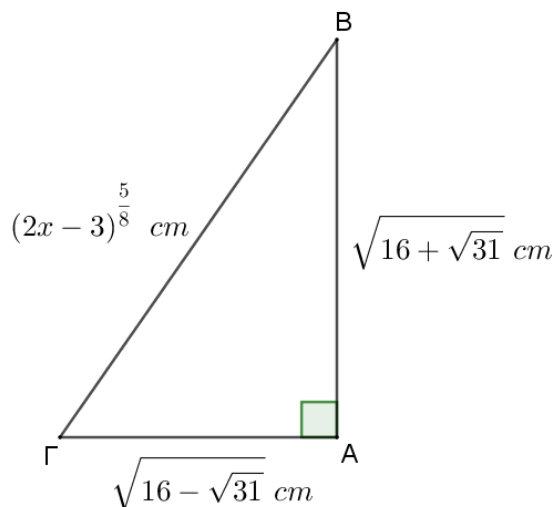
1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με

$$AB = \sqrt{16 + \sqrt{31}} \text{ cm}, \quad A\Gamma = \sqrt{16 - \sqrt{31}} \text{ cm και}$$

$B\Gamma = (2x - 3)^{\frac{5}{8}} \text{ cm}$. Χωρίς την χρήση υπολογιστικής μηχανής να:

(α) αποδείξτε ότι $\varepsilon\varphi\Gamma = \frac{16 + \sqrt{31}}{15}$,

(β) βρείτε την τιμή του x .



2. Σε κύκλο με κέντρο Ο φέρουμε διάμετρο ΑΒ, χορδή ΒΓ και την διάμεσο ΟΜ του τριγώνου ΟΒΓ. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α τέμνει την προέκταση της διαμέσου ΟΜ στο σημείο Τ. Να αποδείξετε:

$$\begin{array}{ll} \text{(\alpha)} \quad \text{OBM} \approx \text{AB}\Gamma & \text{(\beta)} \quad (\text{OM})(\text{AT}) = (\text{OA})(\text{MB}) \end{array}$$

- ### 3. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K = \frac{\eta\mu(180^\circ - \theta)\sigma\varphi(270^\circ - \theta)\sigma\nu\nu(-\theta)}{\varepsilon\varphi(\theta - 180^\circ)\varepsilon\varphi(90^\circ + \theta)\eta\mu(180^\circ + \theta)}$$

$$M = \frac{\sigma v v^3 \theta}{\eta \mu \theta} + \frac{\varepsilon \varphi \theta}{1 + \varepsilon \varphi^2 \theta}$$

(a) Να δείξετε ότι $K = \eta\mu\theta$ και $M = \sigma\varphi\theta$.

(β) Αν τα σημεία $A(2K, 1)$, $B(-1, M)$ και $\Gamma(2K, -1)$ είναι συνευθειακά και $180^\circ < \theta < 270^\circ$, να υπολογίσετε την γωνία θ .

- 4. Δίνεται η παραβολή:**

$$f(x) = x^2 - (3\kappa + 1)x - 2 - \kappa - 2\lambda, \quad \kappa, \lambda \in \mathbb{Q}.$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των τ_a , κ και λ στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) Η γραφική παράσταση της παραβολής τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο $A(0, -3)$ και έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 5$.

(β) Τα κ και λ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$.

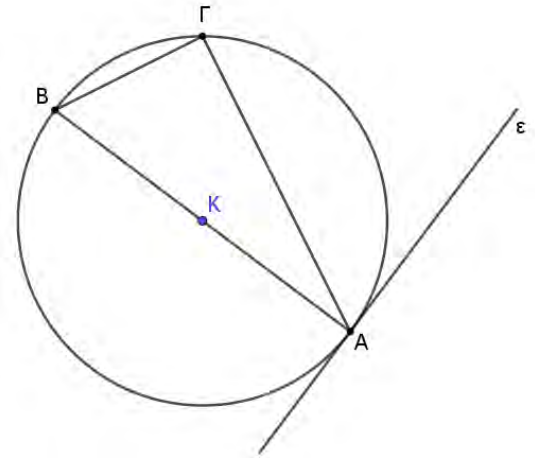
5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) . AB είναι η

διάμετρος του κύκλου με $B(-2, 2)$ και η ευθεία

$\varepsilon: 4x - 3y = 36$ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο A .

(α) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου είναι $K(2, -1)$ και να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου.

(β) Αν Γ είναι σημείο του κύκλου τέτοιο ώστε η ευθεία $B\Gamma$ να είναι παράλληλη της ευθείας $2y - x = 10$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .



Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

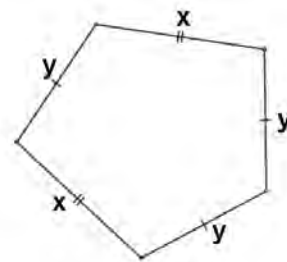
Ανδρούλλα Χρίστου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** 03/06/2019**ΤΑΞΗ:** Α' ΛΥΚΕΙΟΥ(5ωρο)**ΧΡΟΝΟΣ:** 2,5 ΩΡΕΣ**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Να λύσετε τις ασκήσεις πάνω στα φύλλα απαντήσεων που σας δόθηκαν.
2. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
3. Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα και οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού/ταινίας.
5. Τα σχήματα να μεταφερθούν στα φύλλα απαντήσεών σας.
6. Οι γραφικές παραστάσεις να γίνουν στο τετραγωνισμένο χαρτί.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από πέντε (5) σελίδες.**ΜΕΡΟΣ Α':** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Αν για τις πλευρές x και y ισχύει $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται η περίμετρος του διπλανού σχήματος.

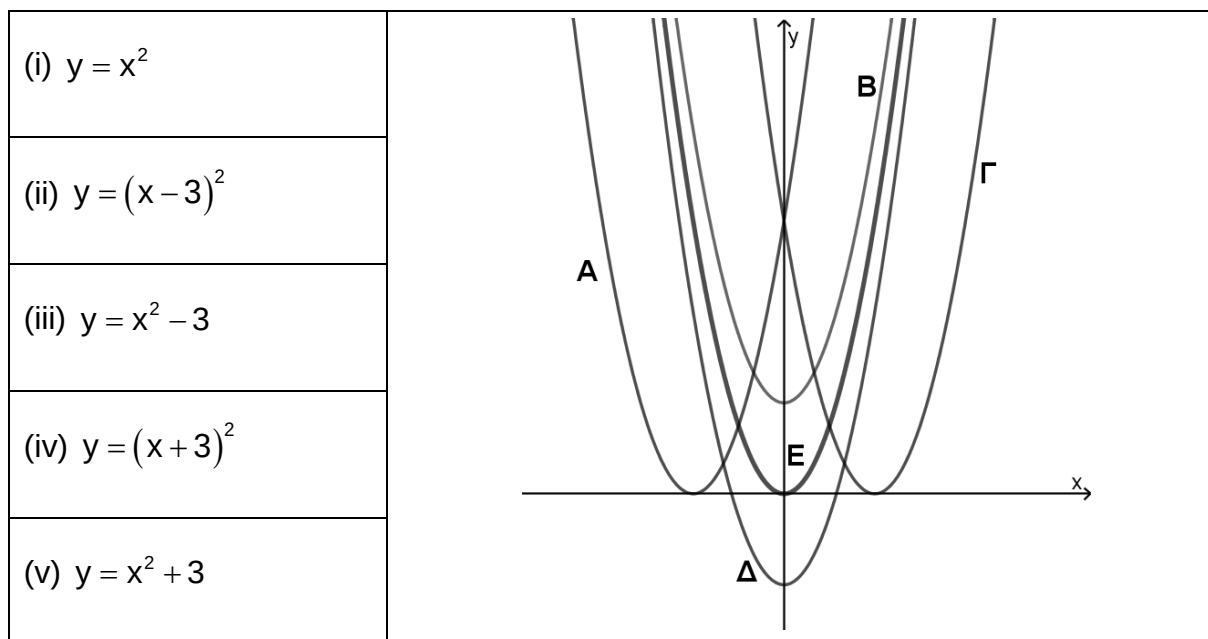


2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Να βρείτε:

- (α) το διάνυσμα $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$,
- (β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$.

3. Αν $\sin \omega = -\frac{3}{5}$ και $180^\circ < \omega < 270^\circ$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνιάς ω (με τη χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων).

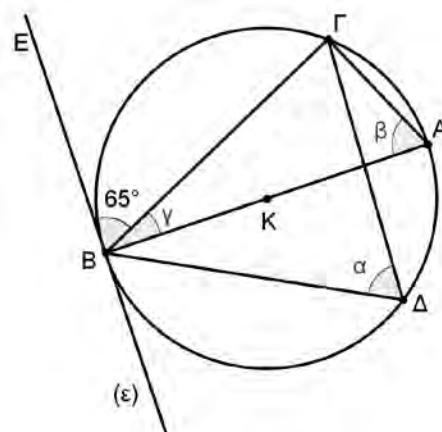
4. Να αντιστοιχίσετε τις πιο κάτω εξισώσεις παραβολών με τη γραφική τους παράσταση:



5. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ, όπου $K(-1, 2)$ και $L(4, 3)$. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης του ΚΛ.

6. Να βρείτε τις τιμές των x και y , ($x, y \geq 0$) ώστε τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt[5]{4x^2 + 23} \\ \frac{4}{y^3} \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 81 \end{pmatrix}$ να είναι ίσα.

7. Στο διπλανό σχήμα η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου (K, R) και η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β. Αν η γωνία $\widehat{GBE} = 65^\circ$, να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών α, β, γ , $\widehat{B\Gamma A}$ και του μικρού τόξου $\widehat{A\Gamma}$, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



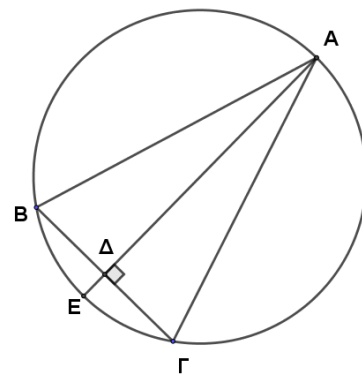
8. Δέκα διαφορετικές φωτογραφίες χειροποίητων κοσμημάτων αναρτήθηκαν στο facebook και από την πρώτη ώρα τα likes ήταν 5, 7, 7, 6, 4, 4, 2, 5, 5, 5.

Να υπολογίσετε:

- (α) τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των likes,
(β) τον συντελεστή μεταβλητότητας (CV).

9. Ένα ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Η ευθεία του ύψους AD , τέμνει τον κύκλο στο σημείο E . Αν $AB = A\Gamma = 10\text{cm}$ και $B\Gamma = 12\text{cm}$, να βρείτε το μήκος του τμήματος DE .

(Να μεταφέρετε το σχήμα στα φύλλα απαντήσεών σας)



10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sigma\upsilon\nu(\pi + x) - \frac{1}{\sigma\tau\epsilon\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$

(α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

(β) Να γράψετε την περίοδο της.

(γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της στο $[-2\pi, 2\pi]$, στο τετραγωνισμένο χαρτί που σας δόθηκε. (να φαίνονται τα σημεία τομής με τους άξονες καθώς και η ελάχιστη και μέγιστη τιμή της)

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η εξίσωση $-\mu x^2 + (\sqrt{\mu+3})x + \mu - 2 = 0$, $\mu \in [-3, \infty)$.

(α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει:

(i) λύση τον αριθμό 1,

(ii) λύσεις αντίστροφες,

(iii) λύσεις πραγματικές.

(β) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{9-x^2}{x^2-8x+7} \leq 0$

2. Στο διπλανό διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$.

(α) Να βρείτε:

(i) το σύνολο τιμών της f ,

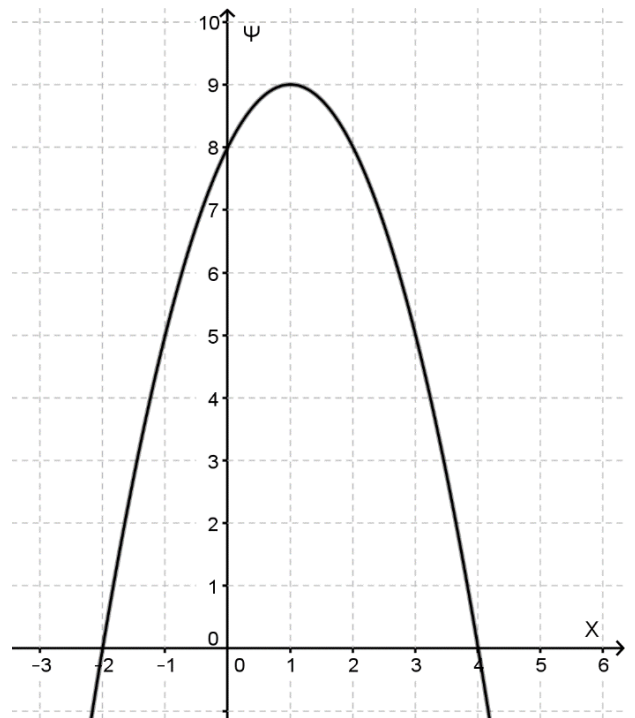
(ii) το πρόσημο του a και της διακρίνουσας Δ της εξίσωσης $f(x) = 0$,

(iii) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της,

(iv) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$,

(v) την τιμή του $f(2)$ και το πρόσημο του $f(2019)$,

(vi) την τιμή της παράστασης $A = -\frac{\beta}{\alpha} + 2\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta}{2\alpha}$.



(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που έχει για κορυφές την αρχή των αξόνων, την κορυφή της παραβολής και το σημείο τομής της ευθείας $y=5$ και της $f(x)$ (θετική τετμημένη).

3. (α) Να αποδείξετε την ταυτότητα $\frac{1-\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} + \frac{1}{1-\eta\mu\theta} = 2\tau\epsilon\mu^2\theta$.

(β) Αν $3\epsilon\varphi^2\theta = \frac{3^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{12}}}$ και $0^\circ < \theta < 180^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνιά θ .

4. Παραλληλόγραμμο $A\Delta B\Gamma$ έχει για κορυφές $A(-2,1)$, $\Delta(6,0)$ και $\Gamma(-3,-2)$. Αφού πρώτα τοποθετήσετε τις κορυφές σε άξονες στο τετραγωνισμένο χαρτί που σας δόθηκε, να υπολογίσετε:

- (α) τις συντεταγμένες του σημείου B ,
- (β) το μέτρο της γωνιάς $\hat{A}$,
- (γ) την απόσταση του σημείου Δ από τη διαγώνιο AB .

5. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$. Το ημικύκλιο με διάμετρο την πλευρά $B\Gamma$ τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Οι ευθείες BE και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο σημείο H και η AH τέμνει κάθετα την $B\Gamma$ στο σημείο Θ . Να δείξετε ότι:

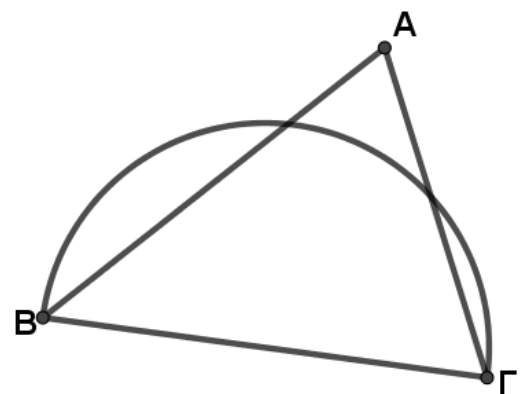
(α) Τα τρίγωνα $A\Theta B$ και $H\Theta\Gamma$ είναι όμοια.

(β) $(\Theta A) \cdot (\Theta H) = (\Theta B) \cdot (\Theta \Gamma)$

(γ) Αν I είναι το σημείο τομής της $A\Theta$ και του

ημικυκλίου, τότε $(I\Gamma)^2 = (B\Gamma) \cdot (\Gamma\Theta)$

(Να μεταφέρετε το σχήμα στα φύλλα απαντήσεών σας)



ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

Η Διευθύντρια

Δρ Μαρία Γεωργίου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ/ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

Τάξη: Α΄

Ημερομηνία: 24/05/2019

Μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού

Διάρκεια Εξέτασης: 2,5 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- (α) Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (στα σχήματα επιτρέπεται μολύβι).
- (β) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- (γ) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 5 σελίδες.
- (δ) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής).
- (ε) Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται καθαρά όλη η διαδικασία.

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Αν $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$ και $180^\circ < \theta < 270^\circ$, να υπολογίσετε, με τη χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων,

την τιμή της παράστασης $A = \frac{15\eta\mu\omega - 6\sigma\phi\omega}{3\sigma\tau\epsilon\mu\omega}$

2. Δίνονται οι θερμοκρασίες σε βαθμούς κελσίου που καταμετρήθηκαν για 6 μέρες τον Μάρτιο: 14, 12, 12, 20, 18, 14. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή ($\bar{x}$) και την τυπική απόκλιση (s) των θερμοκρασιών.

3. Δίνονται τα σημεία A(2, -4), B(6, -7), Γ(11, -9). Να βρείτε:

α) τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}$

β) το διάνυσμα $\vec{u} = 4\vec{AB} - 2\vec{B\Gamma}$.

γ) το μοναδιαίο διάνυσμα το οποίο είναι αντίρροπο με το $\vec{u}$.

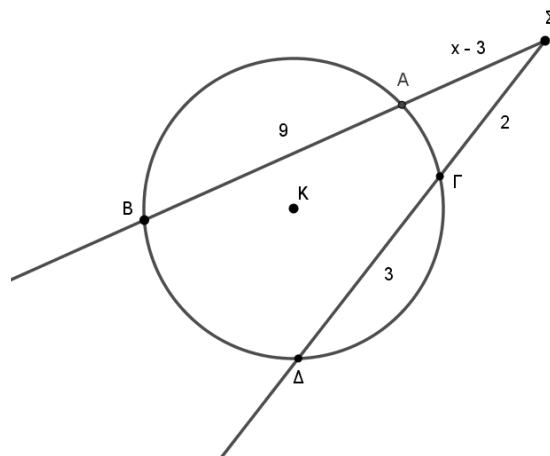
4. Αν $-4 < x < -2$ και $3 < y < 5$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α) $3x + 2y$

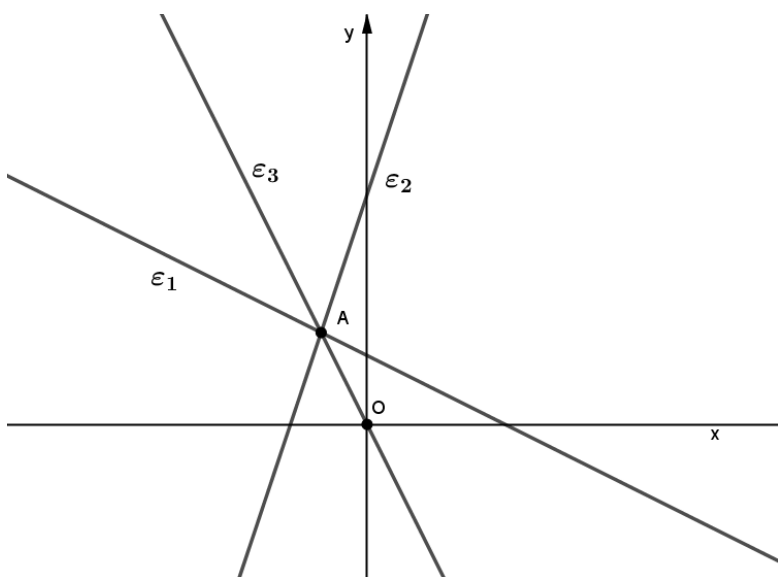
β) $x \cdot y$

γ) $\frac{y}{x}$

5. Δίνεται κύκλος (K, ρ) και δύο τέμνουσες του, ΣAB και $\Sigma\Gamma\Delta$. Αν $\Sigma A = (x-3)$ cm, $AB = 9$ cm, $\Sigma\Gamma = 2$ cm και $\Gamma\Delta = 3$ cm, να υπολογίσετε την τιμή του x .



6. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x+2y=3$, $\varepsilon_2: 3x-y+5=0$ και ε_3 , οι οποίες τέμνονται στο σημείο A , όπως φαίνονται στο σχήμα. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_3 .



7. Να κάνετε τις πράξεις, δίνοντας το αποτέλεσμα στην πιο απλοποιημένη μορφή.

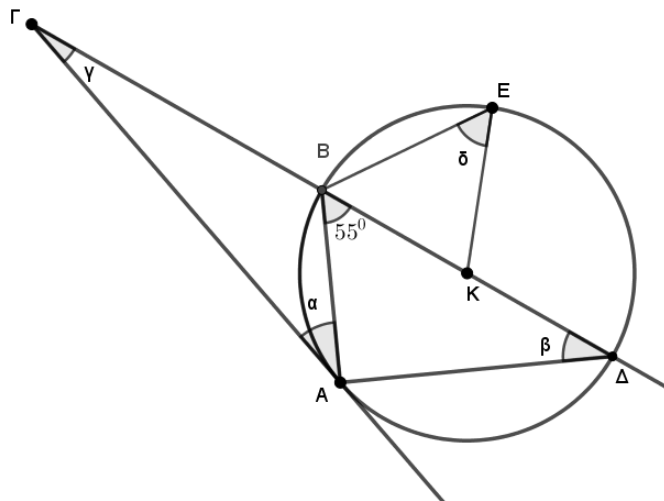
α) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

β) $\sqrt{7+\sqrt{13}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{2+\sqrt{13}}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{13}}}$

8. Αν $270^\circ < \theta < 360^\circ$ και ισχύει ότι $2\eta\mu(180^\circ - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ + \theta) - 5\eta\mu(270^\circ - \theta) = 1$, να υπολογίσετε τη γωνιά θ .

9. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (2\kappa + 3\lambda)x^2 - 2(\kappa^2 + 3\lambda)x - 2\kappa - \lambda - 1$. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ , αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο με $y=2$ και έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=1$.

10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) με ΑΓ εφαπτόμενη του στο σημείο Α και ΓΒΔ τέμνουσα του που περνά από το κέντρο Κ. Αν τα τόξα ΑΒ και ΒΕ είναι ίσα και η γωνιά $\widehat{AB\Delta} = 55^\circ$:



- α) Να υπολογίσετε τις γωνιές $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ και το μέτρο του τόξου ΕΔ.
(δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας)

β) ι) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΒ και ΑΓΔ είναι όμοια.

ιι) Αν $B\Gamma = 2R$, να δείξετε ότι $A\Gamma = 2\sqrt{2} R$

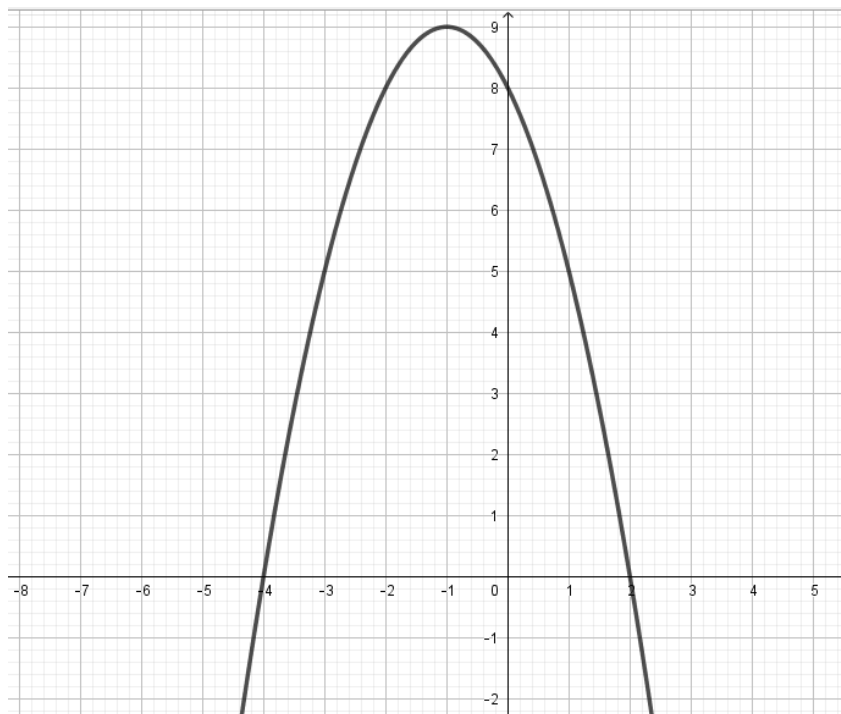
ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της

παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$.

Να βρείτε, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας, τα ακόλουθα :

- το σύνολο τιμών της f
- το πρόσημο του a
- τις συντεταγμένες της κορυφής της
- τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$
- τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 5$
- τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 5$
- τις τιμές των a, β, γ
- το πεδίο ορισμού της $\sqrt{f(x)}$



2. Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda - 1)x^2 + (\lambda + 3)x + \lambda + 3 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και x_1, x_2 οι ρίζες της.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες έχει ρίζες:

i) αντίστροφες

ii) πραγματικές

β) i) Να δείξετε ότι $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 = 0$

ii) Να λύσετε την ανίσωση $x_1^2 + x_2^2 - (x_1 + x_2)^2 \leq -2$

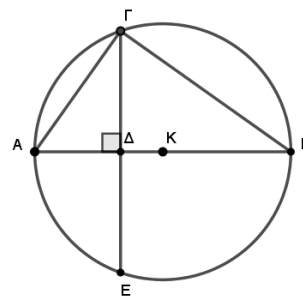
3. α) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει σταθερή περίμετρο 80 cm. Να βρείτε το μέγιστο εμβαδό του.

β) Δίνεται κύκλος (K, R) με διάμετρο AB και χορδή ΓΕ, οι οποίες τέμνονται κάθετα στο σημείο Δ. Να δείξετε (χρησιμοποιώντας ομοιότητα τριγώνων) ότι:

i) $(AG)^2 = (AB) \cdot (AD)$

ii) $(BG)^2 = (AB) \cdot (BD)$

iii) $(AG)^2 + (BG)^2 = (AB)^2$



4. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(2, -3) και B(4, 1). Αν $-x + y + 5 = 0$ και $3x - 2y = 10$, είναι οι εξισώσεις των πλευρών AG και BG αντίστοιχα, να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες της κορυφής Γ

β) Την εξίσωση της πλευράς AB

γ) Την εξίσωση του ύψους AD

δ) Το μήκος της διαμέσου AM

ε) Την απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία AB

στ) Το εμβαδό του τριγώνου ABΓ

5. Αν $x_1 = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta+1}$ και $x_2 = \frac{\varepsilon\varphi\theta}{1-\tau\varepsilon\mu\theta}$, ($0 < \theta < 90^\circ$)

α) να δείξετε ότι:

ι) $x_1 + x_2 = -2\sigma\varphi\theta$

ιι) $x_1 \cdot x_2 = -1$

ιιι) η εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει ρίζες x_1, x_2 είναι η $x^2 + 2\sigma\varphi\theta \cdot x - 1 = 0$

ιiv) η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $\psi = x^2 + 2\sigma\varphi\theta \cdot x - 1$, είναι η $-\frac{1}{\eta\mu^2\theta}$.

β) Αν ισχύει ότι $x_1 + x_2 + x_1^2 \cdot x_2^2 + 1 = 0$ να υπολογίσετε τη γωνιά θ .

Ο Διευθυντής

Γ. Χρυσοστόμου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΤΑΞΗ: Α΄ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 28/05/2019
ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ώρες

Βαθμός:

Ολογράφως:

Υπογραφή:

Ονοματεπώνυμο: Τμήμα: Αριθ.:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να γράψετε όλες τις απαντήσεις πάνω στο εξεταστικό δοκίμιο.
2. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που έχει ελεγχθεί και σφραγιστεί.
3. Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:
(χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής)

α) $\frac{7}{\sqrt{7}}$ (μον. 2)

β) $\frac{1}{3 - \sqrt{5}}$ (μον. 3)

2. Αν x_1 και x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $3x^2 - 5x + 7 = 0$, να υπολογίσετε, χωρίς να λύσετε την εξίσωση, τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

α) $x_1 + x_2$ (μον. 1)

β) $3x_1 x_2$ (μον. 2)

γ) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ (μον. 2)

3. Κάποιος μαθητής βαθμολογήθηκε στο μάθημα των Μαθηματικών ως εξής :
Στο Α' τετράμηνο πήρε βαθμό 16, στο Β' τετράμηνο πήρε βαθμό 18 και στις εξετάσεις
βαθμό 17. Ποιος είναι ο τελικός του βαθμός , αν η βαρύτητα των βαθμών του είναι
35%, 35% και 30% αντίστοιχα;

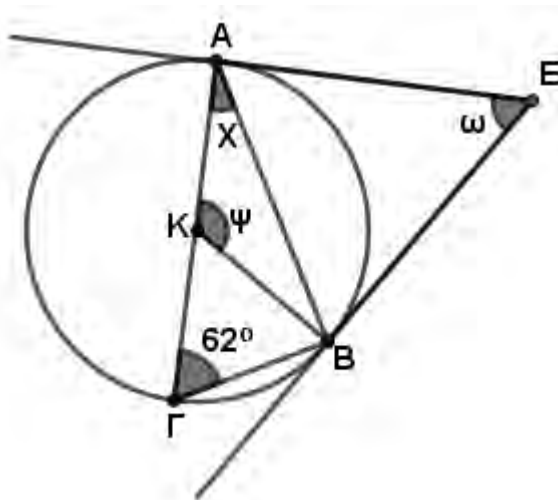
4. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\eta\mu\chi(\eta\mu\chi+\sigma\phi\chi) = \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu\chi$

5. Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{(\chi^2 + 4\chi + 4)(1-\chi)}{\chi - 3} \leq 0$

6. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται κύκλος (K,R) και Α, Β, Γ σημεία του κύκλου. Η ΑΓ είναι
διάμετρος , ΑΕ και ΒΕ είναι εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία Α και Β αντίστοιχα
που τέμνονται στο Ε και $\widehat{B\Gamma A} = 62^\circ$. Να βρείτε

το μέτρο των γωνιών $\widehat{B\hat{K}A} = \psi$,

$\widehat{\Gamma\hat{A}B} = \chi$ και $\widehat{A\hat{E}B} = \omega$. (Να δικαιολογήσετε
πλήρως τις απαντήσεις σας)



7. Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 - (\mu + 1)\chi + 4 + \mu = 0, \mu \in \mathbb{R}$ με λύσεις χ_1, χ_2 .

Να υπολογίσετε την τιμή (ή τις τιμές) της παραμέτρου μ , ώστε η εξίσωση να έχει:

- α) λύσεις αντίστροφες (μον. 2)
β) λύσεις πραγματικές και άνισες (μον. 3)

8. Αν $2 < \chi < 3$ και $-6 < 2\psi < -4$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται
η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

- α) $4\chi + 2\psi$ (μον. 1,5) και β) $\frac{\chi - 1}{4\psi}$ (μον. 3,5)

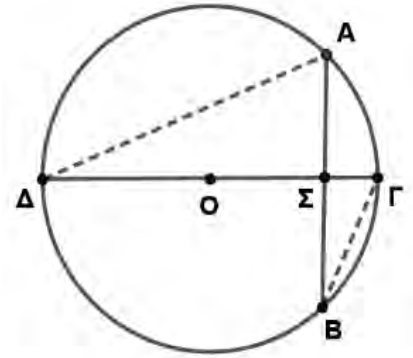
9. Δίνονται τα σημεία Α(κ,2) , Β(1,-1) και Γ(3,19) . Αν το μήκος του ευθύγραμμου
τμήματος ΑΒ είναι ίσο με 5 μονάδες και το σημείο $M\left(2, (6-\lambda)^{\frac{2}{3}}\right)$ είναι το μέσο του
ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ , να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ ($\kappa, \lambda \in \mathbb{Q}, \lambda < 6$).

10. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται κύκλος (O, R) , $\Delta\Gamma$ διάμετρος, AB χορδή και A, B, Γ, Δ σημεία του κύκλου. Οι AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο σημείο Σ της διαμέτρου $\Delta\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Sigma A\Delta$ και $\Sigma\Gamma B$ είναι όμοια (μον. 2)

β) να δείξετε ότι ισχύει η σχέση: $(\Sigma A)(\Sigma B) = (\Sigma\Gamma)(\Sigma\Delta)$ (μον. 1)

γ) αν $\Sigma A = (2\kappa) \text{ cm}$, $\Sigma B = 4 \text{ cm}$, $\Sigma\Gamma = \kappa \text{ cm}$, $O\Sigma = 3 \text{ cm}$ και $\Delta O = \lambda \text{ cm}$,
να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ ($\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^+$). (μον. 2)



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η παραβολή $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης,
να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών
της $f(x)$ (μον. 2)

β) τις συντεταγμένες της κορυφής και την
εξίσωση του άξονα συμμετρίας (μον. 2)

γ) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 5$ (μον. 1)

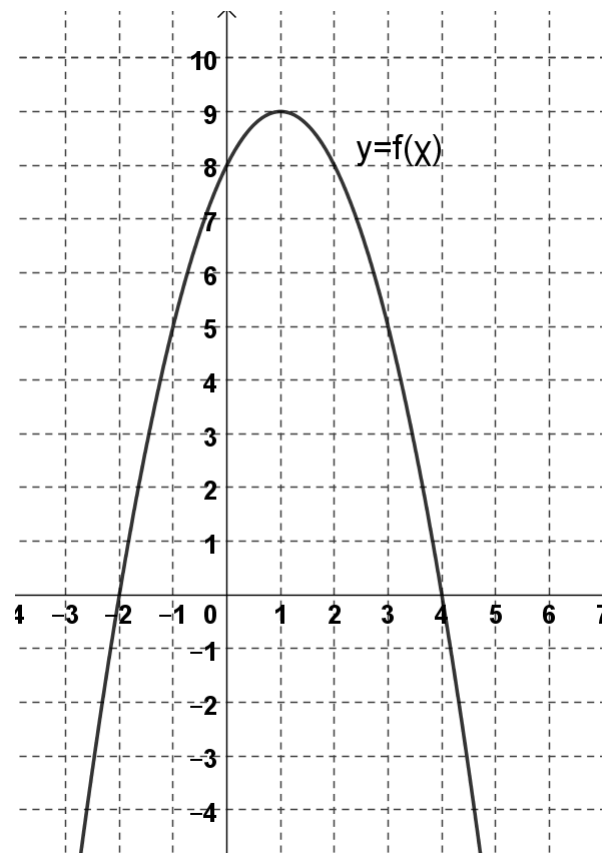
δ) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \leq 0$ (μον. 1)

ε) τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (μον. 1,5)

στ) το πρόσημο της παράστασης: $A = \frac{P^2 + S}{-\Delta}$
(μον. 1)

P = Γινόμενο των ριζών της $f(x)$
 S = Άθροισμα των ριζών της $f(x)$
 Δ = Διακρίνουσα

ζ) την τιμή της παράστασης: $B = \frac{f(1) + f(-3)}{\alpha + \beta}$ (μον. 1,5)



2. Τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ είναι όμοια. Οι πλευρές του τριγώνου ABΓ έχουν μήκος 6 cm, 9 cm και 12 cm και η περίμετρος του τριγώνου ΔΕΖ είναι 18 cm. Το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι κατά 10 cm^2 μεγαλύτερο του εμβαδού του τριγώνου ΔΕΖ. Να υπολογίσετε:

- α) το λόγο ομοιότητας των δύο τριγώνων (μον. 3)
- β) το μήκος των πλευρών του τριγώνου ΔΕΖ (μον. 2)
- γ) τα εμβαδά των δύο τριγώνων (μον. 5)

3. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(0,3), B(4,2) και πλευρά ΑΓ με εξίσωση $\psi = 3$. Η κορυφή Γ ανήκει επίσης στην ευθεία με εξίσωση $\psi = 2x - 7$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ. (μον. 2)
- β) Αν $\Gamma(5,3)$, να βρείτε: (μον. 8)
 - i) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ του τριγώνου
 - ii) το μήκος του ύψους ΑΔ του τριγώνου
 - iii) το εμβαδόν του τριγώνου
 - iv) το μέτρο της γωνίας $\hat{B}$ του τριγώνου

4. Για τη γωνία θ ισχύουν: $\eta\mu\theta = \frac{2\lambda + 2}{2\lambda + 3}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{-2}{2\lambda + 3}$, $90^\circ < \hat{\theta} < 180^\circ$ και

$$\lambda \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}.$$

- α) να υπολογίσετε την τιμή του λ (μον. 4)
- β) αν $\lambda = -\frac{1}{4}$, να αποδείξετε ότι: (μον. 6)

$$\frac{\frac{1}{3}\eta\mu(360^\circ - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ + \theta) + \frac{1}{5}\tau\epsilon\mu(270^\circ - \theta)}{\epsilon\varphi(360^\circ + \theta) \cdot \sigma\varphi^2(180^\circ - \theta)} = \frac{4}{25}$$

χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες.

5. Δίνονται τα σημεία A(2,3), B(4,-7), Γ, τα διανύσματα $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$

και Ο η αρχή των αξόνων. Να βρείτε:

- α) το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$
- β) την τιμή του μ ($\mu \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$), ώστε το διάνυσμα $\vec{v}$ να είναι παράλληλο με το

$$\text{διάνυσμα } \vec{\kappa} = \begin{pmatrix} 2\mu - 1 \\ \mu \end{pmatrix}$$

γ) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$

δ) τις συντεταγμένες του σημείου Γ, αν $\overrightarrow{AG} = \vec{u} - \vec{v}$

ε) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{w}$, το οποίο είναι αντίρροπο του $\overrightarrow{AG}$ και έχει μέτρο 7 μονάδες

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 04/06/2019

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΤΜΗΜΑ: ΑΡ.: ... Υπογραφή Καθηγητή: **ΒΑΘΜΟΣ**

Ολογράφως:.....

Αριθμητικά:.....

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
2. Να γράφετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι).
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τα 10 θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες (5/100).**ΘΕΜΑ 1:**Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\chi} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ και $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\chi} - \vec{\omega}$ β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{\chi}$ **ΘΕΜΑ 2:**Αν χ_1, χ_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $3\chi^2 - 6\chi + 2 = 0$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:α) $\chi_1 + \chi_2$ (1 μονάδα)β) $\chi_1\chi_2$ (1 μονάδα)γ) $3\chi_1\chi_2^2 + 3\chi_1^2\chi_2 - (\chi_1\chi_2)^2$ (3 μονάδες)**ΘΕΜΑ 3:**Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $\begin{vmatrix} \chi - 1 & \lambda \\ 2 & \chi \end{vmatrix} = 0$ να έχει λύσεις αντίστροφες.

ΘΕΜΑ 4:

Τα ημερήσια έξοδα (σε ευρώ) ενός μαθητή για την πρώτη εβδομάδα του Μαΐου του 2019 παρουσιάζονται στον πιο κάτω πίνακα:

Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή	Σάββατο	Κυριακή	Δευτέρα	Τρίτη
12	8	12	11	13	6	8

- Να υπολογίσετε:
- α) τη μέση τιμή των ημερήσιων εξόδων (1 μονάδα)
 - β) την τυπική απόκλιση (3 μονάδες)
 - γ) τον συντελεστή μεταβολής (CV) (1 μονάδα)

ΘΕΜΑ 5:

Αν $2 < \chi < 3$ και $-3 < \psi < -1$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

- α) $\chi + \psi$ (1 μονάδα)
- β) $2\chi - \psi$ (2 μονάδες)
- γ) $\chi \cdot \psi$ (2 μονάδες)

ΘΕΜΑ 6:

Αν $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ και $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$B = \frac{3\epsilon\phi\theta - 5\eta\mu\theta}{4\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$$

ΘΕΜΑ 7:

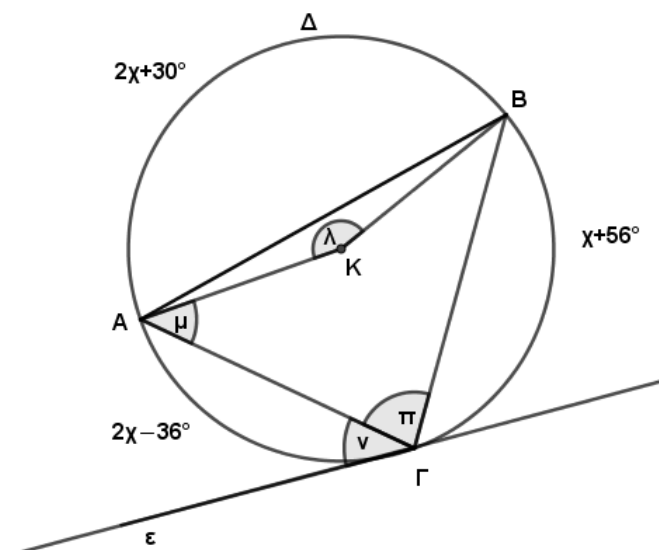
Να αποδείξετε ότι για κάθε $\chi > 0$ ισχύει: $\frac{\sqrt[4]{\chi} \cdot \sqrt[4]{\chi^3} + (\sqrt[3]{\chi})^6}{\chi^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\chi}} = 1 + \chi$

ΘΕΜΑ 8:

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρουμε το ύψος AD . Να αποδείξετε ότι: $(AB)^2 = (B\Gamma)(B\Delta)$

ΘΕΜΑ 9:

Στο πιο κάτω σχήμα η ευθεία (ϵ) είναι εφαπτόμενη του κύκλου (K, ρ) στο σημείο του Γ . Αν δίνεται ότι τόξο $A\Delta B = 2\chi + 30^\circ$, τόξο $B\Gamma = \chi + 56^\circ$ και τόξο $A\Gamma = 2\chi - 36^\circ$ να υπολογίσετε την τιμή του χ και τις γωνίες π, λ, μ και ν . (Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας)



ΘΕΜΑ 10:

Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{\chi^2-8}{2\chi-5} \geq 1$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τα 5 θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες (10/100).

ΘΕΜΑ 1:

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$.

Από το σχήμα να βρείτε:

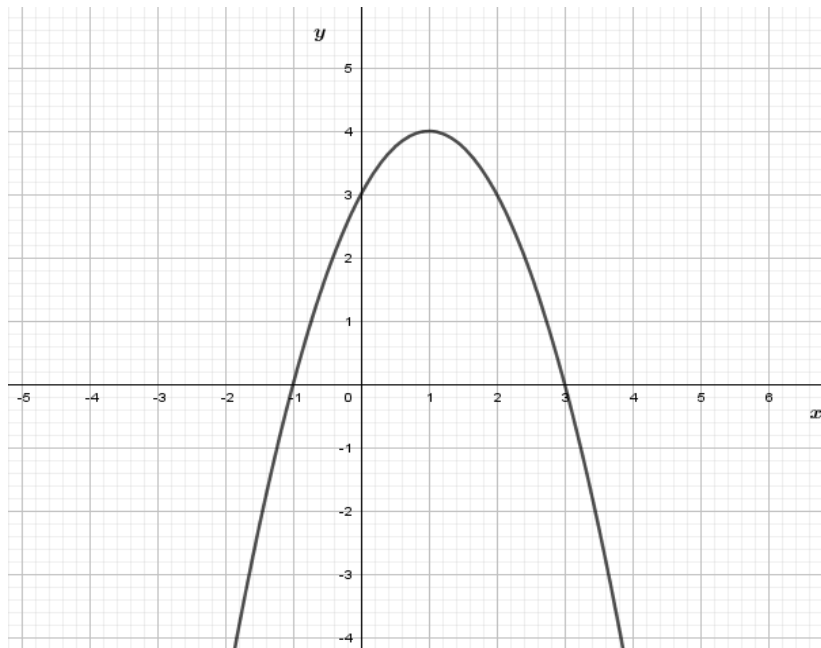
α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $f(\chi)$

β) τον άξονα συμμετρίας και την κορυφή της παραβολής

γ) τις λύσεις της εξίσωσης $f(\chi) = 0$ και το πρόσημο της παράστασης $\beta^2 - 4\alpha\gamma$

δ) τις τιμές του χ ώστε: $f(\chi) > 0$

ε) τις τιμές των α, β και γ

**ΘΕΜΑ 2:**

α) Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 - (\lambda - 1)\chi + 2 + \lambda = 0$ με λύσεις χ_1, χ_2 . Να υπολογίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε :

ι) Η εξίσωση να έχει λύση τον αριθμό -1

ιι) Η εξίσωση να έχει λύσεις πραγματικές

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με λύσεις $\chi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}+1}$ και $\chi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$

ΘΕΜΑ 3:

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \eta\mu^2(180^\circ + \theta) - \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \theta)\eta\mu(90^\circ - \theta)$ και $B = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta} + \epsilon\phi\theta$, με $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

α) ι) Να δείξετε ότι η παράσταση A είναι ανεξάρτητη του θ

ιι) Να δείξετε ότι: $B^2 - 1 = \epsilon\phi^2\theta$

β) ι) Να δείξετε ότι: $A - \left(\frac{A}{B}\right)^2 = \eta\mu^2\theta$

ιι) Να βρείτε την τιμή του θ , με $0^\circ < \theta < 90^\circ$, για την οποία ισχύει $B=2$

ΘΕΜΑ 4:

Παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρές AB και $B\Gamma$ με εξισώσεις $\psi = 2\chi + 3$ και $\chi - 2\psi = -3$ αντίστοιχα. Αν επιπλέον η κορυφή του Δ έχει συντεταγμένες $\Delta(5,7)$ να βρείτε:

- α) τις συντεταγμένες των κορυφών A, B, Γ και τις συντεταγμένες του κέντρου O του παραλληλογράμμου (6 μονάδες)
- β) ι) το μήκος της πλευράς AB (1 μονάδα)
- ιι) την απόσταση της κορυφής A από τη διαγώνιο $B\Delta$ (3 μονάδες)

ΘΕΜΑ 5:

Από εξωτερικό σημείο Σ , κύκλου κέντρου K και ακτίνας ρ , φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα ΣA και τέμνουσα $\Sigma B\Gamma$ που περνά από το κέντρο του κύκλου.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Sigma$ και $A\Gamma\Sigma$ είναι όμοια
- β) Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του κύκλου, αν γνωρίζετε ότι $\Sigma A = 6\text{cm}$ και $\Sigma B = 2\text{cm}$

Ο Διευθυντής

.....

(I. Ορφανίδης)

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2019****ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22/05/2019****ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΠΡΟΣ.)****ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2.30'****ΩΡΑ: 07:45 – 10:15 π.μ.****Οδηγίες:**

- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- β) Να γράφετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
- δ) Τα σχήματα να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
- ε) Σε όλες τις ερωτήσεις να φαίνεται ο τρόπος απάντησής τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της απαιτούμενης αιτιολόγησης δεν θα λαμβάνονται υπόψη.
- ζ) Να συμμορφώνεστε πρόθυμα με τις οδηγίες των επιτηρητών.
- στ) Η ΔΟΛΙΕΥΣΗ ΤΙΜΩΡΕΙΤΑΙ ΑΥΣΤΗΡΑ.

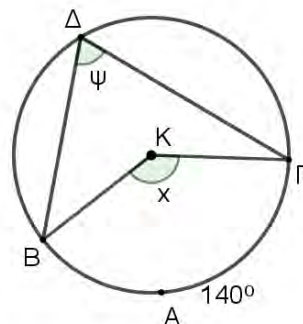
Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη, το ΜΕΡΟΣ Α' και το ΜΕΡΟΣ Β'.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τα 10 θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5/100.

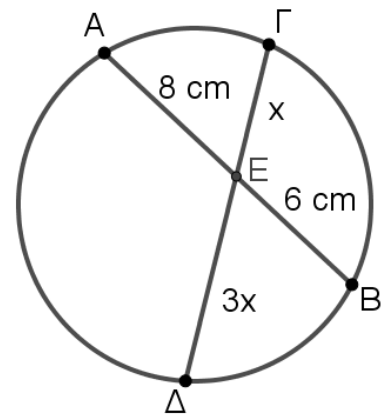
1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει κλίση $\lambda = 3$ και περνά από το σημείο $A(1, 2)$.

2. Δίνεται κύκλος με κέντρο K . Αν $\widehat{BAG} = 140^\circ$ να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $\hat{x}$ και $\hat{\psi}$ αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.



3. Αν $-2 < x < -1$ και $3 < y < 7$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις: **α)** $x + y$ **β)** $x - y$

4. Στο διπλανό σχήμα δίνονται $AE = 8 \text{ cm}$, $EB = 6 \text{ cm}$, $ΓΕ = x \text{ cm}$ και $ΕΔ = 3x \text{ cm}$. Να υπολογίσετε την τιμή του x .



5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε το μήκος του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.
6. Οι βαθμοί του Χρίστου στα τέσσερα διαγωνίσματα των μαθηματικών για το Β τετράμηνο ήταν 15, 20, 17 και 18. Για τους βαθμούς του Χρίστου να υπολογίσετε:
α) τη μέση τιμή
β) την τυπική απόκλιση
γ) τον συντελεστή μεταβλητότητας CV.
7. Αν $\sigma\epsilon\mu\theta = \frac{5}{4}$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\theta$, $\sigma\upsilon\nu\theta$ και $\epsilon\phi\theta$.

8. **α)** Να λύσετε το σύστημα:
$$\left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{array} \right\} \quad (\mu\omicron\nu. 3)$$

β) Να δείξετε ότι το άθροισμα S των ριζών x_1 και x_2 της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $x \in \mathcal{R}$, $\alpha \neq 0$ δίνεται από τον τύπο $S = -\frac{\beta}{\alpha}$. (μον. 2)

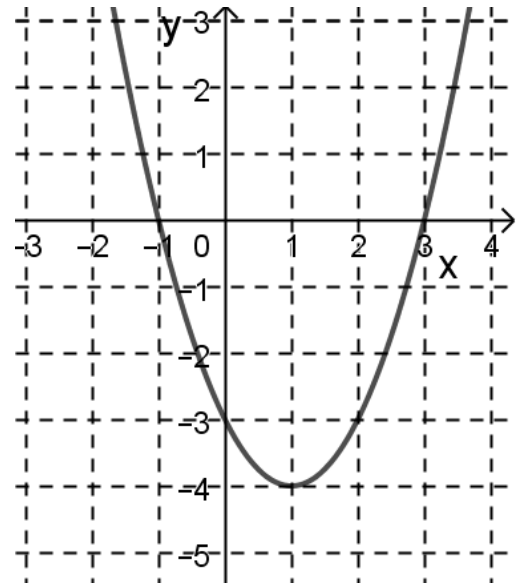
9. Αν οι ευθείες $(\epsilon_1): \sqrt[3]{\kappa+1} \cdot x - 2y = 1$, με $\kappa \in \mathcal{R}$ και $\kappa \neq -1$, και $(\epsilon_2): y = -\frac{1}{2}x + 3$ είναι κάθετες, να υπολογίσετε την τιμή του κ .

10. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \sqrt{\frac{(x^2+x-12) \cdot (9-x^2)}{(5+x) \cdot (x^2+2)}}$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τα 5 θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10/100.

1. Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, με $x \in \mathcal{R}$ και $a \neq 0$, στις πιο κάτω περιπτώσεις:

- α) να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- β) να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής
- γ) να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$
- δ) να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) < 0$
- ε) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3\beta - 2\gamma}{\alpha}$.



2. Δίνονται τα σημεία $A(-4, -2)$, $B(-2, 6)$ και $\Gamma(2, 1)$.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της $A\Gamma$ είναι η $x - 2y = 0$
- β) να βρείτε το μήκος του ύψους BE του τριγώνου $AB\Gamma$
- γ) να βρείτε την εξίσωση του ύψους BE
- δ) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
- ε) να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου M της πλευράς $A\Gamma$ είναι $M(-1, -\frac{1}{2})$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ , ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο.

3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ και τα σημεία A, B και Γ .

Αν $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{u} + \vec{v}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = 3\vec{u}$:

- α) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$
- β) να δείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}$
- γ) αν $B(-3, -1)$, να δείξετε ότι $A(3, 5)$ και $\Gamma(6, 2)$
- δ) να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{w}$ παράλληλου με το διάνυσμα $\vec{v}$.

4. α) Να αποδείξετε ότι: $A = \frac{\varepsilon\varphi(\pi-\theta) \cdot \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(-\theta)}{\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi-\theta)} = -\eta\mu^2\theta$ (μον. 4)

β) Αν $x_1 = \frac{1-\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ και $x_2 = \frac{1+\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ με $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ να αποδείξετε ότι: (μον. 6)

i) $x_1 + x_2 = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ και $x_1 \cdot x_2 = 1$

ii) να δείξετε ότι η εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες x_1, x_2 είναι η

$$\sigma\upsilon\nu\theta \cdot x^2 - 2x + \sigma\upsilon\nu\theta = 0$$

iii) να δείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

5. Δίνεται κύκλος (K, R) . Από σημείο Γ που βρίσκεται στην προέκταση της διαμέτρου AB φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $\Gamma\Delta$, όπου Δ το σημείο επαφής με τον κύκλο. Στη συνέχεια φέρουμε ευθεία κάθετη στην $A\Gamma$ στο σημείο Γ η οποία τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) $(A\Delta) \cdot (AE) = (AB) \cdot (A\Gamma)$ (μον. 4)

β) $(\Gamma\Delta)^2 = (\Gamma B) \cdot (\Gamma A)$ (μον. 3)

γ) το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές. (μον. 3)

Τέλος Δοκιμίου

Οι εισηγητές:

Εύα Τρίαρου Λοΐζου
Μαριάννα Παντελή
Ανδρέας Κασάπης
Κωνσταντίνος Σταυρινού

Ο Συντονιστής:

Γρηγόρης Γρηγορίου (Β.Δ.)

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΑΔΑΜΟΣ ΣΕΡΓΙΟΥ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Προσανατολισμού ΣΕΙΡΑ: Α΄ ΤΑΞΗ: Α΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 21/05/2019

ΧΡΟΝΟΣ: 8:00 π.μ. – 10:30 π.μ.

Οδηγίες:

- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **δύο (2) μέρη**.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **πέντε (5) σελίδες**.
- Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (με μολύβι **μόνο** τα σχήματα).
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής σφραγισμένης από το σχολείο.
- **Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.**
- **Όλες οι απαντήσεις να δοθούν σε σφραγισμένες κόλλες.**

ΜΕΡΟΣ Α΄: (Μονάδες 50) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες (5/100).

1. Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2 - 10x + 3 \geq 0$

2. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή (χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής).

α) $A = \frac{15}{\sqrt{5}}$

β) $B = \frac{7}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

3. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τη βαθμολογία δύο μαθητών της Α΄ Λυκείου στο μάθημα των μαθηματικών:

	Α΄ Τετράμηνο	Β΄ Τετράμηνο	Τελική Εξέταση
Μαθητής Α	12	13	12
Μαθητής Β	15	14	8

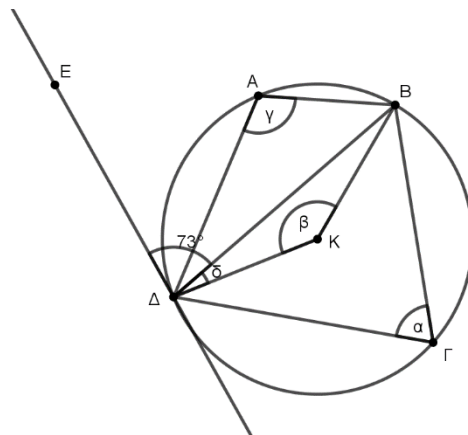
Να βρείτε ποιος από τους δύο μαθητές έχει τον καλύτερο τελικό βαθμό στο μάθημα, αν οι βαθμοί των τετραμήνων έχουν βαρύτητα 35%, ενώ ο βαθμός των εξετάσεων 30%.

4. Αν $\sigma\epsilon\mu\theta = -\frac{13}{5}$, $180^\circ < \theta < 270^\circ$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $A = \frac{26\sigma\upsilon\eta\theta - 12\epsilon\phi\theta}{24\tau\epsilon\mu\theta}$

5. Δίνονται δύο σημεία: A(2,3) και B(4,7)

- α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.
 β) Αν M είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, όπου O η αρχή των αξόνων.

6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K,R), με εφαπτομένη ΔΕ στο σημείο Δ και $\widehat{B\Delta E} = 73^\circ$.
 Να υπολογίσετε τις γωνίες: α, β, γ, δ, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



7. Αν $1 < x < 3$ και $-4 < y < -2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α) $A = \begin{vmatrix} 2 & -y \\ 1 & x \end{vmatrix}$ β) $B = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{vmatrix}$

8. Δίνεται η εξίσωση: $\sqrt{a}x^2 + (\sqrt{a} + \beta)x + \beta = 0$, με $a > 0, \beta \in \mathbb{R}$

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές για όλες τις τιμές των α και β.
 β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = -1$

9. Δίνονται τα σημεία: $A(\eta\mu^2(2\pi + \theta), 1)$ και $B\left(0, \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

α) Να δείξετε ότι η κλίση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα A και B είναι:
 $\lambda = \sigma\varphi^2\theta$

β) Να βρείτε συναρτήσει της γωνίας θ την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο B

10. Από σημείο A εκτός κύκλου φέρουμε τα εφαπτόμενα ευθύγραμμα τμήματα AB, ΑΓ και μια τέμνουσα ΑΔΕ του κύκλου.

Να δείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΕ είναι όμοια (1 μονάδα)

β) τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΓΕ είναι όμοια (1 μονάδα)

γ) ισχύει η σχέση: $(BD)(GE) = (BE)(GD)$ (3 μονάδες)

ΜΕΡΟΣ Β΄: (Μονάδες 50) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες (10/100).

1. Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής x και οι αντίστοιχες συχνότητές τους.
 Από τον πίνακα απουσιάζουν η 2^η και η 3^η συχνότητα.

α) Να προσδιορίσετε τις τιμές των συχνοτήτων που απουσιάζουν, αν η μέση τιμή είναι 2.

(4 μονάδες)

β) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση των τιμών.

(4 μονάδες)

γ) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας.

(2 μονάδες)

x_i	f_i
0	5
1	
2	
3	4
4	3
5	2
6	1
Σύνολο	32

2. α) Να δείξετε ότι:
$$\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\eta\mu(3\pi+\theta)} + \frac{\varepsilon\varphi(\pi+\theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2}+\theta\right)}{\eta\mu(-\theta)} = \tau\epsilon\mu\theta$$

β) Δίνεται η εξίσωση: $(\sigma\upsilon\nu^2\theta)x^2 - (\eta\mu\theta \sigma\upsilon\nu\theta)x + 2 = 0$, με ρίζες x_1, x_2

i. Να δείξετε ότι: $(x_1 - x_2)^2 + 7 \cdot \tau\epsilon\mu^2\theta = -1$

ii. Αν $x_1 \cdot x_2 = 8$ και $\theta \in (0, 2\pi)$, να υπολογίσετε την τιμή της γωνίας θ .

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1,6)$. Η διάμεσος ΓM έχει εξίσωση: $x + y = 1$ και το ύψος $\Gamma\Delta$: $2x + y = 3$

Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ

β) την εξίσωση της πλευράς AB

γ) τις συντεταγμένες της κορυφής B

δ) το μήκος του ύψους AE του τριγώνου $AB\Gamma$

ε) το εμβαδόν του τριγώνου $A\Gamma M$

4. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 3 - 2x - x^2$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να γράψετε τη συνάρτηση f στη μορφή: $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda$, $a \neq 0$

β) Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της f και την κορυφή της γραφικής παράστασής της.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f , στην οποία να φαίνονται τα σημεία τομής της με τους άξονες και η κορυφή της.

δ) Να βρείτε τις τιμές του x ώστε: $\frac{f(x)}{x^2 - 9} \leq 0$

5. Δίνεται κύκλος με κέντρο K και διάμετρο $B\Gamma$. Από τυχαίο σημείο A του κύκλου φέρουμε το ύψος AD του τριγώνου $AB\Gamma$. Η προέκταση του ύψους τέμνει ξανά τον κύκλο στο σημείο E .

α) Να δείξετε ότι: $(AB)^2 = (B\Gamma) \cdot (BD)$ (4 μονάδες)

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές. (3 μονάδες)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της BD , αν $AD = 4\text{ cm}$ και $\Gamma D = 2,5\text{ cm}$. (3 μονάδες)

Η Διευθύντρια

Μαρία Θεοφάνους

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ 2019

ΤΑΞΗ: Α΄

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ(ΟΜ.Π.2,3)

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 28/05/2019

ΧΡΟΝΟΣ: 2.30΄

ΟΔΗΓΙΕΣ:

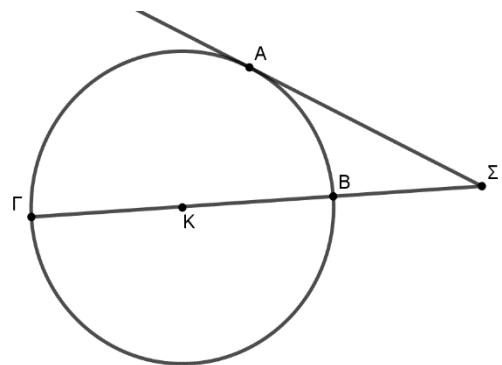
- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- β) Να γράψετε μόνο με ξηρό μπλε μελάνι (τα σχήματα μόνο με μολύβι).
- γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- δ) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας .
- ε) Πρέπει να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Το δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.**Μέρος Α΄:** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε το μέτρο του

διανύσματος $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

2. Δίνεται κύκλος (Κ, R). Από σημείο Σ εκτός του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη ΣΑ του κύκλου και την τέμνουσα ΣΒΓ. Αν $\Sigma A = 4\sqrt{6}cm$ και $\Sigma B = 4cm$, να βρείτε την ακτίνα του κύκλου.



3. Ο Πέτρος είναι μαθητής της Α΄ Λυκείου. Το πρώτο τετράμηνο στα διαγωνίσματα των μαθηματικών πήρε τους βαθμούς 16, 18, 14 και στην προφορική επίδοση αξιολογήθηκε με 19. Αν οι βαθμοί έχουν συντελεστή βαρύτητας 3, 3, 5 και 4 αντίστοιχα, να βρείτε τον τελικό βαθμό του Πέτρου για το πρώτο τετράμηνο.

4. Δίνεται η εξίσωση $(\mu+1)x^2 + 2x + 3\mu = 0 \quad \mu \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

Να υπολογίσετε την τιμή του μ , ώστε η εξίσωση να έχει:

(α) λύση τον αριθμό -2

(β) λύσεις αντίστροφες.

5. (α) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \sqrt[3]{125x^4} \cdot \sqrt[3]{x^2}$.

(β) Αν $3 < x < 5$ και $-3 < y < -2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις $3x + 2y$, xy .

6. Αν $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$ όπου $180^\circ < \omega < 270^\circ$, να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, την παράσταση $A = 8\varepsilon\varphi(180^\circ + \omega) - 10\eta\mu(90^\circ + \omega) - 3\sigma\tau\epsilon\mu(-\omega)$.

7. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(x^2 - 16)(x^2 + 2x - 8)}{2x - x^2} \geq 0$.

8. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\varphi^2 x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \varepsilon\varphi^2 x} = \frac{\sigma\tau\epsilon\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{1 + \sigma\varphi x}$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + (\kappa - 4)x + 2\lambda^2 - 3$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Για ποιες τιμές των κ και λ η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$ και τέμνει τον άξονα των τετμημένων σε δύο σημεία;

(β) Αν $\lambda = -3$, να γράψετε την f στη μορφή $-(x + \alpha)^2 + \beta$ και να αναφέρετε το σύνολο τιμών της f .

10. Δίνεται κύκλος (K, R) . Τα σημεία $A(-2, 4)$ και $\Gamma(-1, 3)$ είναι σημεία της περιφέρειας του κύκλου. Αν η διάμετρος $B\Gamma$ του κύκλου έχει εξίσωση $y = 2x + 5$, να βρείτε:

(α) την εξίσωση της χορδής AB

(β) το μήκος της ακτίνας του

(γ) το μέτρο του τόξου $\widehat{AB}$ σε μοίρες (κατά προσέγγιση ακεραίου).

Μέρος Β΄: Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$.

Από το σχήμα να βρείτε:

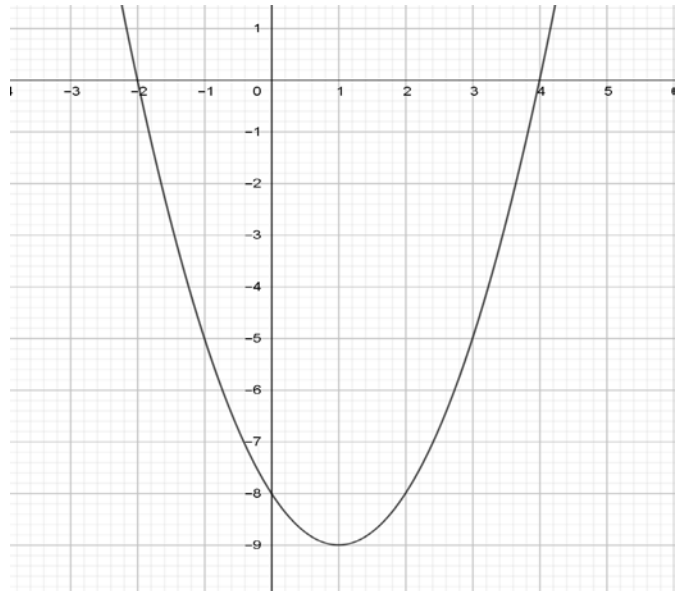
(α) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$

(β) την ελάχιστη τιμή της $f(x)$

(γ) τις τιμές των α , β , γ

(δ) τα πρόσημο των
 $f(0)$, $f(-1000)$, $f(2019)$,

(ε) τις τιμές του x για τις οποίες
 $f(x) \leq -5$.



2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 3)x + \lambda - 5 = 0$.

(α) Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - x_1 x_2 \geq 3.$$

(β) Να αποδείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση έχει λύσεις πραγματικές και άνισες $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με διάμετρο την AB . Στο σημείο A του κύκλου φέρουμε εφαπτομένη. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την $A\Gamma$ στο Δ , τον κύκλο στο Σ και την εφαπτομένη στο E . Να δείξετε ότι:

(α) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές

(β) τα τρίγωνα $\Gamma B\Delta$ και $A\epsilon \Sigma$ είναι όμοια

(γ) $(\Gamma B)(\Sigma \Delta) = (\Sigma A)(\Gamma \Delta)$.

4. Η ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y = 12$ τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο Α και τον άξονα των τετμημένων στο σημείο Δ. Το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει μια πλευρά με εξίσωση $x - 3y = 4$.

Αν το σημείο $M(5, \frac{5}{2})$ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, να βρείτε:

- (α) τις συντεταγμένες των κορυφών του
(β) την απόσταση του σημείου Μ από την πλευρά ΑΒ του παραλληλογράμμου
(γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΒ.

5. Δίνεται η παράσταση:

$$A = \frac{\sigma\upsilon\nu(4\pi + \theta)}{1 + \sigma\upsilon\nu(\frac{7\pi}{2} - \theta)} - \frac{1 + \varepsilon\varphi^2(\frac{3\pi}{2} + \theta)}{\sigma\varphi^2(\theta - \pi)} \cdot \eta\mu(\theta - \frac{3\pi}{2}).$$

- (α) Να αποδείξετε ότι $A = \varepsilon\varphi\theta$.

- (β) Να υπολογίσετε τη γωνία θ , αν $A = -\sqrt{3}$, $0 < \theta < \pi$.

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΓΡΑΠΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ****ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (5-ωρο)****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 28/05/2018****ΧΡΟΝΟΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά****ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ**ΜΕΡΟΣ Α:** Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να σχηματίσετε εξίσωση με ρίζες τους αριθμούς -3 και 4

2. α) Να μετατρέψετε το πιο κάτω κλάσμα σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

$$\frac{4}{3 - \sqrt{5}}$$

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση(να δείξετε τα βήματα των πράξεων σας).

$$\sqrt{21 + \sqrt{12 + \sqrt{20 - \sqrt{16}}}}$$

3. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$.α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

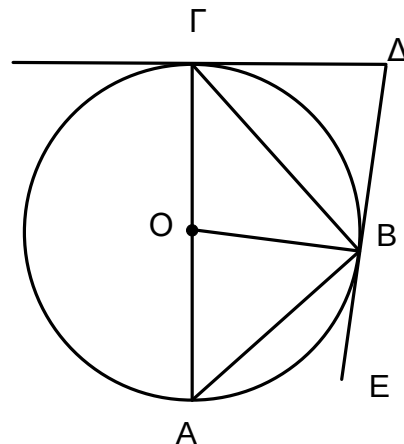
α) $3\chi + \psi$ β) $\frac{\psi}{\chi}$

5. Ο βαθμός ενός μαθητή στα Μαθηματικά στο πρώτο τετράμηνο ήταν 17, στο δεύτερο τετράμηνο 16, και στις τελικές εξετάσεις έγραψε 13. Αν η βαρύτητα των τετραμήνων είναι 35% και των τελικών εξετάσεων 30%, να βρείτε το βαθμό του στα Μαθηματικά στο τέλος της χρονιάς.

6. Να βρείτε τις τιμές των συντελεστών κ , ($\kappa \in \mathbb{R}$) και λ , ($\lambda \in \mathbb{R}$) για τις οποίες η συνάρτηση: $g(x) = x^2 - (\kappa - 3)x + 2\lambda + 2$, τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο $(0,4)$ και έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 1$.

7. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(x^2 - 10x + 24) \cdot (16 - x^2)}{(x^2 + 1)(x + 3)} \leq 0$

8. Δίνεται κύκλος με $ΑΓ$ διάμετρο και οι εφαπτόμενες του κύκλου $ΔΒ$ και $ΔΓ$ στα σημεία $Β$ και $Γ$ αντίστοιχα .
- Αν το μέτρο της γωνίας $\widehat{ΑΒΕ} = 40^\circ$ να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{ΓΒΑ}$, $\widehat{ΑΓΒ}$ και $\widehat{ΓΔΒ}$ και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



9. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\varepsilon\varphi(180^\circ + \omega) \cdot \eta\mu(90^\circ + \omega)}{\sigma\upsilon\nu^2(-\omega) + \eta\mu^2(180^\circ - \omega)}$ και

$$B = \frac{1 - \varepsilon \varphi^2 \omega}{1 + \varepsilon \varphi^2 \omega} \quad \mu \varepsilon \ 0^\circ < \omega < 90^\circ$$

- α) Να δείξετε ότι: $A = \eta\mu\omega$. (μ.2)
- β) Να δείξετε ότι: $B = 1 - 2A^2$ (μ.3)

10. Δίνονται τα σημεία $A(\beta-2, \alpha+2)$, $B(\alpha, \beta)$ και η ευθεία $\psi = \chi + 2$.

Να δείξετε ότι : α) Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB βρίσκεται (μον.2)

πάνω στην ευθεία $\psi = \chi + 2$

β) Η AB είναι κάθετη στη $\psi = \chi + 2$ (μον.2)

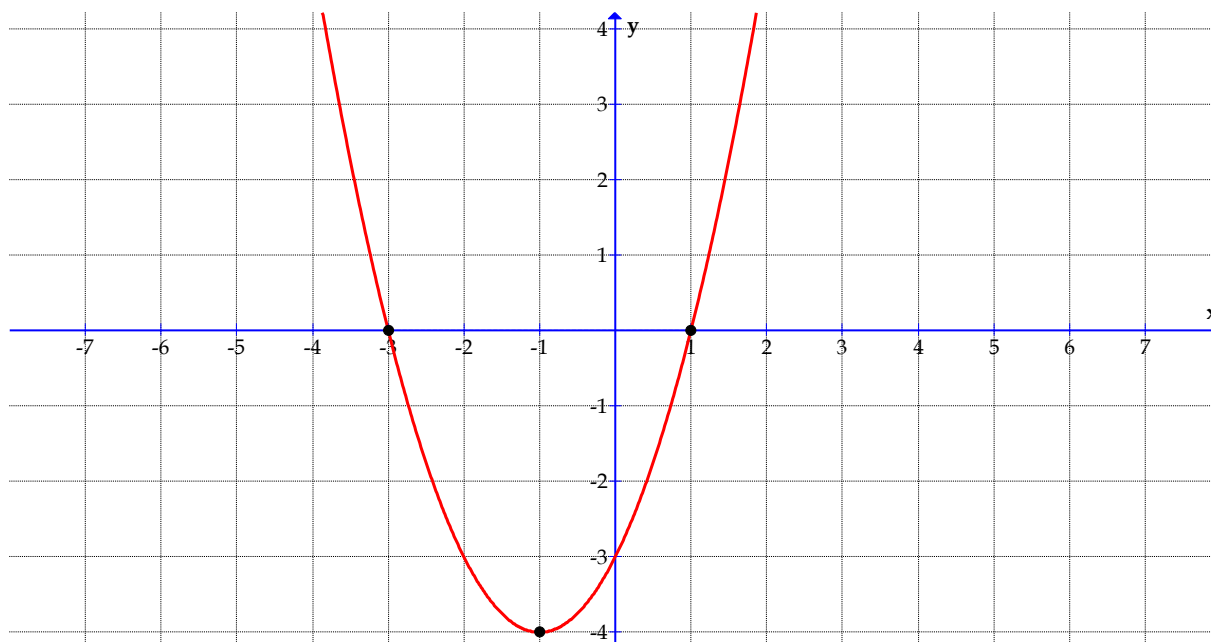
γ) Να βρείτε ο συμμετρικό του σημείου $\Gamma(5,2)$

με άξονα συμμετρίας την $\psi = \chi + 2$ (μον.1)

ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$.



Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της $f(x)$

β) το σύνολο τιμών της $f(x)$

γ) το πρόσημο του α

δ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας

ε) τις λύσεις x_1 και x_2 της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

στ) τις τιμές των α , β , γ

ζ) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$

2. Ο πίνακας παρουσιάζει τους βαθμούς που πήραν οι μαθητές μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα στα

Βαθμός x_i	3	5	7	9	11	13	15
Αριθμός μαθητών f_i	2	5	10	6	4	2	1

Να υπολογίσετε : α) Τη μέση τιμή των παρατηρήσεων . (1Μ)

β) Την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων κατά προσέγγιση δεκάτου. (3Μ)

γ) Την επικρατούσα τιμή. (1Μ)

δ) Το εύρος τιμών

ε) Τον συντελεστή μεταβολής

στ) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές (Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας)

3. Η κορυφή Α ενός τριγώνου ΑΒΓ έχει συντεταγμένες (2, 6).

Αν το ύψος ΒΔ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x + 3$ και η διάμεσος ΒΜ βρίσκεται

πάνω στην ευθεία $4x - 5y + 13 = 0$, να βρείτε :

α) Τις συντεταγμένες της κορυφής Β του τριγώνου ΑΒΓ. (μ.2)

β) Την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται η πλευρά ΑΓ (μ.2,5)

γ) Τις συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΑΓ (μ.2,5)

δ) Τις συντεταγμένες της κορυφής Γ του τριγώνου ΑΒΓ. (μ.1)

ε) Αν οι κορυφές Β και Γ έχουν συντεταγμένες (-2,1) και (4,4) αντίστοιχα, να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (μ.2)

4. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R)

Η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Γ ,

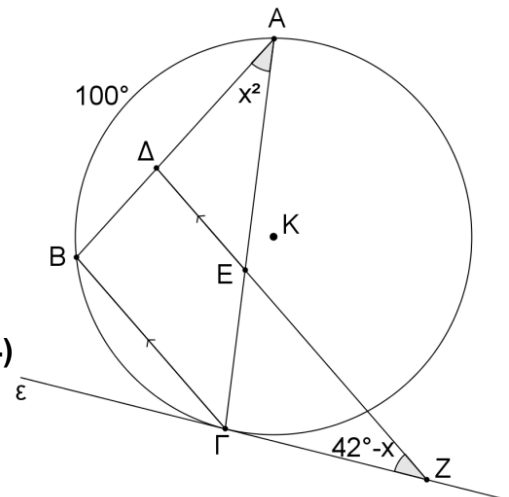
$\widehat{AB} = 100^\circ$, $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = x^2$ και $\widehat{\Delta\hat{Z}\Gamma} = 42^\circ - x$, με $x > 0$.

Αν $\Delta Z \parallel B\Gamma$ τότε:

α) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και EGZ είναι όμοια. (μ.4)

β) να αποδείξετε ότι $(B\Gamma)(\Gamma Z) = (\Gamma E) \cdot (BA)$ (μ.4)

γ) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$. (μ.2)



5. Δίδεται η εξίσωση: $(\eta\mu\theta) \cdot x^2 - 2x + \sigma\upsilon\nu\theta = 0$, $(\eta\mu\theta \neq 0)$, με λύσεις x_1, x_2 .

Να δείξετε ότι ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις:

α) $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} = 4\tau\epsilon\mu\theta$ (μ.4)

β) $x_1^2 + x_2^2 = 4 + 4\sigma\phi^2\theta - 2\sigma\phi\theta$ (μ.4)

γ) Αν η εξίσωση $(\eta\mu\theta) \cdot x^2 - 2x + \sigma\upsilon\nu\theta = 0$ έχει λύσεις αντίστροφες να υπολογίσετε τη γωνία θ αν $0 < \theta < 90^\circ$ (μ.2)

-ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ-

Η Διευθύντρια

4. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R)

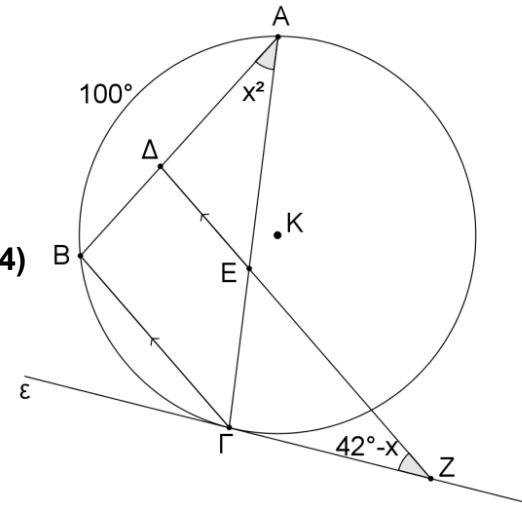
Η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Γ ,
 $\angle AB = 100^\circ$, $\angle B\hat{A}\Gamma = x^\circ$ και $\angle \Delta\hat{Z}\Gamma = 42^\circ - x$, με $x > 0$.

Αν $\Delta Z \parallel B\Gamma$ τότε:

α) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Gamma Z$ είναι όμοια. (μ.4)

β) να αποδείξετε ότι $(B\Gamma)(\Gamma Z) = (\Gamma E) \cdot (BA)$ (μ.4)

γ) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$. (μ.2)



5. Δίδεται η εξίσωση: $(\eta\mu\theta) \cdot x^2 - 2x + \sigma\upsilon\nu\theta = 0$, $(\eta\mu\theta \neq 0)$, με λύσεις x_1, x_2 .

Να δείξετε ότι ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις:

α) $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} = 4\tau\epsilon\mu\theta$ (μ.4)

β) $x_1^2 + x_2^2 = 4 + 4\sigma\phi^2\theta - 2\sigma\phi\theta$ (μ.4)

γ) Αν η εξίσωση $(\eta\mu\theta) \cdot x^2 - 2x + \sigma\upsilon\nu\theta = 0$ έχει λύσεις αντίστροφες να υπολογίσετε τη γωνία θ αν $0 < \theta < 90^\circ$ (μ.2)

-ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ-

Οι Εισηγητές

Συντονίστρια

Η Διευθύντρια

Δέσποινα Τσιντίδου

Ιουλιανή Ηρακλέους

Κυριακή Παπαντωνίου

Κωνσταντίνα Χατζηδημητρίου

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

- Το εξεταστικό δοκίμιο βαθμολογείται με 100 μονάδες.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από το μέρος Α και το μέρος Β.

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπονται με μολύβι).
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Να απαντήσετε σε ΟΛΑ τα ζητούμενα του γραπτού.
- Όλοι οι υπολογισμοί να φαίνονται καθαρά στις πράξεις σας.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x - 6 = 0$ με λύσεις x_1 και x_2 , $x \in \mathbb{R}$. Χωρίς να λύσετε την εξίσωση, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

(α) $A = x_1 + x_2$

[μον.2]

(β) $B = 2x_1 + 3x_1x_2 + 2x_2$

[μον.3]

A2. Δίνονται τα σημεία $A(2, -2)$ και $B(5, 2)$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. [μον. 2]

(β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. [μον. 2]

(γ) Να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u}$ που είναι ομόρροπο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. [μον. 1]

A3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\sqrt{10 - x} = 4, \quad x \leq 10$ [μον. 2]

(β) $x^5 - 81x = 0$ [μον. 3]

A4. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(1-x)^2}{x^2 + 2x} \leq 0$

A5. Δίνεται η ορίζουσα $\lambda = \begin{vmatrix} 2 - \sqrt{2} & 1 + \sqrt{2} \\ 1 + \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} \end{vmatrix}$

(α) Να δείξετε ότι: $\lambda = -1 - 2\sqrt{2}$

(β) Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω τιμή του λ , να αποδείξετε ότι: $(-\lambda - 1)^{2018} = 2^{3027}$

A6. (α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $(6 - \sqrt[3]{30})$

A7. Ο διπλανός πίνακας παρουσιάζει τις ημερήσιες απουσίες των μαθητών ενός τμήματος κατά τον μήνα Απρίλιο. Η μέση τιμή των

παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 2$.

(α) Να δείξετε ότι το $\psi = 4$.

(β) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση (s) των παρατηρήσεων.

Αριθμός απουσιών (x_i)	Συχνότητα (f_i)
0	2
1	7
2	5
3	ψ
5	1
6	1

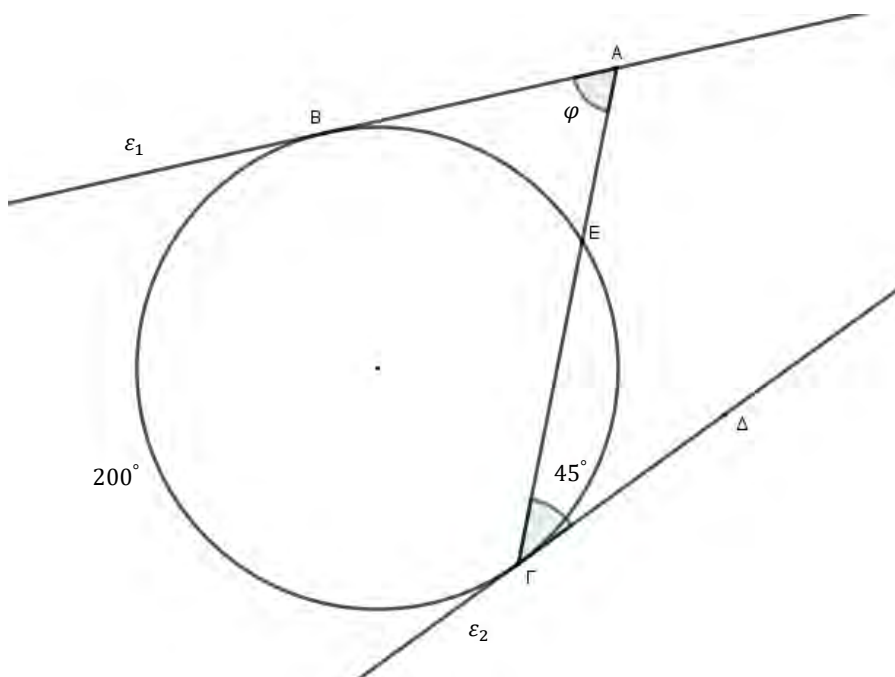
A8. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{(1+\sigma\varphi\theta)^2}{\sigma\epsilon\mu\theta} = \sigma\tau\epsilon\mu\theta + 2\sigma\upsilon\upsilon\eta\theta$

A9. Στο πιο κάτω σχήμα, η ευθεία ε_1 είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο B και η ε_2 είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο Γ . Η γωνία $\Delta\Gamma A$ είναι 45° και το τόξο $B\Gamma = 200^\circ$.

Να υπολογίσετε:

(α) τη γωνία φ

(β) το μικρό τόξο BE .



A10. Το ύψος (σε m) στο οποίο βρίσκεται ένα τηλεκατευθυνόμενο μοντέλο αεροπλάνου μετά από χρόνο πτήσης t (σε sec), δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -3t^2 + 30t, \quad 0 \leq t \leq 10$$

(α) Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το αεροπλάνο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος και να υπολογίσετε το ύψος αυτό. [μον. 2]

(β) Να κατασκευάσετε πρόχειρη γραφική παράσταση της παραβολής $f(t)$, $t \in [0,10]$ σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, στην οποία να φαίνονται τα σημεία τομής με τους άξονες, η κορυφή και ο άξονας συμμετρίας της. [μον. 3]

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής

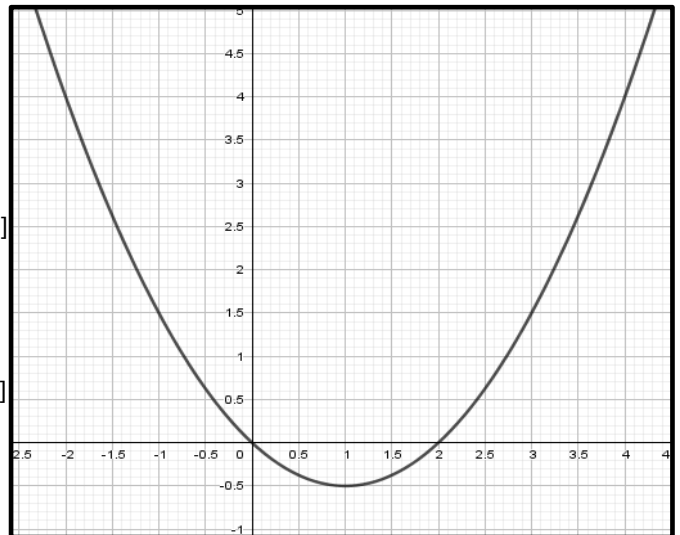
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Να βρείτε:

(α) το πρόσημο του a και της διακρίνουσας Δ
(Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας) [μον. 2]

(β) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $f(x)$
[μον. 2]

(γ) τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$
[μον. 2]



(δ) την τιμή της παράστασης $A = -\frac{b}{2a} - \frac{b}{a} + \frac{2c}{a}$ [μον. 2]

(ε) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \leq 4$ [μον. 1]

(στ) το πρόσημο της παράστασης $B = \frac{f(0.5) \cdot f(2.2)}{f(-0.3)}$ [μον. 1]

B2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3\lambda x - 27 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, με λύσεις x_1, x_2

(α) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες; [μον. 3]

(β) Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε οι λύσεις της εξίσωσης να είναι αντίθετες. [μον. 2]

(γ) Αν η μια λύση της εξίσωσης ισούται με το τετράγωνο της άλλης, να βρείτε:

(i) τις λύσεις x_1, x_2 [μον. 3]

(ii) την τιμή του λ . [μον. 2]

B3. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κορυφές $A(-1,0)$, $B(1,4)$, $\Gamma(-3,2)$, $\Delta(-5,-2)$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ.

(β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του ρόμβου.

(γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΑΓΒ.

(δ) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου της ΒΓ με την πλευρά ΑΒ είναι το σημείο $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

(ε) Να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ των πλευρών ΓΔ και ΑΒ του ρόμβου.

B4. (α) Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\eta\mu(\pi-\alpha) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \sigma\varphi(\pi-\alpha) \eta\mu(-\alpha)}{\tau\epsilon\mu(2\pi-\alpha) \eta\mu(2\pi+\alpha) \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$ και $B = -\sigma\varphi\alpha$

Να δείξετε ότι: $\frac{B}{A} = \sigma\tau\epsilon\mu^2\alpha$ [μον. 6]

(β) Αν $8\eta\mu^2\alpha + 4\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 7$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, να δείξετε ότι $\epsilon\varphi\alpha = -\sqrt{3}$ [μον. 4]

B5. (α) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης.

[μον.4]

(β) Στο πιο κάτω σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (O, R) και η AD είναι η διχοτόμος της γωνίας A . Η προέκταση της AD τέμνει τον κύκλο στο σημείο E και την εφαπτόμενη Bx στο σημείο Z .

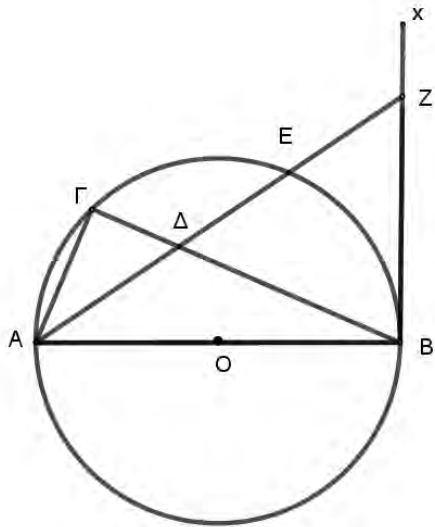
Να δείξετε ότι:

(i) $(ZB)^2 = (ZE) \cdot (ZA)$

[μον.3]

(ii) $ED = EZ$

[μον.3]



Ο Διευθυντής

.....

Γιώργος Ιωσηφίδης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΤΑΞΗ: Α'

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 28 / 05 / 2019

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: _____ ΤΜΗΜΑ: _____ ΑΡ: _____

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ.

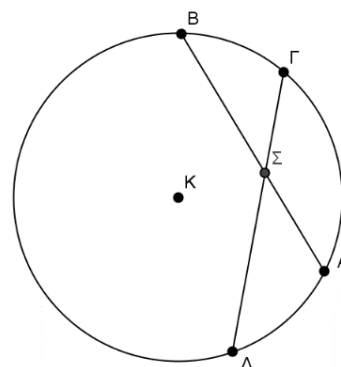
- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
1. Να λύσετε όλα τα θέματα στις κόλλες απαντήσεων.
 2. Να γράφετε μόνο με **μπλε μελάνι** (στα σχήματα επιτρέπεται το μολύβι).
 3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού (υγρού ή ταινίας/Tipp Ex).
 4. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

ΜΕΡΟΣ Α': Περιλαμβάνει 10 θέματα.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. (α) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x-2} = 3$, $x \geq 2$.

(β) Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

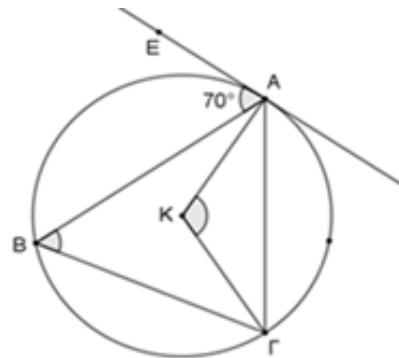
2. Δίνεται κύκλος (Κ, R) και οι τέμνουσες ΑΣΒ και ΓΣΔ. Αν $ΑΣ = x \text{ cm}$, $ΣΒ = 2x \text{ cm}$, $ΓΣ = 3 \text{ cm}$ και $ΣΔ = 6 \text{ cm}$, να υπολογίσετε την τιμή του x .



3. Αν $\eta\mu\theta = \frac{5}{13}$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να υπολογίσετε χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες, την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{5\sigma\tau\epsilon\mu\theta - 1}{13\sigma\upsilon\nu\theta + 24\epsilon\phi\theta}$$

4. Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ABΓ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Κ, R). Η ΑΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Α και η ΚΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΓΑ. Η γωνία ΕΑΒ=70°. Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών ΒΓΑ, ΓΚΑ και ΓΒΑ, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας. Να μεταφέρετε το σχήμα στο φύλλο απαντήσεων.



5. Οι βαθμοί ενός φοιτητή σε πέντε μαθήματα είναι οι εξής: 8, 4, 10, 5, x.
- (α) Να υπολογίσετε την τιμή του x, αν είναι γνωστό ότι η μέση τιμή των πιο πάνω παρατηρήσεων είναι ο αριθμός 7.
- (β) Αν $x = 8$, να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.
6. Δίνεται το τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(2, 2), B(1, 7) και Γ(11, 3).
- (α) Να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$, όπου M το μέσο της ΒΓ.
- (β) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου AM.
7. Να αποδείξετε ότι:
$$\frac{(1 + \epsilon\phi\theta)^2}{\tau\epsilon\mu\theta} - \frac{1}{\sigma\upsilon\eta\theta} = 2\eta\mu\theta$$
8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (2\lambda + 1)x + \lambda^2 - 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (α) Να υπολογίσετε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, για την οποία η γραφική παράσταση της πιο πάνω συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -4$.
- (β) Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης: $A = x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 + 1$.
9. Να λύσετε την ανίσωση:
$$\frac{(x^2 - x - 12)(-x^2 - 4)(x^2 - 9)}{(2 - x)(x - 1)} \geq 0$$
10. Δίνεται η εξίσωση
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 2 & x & 2 \\ \mu & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - 3$$
 με ρίζες x_1, x_2 και $\mu \in \mathbb{R}$.
- (α) Να δείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση είναι η: $x^2 - (\mu + 3)x + 2\mu + 3 = 0$.
- (β) Αν $-3 < \mu < -2$ να δείξετε, χωρίς να λύσετε την εξίσωση, ότι: $1 < x_1^2 + x_2^2 < 8$.

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α'

ΜΕΡΟΣ Β': Περιλαμβάνει 5 θέματα.**Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$.

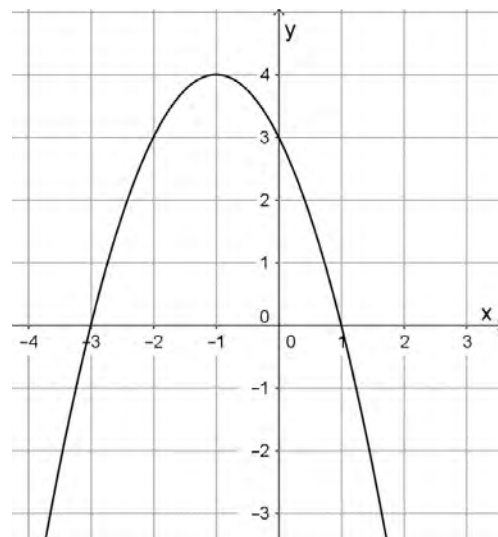
(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f . (μον. 2)

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας. (μον. 2)

(γ) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. (μον. 1)

(δ) Να σχηματίσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τις τιμές $f(-1)$ και $f(-2)$. (μον. 2)

(ε) Να βρείτε τις τιμές των a , b και γ . (μον. 3)



2. Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 2y - 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = (x - 3y + 2)\vec{i} + (-3x + 2y - 2)\vec{j}, \quad \vec{\gamma} = 3\vec{i} - 2\vec{j} \quad \text{και} \quad \vec{\delta} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(α) Να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\epsilon}$ το οποίο είναι αντίρροπο του $\vec{\gamma}$.

(β) Να βρείτε, συναρτήσει των x και y , τις συντεταγμένες του διανύσματος: $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{\delta} - \vec{\gamma}$.

(γ) Να βρείτε τις τιμές των x και y , έτσι ώστε $\vec{a} = \vec{0}$.

(δ) Αν τα διανύσματα $\vec{b}$ και $\vec{\delta}$ είναι παράλληλα, να δείξετε ότι: $5x + 6y = 2$.

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και ύψος AD . Δίνονται επίσης, η εξίσωση της πλευράς $A\Gamma$: $y = -2x + 10$, η εξίσωση του ύψους AD : $x + 3y = 15$ και οι συντεταγμένες του σημείου Δ $(9, 2)$.

(α) Να δείξετε ότι η πλευρά $B\Gamma$ έχει εξίσωση $3x - y = 25$. (μον. 1,5)

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής B . (μον. 3)

(γ) Να υπολογίσετε:

(i) την απόσταση του σημείου Δ από την πλευρά $A\Gamma$ (μον. 1,5)

(ii) το μέτρο της γωνίας $A\Gamma B$ (μον. 2)

(iii) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (μον. 2)

4. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) \cdot \eta\mu(\pi - \theta) \cdot \sigma\tau\epsilon\mu(2\pi - \theta)}{\epsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \cdot \eta\mu(-\theta) \cdot \tau\epsilon\mu(6\pi + \theta)} \quad \text{και} \quad B = \tau\epsilon\mu(-\theta) - \frac{1}{\sigma\varphi(\pi + \theta) \cdot \tau\epsilon\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$$

όπου $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

(α) Να δείξετε ότι $A = \eta\mu\theta$ και $B = \sigma\upsilon\nu\theta$. (μον. 5)

(β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{A}{1-B} - \frac{B}{A} = \sigma\tau\epsilon\mu\theta$ (μον. 3)

(γ) Αν $4A^2 + 8B^2 = 5$, να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{1}{4}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή της γωνίας θ σε ακτίνια. (μον. 2)

5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (K,R) με διάμετρο AB . Στο σημείο A του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη του. Η διχοτόμος της γωνίας ΓBA , τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ του τριγώνου στο Δ , τον κύκλο στο Σ και την εφαπτομένη στο E . Αφού κάνετε το σχήμα, να δείξετε, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας, ότι:

(α) η $A\Sigma$ είναι διχοτόμος της γωνίας EAD (μον. 3)

(β) $(B\Gamma)(\Sigma E) = (\Gamma\Delta)(\Sigma A)$ (μον. 3)

(γ) $(AE)^2 = (\Sigma E)(EB)$ (μον. 2)

(δ) $\frac{(BE)^2 - 4R^2}{(BE)} = \frac{(\Gamma\Delta)(\Sigma A)}{(B\Gamma)}$ (μον. 2)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

Η Διευθύντρια

Παρασκευούλα Κωνσταντινίδου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Α΄ Λυκείου Προσανατολισμού

Ημερομηνία: 03/06/2019

Ωρα: 08:00-10:30

Χρόνος: 2,5 ώρες

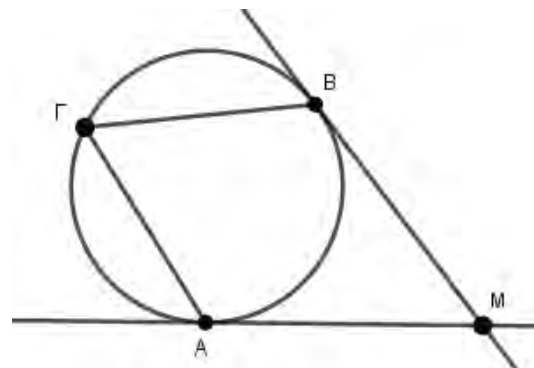
ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να χρησιμοποιείτε μόνο απλό στυλό μπλε ή μαύρου χρώματος.
2. Τα σχήματα μπορούν να γίνονται με μολύβι .
3. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού .
4. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
5. Δεν επιτρέπεται να δανείζεστε οτιδήποτε από συμμαθητές/τριες σας.
6. Η κατοχή κινητού τηλεφώνου **ισοδυναμεί με δολίευση**.
7. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **3** σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄ : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon_1: 6x + 4y = 7$ είναι παράλληλη με την ευθεία που περνά από τα σημεία $A(2,1)$ και $B(0,4)$.
2. Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή , χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:
(α) $\frac{3}{2\sqrt{6}}$ (β) $\frac{11}{4-\sqrt{5}}$
3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = -2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.
4. Οι βαθμολογία ενός μαθητή του λυκείου στο μάθημα της Φυσικής το πρώτο και δεύτερο τετράμηνο ήταν 15 και 18 αντίστοιχα και στην τελική εξέταση 17.
Αν ο βαθμός κάθε τετράμηνου έχει βαρύτητα 35% και η τελική εξέταση 30% , να υπολογίσετε το σταθμισμένο μέσο της βαθμολογίας του μαθητή.
5. Στο διπλανό σχήμα οι MA και MB είναι εφαπτόμενες του κύκλου και η γωνία $\widehat{B\Gamma A} = 65^\circ$.Να βρείτε τη γωνία $\widehat{AMB}$.



6. Αν $25\eta\mu^2\chi - 9 = 0$ και $180^\circ < \chi < 270^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 10\sigma\upsilon\nu\chi + 8\epsilon\phi\chi - 3\sigma\tau\epsilon\mu\chi.$$

7. Να βρείτε τις τιμές του $\mu (\mu \in R)$, για τις οποίες η εξίσωση $:\chi^2 + (\mu + 1)\chi + \mu^2 - 1 = 0$ έχει λύσεις πραγματικές.

8. Η εξίσωση $\chi^2 - (\lambda + 3)\chi + \lambda + 2 = 0$, $\lambda \in R$ έχει λύσεις χ_1, χ_2 .

(α) Να δείξετε ότι $:(\chi_1 - \chi_2)^2 = (\lambda + 1)^2$.

(β) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε να ισχύει $\chi_1 - \chi_2 = 2$.

9. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν:

$$2 \leq \alpha \leq 4 \quad \text{και} \quad -4 \leq \beta \leq -3$$

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

(α) $\alpha - 2\beta$ (β) $\alpha^2 - 2\alpha\beta$.

10. Να λύσετε την κλασματική ανίσωση $:\frac{(9-\chi^2)(\chi^2-5\chi+6)(\chi^2+4)}{\chi^2+2\chi} \leq 0$.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση

της συνάρτησης g με τύπο $g(\chi) = \chi^2 - \chi - \frac{4}{9}$.

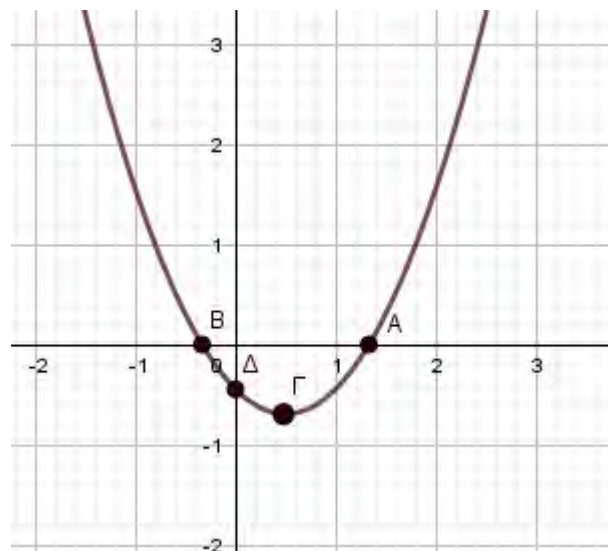
Να βρείτε: (α) το πεδίο ορισμού

(β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της

(γ) τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Δ

(δ) το σύνολο τιμών της συνάρτησης

(ε) τη λύση της ανίσωσης $:g(\chi) \geq 0$.



2. Η βαθμολογία των μαθητών της Α' λυκείου σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών ήταν:

8, 15, 14, 7, 6, 6, 17, 17, 2, 20, 19, 18, 17, 10, 10, 20, 20, 11, 11

(α) Να υπολογίσετε :

(i) τα τρία μέτρα θέσης: μέση τιμή (προσέγγιση ακέραιου) , διάμεσο , επικρατούσα τιμή

(ii) το εύρος , την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.

(β) Να πείτε αν τα πιο πάνω δεδομένα παρουσιάζουν ομοιογένεια και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

3. Αν $\Gamma = \frac{\sin(270^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \sin(180^\circ - \alpha) \cdot \eta\mu(-\alpha)}{\tan(360^\circ - \alpha) \cdot \eta\mu(360^\circ + \alpha) \cdot \eta\mu(270^\circ - \alpha)}$ και $\Delta = \sigma\tau\epsilon\mu\alpha - \frac{\eta\mu\alpha}{1 - \sigma\upsilon\eta\alpha}$.

Να δείξετε ότι : $\frac{\Gamma}{\Delta} = -\eta\mu^2\alpha$.

4. Τρίγωνο ABΓ έχει : $A(1, -1)$, $B(3, 4)$ και ΑΓ: $3\chi - 5\psi - 8 = 0$, ΒΓ: $2\chi + 3\psi - 18 = 0$.

Να βρείτε: (α) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ

(β) την εξίσωση της διαμέσου ΓΜ

(γ) την εξίσωση και το μήκος του ύψους ΑΔ

(δ) το εμβαδόν του τριγώνου.

5. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι εγγεγραμμένο

στον κύκλο, η ευθεία ΓΖ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Γ και ΔΖ παράλληλη με ΒΓ.

Το μέτρο της γωνίας $\widehat{BA\Gamma} = \chi^\circ (\chi > 0)$, $\widehat{\Delta Z\Gamma} = 49^\circ$,

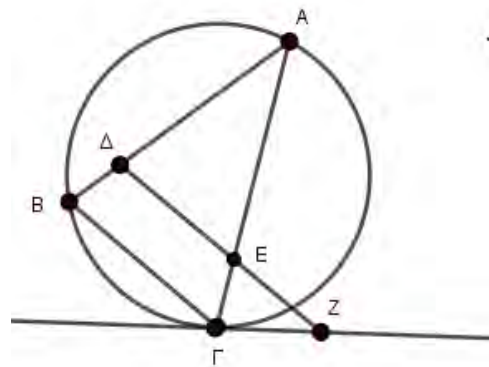
$B\Gamma = 12\text{cm}$, $E\Gamma = 3\text{cm}$, $\Gamma Z = 6\text{cm}$ και μέτρο του τόξου

$\widehat{AB} = 120^\circ$.

(α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΕΓΖ είναι όμοια.

(β) Να υπολογίσετε την τιμή του χ .

(γ) Να υπολογίσετε την πλευρά AB.





ΕΜΠΟΡΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΜΙΤΣΗ ΛΕΜΥΘΟΥ
ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2018 - 2019

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΤΑΞΗ : Α' Λυκείου
ΜΑΘΗΜΑ : Μαθηματικά Προσανατολισμού

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 27 Μαΐου 2019
ΩΡΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 07:45-10:15

Επιτρεπόμενη διάρκεια γραπτού 2 ώρες και 30 λεπτά

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο (2) μέρη (Α,Β), τέσσερις (4) σελίδες.

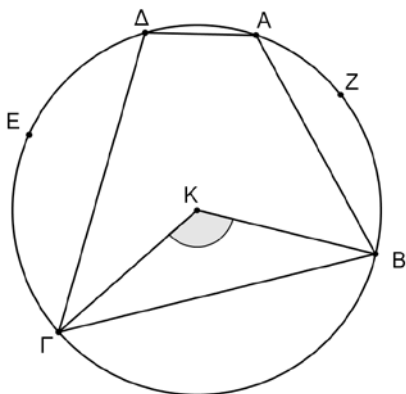
ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Οι απαντήσεις να δοθούν στα φύλλα απαντήσεων. Να συμπληρώσετε το ονοματεπώνυμό σας, σε όλα τα φύλλα απαντήσεων, με την έναρξη της εξέτασης.
2. Να απαντήσετε **σε όλα** τα ερωτήματα.
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
4. Να χρησιμοποιήσετε μόνο μπλε μελάνι για τα κείμενα των απαντήσεών σας. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.
5. Επιτρέπεται η χρήση **μη προγραμματιζόμενης** υπολογιστικής μηχανής.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.
Κάθε ορθή άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 2x - 3 < 0$

2. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο Κ και το εγγεγραμμένο σε αυτόν τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Αν $\angle \text{ΒΚΓ} = 125^\circ$, $\angle \text{ΑΖΒ} = 85^\circ$, $\angle \text{ΕΔ} = 115^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



3. Να αποδείξετε την ταυτότητα : $\frac{\eta\mu^2\theta}{1+\epsilon\varphi^2\theta} - \sigma\upsilon\nu^2\theta = -\sigma\upsilon\nu^4\theta$.

4. Δίνεται $A = \sqrt[5]{6\sqrt{6^2}} \cdot \sqrt[6]{5\sqrt{6^8}}$, να αποδείξετε ότι $A = \sqrt[3]{6}$.

5. Αν ισχύει $-2 < \alpha < -1$ και $2 < \beta < 3$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $4\alpha - 3\beta$.

6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ και $\vec{\beta} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν $|\vec{a}| + |\vec{\beta}| = 2\sqrt{13}$, να βρείτε τις τιμές του λ .

7. Στο μάθημα των Μαθηματικών ένας μαθητής της Α΄ Λυκείου πήρε τους πιο κάτω βαθμούς με την αντίστοιχη βαρύτητα:

	Διαγώνισμα 1	Διαγώνισμα 2	Εργασία	Προφορικό
Βαθμός (από το 20)	13	17	18	20
Βαρύτητα	35 %	35 %	10 %	20 %

Να υπολογίσετε τον τελικό βαθμό του μαθητή στο μάθημα των Μαθηματικών, δείχνοντας τις πράξεις σας.

8. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - \kappa x + \kappa - 2 = 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου κ , έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $S + P = 5$, όπου S το άθροισμα των ριζών και P το γινόμενο των ριζών της πιο πάνω εξίσωσης.

9. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με σημείο τομής των διαγωνίων του Ο και Ζ το μέσον της ΟΔ. Το Ε είναι σημείο πάνω στην προέκταση της ΒΓ ώστε ΓΕ = ΓΒ. Να δείξετε ότι: $(OB) \cdot (AZ) = (OE) \cdot (DZ)$.

10. Αν ισχύει η σχέση $\frac{\eta\mu(\pi - \theta) \cdot \tau\epsilon\mu(2\pi - \theta)}{\epsilon\varphi(\pi + \theta) \cdot \sigma\phi(-\theta)} = -1$, με $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Να δείξετε ότι:

(α) $\theta = \frac{\pi}{4}$

(β) η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu\theta \cdot x^2 - 2x + \eta\mu\theta = 0$ έχει ρίζες αντίστροφες.

**ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄**

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε ορθή άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\Gamma(2,1)$ και εξισώσεις πλευρών $AB: -2x+5y = 12$ και $A\Gamma: x+3y = 5$.
Να βρείτε:
(α) Τις συντεταγμένες της κορυφής A .
(β) Την εξίσωση του ύψους $\Gamma\Delta$.
(γ) Την εξίσωση της ευθείας που περνά από την κορυφή Γ και είναι παράλληλη με τον άξονα των x .
(δ) Την τιμή της παραμέτρου α , $\alpha \in \mathbb{R}$ αν $B(\alpha, \alpha)$ είναι οι συντεταγμένες της κορυφής B .

2. Δίνονται τα σημεία $A(1, 5)$, $B(3, 2)$ και $\Gamma(6, -1)$.
(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ ορίζουν τρίγωνο.
(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma A}$.
(γ) Να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u}$ που είναι ομόρροπο του $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(δ) Να βρείτε την τιμή x , $0 < x < \pi$ για την οποία ισχύει $\frac{(1 + \varepsilon \varphi x)^2 - \tau \varepsilon \mu^2 x}{\varepsilon \varphi x + \sigma \varphi x} = |\vec{u}|$.

3. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - \mu x - (\mu + 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$.
(α) Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο $f(x)$ έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.
(β) Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου μ , ώστε αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της $f(x)=0$, να ισχύει $x_1^2 + x_1 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + x_2 = 10$.
(γ) Αν $\mu = 2$, να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει η σχέση $\frac{f(x)}{4 - x^2} \leq 0$.

4. Δίνεται η εξίσωση $(\sigma\phi\theta - \sigma\upsilon\nu\theta)x^2 - 4x + \sigma\phi\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta = 0$, $180^\circ < \theta < 270^\circ$. Να δείξετε ότι:
(α) Το γινόμενο των ριζών της είναι ίσο με $1 + \eta\mu\theta$.
(β) Να βρείτε την τιμή του $\eta\mu\theta$ αν ισχύει η σχέση $P \cdot S = \varepsilon\phi\theta$ όπου P το γινόμενο των ριζών της και S το άθροισμα των ριζών της.

5. Από σημείο Σ που βρίσκεται έξω από κύκλο (K, R) φέρουμε εφαπτόμενα τμήματα ΣA και $\Sigma \Gamma$ (όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα). Αν $AB, \Gamma H$ είναι διάμετροι του κύκλου και $\widehat{A\hat{D}E} = 90^\circ$, να δείξετε ότι:
- (α) $(A\Gamma)^2 = (AB)(\Gamma D)$
- (β) Τα τρίγωνα $\Gamma \Delta \Sigma$ και $H \epsilon \Gamma$ είναι όμοια και στη συνέχεια ότι ισχύει η σχέση $(A\Sigma)(E H) = (\Gamma D)(\Gamma H)$.
-

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

Οι Εισηγητές

Κλεονίκη Χριστοδούλου

Μιχάλης Πηλαβάκης

Ο Συντονιστής
Γιάννης Νικολαΐδης

Η Διευθύντρια
Όλγα Λοϊζιά

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΤΑΞΗ: Α' Λυκείου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 30/05/2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΩΡΑ: 10:30 – 13:00

Οδηγίες:

- Να γράφετε με μπλε μελάνι. Για τα σχήματα επιτρέπεται και μολύβι.
- Επιτρέπεται σφραγισμένη υπολογιστική μηχανή μόνο.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- Το δοκίμιο αποτελείται από (4) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α' (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να λύσετε τις εξισώσεις για πραγματικές τιμές του x :

α) $x^4 + 16 = 0$

β) $\sqrt{x^3 + 12} = 2$

2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:

α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{\beta}$

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$.

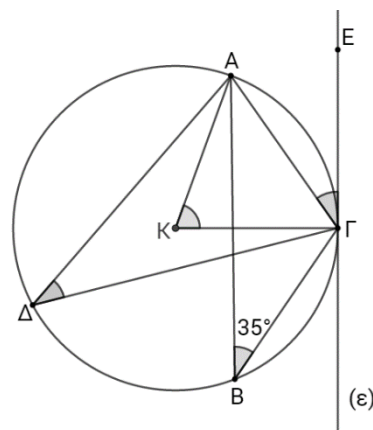
3. Στο διπλανό σχήμα η γωνία $\widehat{AB\Gamma} = 35^\circ$ και η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ . Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών:

α) $\widehat{A\Delta\Gamma}$

β) $\widehat{AK\Gamma}$

γ) $\widehat{A\Gamma E}$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



4. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

5. Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}, B = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι $A + B = \sqrt{5}$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με λύσεις τους αριθμούς A και B .

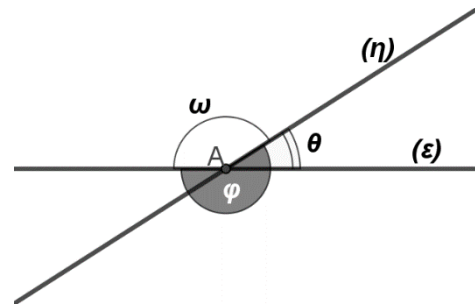
6. Δίνεται $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$, όπου θ η οξεία γωνία με κορυφή A που σχηματίζεται από την τομή των ευθειών (ε) και (η) όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Να υπολογίσετε:

α) Το συνημίτονο της γωνίας θ .

β) Το συνημίτονο της γωνίας ω του σχήματος.

γ) Την εφαπτομένη της μη κυρτής γωνίας φ του σχήματος.



7. Ένας καθηγητής επέλεξε 10 βιβλία από ένα βιβλιοπωλείο με αναγραφόμενες τιμές όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Τιμή	Αριθμός βιβλίων
10	2
15	3
17	5

Να υπολογίσετε:

α) τη μέση τιμή, το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβλητότητας (CV) των παρατηρήσεων (μον.4)

β) αν το βιβλιοπωλείο τού κάνει έκπτωση 10% στην αναγραφόμενη τιμή και αυτά τα βιβλία τα δωρίσει σε φίλους του όπου τα έξοδα αποστολής είναι €2 για κάθε βιβλίο, να υπολογίσετε τη νέα μέση τιμή των παρατηρήσεων. (μον.1)

8. Αν ισχύει $1 < x < 2$ και $-2 < y < -1$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις πιο κάτω παραστάσεις:

α) $2x - 3y$

β) $-\frac{2x}{3y}$

9. α) Να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ -9 & -8 & 1 \end{vmatrix}$$

β) Τι συμπεραίνετε για τη θέση των σημείων $A(1,2)$, $B(5,6)$ και $\Gamma(-9,-8)$ στο επίπεδο;

10. Δίνεται κύκλος (K, R) με κέντρο $K(1,3)$. Από σημείο Σ εκτός κύκλου φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα ΣA (όπου A το σημείο επαφής) και τέμνουσα $\Sigma B\Gamma$ που περνά από το κέντρο του κύκλου K . Αν το εφαπτόμενο τμήμα ΣA ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: y = -2x$ και έχει μήκος $(\Sigma A) = 2$ cm να δείξετε ότι:

α) το μήκος της ακτίνας του κύκλου είναι $R = \sqrt{5}$ cm

β) το μήκος $(\Sigma B) = (3 - \sqrt{5})$ cm

ΜΕΡΟΣ Β' (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2}{\eta\mu\theta} = \sigma\tau\epsilon\mu\theta + 2\sigma\upsilon\nu\theta$$

(μον.4)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία θ αν $0^\circ < \theta < 180^\circ$ και

$$\frac{\eta\mu(180^\circ - \theta)\varepsilon\varphi(90^\circ - \theta)\eta\mu(-\theta)}{\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \theta)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(μον.6)

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

α) Να μετασχηματίσετε τη συνάρτηση f στη μορφή $f(x) = (x - \alpha)^2 + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. (μον.3)

β) Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω μορφή ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Να είναι ευδιάκριτα τα σημεία τομής με τους άξονες, ο άξονας συμμετρίας και οι συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής. (μον.5)

γ) Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = f(x) + 1$ και $h(x) = f(x + 1)$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής τους. (μον.2)

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$. Η ευθεία που περιέχει την πλευρά $B\Gamma$ έχει εξίσωση $\varepsilon: x + 2y = 4$. Οι κορυφές B και Γ βρίσκονται πάνω στους άξονες yy' και xx' αντίστοιχα. Η κορυφή A βρίσκεται στο α' τεταρτημόριο και η γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου είναι ίση με 45° .

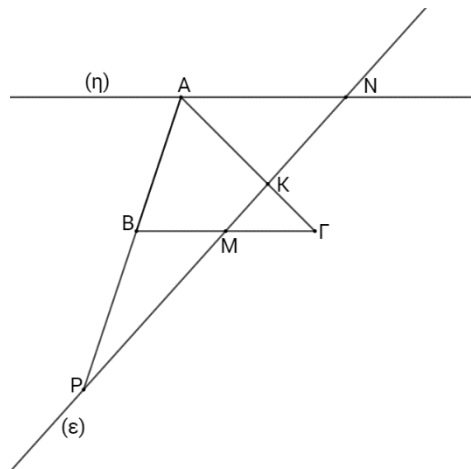
Να βρείτε:

- τις συντεταγμένες των κορυφών B και Γ
 - την εξίσωση του ύψους AD του τριγώνου
 - τις συντεταγμένες της κορυφής A
 - τις συντεταγμένες του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$
4. α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $3x^2 - 2\lambda x + \lambda(\lambda + 2)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για όλες τις πραγματικές τιμές του x .
 β) Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $3x^2 - 2\lambda x + \lambda(\lambda + 2) = 0$, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \geq 0$$

5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και M το μέσο της πλευράς του $B\Gamma$. Από το σημείο M φέρνουμε τυχαία ευθεία (ε) που τέμνει τις AB και AG στα σημεία P και K αντίστοιχα και από το σημείο A ευθεία (η) παράλληλη της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου, που τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο N . Να αποδείξετε ότι:

- τα τρίγωνα PAN και PBM είναι όμοια
- $(AN)(MK) = (BM)(NK)$



Ο Διευθυντής

Δημητρίου Αλέξανδρος

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2019**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****ΤΑΞΗ: Α' (Προσανατολισμού)****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 30.05.2019****ΧΡΟΝΟΣ: 2.30'****ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΚΑΘΗΓΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ:****ΒΑΘΜΟΣ ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:**

100	20

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:..... ΤΜΗΜΑ:.....ΑΡ.:**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Να γράψετε τις απαντήσεις σας πάνω στο εξεταστικό δοκίμιο.
2. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
3. Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δώδεκα (12) σελίδες.**ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.**

1. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 9x + 20 \geq 0$.
2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος $\vec{a} - \vec{b}$.

3. Σε μια φάρμα υπάρχουν πρόβατα και αγελάδες. Το βάρος των προβάτων κυμαίνεται από 20 μέχρι 70 κιλά ενώ το βάρος των αγελάδων κυμαίνεται από 60 μέχρι 100 κιλά. Αν στη φάρμα υπάρχουν 30 πρόβατα και 50 αγελάδες να βρείτε, χρησιμοποιώντας ανισοτικές σχέσεις, μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται το συνολικό βάρος όλων των ζώων:

4. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon_1): 3x + 7y = 1$. Να βρείτε:

(α) Την κλίση της ευθείας (ε_1) .

(Μον. 2)

(β) Την εξίσωση της ευθείας (ε_2) που είναι κάθετη στην (ε_1) και περνά από το σημείο $A(2, -1)$.

(Μον. 3)

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x^3 = -8$

(Μον.1,5)

(β) $\sqrt[4]{2x-6} = 2$

(Μον.1,5)

(γ) $(x^4 + 3)^{\frac{5}{2}} = 32$

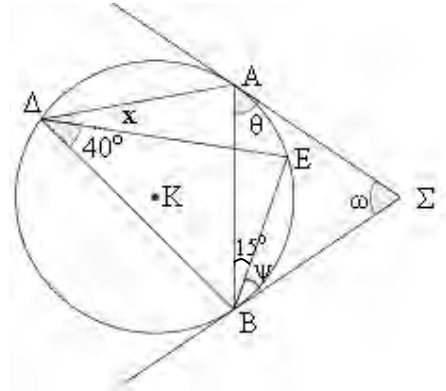
(Μον.2)

6. Αν $\eta\mu\theta = -\frac{12}{13}$ και $180^\circ < \theta < 270^\circ$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{5\epsilon\phi\theta - 12\sigma\phi\theta}{10\tau\epsilon\mu\theta}$$

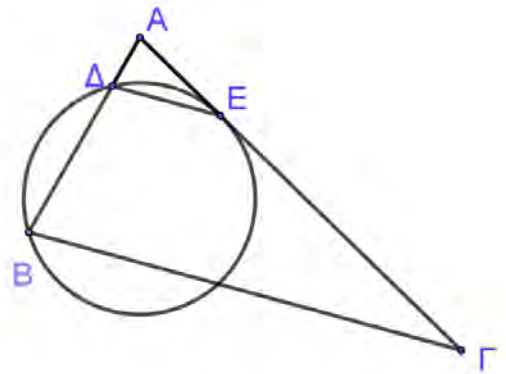
7. Σε τρία γραπτά διαγωνίσματα Μαθηματικών στο Β' τετράμηνο ο Νίκος πήρε βαθμούς 11, 15, 18. Ο προφορικός του βαθμός στο Β' τετράμηνο ήταν 18. Ποιος θα είναι ο βαθμός του Νίκου στο Β' τετράμηνο, εάν τα τρία γραπτά έχουν βαρύτητα 20% το καθένα και ο προφορικός βαθμός έχει βαρύτητα 40%;

8. Στο διπλανό σχήμα τα ΑΣ και ΒΣ είναι εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου (Κ, R), $\widehat{ABE} = 15^\circ$ και $\widehat{E\Delta B} = 40^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{x}$, $\hat{\psi}$, $\hat{\omega}$, και $\hat{\theta}$.



9. Ένας ρόμβος έχει διαγώνιους $\delta_1 = (x + 2)$ cm και $\delta_2 = (4 - x)$ cm.
 (α) Να βρείτε την τιμή της μεταβλητής x , $x \in \mathbb{R}$, ώστε το εμβαδόν του ρόμβου να είναι μέγιστο. (Μον. 3)
 (β) Να βρείτε το μέγιστο εμβαδόν του ρόμβου. $(E_{\rho\omicron\mu\beta\omicron\nu} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2})$ (Μον. 2)

10. Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλα, το ΑΓ εφάπτεται του κύκλου στο Ε και το ΑΒ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ και Β. Αν $AB = 4AD$, να δείξετε ότι $EG = 6AD$.



ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$
 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, και τα σημεία $A(0,24), B(-3,0)$ και $\Gamma(4,0)$. Να βρείτε:

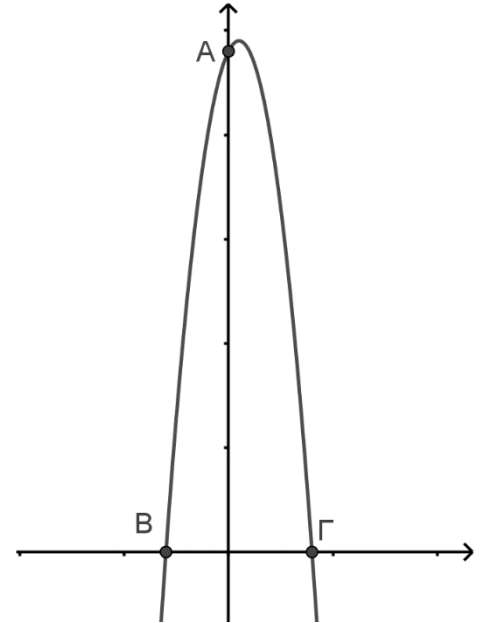
(α) Τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$.

(β) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας.

(γ) Τις τιμές των α, β και γ .

(δ) Τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής.

(ε) Τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) > 20$



2. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\text{τεμ}(\omega - \pi) \cdot \text{συν}(-\omega) \cdot \text{εφ}(4\pi - \omega)}{\text{σφ}\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) \cdot \text{στεμ}(2\pi - \omega) \cdot \text{ημ}(\pi - \omega)} \quad \text{και} \quad B = \frac{1 + \text{εφ}\omega}{\text{τεμ}^2\omega} + \frac{1 - \text{σφ}\omega}{1 + \text{σφ}^2\omega}$$

(α) Να δείξετε ότι: $A = -1$ και $B = -A$.

(Μον. 7)

(β) Αν $\frac{1 + \text{εφ}\omega}{\text{τεμ}^2\omega} + \frac{1 - \text{σφ}\omega}{1 + \text{σφ}^2\omega} = 2\text{συν}x$, $0 < x < 2\pi$, να βρείτε τις τιμές του x .

(Μον. 3)

3. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, οι συντεταγμένες των δύο κορυφών του είναι $A(4,6)$ και $\Gamma(-2,2)$. Η εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ είναι $(\varepsilon_1): 2x + 4y = 4$ και η εξίσωση της διαμέσου AM είναι $(\varepsilon_2): 3x - y = 6$.

Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες του σημείου M

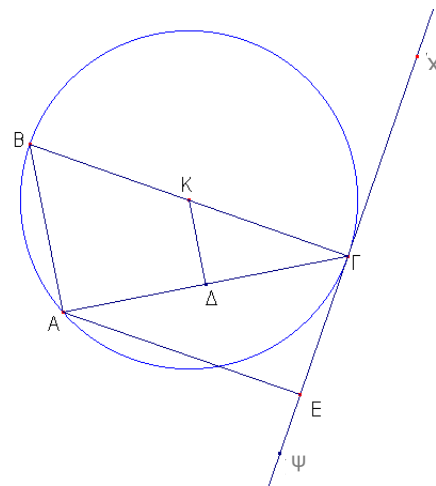
β) τις συντεταγμένες του σημείου B

γ) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

δ) το μήκος του ύψους $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$

ε) το μέτρο της οξείας γωνίας AGB (κατά προσέγγιση ακεραίου)

4. Δίνεται κύκλος (K,R) , $B\Gamma$ μια διάμετρος του και ένα σημείο του A . Αν η $x\Gamma\psi$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ , $K\Delta \perp A\Gamma$ και $AE \perp x\Gamma\psi$, να δείξετε ότι :



- (α) τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $AK\Delta$ είναι όμοια (Μον. 4)
 (β) $(AB)(KA) = (\Delta K)(B\Gamma)$ (Μον. 2)
 (γ) $(A\Gamma)^2 = (AE)(B\Gamma)$ (Μον. 4)

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 3(\lambda + 2)x + \lambda^2 + 4\lambda + 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 (μον.4)

- (β) Για $\lambda = 0$ να αποδείξετε ότι:

$$A = \frac{\sqrt{f(0)}}{\sqrt{f(0)-f(1)}-\sqrt{f(0)}} + \frac{\sqrt{f(0)-f(1)}-\sqrt{f(0)}}{\sqrt{f(0)-f(1)}+\sqrt{f(0)}} = 10 - 2\sqrt{3}$$

και να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$B = x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3, \text{ όπου } x_1, x_2 \text{ ρίζες της } f(x) = 0 \quad (\text{μον.6})$$

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

ΟΙ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ

Ο ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Σεβέρη Λουκία

Σάββα Σάββας Β.Δ.

Λοϊζίδης Πέτρος

Χριστοφορίδης Γιώργος

Μουγής Νίκος

Ματθαίου Κυριάκος

Φωτίου Άντρος

ΛΥΚΕΙΟ ΚΑΙ ΤΕΣΕΚ ΠΟΛΕΩΣ ΧΡΥΣΟΧΟΥΣ ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2018 – 2019

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΤΑΞΗ: Α΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 30/05/2019

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2,5 ώρες

ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 07.45

ΩΡΑ ΛΗΞΗΣ: 10.15

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:.....

ΤΜΗΜΑ:.....

ΑΡΙΘΜΟΣ:.....

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- 1.** Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **έξι (6)** σελίδες.
- 2.** Να γράφετε μόνο με **μπλε** μελάνι.
- 3. Δεν** επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- 4.** Επιτρέπεται η χρήση **μη** προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- 5.** Τα προσωπικά σας στοιχεία και οι **λύσεις** των ασκήσεων να γραφούν στα φύλλα εξέτασης.
- 6.** Τα σχήματα των ασκήσεων να **μεταφέρονται** στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).

ΜΕΡΟΣ Α' : Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

A1. Για τον τελικό βαθμό στο Α' τετράμηνο, στο μάθημα των Μαθηματικών, ένας μαθητής βαθμολογείται με 30% για συμμετοχή στην τάξη, με 20% για κατ'οίκον εργασία και τετράδιο, 10% για μελέτη/project και 40% για τον βαθμό του διαγώνισματος. Ποιος θα είναι ο τελικός βαθμός στα Μαθηματικά το Α' τετράμηνο αν ένας μαθητής βαθμολογήθηκε με 87 από τα 100 για τη συμμετοχή του στην τάξη, με 72 από τα 100 για κατ'οίκον εργασία και τετράδιο, με 80 από τα 100 για μελέτη/project και με 75 από τα 100 στο βαθμό του διαγώνισματος;

A2. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $P(x) = (x-2)(x^2 - 3x + 2)$.

A3. Αν $2 < x < 5$ και $-3 < \psi < -1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

(α) $x + 2\psi$

(β) $x \cdot \psi$

A4. Δίνονται οι κύκλοι (K, 10cm) και (M, 17cm). Αν οι δύο κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία, να βρείτε το διάστημα στο οποίο ανήκουν οι τιμές του μήκους KM.

A5. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 3x + 5 = 0$, με λύσεις τις x_1, x_2 . Να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων (χωρίς να λύσετε την εξίσωση):

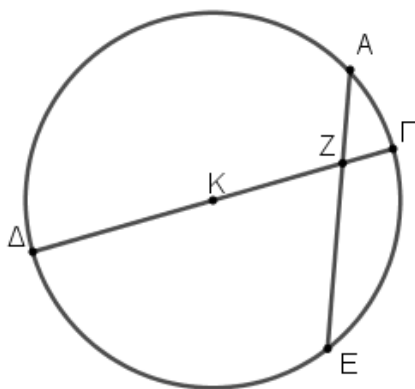
(α) $3x_1 + 3x_2 - 2x_1 \cdot x_2$

(β) $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2}$

A6. Να λύσετε την εξίσωση:
$$\begin{vmatrix} \eta\mu\chi & 0 & \sigma\upsilon\nu\chi \\ 2 & 1 & \sigma\tau\epsilon\mu\chi \\ \sigma\upsilon\nu\chi & \sigma\upsilon\nu\chi & \eta\mu\chi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \\ \sqrt{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}, \text{ αν } 90^\circ < \chi < 180^\circ.$$

A7. Δίνεται κύκλος (K, ρ) και η χορδή του AB . Στην προέκταση της AB προς το B παίρνουμε τμήμα $B\Gamma$ ίσο με την ακτίνα του κύκλου. Η προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος ΓK προς το K τέμνει τον κύκλο, στο E . Να δείξετε ότι $\widehat{E\hat{K}A} = 3 \cdot \widehat{B\hat{K}\Gamma}$.

A8. Δίνεται κύκλος $(K, 13\text{cm})$ και η χορδή AE που περνά από το σημείο Z . Το σημείο Z απέχει 9cm από το κέντρο του κύκλου και ισχύει $(EZ) = 2(ZA)$. Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής AE .



A9. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{a} - 4\vec{\beta}$. (μον.3)

(β) Να βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα, το οποίο να είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{\gamma}$. (μον.2)

A10. Αν $\kappa = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, τότε :

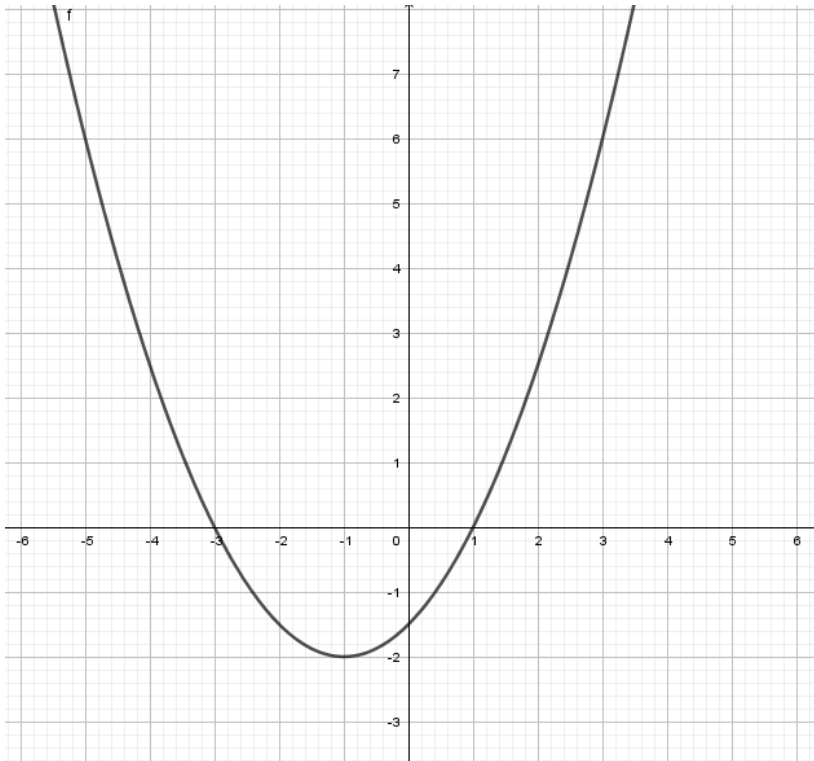
(α) Να αποδείξετε ότι $\kappa^2 = 2$.

(β) Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \sqrt[11]{8\kappa - 1} \cdot \sqrt[11]{8\kappa + 1} \cdot \sqrt[11]{4\kappa + 1} \cdot \sqrt[11]{\kappa + 1} \cdot \sqrt[11]{\kappa + 1}$, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

B1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.



Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

- (α) Το σύνολο τιμών της f .
- (β) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας.
- (γ) Το πρόσημο της διακρίνουσας Δ .
- (δ) Τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της παραβολής.
- (ε) Τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$.
- (στ) Την τιμή της παράστασης $\frac{b}{a}$.
- (ζ) Τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) > 0$.
- (η) Τις λύσεις της εξίσωσης $[f(x)]^3 = 216$.

B2. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(5, 2)$, $B(1, 5)$ και $\Gamma(\kappa, \kappa - 3)$.

Να υπολογίσετε:

(α) Τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος $\overline{AB}$.

(β) Τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overline{OM}$, όπου M το μέσο του AB .

(γ) Τον αριθμό κ , έτσι ώστε το διάνυσμα $\overline{B\Gamma}$ να έχει συντελεστή διεύθυνσης ίση με 2.

(δ) Το σημείο Δ του άξονα $y'y$, αν $\kappa = -6$, έτσι ώστε τα διανύσματα $\overline{AB}$ και $\overline{\Gamma\Delta}$ να είναι παράλληλα.

B3. (α) Να υπολογίσετε τη γωνία ω , $90^\circ < \omega < 180^\circ$, αν

$$\frac{\varepsilon\varphi(180^\circ + \omega) \cdot \varepsilon\varphi(270^\circ - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(360^\circ + \omega)}{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(360^\circ - \omega) + \eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ + \omega)} = \frac{1}{2}.$$

(β) (i) Να βρείτε την εξίσωση δευτέρου βαθμού με λύσεις τις $x_1 = \frac{2}{\eta\mu\theta}$ και $x_2 = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}$, με

$\eta\mu\theta \neq 0, \sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$.

(ii) Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{2}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{2}{x_2}\right)^2 = 1$.

B4. Δίνονται τα σημεία $A(-1,0)$, $B(1,4)$ και $\Gamma(-3,2)$ ενός τριγώνου.

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου είναι $\varepsilon: \chi - 2\psi + 7 = 0$.

(β) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους AH .

(γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας B .

(δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

B5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας A , η οποία συναντά την πλευρά $B\Gamma$ στο Δ και τον κύκλο στο E .

Να αποδειχθεί ότι:

(α) $(AB)(A\Gamma) = (A\Delta)(AE)$

(β) $(EB)^2 = (EA)(ED)$.

- ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ -

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

.....
ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΟΥ



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ -ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Α΄ Λυκείου (5-ωρο)

Ημερομηνία: 21/5/2019

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ½ ΩΡΕΣ

Ώρα: 8:00- 10 :30 π.μ.

ΟΝΟΜΑ _____ ΒΑΘΜΟΣ _____

ΟΔΗΓΙΕΣ:

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **4** σελίδες.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **δύο** μέρη.

Το **μέρος Α΄** αποτελείται από **δέκα (10) ερωτήσεις**. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με **πέντε (5) μονάδες**.

Το **μέρος Β΄** αποτελείται από **πέντε (5) ερωτήσεις**. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με **δέκα (10) μονάδες**.

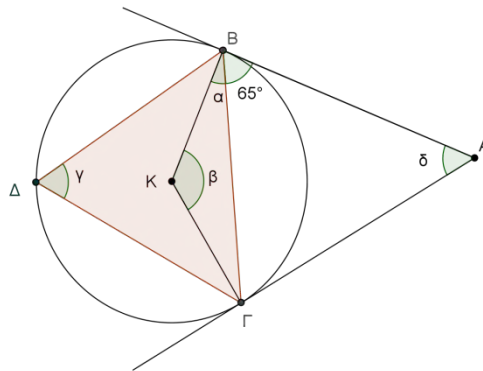
Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού (Tirrex).

Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 από τις 100 μονάδες.

- 1) Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt[4]{2x-8} - 2 = 0$
- 2) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες: $x_1 = 2$ και $x_1 = -3$.
- 3) Δίνεται η εξίσωση: $3x^2 - 5x - 9 = 0$. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:
 - (α) $x_1 \cdot x_2$ (1,5 μονάδες)
 - (β) $x_1 + x_2$ (1,5 μονάδες)
 - (γ) $6x_1 - 5x_1x_2 + 6x_2$ (2 μονάδες).
- 4) Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται κύκλος με κέντρο Κ και οι εφαπτομένες του από το σημείο Α. Αν η γωνία $\widehat{AB\Gamma} = 65^\circ$, να βρείτε τις γωνίες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ και το μέτρο του τόξου $\widehat{B\Delta\Gamma}$.



- 5) Αν $\sin \theta = \frac{5}{13}$ και $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:
 $A = 10\epsilon\mu\theta + 26\eta\mu\theta + 5\epsilon\phi\theta$.
- 6) Αν $1 < \chi < 3$ και $2 < \psi < 5$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:
 - α) $2\chi - \psi$
 - β) $\frac{\chi}{\psi - 1}$

7) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(α) Να υπολογίσετε το διάνυσμα $\vec{\delta} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + \vec{\gamma}$. (μονάδες 3)

(β) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\delta}$. (μονάδες 2).

8) Να λύσετε την εξίσωση: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$.

9) Να αποδείξετε ότι: $\frac{(1 + \varepsilon \phi x)^2}{\tau \epsilon \mu x} - 2\eta \mu x = \tau \epsilon \mu x$.

10) Ο διπλανός πίνακας δείχνει τον αριθμό των παιδιών που έχουν οι οικογένειες μιας γειτονιάς.

Να βρείτε :

- α) Τη μέση τιμή ($\bar{x}$) του αριθμού των παιδιών των οικογενειών. (2 μονάδες)
- β) Την τυπική απόκλιση (s). (2 μονάδες)
- γ) Το συντελεστή μεταβλητότητας (CV). (1 μονάδα)

Αριθμός παιδιών	Αριθμός οικογενειών
0	1
1	5
2	7
3	7

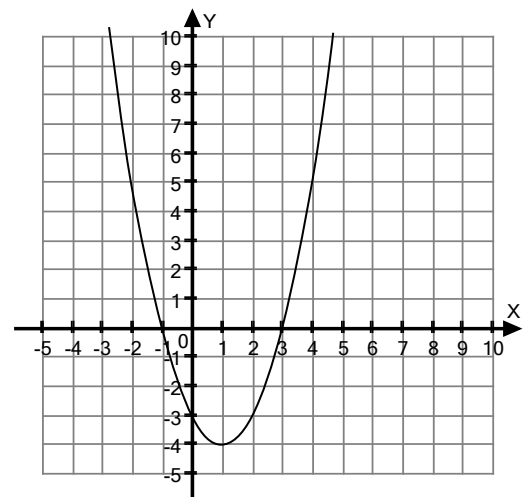
ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 από τις 100 μονάδες.

1) Στο σχήμα δίνεται η παραβολή που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$. Να βρείτε:

- α) το πρόσημο του a και της διακρίνουσας Δ του $f(x)$,
- β) τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της,
- γ) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$,
- δ) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$.



- 2) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή Γ(2,7). Το ύψος ΑΔ έχει εξίσωση $2x - 5y = 9$ και η διάμεσος ΑΜ έχει εξίσωση $3x - 2y = 8$.
- (α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της πλευράς ΒΓ είναι $5x + 2y = 24$.
- (β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΒΓ.
- (γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Α και Β.
- (δ) Να βρείτε την απόσταση της κορυφής Α από την πλευρά ΒΓ.
- (ε) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

- 3) Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 - 3\kappa\chi + \kappa^2 - 8 = 0$ με ρίζες χ_1, χ_2 και $\kappa \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε το είδος των ριζών της εξίσωσης.
- β) Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες ισχύει η σχέση: $S + P \leq \kappa^2$

4) Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{\sin(\frac{3\pi}{2} + \theta) \eta\mu(2\pi + \theta) \epsilon\phi(\frac{\pi}{2} + \theta)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) \sin(\theta - \pi)}$ και

$$B = (\eta\mu^2\theta - \sin^2\theta)^2 + 4\eta\mu^2\theta \cdot \sin^2\theta + \eta\mu(\frac{\pi}{2} + \theta) \cdot \sin(\pi + \theta)$$

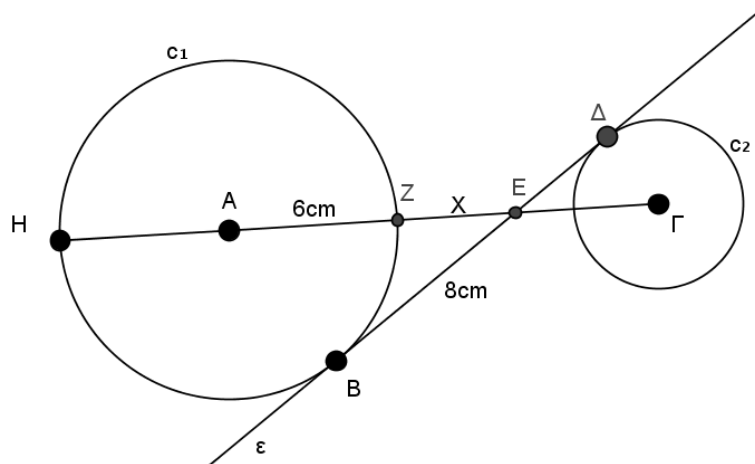
Να αποδείξετε ότι:

α) $A = 1$ και $B = \eta\mu^2\theta$

β) Αν $\frac{A}{B} \cdot \eta\mu\theta = -2$ και $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, να βρείτε την τιμή της γωνίας θ .

- 5) Στο διπλανό σχήμα δίνονται δύο κύκλοι c_1 και c_2 με κέντρα Α και Γ αντίστοιχα, καθώς και η κοινή εσωτερική εφαπτομένη τους (ε) στα σημεία Β και Δ αντίστοιχα.

Η ευθεία ΑΓ τέμνει τον c_1 στα Η, Ζ και την εφαπτομένη (ε) στο Ε.



(α) Να δείξετε ότι:

i) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και

ΔΕΓ είναι όμοια. (4 μονάδες)

ii) $(AE)(E\Delta) = (GE)(EB)$ (3 μονάδες)

β) Αν η ακτίνα του c_1 είναι 6cm και το μήκος του τμήματος ΕΒ είναι 8cm, να υπολογίσετε το μήκος χ του ΕΖ. (3 μονάδες)

Η Διευθύντρια

Μυρτώ Πουαγκαρέ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ 2019ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: 28/5/2019

ΤΑΞΗ: **Α'** Λυκείου Προσανατολισμού (5-ωρο)

Χρόνος: 2 ώρες και 30 λεπτά

- ΟΔΗΓΙΕΣ:** α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
 β) Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).
 γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
 δ) **Όλες οι απαντήσεις να δοθούν στα σφραγισμένα φύλλα αναφοράς που σας δόθηκαν.**

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από πέντε (5) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τα δέκα (10) θέματα του Μέρους Α'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

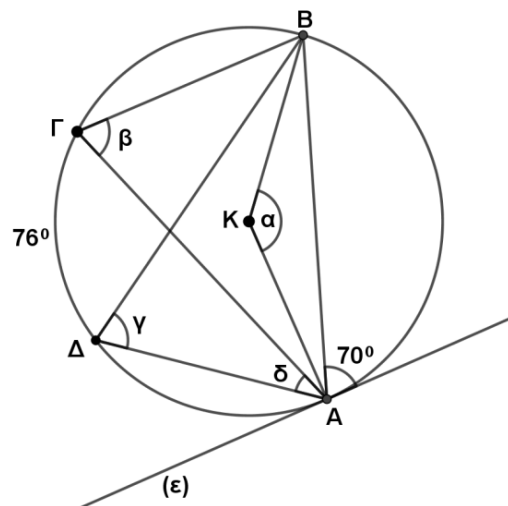
1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$:

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. **[3 μον.]**

(β) Να εξετάσετε αν το διάνυσμα $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 20 \\ -15 \end{pmatrix}$ είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{\gamma}$. **[2 μον.]**

2. Δίνεται κύκλος (Κ, R) και ευθεία (ε), εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Αν $\widehat{BAE} = 70^\circ$ και το μέτρο του τόξου $\widehat{AD} = 76^\circ$, να βρείτε τα μέτρα των γωνιών α, β, γ, δ.

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)



3. Αν $\eta\mu\theta = -\frac{12}{13}$ και $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, να αποδείξετε ότι η

αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = \frac{13\sigma\upsilon\nu\theta + 24\sigma\phi\theta}{\epsilon\phi\theta - \tau\epsilon\mu\theta} \text{ είναι ίση με } 1.$$

4. Στον πιο κάτω πίνακα δίνονται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση τριών τμημάτων του σχολείου μας σε ένα κοινό διαγώνισμα στα Μαθηματικά.

Τμήμα	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση
A ₂₁	14,9	1,8
A ₂₂	14,2	2,3
A ₃₁	12,8	1,2

(α) Ποιο είναι κατά τη γνώμη σας το καλύτερο τμήμα και γιατί; **[2 μον.]**

(β) Ποιο από τα πιο πάνω τμήματα παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια και γιατί; **[3 μον.]**

5. Αν $4 < x < 9$ και $-8 < y < -5$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

(α) $x + 2y$ (β) $x \cdot y$ (γ) $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y}$ **[2/2/1 μον.]**

6. (α) Να κάνετε τις πράξεις χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(i) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ (ii) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ **[3 μον.]**

(β) Να δείξετε ότι: **[2 μον.]**

$$\frac{1}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = 6$$

7. Να βρείτε το σύνολο των πραγματικών τιμών του λ για τις οποίες το τριώνυμο

$$f(x) = x^2 - (\lambda + 2)x + 3\lambda - 2 \text{ είναι θετικό } \forall x \in \mathbb{R}.$$

8. Δίνεται κύκλος με κέντρο $K(3, -4)$ και ακτίνα $R = 5$ μονάδες.

(α) Να δείξετε ότι: **[3 μον.]**

(i) το σημείο $\Sigma(-3, 4)$ βρίσκεται εκτός του κύκλου.

(ii) το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΣΑ που άγεται από το Σ (Α σημείο του κύκλου), είναι ίσο με $5\sqrt{3}$ μονάδες.

(β) Αν $\Gamma(0, -8)$ σημείο του κύκλου και ΓΔ διάμετρος του κύκλου, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του Δ. **[2 μον.]**

9. Δίνεται η εξίσωση $4x^2 + 2κx + μ = 0$, $κ, μ \in \mathbb{R}$, με λύσεις x_1, x_2 .

(α) Να βρείτε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων συναρτήσει του $κ$ και $μ$ [2 μον.]

(i) $x_1 + x_2$ (ii) $x_1 \cdot x_2$

(β) Αν $x_1 = \eta\mu\theta$ και $x_2 = \sigma\upsilon\nu\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, να δείξετε ότι: $\kappa^2 = 2\mu + 4$ [2 μον.]

(γ) Αν επί πλέον $\theta = 0$, να βρείτε τις τιμές των $κ$ και $μ$ [1 μον.]

10. Δίνεται η παραβολή $f(x) = x^2 - 2\mu x + 4\mu + 1$, $\mu \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής της, συναρτήσει του $μ$. [3 μον.]

(β) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη δυνατή τιμή που παίρνει το ελάχιστο της συνάρτησης f είναι 5. [2 μον.]

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τα πέντε (5) θέματα του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma, \quad a \neq 0.$$

(α) Να βρείτε:

(i) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $f(x)$ [1 μον.]

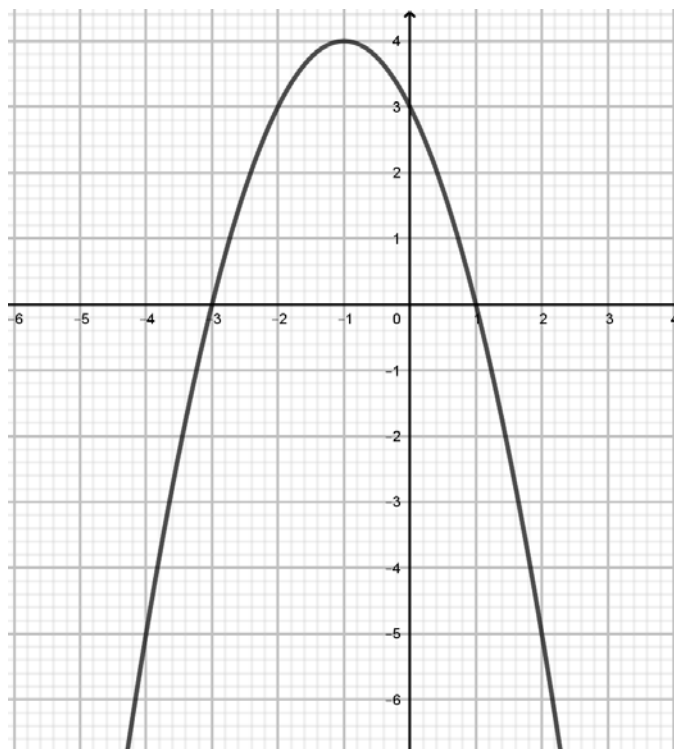
(ii) τον άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής της [2 μον.]

(iii) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ και το πρόσημο της διακρίνουσας [2 μον.]

(iv) τις τιμές των a, b, γ [2 μον.]

(v) την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{f(2) \cdot P + f(1) \cdot \sqrt{2019}}{f(-2) - f(0) \cdot S} \quad [1 \text{ μον.}]$$



(β) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής $g(x)$ στη μορφή $a(x + \kappa)^2 + \lambda$, η οποία

προκύπτει από τη μετατόπιση της πιο πάνω γραφικής παράστασης της $f(x)$,

2 μονάδες προς τα δεξιά και 3 μονάδες προς τα κάτω.

[2 μον.]

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + \lambda + 2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ με λύσεις x_1, x_2 .

(α) Να υπολογίσετε τις τιμές του λ , ώστε η εξίσωση να έχει λύσεις:

[5 μον.]

(i) αντίστροφες

(ii) πραγματικές

(β) Να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού με λύσεις $\rho_1 = \frac{x_1 + x_2}{x_1}$ και $\rho_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_2}$.

[3 μον.]

(γ) Αν η εξίσωση που σχηματίστηκε είναι $(\lambda + 2)x^2 - 4\lambda^2 x + 4\lambda^2 = 0$, να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι λύσεις της είναι ετερόσημες.

[2 μον.]

3. Δίνεται η ευθεία (ε_1) : $y = \frac{1}{2}x + 4$

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B που η ευθεία (ε_1) τέμνει τον άξονα $\psi\psi'$ και να δείξετε ότι το σημείο $A(8, 8)$ ανήκει στην (ε_1) .

(β) Αν ευθεία (ε_2) τέμνει τον άξονα $\chi\chi'$ στο σημείο $\Gamma(\kappa, 0)$ και είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος AB στο σημείο M, να βρείτε την τιμή του κ .

(γ) Αν $\kappa = 7$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ του παραλληλογράμμου ΜΓΒΔ.

(δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΟΓΜΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

(ε) Να βρείτε κατά προσέγγιση ακεραίου το μέτρο της $\Delta\hat{A}\Gamma$.

4. (α) Δίνονται οι παραστάσεις:

[6 μον.]

$$A = \sin^2\theta(\tan^2\theta - \varepsilon\phi^2\theta) + \eta\mu^2\theta(\sigma\tau\epsilon\mu^2\theta - \sigma\phi^2\theta) \text{ και}$$

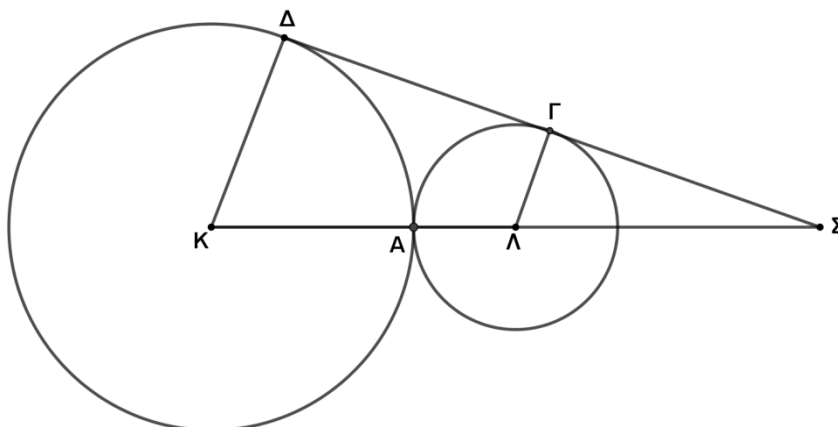
$$B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{\varepsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\sin^2(\pi - x)}{\sigma\phi(2\pi - x) - \sin(-x)}$$

Να αποδείξετε ότι $A = B$.

(β) Αν $(8\sin^3\theta + 65)^{\frac{2}{3}} = 16$ με $0^\circ < \theta < 360^\circ$, να βρείτε τις τιμές της γωνίας θ .

[4 μον.]

5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Αν $\Sigma\Delta$ είναι μια κοινή εξωτερική εφαπτομένη τους, να δείξετε ότι:



- (α) (i) τα τρίγωνα $\Sigma\overset{\Delta}{\Gamma}\overset{\Delta}{\Lambda}$ και $\Sigma\overset{\Delta}{\Delta}K$ είναι όμοια [3 μον.]
(ii) $R \cdot (\Sigma\Gamma) = \rho \cdot (\Sigma\Delta)$
- (β) $\angle\overset{\Delta}{\Delta}\overset{\Delta}{\Gamma} = 90^\circ$ (Υπόδειξη: Να φέρετε την κοινή εσωτερική εφαπτομένη τους) [2 μον.]
- (γ) (i) τα τρίγωνα $\Sigma\overset{\Delta}{\Delta}\overset{\Delta}{\Delta}$ και $\Sigma\overset{\Delta}{\Gamma}A$ είναι όμοια [3 μον.]
(ii) $(\Sigma A)^2 = (\Sigma\Gamma) \cdot (\Sigma\Delta)$
- (δ) $\frac{(\Sigma A)^2}{(\Sigma\Gamma)^2} = \frac{R}{\rho}$ [2 μον.]

Διευθυντής

Ιάκωβος Παπαντωνίου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΤΜΗΜΑ: ΑΡ.:

ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23 / 05 /2019

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2:30΄

ΩΡΑ: 7:45΄

ΒΑΘΜΟΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΣ:

ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:

Υπογρ. Καθ.:

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	Σύνολο
										 /50

B1	B2	B3	B4	B5	Σύνολο
					 /50

Σύνολο
..... /100

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ (.....) ΣΕΛΙΔΕΣ

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
 - β) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
 - γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
 - δ) Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνεται αναλυτικά ο τρόπος επίλυσής τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της επίλυσής τους δεν θα λαμβάνονται υπόψη.

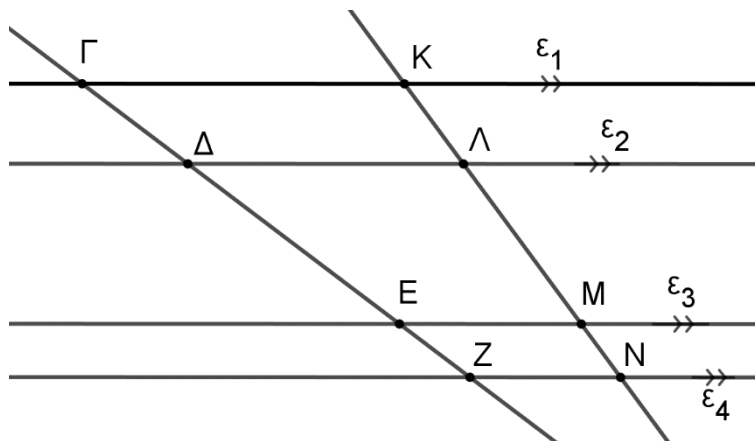
ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1) Να μετατρέψετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

α) $A = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$

β) $B = \frac{28}{\sqrt[3]{4}}$

- 2) Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι:
 $\Gamma\Delta = 3\text{cm}$, $EZ = 2\text{cm}$,
 $\Gamma Z = 11\text{cm}$, $\Lambda M = 4\text{cm}$
 και $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3 // \varepsilon_4$.
 Να υπολογίσετε το μήκος του MN .

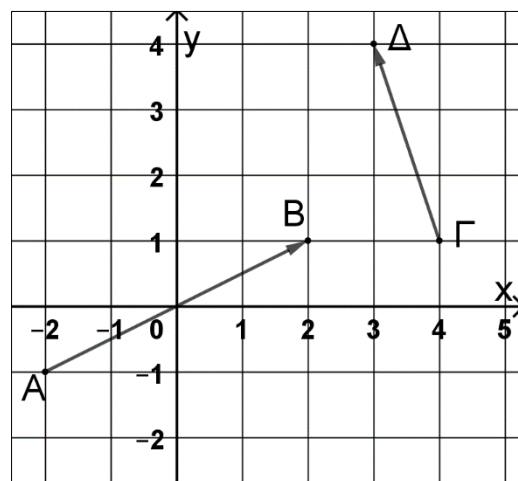


- 3) Αν για τη γωνία ω ισχύει $\sin \omega = -\frac{3}{5}$ και $\varepsilon\phi\omega < 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = 12\sigma\phi\omega - 25\eta\mu\omega - 9\tau\epsilon\mu\omega$.

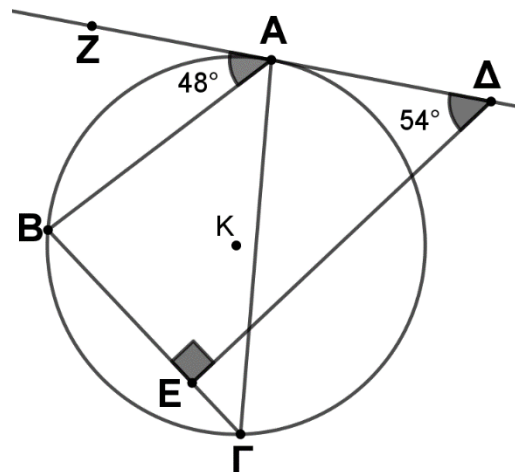
- 4) Με βάση το διπλανό σχήμα:

α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\vec{w} = \vec{AB} - \vec{\Gamma\Delta}$.

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}$, όπου $\vec{u} = 3 \cdot \vec{AB} - \frac{1}{2} \cdot \vec{\Delta\Gamma}$.



- 5) Στο διπλανό σχήμα η $Z\Delta$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A , K είναι το κέντρο του κύκλου, $\hat{ZAB} = 48^\circ$, $\hat{AE} = 54^\circ$ και $\Delta E \perp B\Gamma$.
Να αποδείξετε ότι η AB είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{ZAG}$.



- 6) Ο τελικός βαθμός ενός φοιτητή στο μάθημα της Άλγεβρας προκύπτει από τον βαθμό δύο εργασιών, τον βαθμό της ενδιάμεσης εξέτασης και τον βαθμό της τελικής εξέτασης. Η πρώτη εργασία έχει βαρύτητα 10%, η δεύτερη εργασία 15%, η ενδιάμεση εξέταση 25% και η τελική εξέταση 50%. Να βρείτε τον τελικό βαθμό στο μάθημα της Άλγεβρας του Χρίστου, αν ο βαθμός στην πρώτη του εργασία ήταν $\beta_1 = \begin{vmatrix} 20 & -5 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$, στη δεύτερη $\beta_2 = 78$, στην ενδιάμεση εξέταση ήταν $\beta_3 = 90$ και στην τελική εξέταση ήταν

$$\beta_4 = \begin{vmatrix} 20 & 8 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

- 7) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(y^2 + 3y)(9 - y^2)}{y - 2} \leq 0$.

- 8) Η εξίσωση $x^2 - \beta x - \gamma = 0$ έχει πραγματικές ρίζες τις x_1, x_2 .
Αν $2 < \beta < 7$ και $-10 < \gamma < -4$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α) $K = x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2$

β) $\Lambda = x_1^2 \cdot x_2 + x_2^2 \cdot x_1$

- 9) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = 2 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j}$.

α) Να βρείτε μοναδιαίο διάνυσμα που είναι αντίρροπο με το $\vec{\alpha}$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ να είναι ίσο με το διάνυσμα $\vec{\delta} = \begin{pmatrix} \kappa^2 + 9 \\ \kappa + 4 \end{pmatrix}$.

- 10) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $f(x) = (\lambda - 1)x^2 + 4x + \lambda + 2$ είναι θετική $\forall x \in \mathbb{R}$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$.

Να βρείτε:

- α) Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $f(x)$.

.....

.

- β) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της $f(x)$ και τις συντεταγμένες της κορυφής.

.....

.

- γ) Τις λύσεις της εξίσωσης: $f(x) = 6$.

.....

.

- δ) Τις λύσεις της ανίσωσης: $f(x) \leq 0$.

.....

.

- ε) Τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε η ανίσωση $f(x) \geq \mu$ να έχει το πολύ μία λύση.

.....

- στ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $M = \frac{\alpha^2 + \beta\gamma}{\alpha\beta}$.

- ζ) Με τη μέθοδο συμπλήρωσης του τέλειου τετραγώνου να εκφράσετε την παραβολή $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ στη μορφή $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda$.

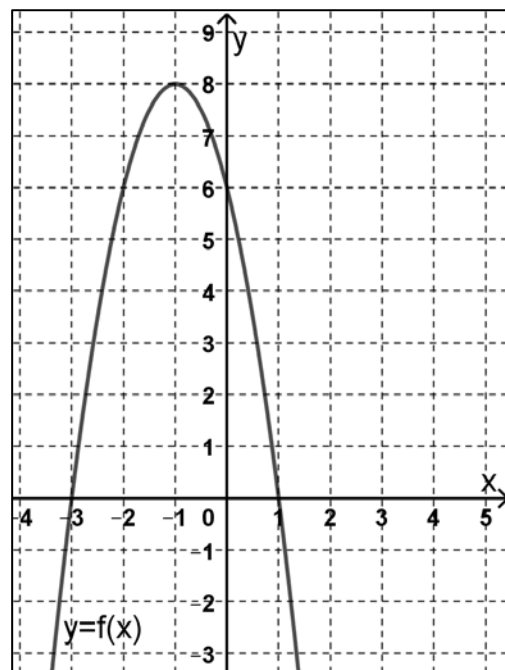
- η) Να περιγράψετε πώς, με κατάλληλες μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $g(x) = -2x^2$, προκύπτει η γραφική παράσταση της $f(x)$.

(Mov. 1-1-1-1-1-2-2-1)

- 2) α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

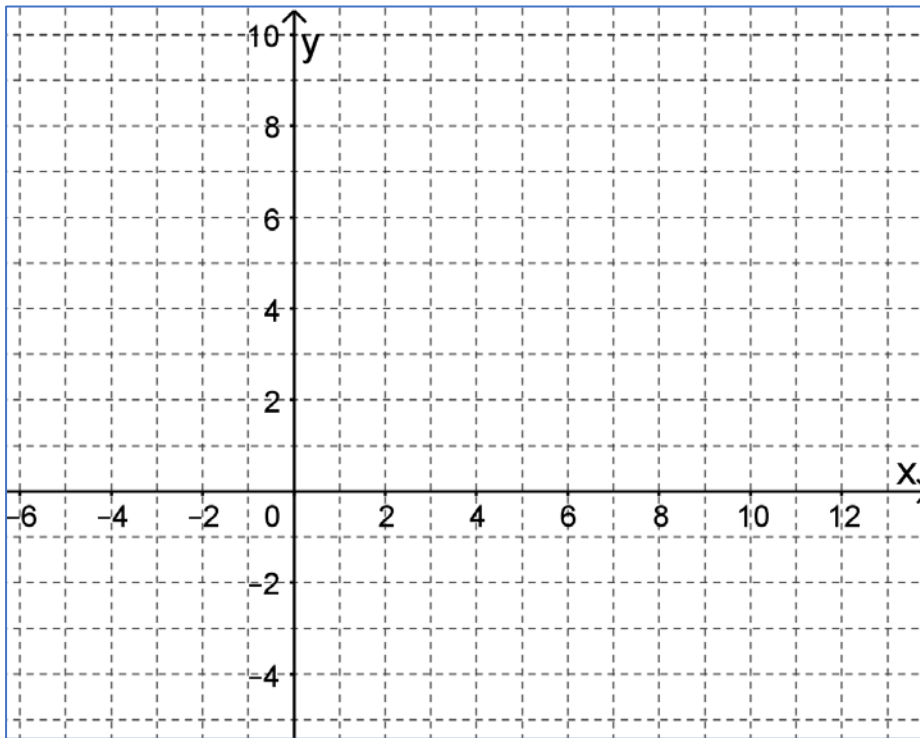
$$\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot [\sigma\phi(-x) - \epsilon\phi(\pi - x)]}{2 \eta\mu^2(\pi + x) - 1} = -1$$

- β) Δίνεται ότι: $x = \epsilon\phi\theta - 2$, $y = \sigma\tau\epsilon\mu\theta$, $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ και $xy^2 + 2y^2 - 6x - 16 = 0$.



- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xy^2 + 2y^2 - 6x - 16 = 0$ μετασχηματίζεται στην εξίσωση $\sigma\phi^2\theta - 4\sigma\phi\theta - 5 = 0$.
- ii) Να βρείτε την τιμή του θ .

- 3) Δίνονται τα σημεία $A(2, -4)$, $B(\mu, \nu)$ και $\Gamma(\mu + 2, 2\mu)$, όπου $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ και το σημείο B είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$.
- α) Να βρείτε την τιμή του μ και του ν .
- β) Για $\mu = 4$ και $\nu = 2$ να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $A\Gamma$ και να δείξετε ότι αυτή είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): x + 3y - 2 = 0$.
- γ) Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό σημείο του B ως προς την ευθεία (ε) είναι το σημείο $B'(\frac{12}{5}, -\frac{14}{5})$.
- δ) Αν Δ είναι σημείο πάνω στην (ε) με τετμημένη $x_\Delta = -4$ και Z σημείο του επιπέδου ώστε το $A\Delta\Gamma Z$ να είναι παραλληλόγραμμο, να βρείτε τις συντεταγμένες του Z και την εφαπτομένη της γωνίας $\widehat{\Gamma\Delta A}$. (Να γίνει σχήμα)



- 4) Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \sqrt{(\sqrt{3} \cdot \sqrt{2})^2 + \eta\mu^2(-2019^\circ) + \sigma\upsilon\nu^2(2019^\circ) + \sqrt{13}}$$

$$B = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2\left[\tau\epsilon\mu^2\frac{3\pi}{7} - \epsilon\phi^2\left(\frac{10\pi}{7}\right)\right] - \sqrt{13}}$$

Χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

α) Να αποδείξετε ότι $A > B$.

(Mov. 4)

β) Αν $K = B - A$ να δείξετε ότι $K^2 = 2$.

(Mov. 3)

γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

(Mov.3)

$$\Gamma = \left(K + \sqrt{2}\right)^{2019} + \left(K - \sqrt{2}\right)^{2020}$$

5) Στο πιο κάτω σχήμα η ευθεία ΕΑΖ είναι εφαπτομένη του κύκλου (Κ, R) στο Α, $\Gamma\Delta \perp AB$ και η ΑΒ διάμετρος.

α) Να βρείτε:

i) Το μήκος της ακτίνας R.

ii) Την εξίσωση της ΓΔ.

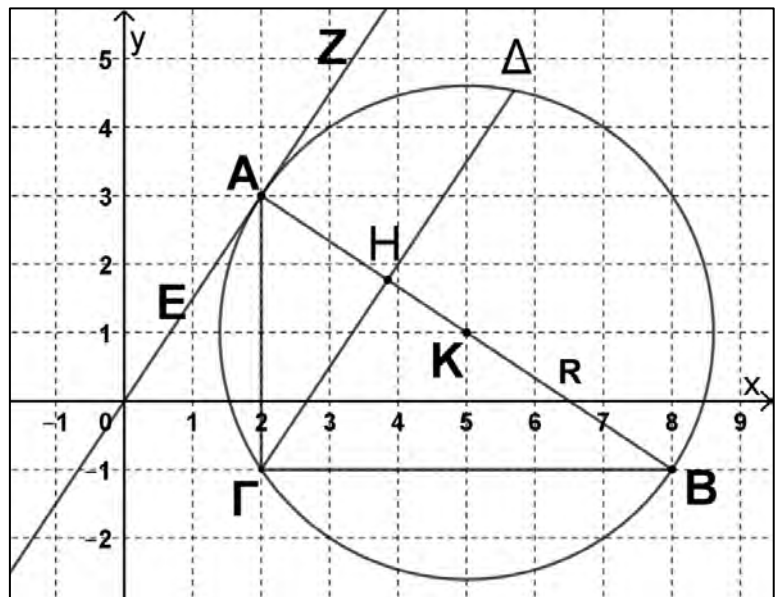
iii) Το μήκος του ΑΗ.

(Mov. 2-3-2)

β) Να αποδείξετε ότι:

$$(A\Delta)(BK) = (A\Gamma)(K\Delta).$$

(Mov. 3)



Η Διευθύντρια

Ιωάννου Σοφία

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 21/05/2019

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2,5 ώρες

ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 07:45 π.μ.

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι.
(Τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν και με μολύβι.)
- Τα σχήματα να μεταφέρονται στη θέση που λύνεται η άσκηση, όπου είναι απαραίτητο.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, σφραγισμένης από το σχολείο.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Ο βαθμός σε ένα εξεταζόμενο μάθημα στο τέλος της χρονιάς συνυπολογίζεται από τους βαθμούς των δύο τετραμήνων με βαρύτητα 35% στο κάθε τετράμηνο και 30% στην τελική εξέταση. Αν ένας μαθητής είχε στα Μαθηματικά 14 και 15 στα δύο τετράμηνα και στην τελική εξέταση ο βαθμός του ήταν 08, να υπολογίσετε τον βαθμό του στο μάθημα των Μαθηματικών στο τέλος της χρονιάς.

2. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt[4]{8x+1} = 3$, $x \geq -\frac{1}{8}$

3. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 6x + 7 = 0$, με λύσεις x_1 και x_2 . Χωρίς να λύσετε την εξίσωση, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
 $A = x_1 + x_2 + 4x_1 \cdot x_2$

4. Αν $-6 < x < -2$ και $2 < y < 3$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

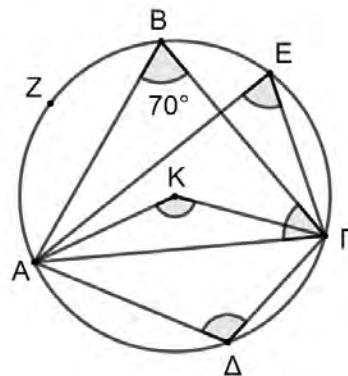
(α) $x + y$

(μονάδες 2)

(β) $-\frac{3x}{y}$

(μονάδες 3)

5. Ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = B\Gamma$), είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, ρ) . Αν $\widehat{AB\Gamma} = 70^\circ$, να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών $\widehat{A\hat{E}\Gamma}$, $\widehat{A\hat{K}\Gamma}$, $\widehat{A\hat{\Delta}\Gamma}$, $\widehat{B\hat{\Gamma}A}$ και του τόξου AZB .
Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Να βρείτε:

(α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$

(μονάδες 2)

(β) το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι αντίρροπο του διανύσματος $\vec{u}$

(μονάδες 3)

7. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(x^2 - x - 6)(3 - x)}{x^2 - 16} \geq 0$

8. Δίνεται ότι $5\sigma\eta\nu\omega + 2 = -3 - 8\sigma\eta\nu\omega$ και $180^\circ < \omega < 270^\circ$. Με τη χρήση των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{12\sigma\tau\epsilon\mu\omega + 5\epsilon\varphi\omega}{24\sigma\varphi\omega}$$

9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A} = 90^\circ$ και ύψος $A\Delta$.

(α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι όμοια.

(μονάδες 2)

(β) Αν $AB = 6 \text{ cm}$ και $A\Gamma = 8 \text{ cm}$, να υπολογίσετε το μήκος του ΔB .

(μονάδες 3)

10. Τα σημεία $A(-1,3)$, $B(4,4)$ και $\Gamma(2,0)$ είναι κορυφές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ .

(μονάδες 2)

(β) Να υπολογίσετε την απόσταση των πλευρών $A\Delta$ και $B\Gamma$.

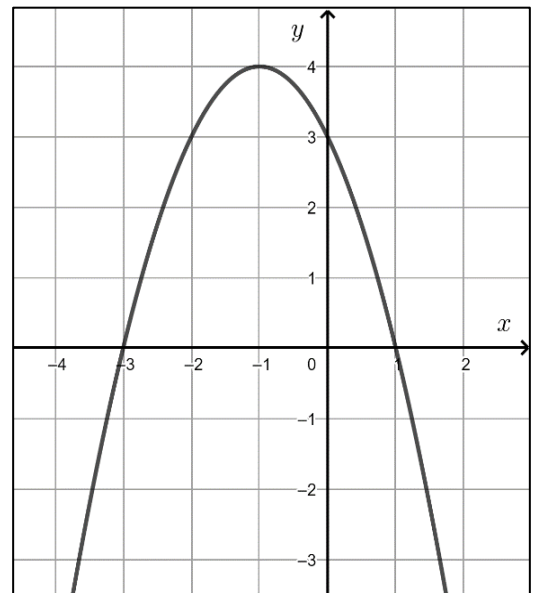
(μονάδες 3)

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$. Με βάση το σχήμα, να βρείτε:

- (α) το σύνολο τιμών της συνάρτησης
(μονάδες 1)
- (β) τον άξονα συμμετρίας της
(μονάδες 1)
- (γ) τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$
(μονάδες 1)
- (δ) τις τιμές των α, β και γ
(μονάδες 3)
- (ε) τον τύπο της συνάρτησης στη μορφή
 $f(x) = \alpha(x + \kappa)^2 + \lambda$
(μονάδες 2)
- (στ) τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 3$
(μονάδες 1)
- (ζ) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 0$
(μονάδες 1)



2. Να αποδείξετε ότι οι παραστάσεις A και B ισούνται:

$$A = \frac{\tau\epsilon\mu\theta}{\epsilon\varphi\theta + \sigma\varphi\theta}$$

$$B = \frac{\eta\mu(\pi - \theta) + \epsilon\varphi(-\theta) \cdot \epsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\tau\epsilon\mu(2\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(6\pi + \theta) \cdot \tau\epsilon\mu\left(\frac{7\pi}{2} - \theta\right)}$$

3. Τα σημεία $A(-1,2)$, $B(2,3)$, $\Gamma(4,0)$ είναι κορυφές του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Αν $-5x + 4y - 2 = 0$ είναι η εξίσωση μίας διαγωνίου του, να βρείτε:

- (α) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
(μονάδες 2)
- (β) την εξίσωση του ύψους BE του τραπεζίου
(μονάδες 3)
- (γ) το μέτρο της οξείας γωνίας $\widehat{A\hat{B}\Delta}$ (κατά προσέγγιση ακεραίου)
(μονάδες 2)
- (δ) τις συντεταγμένες της κορυφής Δ
(μονάδες 3)

4. Δίνεται η εξίσωση $\sigma\eta\nu\theta \cdot x^2 + 2\eta\mu\theta \cdot x - \sigma\eta\nu\theta = 0, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Χωρίς να τη λύσετε:

(α) να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες

(μονάδες 4)

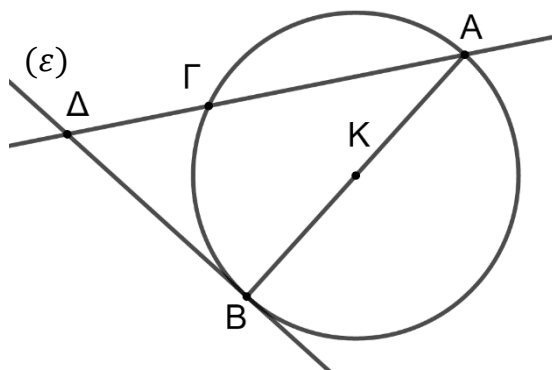
(β) να βρείτε την τιμή του θ , ώστε η εξίσωση να έχει δύο αντίθετες λύσεις

(μονάδες 3)

(γ) να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $S^2 + 4P^2 = 4\tau\epsilon\mu^2\theta$, όπου S το άθροισμα και P το γινόμενο των λύσεων της εξίσωσης

(μονάδες 3)

5. Δίνεται κύκλος (K, R) με διάμετρο AB και χορδή AG . Η εφαπτομένη (ϵ) του κύκλου στο σημείο B τέμνει την προέκταση της χορδής AG στο Δ .



Να δείξετε ότι:

(α) $(B\Gamma)^2 = (\Gamma\Delta) \cdot (A\Gamma)$

(μονάδες 4)

(β) $(\Gamma\Delta)^2 + (\Gamma B)^2 + 4R^2 = (A\Delta)^2$

(μονάδες 3)

(γ) $(A\Delta)^2 - (AB)^2 = (\Delta\Gamma) \cdot (\Delta A)$

(μονάδες 3)

Ο Διευθυντής

Νίκος Πρωτοπαπάς

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΑΞΗ: Α (5ωρο)

ΜΕΡΟΣ Α' Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του μέρους Α'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Αν x_1 και x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 6x + 2 = 0$, να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων χωρίς να λύσετε την εξίσωση:

α) $x_1 + x_2$ (1,5 μ.)

β) $x_1 \cdot x_2$ (1,5 μ.)

γ) $7x_1 - x_1x_2 + 7x_2$ (1 μ.)

δ) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ (1 μ.)

2. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις και να απλοποιήσετε τις απαντήσεις σας:

α) $x^2 - 20 = 0$ (2,5 μ.)

β) $(x+1)^{\frac{2}{3}} = 4$ (2,5 μ.)

3. Έστω ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος x και πλάτος y . Αν ισχύουν $5 < x < 7$ και $3 < y < 5$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται:

α) Η περίμετρος του ορθογωνίου και

β) το εμβαδόν του.

4. Αν $\eta\mu x = \frac{4}{5}$ και $90^\circ < x < 180^\circ$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{5\sigma\upsilon\nu x - 3\epsilon\phi x}{4\sigma\phi x + 3\tau\epsilon\mu x}$$

5. Δίνονται τα σημεία $A(5, -2)$ και $B(1, 0)$.

α) Να βρείτε τη διανυσματική ακτίνα του σημείου A (2 μ.)

β) Να υπολογίσετε το διάνυσμα $\vec{AB}$ (2 μ.)

γ) Να υπολογίσετε το μοναδιαίο διάνυσμα που να είναι αντίρροπο του $\vec{AB}$. (1 μ.)

6. Ένα αρχείο στον ηλεκτρονικό υπολογιστή έχει τους βαθμούς πέντε μαθητών σε μια εξέταση. Το αρχείο έχει αλλοιωθεί και η τέταρτη παρατήρηση δεν μπορεί να διαβαστεί:

13	11	18		17
----	----	----	--	----

I) Αν γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή και των πέντε παρατηρήσεων είναι 15, να υπολογίσετε:

α) Τον βαθμό που δεν μπορεί να διαβαστεί. (2 μ.)

β) Τον συντελεστή μεταβλητότητας (CV) των πέντε παρατηρήσεων και να εξετάσετε αν οι παρατηρήσεις παρουσιάζουν ομοιογένεια δικαιολογώντας την απάντησή σας. (2 μ.)

II) Αν στους πέντε βαθμούς προστεθεί μια επιπλέον μονάδα στον καθένα από αυτούς, να βρείτε πώς θα επηρεαστεί η νέα μέση τιμή και η νέα τοπική απόκλιση των νέων αναθεωρημένων βαθμών. (1 μ.)

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda + 2)x + \lambda^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο σε όλο το πεδίο ορισμού της. (4 μ.)

β) Να υπολογίσετε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f για $\lambda = 2$. (1 μ.)

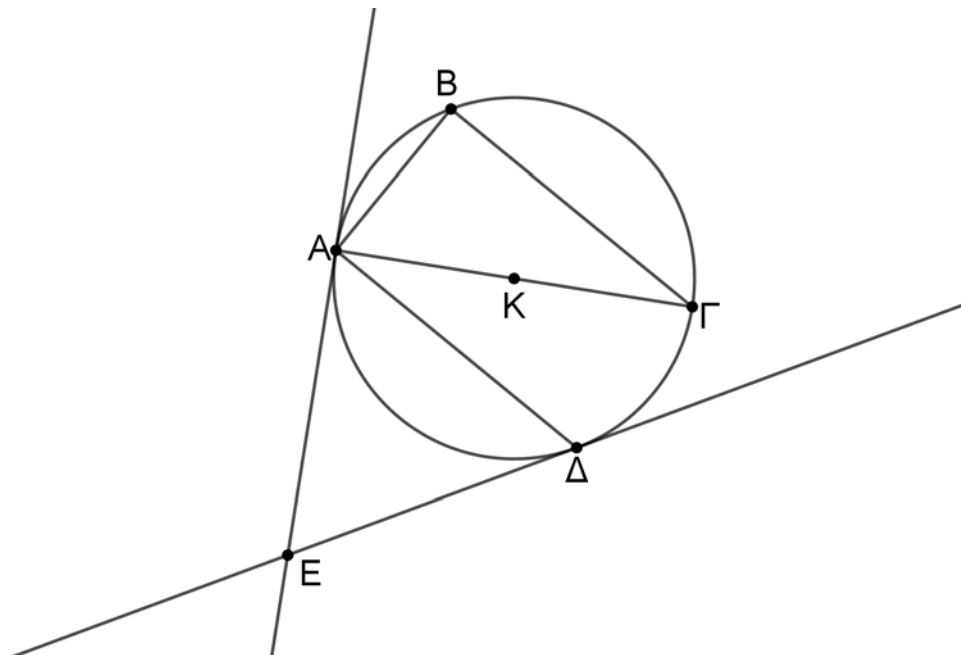
8. I) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\varepsilon\phi x - \eta\mu x}{\eta\mu^3 x} = \frac{\tau\epsilon\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$ (3 μ.)

II) Έστω η τριγωνομετρική συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία είναι περιοδική.

α) Να γράψετε την περίοδό της. (1 μ.)

β) Αν ισχύει $\eta\mu\theta = \frac{1}{3}$, να υπολογίσετε την τιμή του $\eta\mu(\theta - 2\pi)$. (1 μ.)

9. Δίνεται τετράπλευρο με κορυφές $A(4,8)$, $B(6,7)$, $\Gamma(4,3)$ και $\Delta(2,4)$.
- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (2 μ.)
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του. (2 μ.)
- γ) Αν το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι όμοιο με ένα μεγαλύτερο τετράπλευρο $EZH\Theta$ και ο λόγος ομοιότητας των δυο τετραπλεύρων είναι $\lambda = 4$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του $EZH\Theta$. (1 μ.)
10. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο K , διάμετρο $A\Gamma$ και εφαπτομένες EA και ED . Δικαιολογώντας όλα σας τα βήματα να απαντήσετε στα πιο κάτω:
- α) Αν $B\Gamma = 6\text{cm}$ και το μήκος της διαμέτρου $A\Gamma$ είναι διπλάσιο από το μήκος του AB , να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας του κύκλου. (3 μ.)
- β) Αν επιπλέον η $B\Gamma$ είναι παράλληλη με την $A\Delta$ ($B\Gamma \parallel A\Delta$), να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου EAD . (2 μ.)



ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β

ΜΕΡΟΣ Β' Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του μέρους Β'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

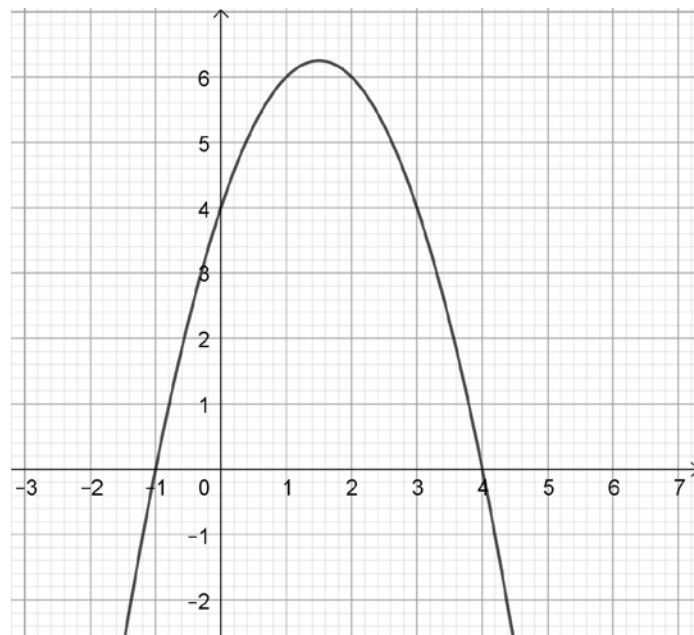
$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Να βρείτε:

- α) Το πρόσημο του α
- β) Το πρόσημο της διακρίνουσας Δ
- γ) Την τιμή του γ
- δ) Τις λύσεις της εξίσωσης
 $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$
- ε) Την τιμή $f(1)$
- στ) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει
 $f(x) \geq 4$

και να υπολογίσετε:

- ζ) Την τιμή του α
- η) Την τιμή του β
- θ) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας
- ι) Το σύνολο τιμών της f



2. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{\sin(-x) + \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\varepsilon\varphi(\pi + x) - \varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tau\epsilon\mu(x - 2\pi)} = 1 - \eta\mu x$$

3. Ρόμβος ΑΒΓΔ έχει κορυφές Β(-2,2) και Δ(5,-1). Δίνονται επίσης οι εξισώσεις των ευθειών: ΑΒ: $-2x + 5y = 14$ και ΑΔ: $5x + 2y = 23$.

- α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των κορυφών Α και Γ του ρόμβου. (6 μ.)
- β) Να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής Β από την ευθεία $y = x$. (2 μ.)
- γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΒÂΓ. (2 μ.)

4. Δίνεται κύκλος με κέντρο Κ και διάμετρο ΒΓ. Από τυχαίο σημείο Α του κύκλου φέρουμε το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ. Η προέκταση του ύψους τέμνει ξανά τον κύκλο στο σημείο Ε.

α) Να δείξετε ότι: $(AB)^2 = (BG)(BΔ)$ (8 μ.)

β) Να δείξετε ότι: το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. (2 μ.)

5. Ι) Δίνεται η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$. Να αποδείξετε τους τύπους του Vietta για το άθροισμα (S) και το γινόμενο (P) των ριζών. (2 μ.)

ΙΙ) Δίνεται η εξίσωση $3x^2 + 5μx + 2μ - 3 = 0$, $μ \in \mathbb{R}$ με λύσεις τις x_1 και x_2 .

α) Να δείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση έχει δυο πραγματικές και άνισες λύσεις για κάθε $μ \in \mathbb{R}$. (2 μ.)

Στη συνέχεια, να υπολογίσετε τις τιμές του $μ \in \mathbb{R}$, ώστε:

β) η εξίσωση να έχει λύσεις αντίστροφες (2 μ.)

γ) να ισχύει $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$ (2 μ.)

δ) να ισχύει $\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} \geq 1$ (2 μ.)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

Ο Διευθυντής

Γιάννης Γεωργίου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2019**ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23/05/2019****ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2.30΄****ΩΡΑ: 8:00 – 10:30****Οδηγίες:**

- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- β) Να γράφετε με μελάνι μπλε (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
- δ) Τα σχήματα να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
- ε) Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνεται ο τρόπος απάντησής τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της απαιτούμενης αιτιολόγησης δεν θα λαμβάνονται υπόψη.
- στ) Να συμμορφώνεστε πρόθυμα με τις οδηγίες των επιτηρητών.
- ζ) Η ΔΟΛΙΕΥΣΗ ΤΙΜΩΡΕΙΤΑΙ ΑΥΣΤΗΡΑ

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη, το ΜΕΡΟΣ Α΄ και το ΜΕΡΟΣ Β΄.

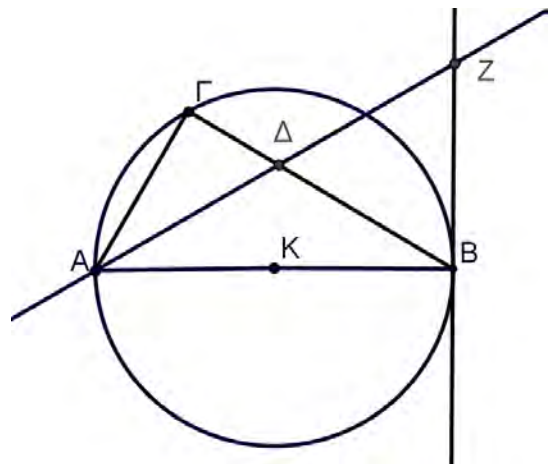
Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις . Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

1. Να σχηματίσετε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει λύσεις :
$$x_1 = 3 + \sqrt{5} \text{ και } x_2 = 3 - \sqrt{5}$$
2. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt[3]{2x - 1} = 3$.
3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-3,6)$ και σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα των τετμημένων.

4. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-2, 2)$, $B(1, -7)$ και $\Gamma(-11, -3)$. Να υπολογίσετε:
- (α) τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$
- (β) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}$
5. Για τον τελικό βαθμό, στο μάθημα της Στατιστικής, ένας φοιτητής βαθμολογείται με 15% για τη συμμετοχή στην τάξη, με 35% για ενδιάμεση εξέταση και με 50% για την τελική εξέταση. Ποιος θα είναι ο τελικός βαθμός του φοιτητή, που βαθμολογήθηκε με 85 για τη συμμετοχή του στην τάξη, με 78 στην ενδιάμεση εξέταση και με 55 στην τελική εξέταση.
6. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(3-x)(x^2-4)}{x^2-3x+2} \leq 0$.
7. Τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, ρ) . Οι προεκτάσεις των πλευρών $A\Delta$ και $B\Gamma$ τέμνονται σε σημείο E . Να δείξετε ότι :
- (α) Τα τρίγωνα ABE και $E\Delta\Gamma$ είναι όμοια.
- (β) Να γράψετε την αναλογία των πλευρών τους.
8. Να αποδείξετε την ταυτότητα : $\frac{\sigma\upsilon\nu^3\omega}{\eta\mu\omega} + \frac{\varepsilon\varphi\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} = \sigma\varphi\omega$.

9. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο K . Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με AB διάμετρος του κύκλου και $B\chi$ εφαπτομένη του κύκλου στο B . Αν η προέκταση της διχοτόμου $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει τον κύκλο στο M και τη $B\chi$ στο Z , να δείξετε ότι $\Delta B = BZ$.



10. Να υπολογίσετε την γωνιά θ , αν $0 < \theta < \pi$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ και

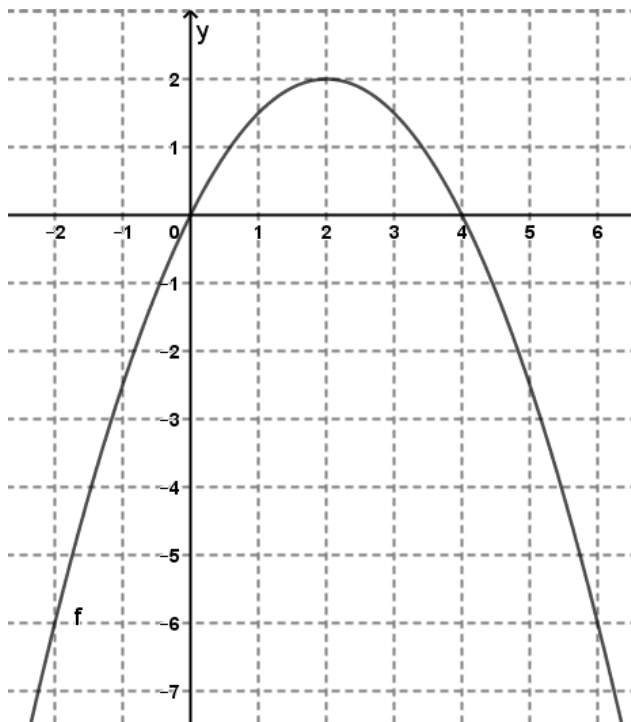
$$\frac{\eta\mu(5\pi - \theta)\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2} - \theta\right)\sigma\upsilon\nu(2\pi - \theta)}{\varepsilon\varphi(\pi + \theta)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις . Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$.

Να βρείτε:

- (α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της παραβολής
- (β) το πρόσημο του a και το πρόσημο της διακρίνουσας
- (γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής και τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής
- (δ) τις τιμές των a, β, γ
- (ε) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{-f(x) - 6}$.



2. Για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύουν οι σχέσεις $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$.

Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

(α) $\alpha + 3\beta$

(β) $\frac{\alpha}{\beta}$

(γ) $\alpha^2 - 3\alpha\beta$

(δ) $\alpha \eta \mu \theta - \beta \sigma \nu \nu \theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

3. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \sqrt{(3\eta\mu\omega + 4\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (4\eta\mu\omega - 3\sigma\upsilon\nu\omega)^2},$$

$$B = \left(\frac{1}{\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega} \right)^2 - \left(\frac{1 - \varepsilon\varphi^2\omega}{\varepsilon\varphi\omega} \right)^2$$

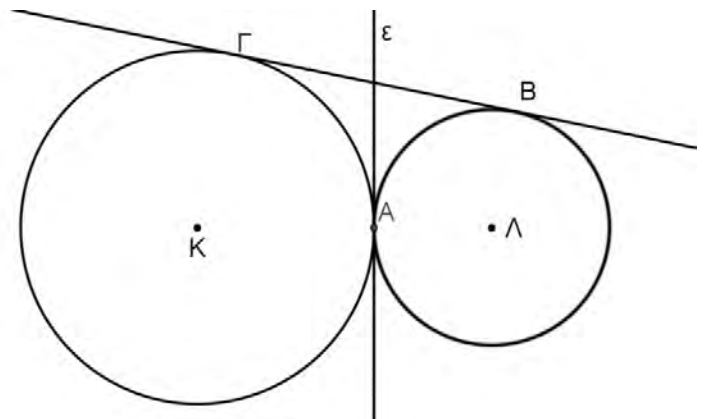
Να αποδείξετε ότι οι παραστάσεις A και B είναι ανεξάρτητες του ω .

4. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφή $A(1, 1)$ και διαγώνιες που δίνονται από τις εξισώσεις $x + 4y - 12 = 0$ και $3x - 2y - 1 = 0$. Αν γνωρίζετε ότι η κορυφή Δ βρίσκεται πάνω στον άξονα yy' , να βρείτε :

- (α) τις συντεταγμένες των άλλων κορυφών του
- (β) την εξίσωση της πλευράς $\Gamma\Delta$
- (γ) την απόσταση της κορυφής A από την πλευρά $\Gamma\Delta$
- (δ) το εμβαδόν του
- (ε) την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι διαγώνιοι του .

5. Στο διπλανό σχήμα δίνονται δύο άνισοι

κύκλοι με κέντρα K και Λ που εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Η ευθεία ε είναι η κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων στο σημείο τους A . Ευθεία $B\Gamma$ εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία Γ και B .



Η ευθεία AG τέμνει τον κύκλο με κέντρο το Λ στο Δ . Να αποδείξετε ότι:

- (α) η γωνία BAD είναι ορθή
- (β) $(BD)^2 = (AD) \cdot (\Gamma\Delta)$
- (γ) η BD είναι ίση με το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΔE που φέρουμε από το Δ προς τον κύκλο με κέντρο το K .

Τέλος Δοκιμίου

Οι εισηγητές :

Δήμητρα Σκαπούλλαρου Χαρή (Β.Δ)
 Δέσπω Πολυκάρπου
 Άντρη Κακκίντηρου
 Πιέρρος Φακλαμάς
 Σταύρος Κοντογιώργης
 Αναστασία Γεωργαλλά

Η Συντονίστρια Β.Δ.

Δήμητρα Σκαπούλλαρου Χαρή

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Κυριάκος Κωστέας

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Προσανατολισμού

ΤΑΞΗ: Α΄ Λυκείου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 28/05/2019

ΔΙΑΡΚΕΙΑ
ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα στο **τετράδιο απαντήσεων**.
 2. Να γράψετε μόνο με **μπλε μελάνι**. Για τα σχήματα επιτρέπεται το μολύβι.
 3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού (υγρού ή ταινίας/Tipp Ex).
 4. Στη λύση των θεμάτων πρέπει να φαίνεται **όλη** η αναγκαία εργασία.
 5. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Περιλαμβάνει 10 θέματα

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Θέμα Α1

Να μετατρέψετε την πιο κάτω παράσταση σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής (να φαίνονται όλες οι αναγκαίες πράξεις):

$$K = \frac{23}{5 - \sqrt{2}}$$

Θέμα Α2

Δίνονται τα σημεία $A(1, -1)$ και $B(2, 5)$. Να βρείτε:

- α) την κλίση της ευθείας AB, (2 μονάδες)
- β) την εξίσωση της ευθείας AB. (3 μονάδες)

Θέμα A3

Ένας μαθητής της Α' Λυκείου πήρε στα τέσσερα διαγωνίσματα των Μαθηματικών τους βαθμούς 11, 12, 13 και 15. Ποιος θα είναι ο μέσος όρος των διαγωνισμάτων του, αν τα διαγωνίσματα έχουν βαρύτητα 20%, 20%, 30% και 30% αντίστοιχα;

Θέμα A4

Αν $\sin\theta = -\frac{12}{13}$ και $180^\circ < \theta < 270^\circ$, να υπολογίσετε, χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές

ταυτότητες, την τιμή της πιο κάτω παράστασης:

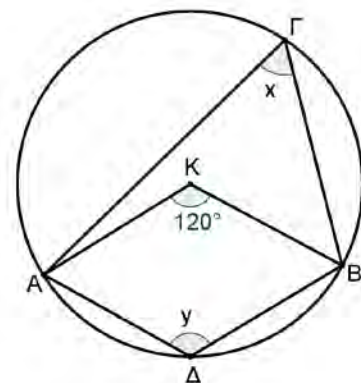
$$A = \frac{12\varepsilon\phi\theta - 13\eta\mu\theta}{24\tau\epsilon\mu\theta - 4}$$

Θέμα A5

Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (Κ, R) και γωνία $\widehat{AKB} = 120^\circ$.

Να υπολογίσετε τις γωνίες x και y .

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



Θέμα A6

Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + (3\lambda - 1)x + \lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τις τιμές του λ , $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

α) να έχει ρίζες αντίθετες, (2 μονάδες)

β) να έχει ρίζες πραγματικές και ίσες. (3 μονάδες)

Θέμα A7

Αν $-6 < \alpha < -3$ και $2 < \beta < 7$, να βρείτε το μικρότερο διάστημα στο οποίο βρίσκεται η τιμή των πιο κάτω παραστάσεων:

α) $\Gamma = 3\beta - 2\alpha$ (2 μονάδες)

β) $\Delta = \frac{\beta^2 - 1}{3 - \alpha}$ (3 μονάδες)

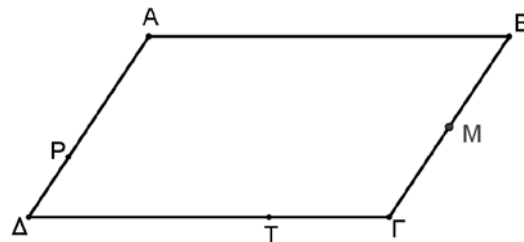
Θέμα Α8

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\alpha + 1)x + (\alpha - 1) = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν S και P είναι το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης, αντίστοιχα, να λύσετε την πιο κάτω ανίσωση:

$$\frac{4-P}{S} + \frac{2(S-1)}{P} \geq \frac{4}{P \cdot S}$$

Θέμα Α9

Στο διπλανό σχήμα δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, P σημείο στην πλευρά $A\Delta$ έτσι ώστε $(AP) = 2(P\Delta)$ και T σημείο στην πλευρά $\Delta\Gamma$ έτσι ώστε $(\Delta T) = 2(T\Gamma)$.



- α) Αν $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{B\Gamma} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{AM}$, $\vec{\Delta P}$, $\vec{T\Delta}$ και $\vec{PT}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(3 μονάδες)

- β) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{AM}$ και $\vec{PT}$ είναι παράλληλα.

(2 μονάδες)

Θέμα Α10

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(\alpha + 5, 4)$, $B(1, 1)$ και $\Gamma(5, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 0$.

- α) Αν $(A\Gamma)^{3/2} = \sqrt{125}$, να αποδείξετε ότι $\alpha = -4$, όπου $(A\Gamma)$ το μήκος της πλευράς $A\Gamma$.

(2 μονάδες)

- β) Αν $\alpha = -4$, να υπολογίσετε το μήκος του ύψους $B\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(2 μονάδες)

- γ) Να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι ομόρροπο με το διάνυσμα $\vec{B\Gamma}$.

(1 μονάδα)

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Περιλαμβάνει 5 θέματα

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες

Θέμα Β1

Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (κ , 2 cm),

διάμετρος ΒΓ, εφαπτόμενο τμήμα ΣΑ ίσο με $2\sqrt{3}$ cm

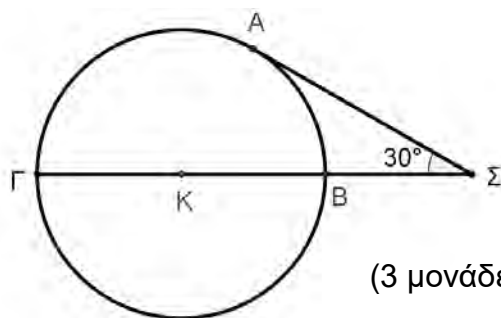
και γωνία $\hat{A}\hat{\Sigma}\Gamma = 30^\circ$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΣ.

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών $\hat{\Sigma}\hat{K}\hat{A}$, $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{B}$ και $\hat{B}\hat{A}\hat{\Sigma}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = ΑΣ$.

δ) Να βρείτε τη θέση των κύκλων (κ, 2 cm) και (ς, 2 cm).



(3 μονάδες)

(3 μονάδες)

(2 μονάδες)

(2 μονάδες)

Θέμα Β2

Μια κορυφή ενός ρόμβου είναι η $(2, 4)$. Η εξίσωση μιας διαγώνιου του είναι $y = x - 2$ και

η εξίσωση μιας πλευράς του είναι $5x - y = 6$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της άλλης διαγωνίου του ρόμβου είναι $x + y = 6$ (3 μονάδες)

β) Να βρείτε το σημείο τομής των διαγώνιων του. (2 μονάδες)

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των άλλων κορυφών του. (3 μονάδες)

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ρόμβου. (2 μονάδες)

Θέμα Β3

Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) , Γ τυχαίο

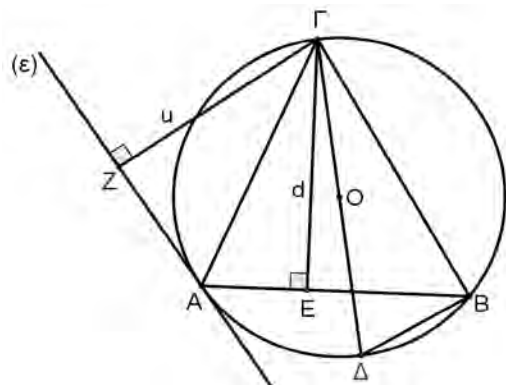
σημείο του, ΓΔ διάμετρος και (ε) εφαπτομένη του

κύκλου στο σημείο Α. Να αποδείξετε ότι ισχύουν

ΟΙ ΠΙΟ ΚΑΤΩ ΣΧΕΣΕΙΣ:

$$\alpha) \quad d = \frac{(A\Gamma) \cdot (\Gamma B)}{2R},$$

όπου d η απόσταση του σημείου Γ από τη χορδή AB



(5 μονάδες)

$$\beta) \quad u = \frac{(A\Gamma) \cdot d}{(\Gamma B)},$$

όπου u η απόσταση του σημείου Γ από την εφαπτομένη (ε)

(5 μονάδες)

Θέμα Β4

Δίνονται οι πιο κάτω παραστάσεις:

$$A = \frac{\eta\mu(\frac{5\pi}{2} + \omega) \cdot \sigma\tau\epsilon\mu(\omega - \frac{\pi}{2})}{\sigma\phi(\pi + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} + \omega) \cdot \epsilon\phi(\omega - \pi)} \quad \text{και} \quad B = \begin{vmatrix} \eta\mu(\frac{3\pi}{2} - \omega) & \sigma\upsilon\nu(\pi + \omega) \\ \sigma\upsilon\nu(\omega - \pi) & -\tau\epsilon\mu(2\pi - \omega) \end{vmatrix}$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = \sigma\tau\epsilon\mu\omega$ και $B = \eta\mu^2\omega$ (7 μονάδες)

β) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω:

i. Να υπολογίσετε την τιμή του ω , $\omega \in (0, \pi)$, ώστε να ισχύει η πιο κάτω σχέση:

$$(1 - B) \cdot A - \frac{1}{\eta\mu(\pi - \omega)} = -\frac{1}{2} \quad (2 \text{ μονάδες})$$

ii. Αν $\Gamma = \frac{3}{A} - 5$, $\omega \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, να αποδείξετε ότι $25 < \Gamma^2 < 64$ (1 μονάδα)

Θέμα Β5

Δίνονται οι πιο κάτω παραβολές με τύπο:

$$f(x) = 2[x - (\lambda + \mu)]^2 + 7 \quad \text{και} \quad g(x) = -x^2 - 2x + \lambda^2 - 2\mu - 4, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η παραβολή g έχει κορυφή $K(-1, \lambda^2 - 2\mu - 3)$. (2 μονάδες)

β) Αν οι κορυφές των πιο πάνω παραβολών f και g συμπίπτουν, να υπολογίσετε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, αν $\mu > \lambda$. (3 μονάδες)

γ) Αν $\mu = 3$ και $\lambda = -4$ να βρείτε:

i. Το σύνολο τιμών των πιο πάνω παραβολών f και g (2 μονάδες)

ii. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $g(x) = 0$, χωρίς να την λύσετε να κατασκευάσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες:

$$\rho_1 = \sqrt{x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 + 100} \quad \text{και} \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2}} \quad (3 \text{ μονάδες})$$

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

Ο Διευθυντής

.....

Μάριος Ιωάννου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά
ΤΑΞΗ: Α΄ Λυκείου Προσανατολισμού

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 24/05/2019
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ώρες

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- (α) Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (στα σχήματα επιτρέπεται μολύβι).
- (β) Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
- (γ) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- (δ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- A1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:
- (α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$
 - (β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$
- A2. Αν $x, y \in \mathbb{R}$ και ισχύει $2 < x < 5$ και $-6 < y < -3$, να βρείτε μεταξύ ποιων πραγματικών αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:
- (α) $2x + y$ (μονάδες 1)
 - (β) $-3xy$ (μονάδες 2)
 - (γ) $\frac{x}{y}$ (μονάδες 2)
- A3. Αν $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:
- $$K = 5\eta\mu\theta + 9\tau\epsilon\mu\theta - 8\sigma\phi\theta - 4$$
- A4. Η βαθμολογία που πήρε ένας φοιτητής στα έξι (6) μαθήματα του Α΄ εξαμήνου είναι:
- 5, 8, 6, 7, 7, 9. Να υπολογίσετε:
- (α) την τυπική απόκλιση (s) της βαθμολογίας των μαθημάτων του Α΄ εξαμήνου, κατά προσέγγιση εκατοστού
 - (β) τον μέσο όρο της βαθμολογίας του, αν τα μαθήματα έχουν βαρύτητα ανάλογη με τις περιόδους διδασκαλίας του κάθε μαθήματος, που είναι αντίστοιχα 5, 3, 5, 4, 2 και 1.
- A5. Να υπολογίσετε, κατά προσέγγιση εκατοστού, το μέτρο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν μεταξύ τους οι ευθείες $\varepsilon_1: y = 3x + 1$ και $\varepsilon_2: 4y - x = 5$

A6. Να λύσετε την εξίσωση: $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt[4]{x} & 0 \\ 0 & \sqrt[4]{x^3} & -3 \\ \sqrt{x} & 1 & \sqrt{8} \end{vmatrix} = 27 + 3\sqrt{2}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ με } x \geq 0$

A7. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$

(α) Να αποδείξετε ότι $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$, όπου S και P το άθροισμα και το γινόμενο των λύσεων της εξίσωσης, αντίστοιχα. (μονάδες 2)

(β) Αν $\alpha = 1, \beta = -5$ και $\gamma = 3$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 + 3}{3x_1 + 3x_2} \quad (\text{μονάδες } 3)$$

A8. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(x^2 - 8x + 7)(1 - x^2)}{(2x - 1)(-x^2 + 4x - 5)} \geq 0$

A9. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) .

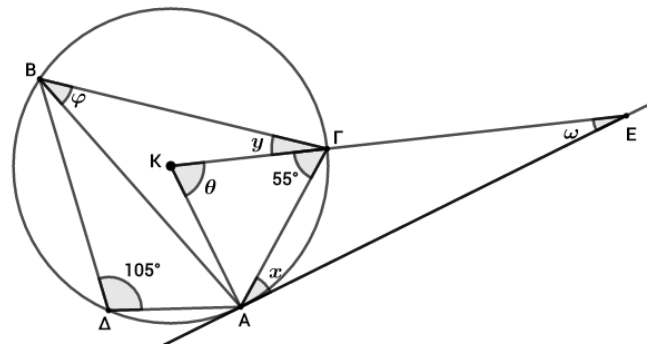
Αν AE είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A , τα σημεία K, Γ, E είναι συνευθειακά,

$\widehat{B\Delta A} = 105^\circ$ και $\widehat{K\Gamma A} = 55^\circ$,

να υπολογίσετε τις γωνίες:

$\widehat{A\hat{K}\Gamma} = \theta, \widehat{A\hat{B}\Gamma} = \varphi, \widehat{\Gamma\hat{A}E} = x,$

$\widehat{B\hat{\Gamma}K} = y$ και $\widehat{\Gamma\hat{E}A} = \omega$



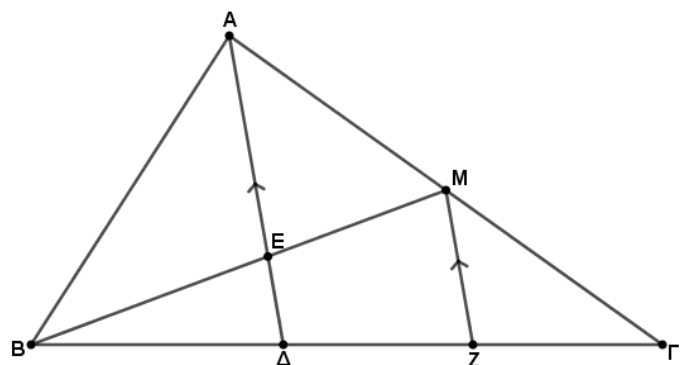
A10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$.

Αν BM διάμεσος, Δ σημείο της $B\Gamma$ τέτοιο

ώστε $3B\Delta = 2\Delta\Gamma$, E σημείο τομής της

διαμέσου BM με την AD και $AD \parallel ZM$

όπου Z σημείο της $B\Gamma$, να δείξετε ότι:



(α) $\Delta\Gamma = 2\Delta Z$

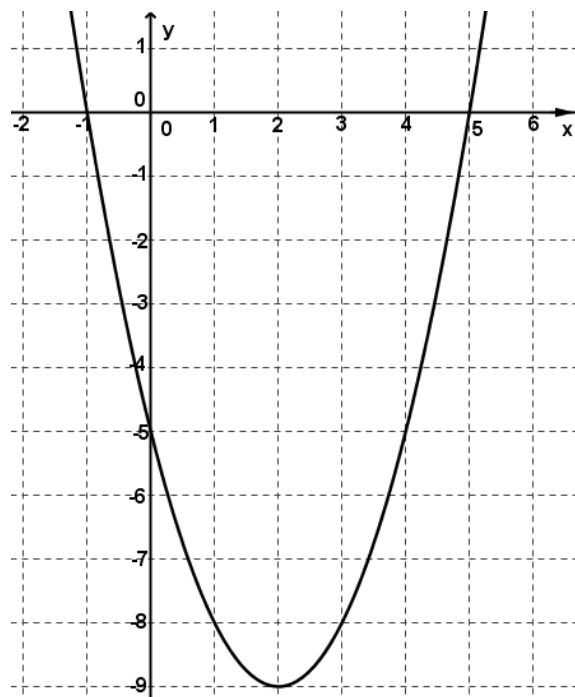
(β) $\frac{BE}{EM} = \frac{4}{3}$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$, είναι η παραβολή του σχήματος. Να βρείτε:

- (α) το σύνολο τιμών της f
- (β) το πρόσημο της διακρίνουσας του τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$
- (γ) τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής
- (δ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής
- (ε) την τιμή του γ
- (στ) τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$
- (ζ) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) < 0$
- (η) την τιμή της παράστασης: $\frac{6\beta - \alpha}{\gamma}$



B2. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \sigma\upsilon\nu(2\pi - \theta) + \sigma\tau\epsilon\mu(\pi - \theta)}{\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) - \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \tau\epsilon\mu(7\pi - \theta)}$

- (α) Να δείξετε ότι: $A = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1 - \eta\mu\theta}$
- (β) Αν $A + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \eta\mu\theta} = 4$ και $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας θ

B3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (\mu + 1)x^2 + (3\mu - 1)x + \mu - 5$, $\mu \in \mathbb{R}$

- (α) Να βρείτε τις πραγματικές τιμές της παραμέτρου μ , ώστε η συνάρτηση f να ορίζει παραβολή (μονάδες 2)

Αν η συνάρτηση f ορίζει παραβολή να βρείτε:

- (β) τις τιμές της παραμέτρου μ ώστε:
 - (i) η γραφική παράσταση της παραβολής να τέμνει τον άξονα των y στο σημείο με τεταγμένη ίση με 3
 - (ii) η παραβολή να έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -2$
 - (iii) η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει λύσεις αντίθετες (μονάδες 6)
- (γ) το είδος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$ (μονάδες 2)

- B4. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$. Αν το σημείο $(-1, 4)$ είναι μία από τις κορυφές του, η ευθεία AB έχει εξίσωση $y - 5x + 15 = 0$ και η ευθεία $B\Gamma$ έχει εξίσωση $5y - x + 3 = 0$, να βρείτε:
- (α) τις συντεταγμένες της κορυφής B
 - (β) την εξίσωση της διαγωνίου $A\Gamma$, αφού πρώτα δείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου τομής M των διαγωνίων του είναι $(1, 2)$
 - (γ) την απόσταση της κορυφής A από την πλευρά $B\Gamma$
 - (δ) το εμβαδόν του ρόμβου $AB\Gamma\Delta$
- B5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R) και η διχοτόμος AD του τριγώνου τέμνει τον κύκλο στο σημείο E .
- (α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $\Gamma\Delta E$ είναι όμοια (μονάδες 3)
 - (β) Να δείξετε ότι: (i) τα τρίγωνα $A\Gamma E$ και $\Gamma E\Delta$ είναι όμοια (μονάδες 3)
(ii) ισχύει η σχέση $(\Gamma E)^2 = (AE)(\Delta E)$ (μονάδες 2)
 - (γ) Αν επιπλέον ισχύει $(A\Delta)^2 = (\Delta B)(\Delta \Gamma)$, να δείξετε ότι $(AE)^2 = 2(\Gamma E)^2$ (μονάδες 2)

Ο Διευθυντής

.....

Αλέξανδρος Αλεξάνδρου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

Τάξη: Α' Λυκείου

Μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού

Ημερομηνία: 24 / 05 / 2019

Αρ. σελίδων: 4

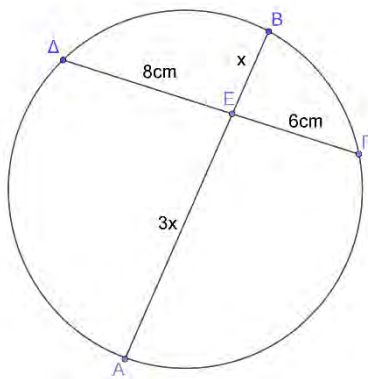
Χρόνος εξέτασης: 2:30 (δύο ώρες και τριάντα λεπτά)

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες (συμπεριλαμβανομένης και της 1^{ης} σελίδας)
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη.
- Το μέρος Α' αποτελείται από 10 ασκήσεις. Πρέπει να λύσετε ΚΑΙ τις 10.
(Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με **5 μονάδες**)
- Το μέρος Β' αποτελείται από 5 ασκήσεις. Πρέπει να λύσετε ΚΑΙ τις 5.
(Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με **10 μονάδες**).
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικών υλικών.
- Γράφετε μόνο με μελάνι μπλε χρώματος. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.

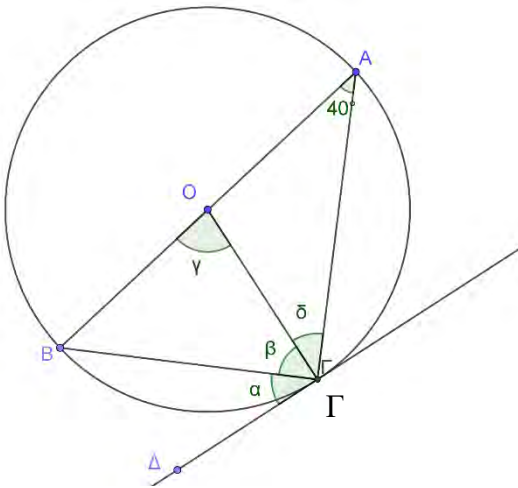
Μέρος Α:

1. Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή: α) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ β) $\frac{16}{3-\sqrt{5}}$.
2. Αν $1 < \chi < 2$ και $-2 < \psi < -1$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:
α) $3\chi + \psi$ β) $\chi \cdot \psi$
3. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται $\Delta E = 8\text{cm}$, $E\Gamma = 6\text{cm}$, $BE = \chi\text{cm}$ και $AE = 3\chi\text{cm}$. Να υπολογίσετε την τιμή του χ .



4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{a} + \vec{b}$
β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{a}$.
5. α) Να δείξετε χωρίς την χρήση υπολογιστικής μηχανής ότι : $(2\sqrt{3} + 1) \cdot (3 - 2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} - 9$
β) Να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $\chi_1 = 2\sqrt{3} + 1$ και $\chi_2 = 3 - 2\sqrt{3}$.
6. Ένας μαθητής πήρε το β' τετράμηνο στα διαγωνίσματα 15, 18 και 16, στην προφορική εξέταση 18 και στην εργασία 19. Να βρείτε τι βαθμό θα πάρει στο β' τετράμηνο αν :
α) Όλοι οι βαθμοί έχουν την ίδια βαρύτητα. (μον. 2)
β) Όλοι οι βαθμοί έχουν την ίδια βαρύτητα αλλά μειωθούν κατά 3 βαθμούς ο καθένας. (μον. 1)
γ) Τα διαγωνίσματα έχουν βαρύτητα 25% το καθένα, το προφορικό 15% και η εργασία 10%. (μον. 2)
7. Αν $\eta\mu\theta = \frac{12}{13}$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$ να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:
$$A = \frac{5\varepsilon\phi\theta - 12\sigma\phi\theta}{10\tau\varepsilon\mu\theta}$$

8. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 40^\circ$, AB διάμετρος και ΔΓ εφαπτομένη του κύκλου (O,R) στο σημείο Γ. Να υπολογίσετε δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας τα μέτρα των γωνιών α, β, γ και δ.



9. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(x^2 - 1)(x^2 + 2x - 3)}{(-2x^2 + 3x - 2)(x + 4)} \geq 0$

10. Δίνεται το τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(0,3), B(4,0) και $\Gamma(\frac{8}{3}, 5)$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.

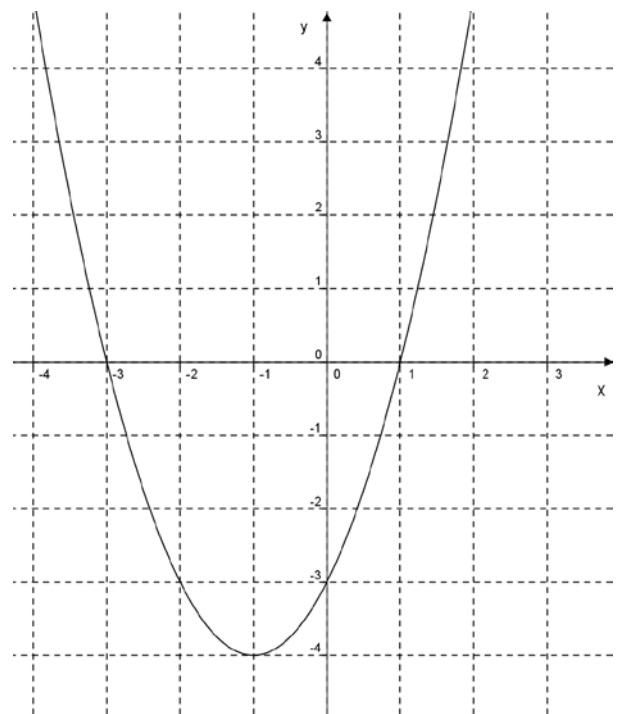
Μέρος Β:

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με τύπο

$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma$$

Να βρείτε:

- το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της
(μον. 2)
- το πρόσημο του α και της διακρίνουσας Δ
(μον. 2)
- την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής
(μον. 2)
- τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \leq 0$
(μον. 1)
- τις τιμές των παραμέτρων α, β και γ.
(μον. 3)



2. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(7,5), B(2,3) και Γ(4-2).

α) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΒΔ

β) Να βρείτε την απόσταση της κορυφής Α από το ύψος ΒΔ.

γ) Να δείξετε ότι $\hat{B} = 90^\circ$.

δ) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΓΜ.

3. Δίνεται κύκλος (Κ, R) και ΑΗ η διάμετρος του. Το τρίγωνο ABΓ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο. Να φέρετε το ύψος ΑΔ την εφαπτομένη (ε) στο σημείο Β και την κάθετη ΑΖ στην (ε). Να δείξετε ότι :

α) Ισχύει η σχέση $(ΑΓ)(ΑΖ) = (ΑΒ)(ΑΔ)$ β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΗ είναι όμοια.

4. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$\frac{\sigma\phi\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\phi\theta - \sigma\upsilon\nu\theta} = 1 + \eta\mu\theta$$

β) Δίνονται οι παραστάσεις

$$Α = \frac{\epsilon\phi(\frac{3\pi}{2} - \chi) \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{3\pi}{2} + \chi)}{\sigma\upsilon\nu(2\pi - \chi)}$$

$$Β = \sigma\upsilon\nu(\chi - \frac{\pi}{2}) \cdot \eta\mu(\pi + \chi)$$

$$\Gamma = \sigma\upsilon\nu(\pi + \chi) \cdot \eta\mu(\chi - \frac{\pi}{2})$$

Να δείξετε ότι $A+B=\Gamma$

5. Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 + (\mu+1)\chi + \mu-2=0$ $\mu \in R$, με ρίζες χ_1, χ_2 .

α) Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου μ για τις οποίες η εξίσωση έχει ρίζες που ικανοποιούν

$$\text{τη σχέση } 5\chi_1^2 + 5\chi_2^2 - 2\chi_1\chi_2 < 32$$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\mu \in R$.

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Α. Χριστοδουλίδης

ΟΝΟΜΑ :

ΤΜΗΜΑ:Αρ.... ΒΑΘΜΟΣ:

ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:

ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΚΑΘΗΓΗΤΗ:



ΛΥΚΕΙΟ ΣΟΛΕΑΣ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2018 – 2019

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2018 – 2019

ΜΑΘΗΜΑ: **Μαθηματικά Κατεύθυνσης**

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: **22 /5/19**

ΤΑΞΗ: **Α' Λυκείου**

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: **2,5ώρες**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από (5) σελίδες.
- Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι στο φύλλο απαντήσεων.
- Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

- 1) Η Μαρία σε πέντε διαφορετικά μαθήματα για το Α΄ τετράμηνο πήρε τους βαθμούς 20, 17, 16, 18, και 14. Αν τα μαθήματα αυτά έχουν βαρύτητα ανάλογη με τις διδακτικές περιόδους του κάθε μαθήματος, που είναι 1, 2, 3, 5 και 4 αντίστοιχα, να βρείτε το σταθμισμένο μέσο όρο.

- 2) Δίνεται η εξίσωση $3x^2 - 5x + 6 = 0$ με ρίζες x_1, x_2 . Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2}$

β) $9x_1x_2 + 9x_1 + 9x_2$

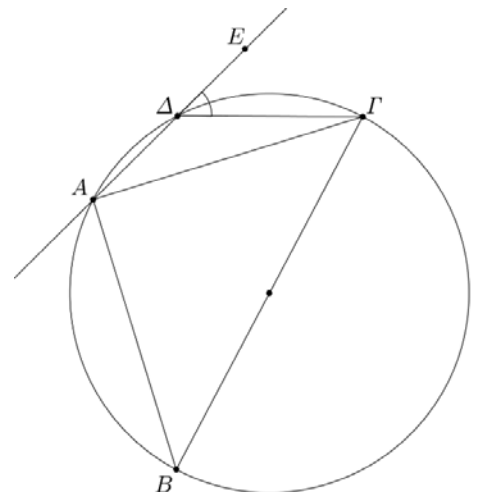
- 3) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{3x^2 - x + 2}{x^2 - 2x + 3} < 2$.

- 4) Αν $2 < x < 8$ και $-3 < y < -1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α) $x + 3y$

β) $(y - x)^2$

- 5) Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου. Το σημείο Δ είναι τυχαίο σημείο. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\Gamma \hat{\Delta} E$. (Δικαιολογήστε την απάντησή σας)



- 6) α) Αν $A(2,3)$ και $B(1,4)$, να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$

- β) Αν $\vec{v}$ διάνυσμα ομόρροπο του $\overrightarrow{AB}$ και $|\vec{v}| = 4\sqrt{2}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του $\vec{v}$.

- 7) α) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τις $x_1 = 2 + \sqrt{3}$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}$.

- β) Να δείξετε ότι : $x_1^3 + x_2^3 = 52$.

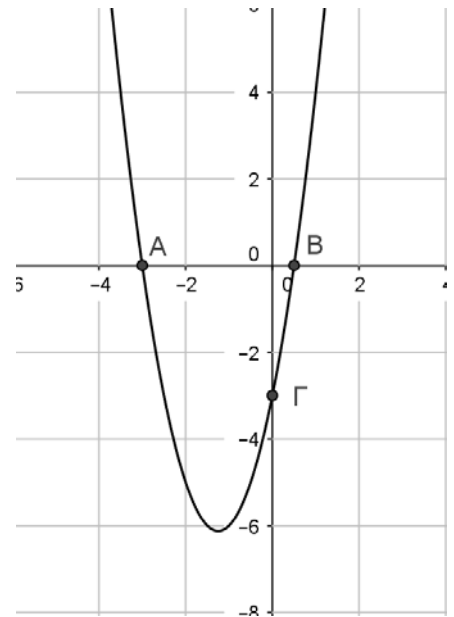
- 8) Δίνεται κύκλος με κέντρο K και ακτίνα $R=4\text{ cm}$. Από σημείο Σ εκτός του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη του ΣA κύκλου (A είναι το σημείο επαφής) και την τέμνουσα $\Sigma B\Gamma$ (B, Γ σημεία του κύκλου), που περνά το κέντρο K του κύκλου.
- α) Να αποδείξετε ότι $(\Sigma A)^2 = (\Sigma B) \cdot (\Sigma \Gamma)$.
- β) Αν $(\Sigma A)=2\sqrt{5}\text{cm}$ να υπολογίσετε το μήκος (ΣK) .
- 9) Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(1,4)$. Η μεσοκάθετος του AB έχει εξίσωση $(\epsilon): 2x + 4y = 3$.
Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B .
- 10) Αν $\epsilon\phi\alpha = 3\epsilon\phi\beta$, να αποδείξετε ότι
$$\frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta} = \frac{4\eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\beta}{1 - 4\eta\mu^2\beta}.$$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) Τραπεζίο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) έχει κορυφές $B(-3,2)$, $\Gamma(-2,6)$ και εξίσωση της πλευράς $\Gamma\Delta$:
 $6x + 8y - 30 = 0$.
- α) Να βρείτε την εξίσωση της AB .
- β) Να βρείτε την απόσταση των παραλλήλων πλευρών.
- γ) Αν $\widehat{B\Delta\Gamma} = 90^\circ$ να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου Δ είναι $(5,0)$.
- δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\widehat{\Delta B\Gamma}$.
- ε) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ .

- 2) α) Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$. Αν x_1, x_2 οι λύσεις της εξίσωσης να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$. (μονάδες 2)

β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$. Η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(-3,0)$, $B(\frac{1}{2},0)$ και $\Gamma(0,-3)$. Να βρείτε:



- Τις τιμές των a, b και γ . (μονάδες 2)
- την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f . (μονάδες 2)
- τις συντεταγμένες της κορυφής της γραφικής παράστασης της f . (μονάδες 2)
- τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) \leq 0$. (μονάδες 2)

- 3) Δίνεται η εξίσωση $(1 + \sin \alpha)x^2 - 2\eta \mu \alpha \sin(\alpha + 1)x + \eta^2 \alpha = 0$ με ρίζες x_1, x_2 .

α) Να δείξετε ότι $S = 2\eta \mu \alpha$ και $P = 1 - \sin \alpha$ όπου S και P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης αντίστοιχα.

β) Αν $\alpha = 60^\circ$ να βρείτε: τις τιμές του λ ($\lambda \in \mathbb{R}$), για τις οποίες ισχύει η ανίσωση

$$\frac{\lambda + 2x_1 \cdot x_2}{\lambda^2 - (x_1 - x_2)^2} \leq 1$$

- 4) Δίνεται ότι : $A = \frac{\epsilon \phi(\pi + \theta) \cdot \sigma \upsilon \nu(-\theta) \cdot \epsilon \phi(\frac{3\pi}{2} - \theta)}{\eta \mu(\frac{\pi}{2} - \theta) \cdot \sigma \upsilon \nu(2\pi - \theta) - \eta \mu(\pi + \theta) \cdot \sigma \upsilon \nu(\frac{3\pi}{2} + \theta)}$

α) Να αποδείξετε ότι $A = \sigma \upsilon \nu \theta$. (μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι $-1 \leq A^2 + 3A + 2 \leq 6$ (μονάδες 2)

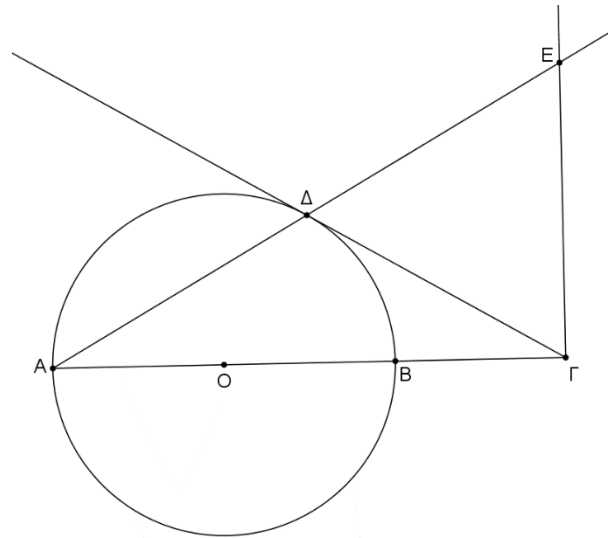
γ) Να λύσετε την εξίσωση : $A^2 = \frac{1}{2}$, όπου $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$. (μονάδες 4)

ΓΔ εφαπτομένη του κύκλου στο Δ και ΓΕ κάθετη στη ΑΓ .

α) $\overset{\Delta}{AB\Delta}$ και $\overset{\Delta}{A\Gamma E}$ είναι όμοια, (μονάδες 3)

$$\gamma) (A\Delta) = \frac{(A\Gamma)(B\Delta)}{(\Gamma\Delta)} \quad (\text{μονάδες } 3)$$

δ) ΓΔΕ ισοσκελές. (μονάδες 2)



Δέσποινα Παπαγιάννη

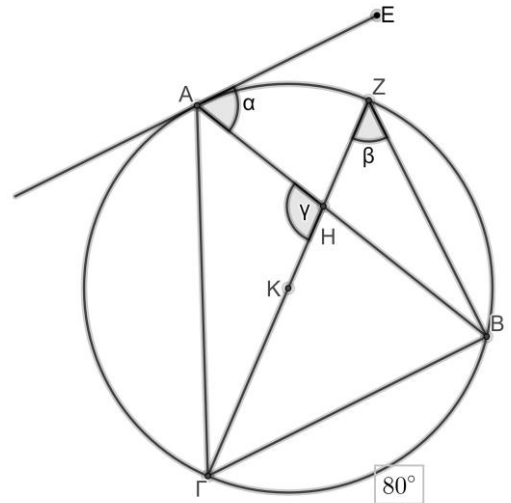
ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ 2019**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****ΤΑΞΗ : Α' ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ****Ημερομηνία: 29/ 5 / 2019****Χρόνος : 2,5 ώρες****ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Να λύσετε όλα τα θέματα στις κόλλες απαντήσεων.
2. Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
4. Επιτρέπεται η χρήση ΜΗ προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
5. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες $x_1 = \sqrt{3} - 1$ και $x_2 = \sqrt{3} + 1$.
2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 32 \\ -24 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:
(α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.
(β) το μέτρο του διανύσματος $\frac{1}{4}\vec{\beta}$.
3. (α) Να μετατρέψετε το κλάσμα σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή: $\frac{20}{\sqrt{8} - \sqrt{3}}$
(Να δείξετε όλες τις πράξεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής)
(β) Να λύσετε την εξίσωση: $(2x - 3)^{\frac{5}{2}} = 32, x \geq \frac{3}{2}$
4. Δίνονται τα σημεία A(2,1) B(1,-2) και Γ(4,2). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.
5. Να βρείτε την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβλητότητας των παρατηρήσεων που ακολουθούν: 5, 8, 16, 9, 7.
(Οι απαντήσεις να δοθούν κατά προσέγγιση δύο δεκαδικών)

6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο κύκλος (K, R) και το ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB=ΑΓ). Αν η ΕΑ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Α και $\Gamma B = 80^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες α, β, γ και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



7. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{3x \cdot (x^2 - x)}{(2x^2 - 7x - 4) \cdot (x^2 + 1)} \leq 0$.
8. Αν ισχύει $2 < \alpha < 5$ και $-3 < \beta < -1$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων: α) $\frac{\alpha}{\beta}$ και β) $\sqrt{\alpha^2 - \beta}$.
9. Αν $12 + 5\epsilon\phi\theta = 0$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να αποδείξετε με χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων ότι $\frac{25\epsilon\phi\theta \cdot \tau\epsilon\mu\theta + 12\sigma\tau\epsilon\mu\theta}{37 - 26\eta\mu\theta} = 13$.
10. Από την κορυφή Α παραλληλογράμμου ABΓΔ φέρουμε ευθεία (ε) η οποία τέμνει την διαγώνια ΒΔ στο Ε ($\Delta E > E B$), την πλευρά ΒΓ στο Ζ και την προέκταση της ΔΓ στο Η. Να αποδείξετε ότι: (α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΕΖΒ είναι όμοια
(β) $(AE)^2 = (EZ) \cdot (EH)$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, όπου $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$

Να βρείτε:

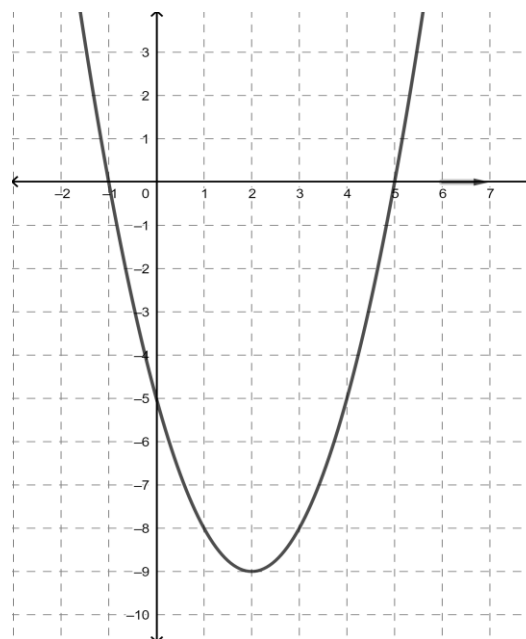
(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)

- (α) το πρόσημο του a .
- (β) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- (γ) την τιμή του γ .
- (δ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας.
- (ε) το πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)$.

(στ) το πρόσημο της παράστασης $\frac{\kappa \cdot f(\kappa) \cdot f(\mu)}{\Delta \cdot \mu}$

όπου Δ η διακρίνουσα της εξίσωσης $f(x) = 0$,

$\kappa < -1$ και $2 < \mu < 5$.



2. Δίνεται η $2x^2 + (4\mu - 1)x + 2\mu - 4 = 0$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$

(α) Για τις οποίες η πιο πάνω εξίσωση:

- i. έχει μια ρίζα τον αριθμό -2.
- ii. έχει ρίζες αντίστροφες.
- iii. έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(β) Για τι οποίες ισχύει η σχέση : $x_1^2 + x_2^2 = x_1 + x_2 + \frac{9}{2}$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες της πιο πάνω εξίσωσης.

3. Δίνονται τα σημεία $A(-6,1)$, $B(-2,3)$ και $\Gamma(-5,0)$

(α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα κύκλου (K,R) με διάμετρο την AB .

(β) Να δείξετε ότι το σημείο Γ ανήκει στον κύκλο (K,R)

(γ) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ κατά προσέγγιση ακεραίου.

(δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο B .

(ε) Αν ΓZ είναι η απόσταση του Γ από την AB να δείξετε ότι $\frac{\Gamma Z}{AB} = \frac{3}{10}$.

4. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$N = \frac{\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi + \theta) + \eta\mu(3\pi - \theta) \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} + \theta\right)}{\sigma\tau\epsilon\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)} \quad \text{και}$$

$$K = \frac{\eta\mu\theta \cdot \sigma\phi\theta - \sigma\upsilon\nu^3\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \epsilon\phi\theta - \eta\mu^3\theta}.$$

Να δείξετε ότι:

(α) $N = \eta\mu\theta$

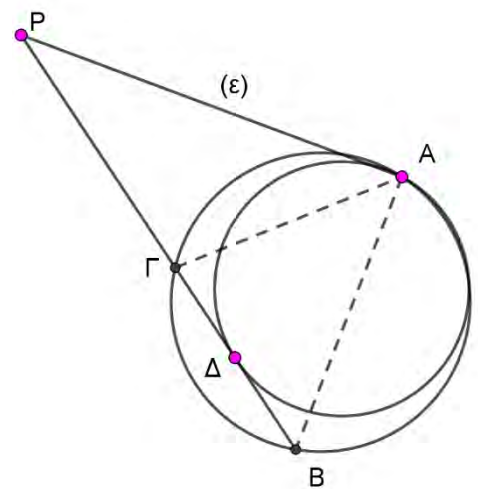
(β) $K = \epsilon\phi\theta$

(γ) Αν $(1 - N^2) \cdot \left(1 + \frac{1}{K^2}\right) = 3$ και $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ να βρείτε το μέτρο της γωνίας θ .

5. Δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο Α. Η (ε) είναι εφαπτομένη των κύκλων στο κοινό τους σημείο Α. ΡΓΒ είναι τέμνουσα του μεγάλου κύκλου η οποία εφάπτεται του μικρού κύκλου στο σημείο Δ.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΡ και ΑΡΒ είναι όμοια.

(β) Να αποδείξετε ότι η ΑΔ διχοτομεί τη γωνία ΒΑΓ



Ο Διευθυντής

Ντίσκος Αλέξιος

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά	ΒΑΘΜΟΣ:
ΤΑΞΗ: Α΄ Λυκείου Προσανατολισμού (5-ωρο)	ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 21/05/19	
ΩΡΑ: 10:45	ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΚΑΘΗΓΗΤΗ:
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ώρες	

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ:	ΤΜΗΜΑ:
-----------------------------------	--------------

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- 1) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- 2) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- 3) Να γράψετε με μπλε μελάνι (Μόνο τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν με μολύβι).

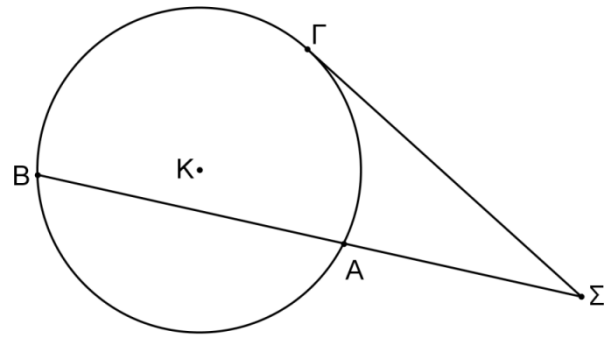
Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δώδεκα (12) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

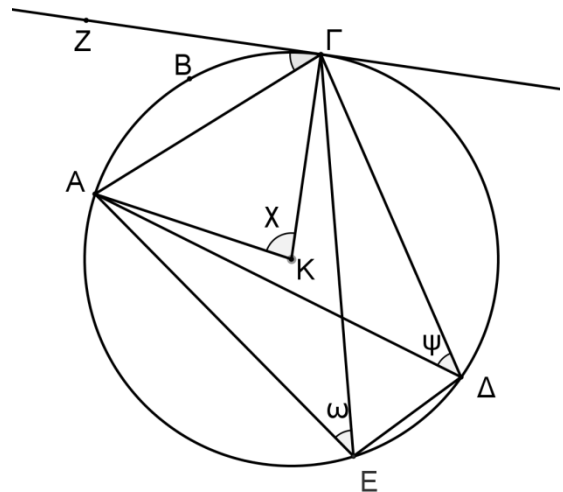
- 1) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Να βρείτε :
 - α) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{b}$.
 - β) Τις συντεταγμένες του διανύσματος : $\vec{\gamma} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.
- 2) Σε ένα παιγνίδι γνώσεων κάθε ερώτηση έχει βαρύτητα ανάλογη με τον βαθμό δυσκολίας της. Ένας παίκτης πήρε 8 βαθμούς στην πρώτη ερώτηση, 6 βαθμούς στη δεύτερη, 8 βαθμούς στην τρίτη και 5 βαθμούς στην τέταρτη ερώτηση. Ποια θα είναι η τελική του βαθμολογία αν η βαρύτητα κάθε ερώτησης είναι αντίστοιχα 4,3,2 και 3.

- 3) Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) . Από σημείο Σ εκτός κύκλου φέρουμε την τέμνουσα ΣAB και το εφαπτόμενο τμήμα $\Sigma\Gamma$.
Αν $AB = 5\text{cm}$ και $\Sigma\Gamma = 6\text{cm}$, να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΣA .



- 4) Να λύσετε την εξίσωση: $\left| \begin{matrix} \chi^{\frac{3}{5}} + 9 & 5 \\ 3 & 1 \end{matrix} \right| = 2$, $\chi > 0$.
- 5) Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 - 3\chi - 9 = 0$ με λύσεις τους αριθμούς χ_1, χ_2 . Χωρίς να λύσετε την εξίσωση, να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με λύσεις τους αριθμούς $\rho_1 = \chi_1^2$, $\rho_2 = \chi_2^2$.

- 6) Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) , τα σημεία του A, B, Γ, Δ, E και η εφαπτομένη $Z\Gamma$ στο σημείο Γ .
Αν το τόξο $\widehat{AB\Gamma} = 76^\circ$ και η γωνία $\widehat{A\Delta E} = 43^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\chi, \psi, \omega, \widehat{A\Gamma Z}$ και $\widehat{\Gamma\Delta E}$, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



- 7) Δίνονται τα σημεία $A(5,2)$ και $B(4,-1)$. Να βρείτε σημείο Γ πάνω στον άξονα των τεταγμένων ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να έχει εμβαδόν 12 τετραγωνικές μονάδες.
- 8) Αν $\sin\theta = -\frac{12}{13}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ να υπολογίσετε με χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων την αριθμητική τιμή της παράστασης:
 $A = 26\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - 5\sigma\varphi(\pi + \theta) + 24\tau\epsilon\mu(-\theta)$.
- 9) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(-\chi^2-1) \cdot (\chi^2-\chi-2) \cdot (3-\chi)^2}{16-\chi^2} \geq 0$
- 10) Δίνεται γωνία $\chi O\psi$ και σημεία A, B της πλευράς $O\chi$ με $(OB) > (OA)$. Από τα σημεία A και B φέρουμε δύο τυχαίες παράλληλες που τέμνουν την $O\psi$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Από το σημείο Δ φέρουμε ΔE παράλληλη με τη $B\Gamma$, όπου E σημείο της πλευράς $O\chi$. Να δείξετε ότι: $(OB)^2 = (OA)(OE)$.

ΜΕΡΟΣ Β΄ Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) α) Δίνεται η εξίσωση : $(1 - \lambda)\chi^2 + (\lambda + 5)\chi - 2\lambda + 1 = 0$, $\lambda \in \mathcal{R} - \{1\}$.

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ ώστε:

- (i) η εξίσωση να έχει λύσεις αντίθετες.
- (ii) το άθροισμα των λύσεών της να είναι μεγαλύτερο από το γινόμενό τους.

β) Δίνεται η παραβολή $f(\chi) = -2\chi^2 + 8\chi - 5$.

Να βρείτε:

- (i) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής της $f(\chi)$.
- (ii) το σύνολο τιμών της $f(\chi)$.
- (iii) να περιγράψετε πώς η γραφική παράσταση της $g(\chi) = -2\chi^2$, με κατάλληλες μετατοπίσεις ,θα συμπίσει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi)$.

2) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κορυφές $B(5,4)$, $\Delta(0,-1)$ και εξίσωση της μιας διαγωνίου του $3\chi - \psi = 6$. Αν η πλευρά ΑΔ έχει εξίσωση $4\chi - 3\psi = 3$, να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες των κορυφών Α και Γ.

β) την απόσταση των πλευρών ΑΔ και ΒΓ.

γ) τις συντεταγμένες του σημείου Ε , όπου Ε σημείο πάνω στην προέκταση της ΓΑ τέτοιο ώστε η απόσταση του σημείου Ε από το σημείο Β να είναι ίση με $\sqrt{5}$ μονάδες .

3) α) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $f(\chi) = \frac{6\chi^2+5\chi+1}{4\chi^2-1}$.

β) (i) Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2$.

(ii) Να υπολογίσετε χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, την αριθμητική τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{\sqrt{f(3)}}{f(3) + \sqrt{f(3)}} + \frac{2}{\sqrt[3]{2f(3)}} - \sqrt{\sqrt{2^3} \cdot \sqrt[12]{2^5}} - 4^{\frac{1}{4}}$$

γ) Αν $f(\chi) = \frac{3\chi+1}{2\chi-1}$, $1 < \chi < 3$ και $-5 < \omega < -2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών

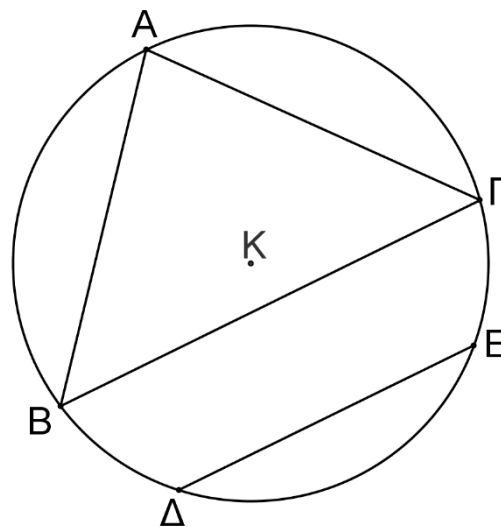
βρίσκονται οι παραστάσεις: (i) $\frac{f(\chi)}{\omega}$ και (ii) $f(\chi) - \omega^2$.

- 4) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (K,R) και χορδή ΔE παράλληλη με τη $B\Gamma$. Οι χορδές $A\Delta$ και AE τέμνουν τη χορδή $B\Gamma$ στα σημεία Z και H αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

α) $\frac{AH}{AZ} = \frac{BH}{\Gamma Z}$

β) τα τρίγωνα $BZ\Delta$ και ΓEH είναι όμοια.

γ) $\frac{Z\Delta}{HE} = \frac{(BZ)(Z\Gamma)}{(HB)(H\Gamma)}$



- 5) Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = x^2 - 2\tau\epsilon\mu\theta \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\theta \cdot x + \sigma\varphi^2\theta$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει λύσεις πραγματικές και άνισες για όλες τις τιμές της γωνίας θ .

β) Αν η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι ίση με 20 , να υπολογίσετε την γωνία θ .

γ) Αν S, P είναι το άθροισμα και το γινόμενο των λύσεων του τριωνύμου να δείξετε ότι : $2S + S \cdot P + \frac{S}{P} = 2\tau\epsilon\mu^3\theta \cdot \sigma\tau\epsilon\mu^3\theta$.

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

Εισηγητές
Δημήτρης Γαβαλάς
Γεωργία Παπαγεωργίου
Χριστίνα Κουμπάρου
Κωνσταντίνος Αντωνίου

Η Διευθύντρια

Χριστούλλα Συρίμη

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**ΤΑΞΗ: **Α΄**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: **ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ ,24/05/2019**ΔΙΑΡΚΕΙΑ: **2,30΄****Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από πέντε (5) σελίδες.****ΟΔΗΓΙΕΣ :**

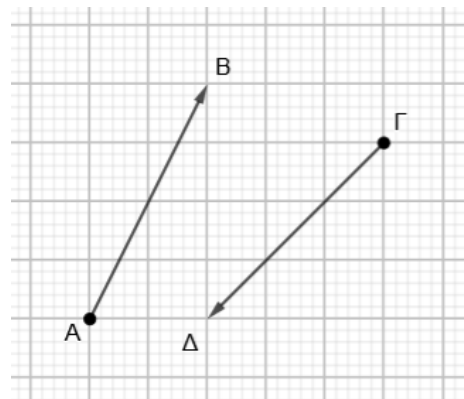
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Τα σχήματα να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου χρειάζεται).
- Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνεται ο τρόπος επίλυσής τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της επίλυσης δεν θα λαμβάνονται υπόψη.
- Η κατοχή κινητού θεωρείται δολίευση.

ΜΕΡΟΣ Α΄**Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.**

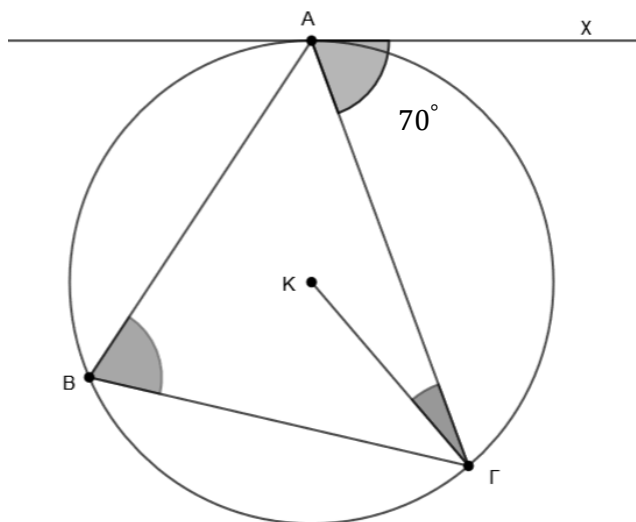
A1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ με ρίζες x_1, x_2 . Χωρίς να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $x_1 + x_2$ (Μονάδες 1)β) $x_1 \cdot x_2$ (Μονάδες 1)γ) $x_1^2 + x_2^2$ (Μονάδες 3)

A2. Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Να υπολογίσετε:

α) τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$
(Μονάδες 2)β) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$
(Μονάδες 1)γ) το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. (Μονάδες 2)

- A3.** Δίνεται κύκλος (Κ,ΚΓ) , η εφαπτομένη στο σημείο Α και οι χορδές ΒΑ και ΒΓ. Αν η γωνία $\Gamma\hat{A}x = 70^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες ΑΒΓ και ΚΓΑ του σχήματος, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.



- A4.** Οι βαθμοί ενός μαθητή σε τέσσερα (4) εξεταζόμενα μαθήματα είναι οι εξής: 14,17,18,11.

α) Να υπολογίσετε:

- i. τη μέση τιμή (Μονάδες 2)
- ii. την τυπική απόκλιση των βαθμών του μαθητή. (Μονάδες 2)

β) Να εξετάσετε αν οι βαθμοί του μαθητή αποτελούν ομοιογενές δείγμα. (Μονάδες 1)

- A5.** Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $(x - 1)^2 \cdot (2 - x) \geq 0$ (Μονάδες 2)

β) $\frac{x^2 \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x^2+x+1)} \leq 0$ (Μονάδες 3)

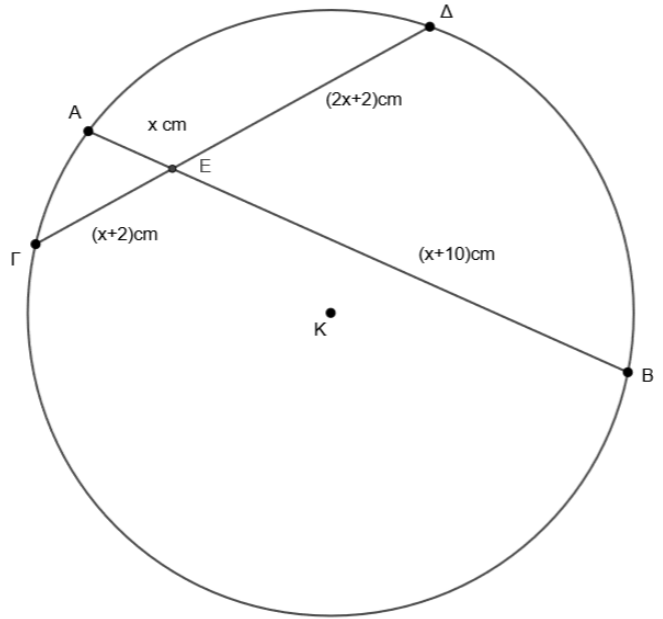
- A6.** Να αποδείξετε ότι : $\frac{(1+\epsilon\varphi x)^2 - \tau\epsilon\mu^2 x}{\epsilon\varphi x + \sigma\varphi x} = 2\eta\mu^2 x$.

- A7.** Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\sqrt[4]{3x-5} = -1$ (Μονάδες 2)

β) $(3x-4)^{\frac{2}{5}} = 4$, $x \geq \frac{4}{3}$ (Μονάδες 3)

- A8.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο K και δύο χορδές του AB και $\Gamma\Delta$, οι οποίες τέμνονται στο E .
 Αν $AE=x$ cm, $EB=(x+10)$ cm,
 $\Gamma E=(x+2)$ cm και $E\Delta=(2x+2)$ cm, να υπολογίσετε την τιμή του x .



- A9.** α) Αν $3\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x = 2$, να δείξετε ότι: $\sigma\phi^2 x = 3$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\phi^2 x = 3$, $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

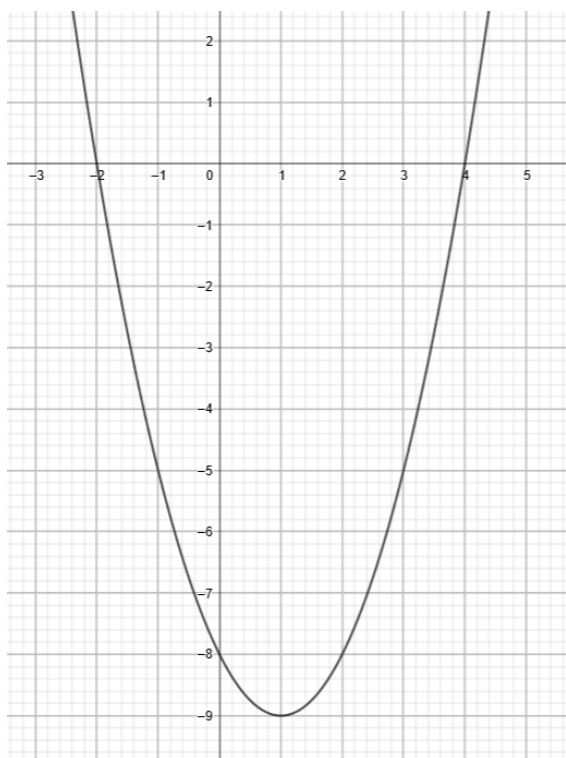
- A10.** Αν $x, y \in \mathbb{R}$ με $x + y > 1$ και $x > y$ να αποδείξετε ότι: $x \cdot (x - 1) > y \cdot (y - 1)$.

ΜΕΡΟΣ Β΄

Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

B1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$.



α) Να βρείτε :

i. Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
(Μονάδες 1)

ii. Το πρόσημο της διακρίνουσας Δ της εξίσωσης $f(x) = 0$.
(Μονάδες 1)

iii. Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .
(Μονάδες 1)

iv. Τις τιμές των a , b , γ της $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$.
(Μονάδες 3)

v. Τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq -8$.
(Μονάδες 1)

β) Δίνεται συνάρτηση $g(x)$ με τύπο $g(x) = -f(x)$. Να βρείτε:

i. Τις ρίζες της εξίσωσης $g(x) = 0$.

ii. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα των τεταγμένων.

iii. Τις συντεταγμένες της κορυφής της γραφικής παράστασης $y=g(x)$.

(Μονάδες 3)

- B2.** α) Δίνεται το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$. Αν το σημείο A έχει συντεταγμένες $(-5, 6)$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B. (Μονάδες 3)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 2)
- γ) Να βρείτε μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο με το $\overrightarrow{AM}$. (Μονάδες 1)
- δ) Έστω σημείο K με συντεταγμένες $(3, 9)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου T, έτσι ώστε το τετράπλευρο MBTK να είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 4)

- B3.** Οι ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1): 2x + y = 5$ και $(\varepsilon_2): 2x - y = 7$ αντιστοιχούν στις πλευρές AB και AD ενός παραλληλογράμμου ABΓΔ.
 Αν το σημείο (3,-5) είναι μία από τις κορυφές του παραλληλογράμμου ABΓΔ, να υπολογίσετε:
 α) το μέτρο των γωνιών του παραλληλογράμμου (κατά προσέγγιση μοίρας) (Μονάδες 4)
 β) το εμβαδόν του παραλληλογράμμου. (Μονάδες 6)
- B4.** α) Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + x - 2 = 0$. Να βρείτε τις πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ , για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 4)
- β) Αν για $\lambda = 2$ η εξίσωση έχει ρίζες τις x_1, x_2 με $x_1 < x_2$, να λύσετε την εξίσωση:
- $$(x_1 + 3)^{2019} \cdot (x_2 - 2)^{2018} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + x) \cdot \eta\mu(\pi - x)}{\sigma\tau\epsilon\mu(\pi + x)}, \quad x \in (-2\pi, 2\pi). \quad (\text{Μονάδες } 6)$$
- B5.** Σε κύκλο (Κ, R) με διάμετρο AB, φέρουμε εφαπτομένη στο Β και δύο άνισες χορδές ΑΓ και ΑΔ, ώστε το κέντρο Κ του κύκλου να βρίσκεται εντός της γωνίας ΓΑΔ. Οι προεκτάσεις των ΑΓ και ΑΔ τέμνουν την εφαπτομένη στα σημεία Ζ και Ε αντίστοιχα.
 Να δείξετε ότι : $(ΑΔ) \cdot (ΑΕ) = (ΑΓ) \cdot (ΑΖ)$.

Εισηγητές:

ΣΚΟΥΡΑΣ ΗΛΙΑΣ

ΚΑΣΚΙΡΗΣ ΧΡΥΣΟΣΤΟΜΟΣ

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ΕΙΡΗΝΗ

Η Διευθύντρια

ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ ΧΡΥΣΟΧΟΥ

Η Συντονίστρια

ΜΕΣΑΡΙΤΟΥ ΑΔΑ