

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Κοινού Κορμού

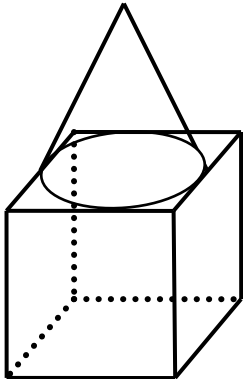
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Δευτέρα, 31 Μαΐου 2010

07:30 π.μ. – 10:30 π.μ.

ΛΥΣΕΙΣ

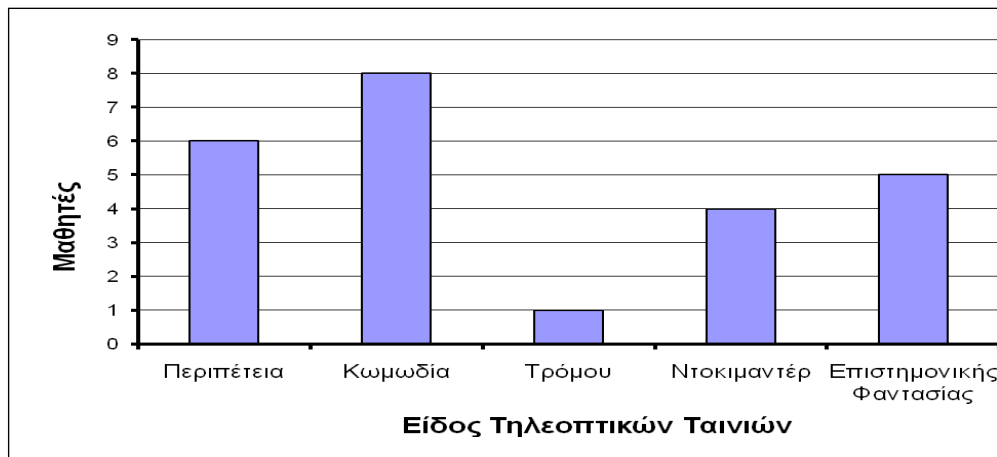
ΜΕΡΟΣ Α΄

1.	Δίνεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 10cm, 5cm και 4cm. Να βρείτε τον όγκο του. $V = \alpha\beta\gamma \Rightarrow V = 10 \cdot 5 \cdot 4 \Rightarrow V = 200\text{cm}^3$	
2.	Ο Λάζαρος θέλει να αγοράσει εκτυπωτή που στοιχίζει €250. Πόσα θα πληρώσει αν του γίνει έκπτωση 12%; έκπτωση: $\frac{12}{100} \cdot 250 = 30$ Θα το αγοράσει: $250 - 30 = €220$.	
3.	Μέσα σε μια κάλπη υπάρχουν 2 άσπρες, 3 πράσινες και 5 μπλε μπάλες. Επιλέγουμε στην τύχη μια μπάλα. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων: A: «η μπάλα να είναι μπλε» B: «η μπάλα να μην είναι πράσινη». $P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{2+5}{10} = \frac{7}{10}$	
4.	Δίνεται η λέξη ΟΙΚΟΛΟΓΙΚΟ. Να βρείτε: (α) Το πλήθος των αναγραμματισμών της. (β) Το πλήθος των αναγραμματισμών που αρχίζουν με Ο και τελειώνουν σε Ι. ΟΟΟΟ ΙΙ ΚΚ Λ Γ α) $M_{10}^{\epsilon} = \frac{10!}{4! 2! 2!} = \frac{3628800}{96} = 37800$ β) Ο ΟΟΟΚΚΙΛΓ Ι $M_8^{\epsilon} = \frac{8!}{3! 2!} = \frac{40320}{48} = 3360$	

5.	Κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας η περίμετρος της βάσης είναι 64cm και ο όγκος της είναι 1280cm^3. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας. $\Pi_{\beta} = 64\text{cm} \Rightarrow 4\alpha = 64 \Rightarrow \alpha = 16\text{cm}$ $E_{\beta} = \alpha^2 \Rightarrow E_{\beta} = 16^2 \Rightarrow E_{\beta} = 256\text{cm}^2$ $V = 1280\text{cm}^3 \Rightarrow \frac{E_{\beta} \cdot u}{3} = 1280 \Rightarrow \frac{256 \cdot u}{3} = 1280 \Rightarrow u = 15\text{cm}$ $\text{Π.Θ. } h^2 = u^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 15^2 + 8^2 \Rightarrow h = 17\text{cm}$ $E_{\pi} = \frac{\Pi_{\beta} \cdot h}{2} = \frac{64 \cdot 17}{2} = 544\text{cm}^2$ $E_{\text{ολ}} = E_{\pi} + E_{\beta} = 544 + 256 = 800\text{cm}^2$	
6.	Ο μέσος όρος του βάρους τεσσάρων ανδρών που βρίσκονται σε ένα αυτοκίνητο είναι 82 κιλά. Όταν κατέβηκε ο ένας από αυτούς, ο μέσος όρος του βάρους των υπολοίπων μειώθηκε στα 81 κιλά. Ποιο είναι το βάρος του άνδρα που κατέβηκε από το αυτοκίνητο; Συνολικό βάρος των 4 ανδρών: $4 \cdot 82 = 328\text{kg}$ Συνολικό βάρος των 3 ανδρών: $3 \cdot 81 = 243\text{kg}$ Βάρος άνδρα που κατέβηκε: $328 - 243 = 85\text{kg}$	
7.	Το στερεό στο διπλανό σχήμα αποτελείται από έναν κύβο ακμής 10cm και έναν κώνο του οποίου η βάση είναι εγγεγραμμένη στην πάνω έδρα του κύβου. Η γενέτειρα του κώνου είναι 13cm. Να βρείτε τον όγκο του στερεού. $\alpha = 10\text{cm} \Rightarrow 2R = 10 \Rightarrow R = 5\text{cm}$ $\text{Π.Θ. } \lambda^2 = u^2 + R^2 \Rightarrow 13^2 = u^2 + 5^2 \Rightarrow u = 12\text{cm}$ $V_{\text{κυβ}} = \alpha^3 = 1000\text{cm}^3$ $V_{\text{κων.}} = \frac{E_{\beta} \cdot u}{3} = \frac{25\pi \cdot 12}{3} = 100\pi \text{ cm}^3$ $V_{\text{ολ}} = (1000 + 100\pi) \text{ cm}^3$	

8.

Ο κάθε μαθητής ενός τμήματος της Β' τάξης Λυκείου ρωτήθηκε για το είδος τηλεοπτικής ταινίας που του αρέσει περισσότερο. Τα αποτελέσματα της έρευνας παρουσιάζονται στο πιο κάτω ραβδόγραμμα.



(α) Να βρείτε το ποσοστό (%) των μαθητών που προτιμούν «ταινίες περιπέτειας».

(β) Στο κυκλικό διάγραμμα που αντιστοιχεί στα πιο πάνω δεδομένα, να βρείτε τη γωνία του κυκλικού τομέα για τους μαθητές που προτιμούν «κωμωδία».

$$N=6+8+1+4+5=24 \text{ μαθητές}$$

α) Ποσοστό $\frac{6}{24} \cdot 100\% = 25\%$

β) Γωνία $\frac{8}{24} \cdot 360^\circ = 120^\circ$

9.

Τα ενδεχόμενα A και B είναι του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$,

$P(A) + P(B) = \frac{9}{10}$ και $P(B) = 2P(A)$. Να βρείτε τις πιθανότητες:

(α) $P(A)$ (β) $P(A \cup B)$ (γ) $P(A - B)$

α) $P(A) + P(B) = \frac{9}{10} \Rightarrow 3P(A) = \frac{9}{10} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{10}$

β) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{9}{10} - \frac{1}{5} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{7}{10}$

γ) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A - B) = \frac{3}{10} - \frac{1}{5} \Rightarrow P(A - B) = \frac{1}{10}$

10.

Ένα φορτηγό ξεκινά στις 8:00 π.μ. από την πόλη Α προς στην πόλη Β με σταθερή ταχύτητα 80 Km/h. Μετά από δύο ώρες ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Α προς την πόλη Β με σταθερή ταχύτητα 120 Km/h. Τι ώρα και σε πόση απόσταση από την πόλη Α θα συναντηθούν;

$$S_{\alpha} = u_{\alpha} \cdot t_{\alpha} \Rightarrow S_{\alpha} = 120 \cdot t_{\alpha}$$

$$S_{\varphi} = u_{\varphi} \cdot t_{\varphi} \Rightarrow S_{\varphi} = 80 \cdot (t_{\alpha} + 2)$$

$$t_{\varphi} = t_{\alpha} + 2$$

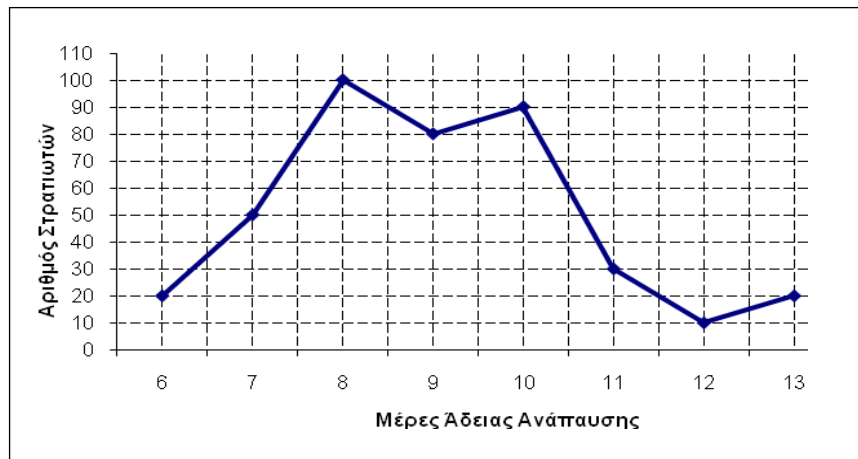
$$\begin{aligned} \text{Όταν συναντηθούν τα δύο οχήματα : } S_{\alpha} &= S_{\varphi} \Rightarrow 120 \cdot t_{\alpha} = 80 \cdot (t_{\alpha} + 2) \\ &\Rightarrow t_{\alpha} = 4\text{h} \end{aligned}$$

Θα συναντηθούν 4 ώρες αφότου ξεκίνησε το αυτοκίνητο, δηλαδή στις 2:00 μ.μ.

$$\text{Για την απόσταση από την πόλη Α: } S_{\alpha} = 120 \cdot 4 \Rightarrow S_{\alpha} = 480\text{Km}$$

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. Οι μέρες άδειας ανάπαυσης που έχουν απομείνει στους στρατιώτες ενός τάγματος πεζικού, που πρόκειται να απολυθούν, παρουσιάζονται στο πιο κάτω πολύγωνο συχνοτήτων.



- (α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων (x_i, f_i) .
(β) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή (x_ε) και τη διάμεσο (x_δ).
(γ) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή ($\bar{x}$) και την τυπική απόκλιση (σ) των ημερών άδειας ανάπαυσης των στρατιωτών του τάγματος.

α)

x_i	f_i	$x_i f_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
6	20	120	9	180
7	50	350	4	200
8	100	800	1	100
9	80	720	0	0
10	90	900	1	90
11	30	330	4	120
12	10	120	9	90
13	20	260	16	320
$\Sigma f_i = 400$		$\Sigma f_i \cdot x_i = 3600$		$\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2 = 1100$

β) $x_\varepsilon = 8$ ημέρες

$x_\delta = 9$ ημέρες

γ) $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{3600}{400} = 9$ ημέρες

$$\sigma = \sqrt{\frac{1100}{400}} = \sqrt{2.75} = 1.66 \text{ ημέρες}$$

2. Δίνονται τα ψηφία **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**.
- (α) Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα πιο πάνω ψηφία αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου;
- (β) Αν επιλεγεί στην τύχη ένας από τους πιο πάνω τριψήφιους αριθμούς, ποια η πιθανότητα να είναι άρτιος αριθμός μικρότερος του 300;

α) Τριψήφιοι χωρίς επανάληψη:

7	6	5
---	---	---

Αρ.Απαρ $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ αριθμοί

β) Άρτιοι Τριψήφιοι μικρότεροι του 300:

αρχίζουν με 1:

1	5	3
---	---	---

Αρ.Απαρ $1 \cdot 5 \cdot 3 = 15$ αριθμοί

αρχίζουν με 2:

1	5	2
---	---	---

Αρ.Απαρ $1 \cdot 5 \cdot 2 = 10$ αριθμοί

Σύνολο: 25 αριθμοί

A: «αριθμός άρτιος μικρότερος του 300»

$$P(A) = \frac{25}{210} = \frac{5}{42}$$

3.

Η κυρία Αλεξίου κληρονόμησε €150000 και επένδυσε αυτά τα χρήματα ως εξής: (i) τόκισε τα $\frac{2}{5}$ των χρημάτων της προς 3% με απλό τόκο, (ii) αγόρασε ένα χωράφι προς €50000 και (iii) επένδυσε τα υπόλοιπα αγοράζοντας μετοχές. Μετά από 5 χρόνια απέσυρε τα χρήματά της από την τράπεζα μαζί με τους τόκους, πώλησε το χωράφι με κέρδος 40% πάνω στην τιμή αγοράς του και πώλησε τις μετοχές της. Εισέπραξε συνολικά €189000.
(α) Να βρείτε το κέρδος (€) από την κάθε επένδυση της κυρίας Αλεξίου.
(β) Πόσο τοις εκατό (%) κέρδισε από την πώληση των μετοχών πάνω στο ποσό που επένδυσε σε αυτές;

$$\alpha) K = \frac{2}{5} \cdot 150000 = €60000$$

$$\textbf{\underline{Τόκος}} \text{ από κατάθεση στην τράπεζα: } T = \frac{KEX}{100} = \frac{60000 \cdot 3 \cdot 5}{100} = €9000$$

$$\textbf{\underline{Κέρδος}} \text{ από πώληση χωραφιού: } \frac{40}{100} \cdot 50000 = €20000$$

$$\text{ποσό που επενδύθηκε στις μετοχές: } 150000 - (60000 + 50000) = €40000$$

$$\text{είσπραξη από τράπεζα } 60000 + 9000 = €69000$$

$$\text{είσπραξη από χωράφι: } 50000 + 20000 = €70000$$

$$\text{είσπραξη από μετοχές: } 189000 - 69000 - 70000 = €50000$$

$$\textbf{\underline{Κέρδος}} \text{ από την πώληση μετοχών: } 50000 - 40000 = €10000$$

$$\beta) \text{ Ποσοστό κέρδους μετοχών: } \frac{10000}{40000} \cdot 100\% = 25\%$$

4.

Η επιλογή των 6 τραγουδιών για την δημιουργία ενός ψηφιακού δίσκου (CD), θα γίνει από έναν κατάλογο που περιέχει 9 τραγούδια με Ελληνικούς στίχους και 7 τραγούδια με Αγγλικούς στίχους.

(α) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή αν:

(i) δεν υπάρχει περιορισμός στην επιλογή των τραγουδιών.

(ii) τέσσερα από τα τραγούδια έχουν Ελληνικούς στίχους και δύο έχουν Αγγλικούς στίχους.

(β) Επιλέγονται στην τύχη έξι τραγούδια από τον κατάλογο. Ποια η πιθανότητα να έχουν επιλεγεί τουλάχιστον πέντε τραγούδια με Ελληνικούς στίχους;

$$\alpha) (i) \binom{16}{6} = \frac{16!}{10! 6!} = 8008$$

$$(ii) \binom{9}{4} \binom{7}{2} = 126 \cdot 21 = 2646$$

β) A: «Τουλάχιστον 5 τραγούδια με Ελληνικούς στίχους»

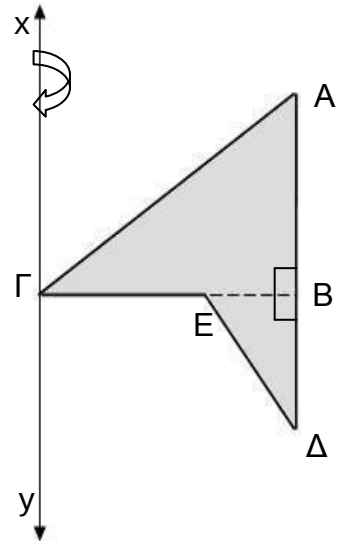
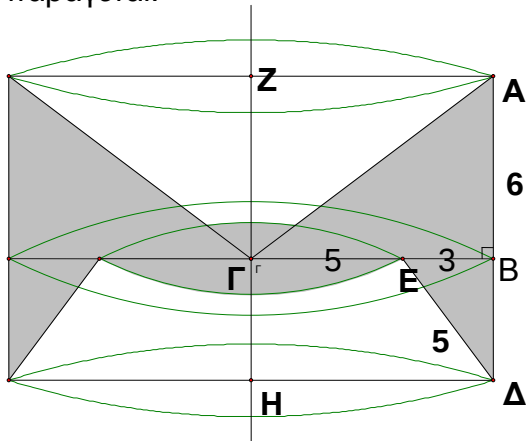
$$N(A) = \binom{9}{5} \binom{7}{1} + \binom{9}{6} = 126 \cdot 7 + 84 = 966$$

$$N(\Omega) = \binom{16}{6} = 8008$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{966}{8008} = \frac{69}{572}$$

5.

Στο διπλανό σχήμα δίνονται $B\Gamma \perp A\Delta$, $AB = 6\text{cm}$, $B\Gamma = 8\text{cm}$, $BE = 3\text{cm}$ και $E\Delta = 5\text{cm}$. Το σκιασμένο τετράπλευρο $A\Delta E\Gamma$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy που περνά από το σημείο Γ και είναι παράλληλος προς την $A\Delta$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



$$\text{Π.Θ. στο } \triangle AB\Gamma \Rightarrow A\Gamma = 10 \text{ cm}$$

$$\text{Π.Θ. στο } \triangle BE\Delta \Rightarrow B\Delta = 4 \text{ cm}$$

$$E_{\text{ολ}} = E_{A\Gamma} + E_{A\Delta} + E_{\Delta E} + E_{E\Gamma}$$

$$E_{A\Gamma} = \pi \cdot 8 \cdot 10 = 80\pi$$

$$E_{A\Delta} = 2\pi \cdot 8 \cdot 10 = 160\pi$$

$$E_{\Delta E} = \pi(5 + 8) \cdot 5 = 65\pi$$

$$E_{E\Gamma} = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$$

$$\Rightarrow E_{\text{ολ}} = 80\pi + 160\pi + 65\pi + 25\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{\text{ολ}} = 330\pi \text{ cm}^2}$$

$$V = V_{\text{κυλ}} - V_{\text{κων}} - V_{\text{κολ.κων}}$$

$$V_{\text{κυλ}} = \pi 8^2 \cdot 10 = 640\pi$$

$$V_{\text{κων}} = \frac{\pi 8^2 \cdot 6}{3} = 128\pi$$

$$V_{\text{κολ.κων}} = \frac{\pi(8^2 + 8 \cdot 5 + 5^2)4}{3} = 172\pi$$

$$\Rightarrow V = 640\pi - 128\pi - 172\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{V = 340\pi \text{ cm}^3}$$