

Επιμέλεια - Μάριος Νάνη

Σχολική Χρονιά: 2021 – 2022

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ

Ώρα Εξέτασης: 7: 45 – 9: 15

Τάξη: Α ΛΥΚΕΙΟΥ & ΤΕΣΕΚ

Ημερομηνία Εξέτασης: 25/01/2022

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. Να απαντήσετε **ΟΛΑ** τα ερωτήματα
3. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο απαντήσεων.
4. Να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις το όνομά σας.
5. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο με μπλε πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για σχήματα, πίνακες, διαγράμματα κλπ.
6. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
7. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
8. Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται **όλη η αναγκαία εργασία**.

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**

**ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΕΞΙ (6) ΣΕΛΙΔΕΣ**

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

A1. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χρησιμοποιώντας ιδιότητες ριζών, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$

(β)  $\sqrt{23 + \sqrt[3]{8}}$

**ΛΥΣΗ**

(α)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8$

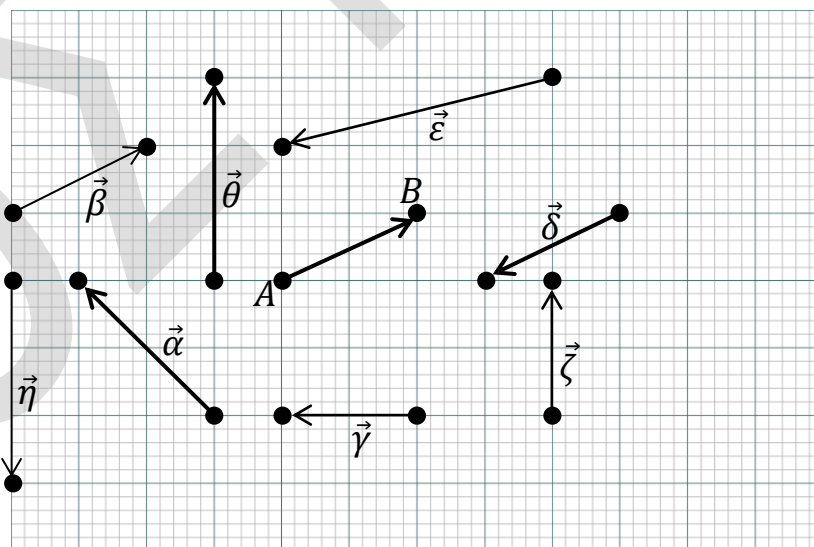
(β)  $\sqrt{23 + \sqrt[3]{8}} = \sqrt{23 + 2} = \sqrt{25} = 5$

A2. Με βάση το πιο κάτω σχήμα, να βρείτε ένα διάνυσμα που να είναι:

(α) αντίθετο με το διάνυσμα  $\overrightarrow{AB}$   
(2 μονάδες)

(β) ίσο με το διάνυσμα  $\overrightarrow{AB}$   
(2 μονάδες)

(γ) αντίρροπο με το διάνυσμα  $\vec{\zeta}$   
(1 μονάδα)



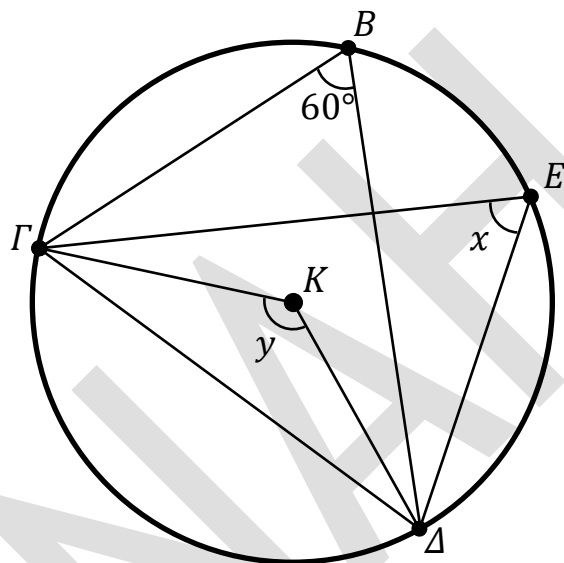
**ΛΥΣΗ**

(α) Αντίθετο με το  $\overrightarrow{AB}$ , σημαίνει ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά. Άρα, το  $\vec{\delta}$ .

(β) Ίσο με το  $\overrightarrow{AB}$ , σημαίνει ίδια διεύθυνση, φορά και μέτρο. Άρα, το  $\vec{\beta}$ .

(γ) Αντίρροπο με το  $\vec{\zeta}$ , σημαίνει παράλληλο του  $\vec{\zeta}$ , αλλά αντίθετη φορά. Άρα, το  $\vec{\eta}$ .

- A3.** Στο διπλανό σχήμα το σημείο  $K$  είναι το κέντρο του κύκλου και η γωνιά  $\Gamma B \Delta$  έχει μέτρο  $60^\circ$ .  
Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών  $x$  και  $y$ , δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.  
(Μπορείτε να μεταφέρετε το σχήμα στο τετράδιο απαντήσεων)

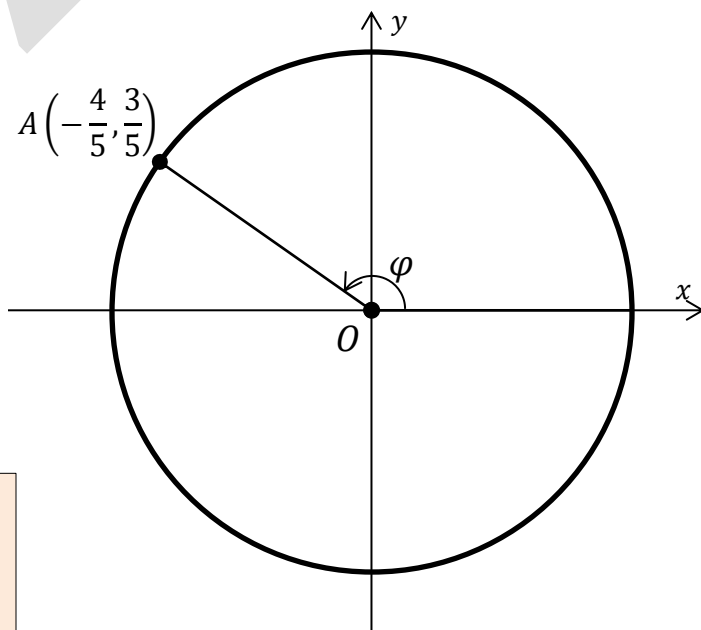


#### ΛΥΣΗ

$\hat{x} = 60^\circ$  (Βαίνει στο ίδιο τόξο με την  $B$ )

$\hat{y} = 120^\circ$  (η επίκεντρη είναι η διπλάσια της εγγεγραμμένης)

- A4.** Στο διπλανό σχήμα η τελική πλευρά της γωνιάς  $\varphi$ , η οποία είναι σε κανονική θέση, τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο  $A$  με συντεταγμένες  $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ .  
Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς  $\eta\mu\varphi$ ,  $\sigma\upsilon\nu\varphi$ ,  $\epsilon\varphi\varphi$  και  $\sigma\varphi\varphi$ .



#### ΛΥΣΗ

$$x = -\frac{4}{5}, y = \frac{3}{5}, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\rho = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{Άρα, } \eta\mu\varphi = \frac{y}{\rho} = y = \frac{3}{5}, \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{x}{\rho} = x = -\frac{4}{5},$$

$$\epsilon\varphi\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}, \sigma\varphi\varphi = \frac{x}{y} = -\frac{4}{3}$$

**A5.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ , με  $M$  και  $N$  τα μέσα των πλευρών  $B\Gamma$  και  $A\Delta$  αντίστοιχα.

Αν  $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$  και  $\overrightarrow{BM} = \vec{y}$ :

(α) Να εκφράσετε τα πιο κάτω

διανύσματα συναρτήσει των  $\vec{x}$  και  $\vec{y}$ :

(i)  $\overrightarrow{AM}$

(2 μονάδες)

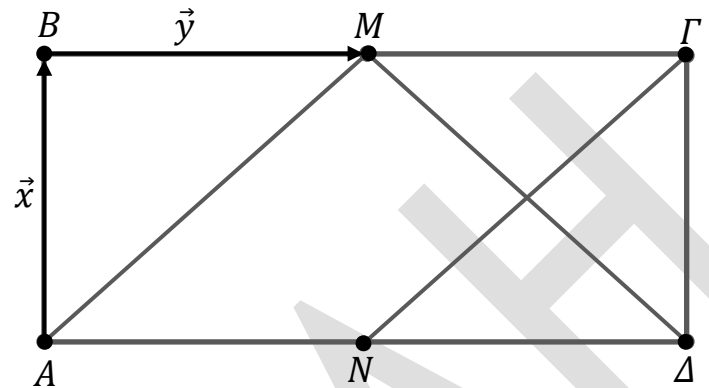
(ii)  $\overrightarrow{M\Delta}$

(2 μονάδες)

(β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $\overrightarrow{AM}$  και  $\overrightarrow{N\Gamma}$  είναι ίσα.

(1 μονάδα)

(Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας)



### ΛΥΣΗ

(α) (i) Το διάνυσμα  $\overrightarrow{AM}$  είναι το άθροισμα του  $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$  με το  $\overrightarrow{BM} = \vec{y}$ . Άρα,

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{x} + \vec{y}$$

(ii) Το διάνυσμα  $\overrightarrow{M\Delta}$  είναι το άθροισμα του  $\overrightarrow{M\Gamma} = \vec{y}$  με το  $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -\vec{x}$  αφού το

$AB\Gamma\Delta$  ορθογώνιο και το  $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$  αντίρροπο του  $\overrightarrow{AB}$ . Δηλαδή,  $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{x}$

$$\text{Άρα, } \overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{y} - \vec{x}$$

(β) Αφού το  $AB\Gamma\Delta$  ορθογώνιο, και τα  $M$  και  $N$  μέσα των  $B\Gamma$  και  $A\Delta$  αντίστοιχα,

τότε  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \vec{x}$  και  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{N\Delta} = \vec{y}$ . Άρα, τα διανύσματα  $\overrightarrow{AM}$  και  $\overrightarrow{N\Gamma}$  είναι τα αθροίσματα των δύο διανυσμάτων και άρα έχουμε ότι:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{x} + \vec{y} \text{ και } \overrightarrow{N\Gamma} = \overrightarrow{N\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \vec{y} + \vec{x}, \text{ άρα } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{N\Gamma}.$$

**A6.** Αν  $\sin \omega = -\frac{3}{5}$  και  $90^\circ < \omega < 180^\circ$ , να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:  $A = 15\sin \omega - 6\epsilon\phi\omega - 10\eta\mu\omega$

### ΛΥΣΗ

Αφού  $90^\circ < \omega < 180^\circ$ , άρα είμαστε στο 2<sup>ο</sup> τεταρτημόριο, δηλαδή  $\eta\mu\iota\tau\omicron\nu\alpha$  θετικά.

$$\eta\mu^2\omega + \sin^2\omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + \left(\frac{9}{25}\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \frac{4}{5}$$

Άρα,  $\epsilon\phi\omega = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$ . Επομένως:

$$A = 15 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - 6 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) = -9 + 8 - 8 = -9$$

**Μέρος Β: Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις.**

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

**B1. (α)** Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt[3]{\alpha + 5} = 2$ ,  $\alpha > -5$  (4 μονάδες)

**(β)** Αν  $\alpha = 3$ , να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(i)  $K = \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{\alpha}} + \alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{12}$  (3 μονάδες)

(ii)  $\Lambda = \frac{1}{3-\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{3+\sqrt{\alpha}}$  (3 μονάδες)

### ΛΥΣΗ

**(a)**  $(\sqrt[3]{\alpha + 5})^3 = 2^3 \Leftrightarrow \alpha + 5 = 8 \Leftrightarrow \alpha = 8 - 5 \Leftrightarrow \alpha = 3$

**(B) (i)**  $K = \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} + 3^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{12} = \sqrt[3]{\frac{81}{3}} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt{36} = 3 \cdot 6 = 18$

$$\text{(ii)} \quad A = \frac{1}{3-\sqrt{3}} + \frac{1}{3+\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}}{(3-\sqrt{3}) \cdot (3+\sqrt{3})} = \frac{6}{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{6}{9-3} = \frac{6}{6} = 1$$

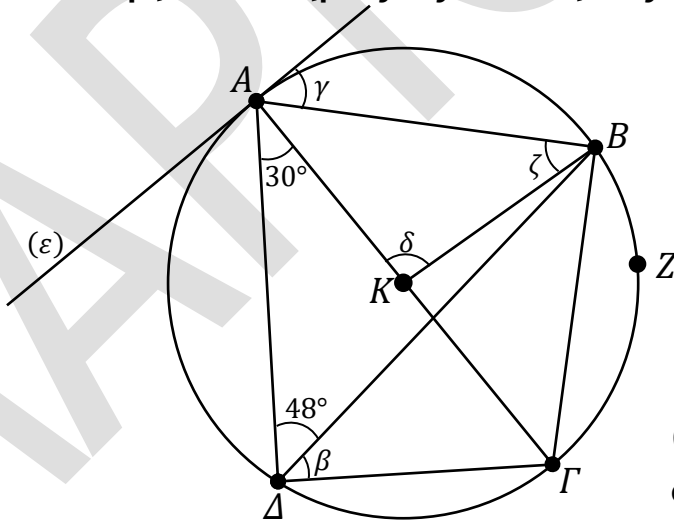
**B2.** Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος  $(K, \rho)$ . Η  $AG$  είναι μια διάμετρος του και η ευθεία  $(\varepsilon)$  είναι η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο  $A$ . Αν  $\angle \hat{A}G = 30^\circ$  και  $\angle \hat{B}A = 48^\circ$ , να υπολογίσετε:

**(α)** τα μέτρα των γωνιών  $\beta, \gamma, \delta$  και  $\zeta$  (6 μονάδες)

(β) το μέτρο του τόξου  $BZF$  (2 μονάδες)

(γ) το μέτρο της γωνιάς  $\Delta\Gamma B$  (2 μονάδες)

(να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας)



(Μπορείτε να μεταφέρετε το σχήμα στο τετράδιο απαντήσεων)

### ΛΥΣΗ

(α)  $\hat{\beta} + 48^\circ = 90^\circ$  (είναι η εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο)

$$\hat{\beta} = 42^\circ$$

$\hat{\delta} = 96^\circ$  (η επίκεντρη είναι η διπλάσια της εγγεγραμμένης  $48^\circ$ )

Το τρίγωνο  $KAB$  είναι ισοσκελές αφού  $KA = KB = \text{ακτίνα κύκλου}$ , άρα

$\hat{\zeta} = K\hat{A}B$  (παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου ίσες)

Άρα  $\hat{\zeta} + \hat{\zeta} + 96^\circ = 180^\circ$  (άθροισμα γωνιών τριγώνου)

$$2\hat{\zeta} = 84^\circ \Leftrightarrow \hat{\zeta} = 42^\circ$$

$\hat{\gamma} = 48^\circ$  (από Θεώρημα Χορδής - Εφαπτομένης)

(β) Γνωρίζουμε από το (α) ότι η εγγεγραμμένη  $K\hat{A}B = 42^\circ$ . Άρα για να υπολογίσουμε το τόξο  $\widehat{BZ\Gamma}$  αρκεί να βρούμε το μέτρο της επίκεντρης, της εγγεγραμμένης  $B\hat{A}\Gamma = 42^\circ$ , η οποία είναι διπλάσιά της. Άρα  $\widehat{BZ\Gamma} = 84^\circ$ .

(γ) Γνωρίζουμε ότι η  $\Delta\hat{B}\Gamma = 30^\circ$  (βαίνει στο ίδιο τόξο με την  $\Delta\hat{A}\Gamma$ ). Άρα  $30^\circ + 42^\circ + \Delta\hat{\Gamma}B = 180^\circ$  (άθροισμα γωνιών τριγώνου)

$$\Delta\hat{\Gamma}B = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ.$$

B3. (α) Να αποδείξετε την πιο κάτω ταυτότητα:

$$\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} - \sigma\varphi x = \frac{1}{\eta\mu x}$$

(6 μονάδες)

(β) Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{1}{\eta\mu x} = 2$  στο διάστημα  $90^\circ \leq x \leq 180^\circ$

(4 μονάδες)

### ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad \frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} - \sigma\varphi x &= \frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{\eta\mu x \cdot \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x \cdot (1-\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x \cdot (1-\sigma\upsilon\nu x)} = \frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \cdot (1-\sigma\upsilon\nu x)} \\ &= \frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x \cdot (1-\sigma\upsilon\nu x)} = \frac{1}{\eta\mu x} \end{aligned}$$

$$\text{(β)} \quad \frac{1}{\eta\mu x} = 2 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 30^\circ$$

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

Αλλά, είμαστε στο διάστημα  $90^\circ \leq x \leq 180^\circ$ , άρα η  $30^\circ$  δεν είναι η κατάλληλη γωνιά. Άρα,  $\eta\mu(180^\circ - x) = \eta\mu x \Leftrightarrow \eta\mu 150^\circ = \eta\mu 30^\circ$ , άρα,  $x = 150^\circ$ .

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ