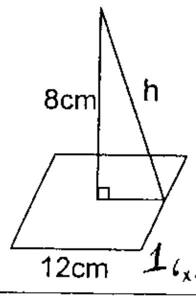
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

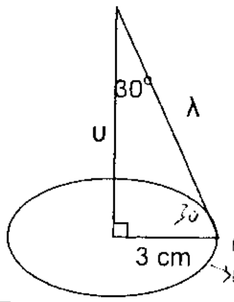
ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ **2005**

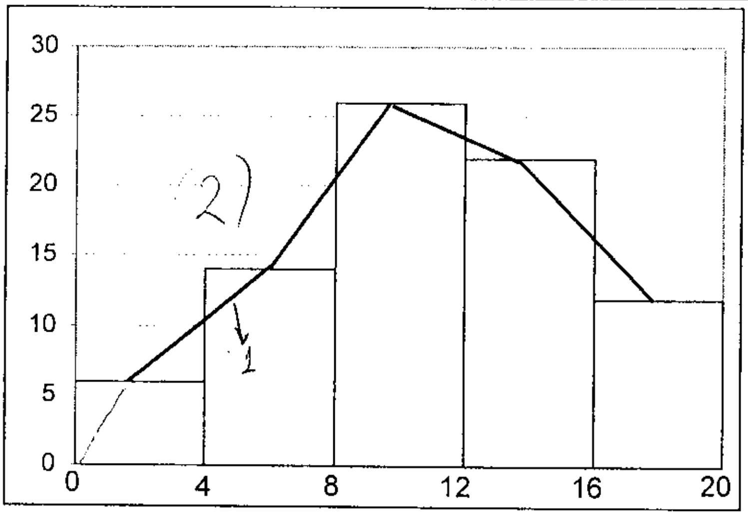
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ

<u>Λ Υ Σ Ε Ι Σ</u>

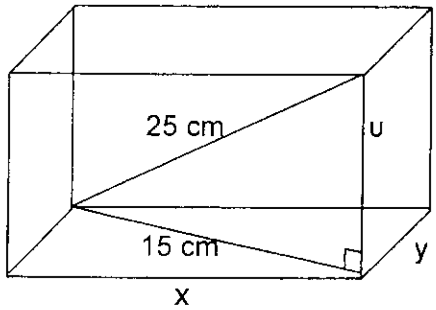
<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>

A1	$V=\alpha^3 \Rightarrow V=7^3=343\ cm^3$.	3 + 1 + 1
A2	Έχουμε συνολικά 9 γράμματα από τα οποία 3 είναι «Ε», τα 2 «Ι» και τα 2 «Ξ». Αρα η ζητούμενη απάντηση είναι: $\frac{9!}{3!2!2!}=15120$ Οι αναγραμματισμοί που αρχίζουν με «Ε» και τελειώνουν με «Ξ» είναι $\frac{7!}{2!2!}=1260$.	3 2
A3	Έστω x, x+8 οι δύο ζητούμενοι αριθμοί. $\frac{4+6+7+9+9+9+x+x+8}{8}=7 \Rightarrow 2x+52=56 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$ Οι δύο αριθμοί είναι οι 2 και 10.	1 3 1
A4	Θέλουμε τις κυκλικές μεταθέσεις 11 ατόμων. $K_\nu=(\nu-1)! \Rightarrow K_{11}=(11-1)!=10!=3628800$	5
A5	$T=\frac{KEX}{100}$, όπου T=£3465, X=4χρόνια, E=5,25% $3465=\frac{K(5,25)4}{100} \Rightarrow 21K=346500 \Rightarrow K=£16500$	3 + 1 + 1
A6	Περίμετρος βάσης=48cm => ακμή βάσης =12 cm Παράπλευρο ύψος $h=\sqrt{8^2+6^2}=10cm$ $E_{\text{ολικής επιφάνειας}}=E_{\text{Βάσης}}+E_{\text{παράπλευρης επιφάνειας}}$ $=12^2+\frac{48\cdot 10}{2}=384\ cm^2$.  1 σχήμα. αν κάνει μόνο σχήμα	1 1 1 + 1 + 1
A7	Έστω x η αρχική χρέωση, τότε ο ΦΠΑ είναι $\frac{15}{100}x$. $x+\frac{15}{100}x=276 \Rightarrow \frac{115}{100}x=276 \Rightarrow x=£240 \Rightarrow$ ΦΠΑ = £276 - £240 = £36	2 + 1 + 1 1

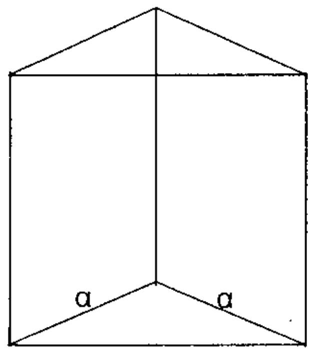
A8	(α) Οι οπαδοί της Β ομάδας είναι $\frac{105^\circ}{360^\circ}\cdot 960=280$ (1) (β) Οι οπαδοί της Δ ομάδας είναι $\frac{45^\circ}{360^\circ}\cdot 960=120$. (1) Αν οι οπαδοί της Γ ομάδας είναι x τότε οι οπαδοί της Α ομάδας είναι 4x και έτσι έχουμε την εξίσωση $x+4x+280+120=960 \Rightarrow 5x=560 \Rightarrow x=112$ (2) οι οπαδοί της Α ομάδας είναι 4x= 448. (1)	1 1 2 1
A9	$P(B)=1-P(B')=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow \frac{1}{12}=\frac{1}{4}-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$	1 2 2
A10	Γενέτειρα = λ = 2R = 6 cm. (1) Ύψος = $υ=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$ cm (1) $E_{ολικό}=\pi R(R+\lambda)=27\pi\ cm^2$. $V=\frac{1}{3}\pi R^2 υ=9\pi\sqrt{3}\ cm^3$.  	1 1 1,5 1,5
A11	$\Delta_2^{ν}=30 \Rightarrow \frac{ν!}{(ν-2)!}=30 \Rightarrow ν(ν-1)=30 \Rightarrow ν=6$ (ή ν=-5 απορρίπτεται) (1,5) $\Delta_2^{κ}=12 \Rightarrow \frac{κ!}{(κ-2)!}=12 \Rightarrow κ(κ-1)=12 \Rightarrow κ=4$ (η κ=-3 απορρίπτεται) $A=\binom{ν}{κ}+\binom{ν-1}{κ+1}=\binom{6}{4}+\binom{5}{5}=\frac{6!}{4!(6-4)!}+1=16$	1,5 1,5 2

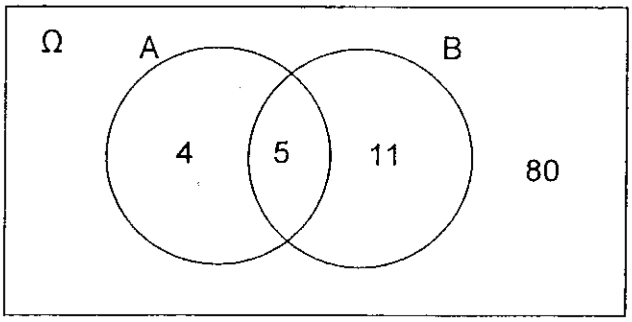
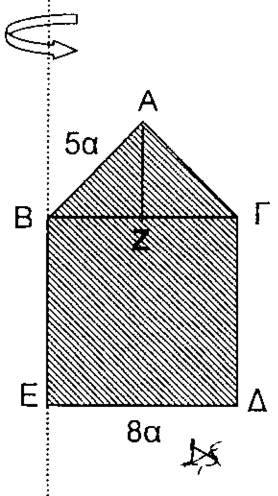
A12	Το πλήθος των διαφορετικών ομάδων 4 ατόμων που μπορούν να σχηματιστούν από σύνολο 14 ατόμων είναι $\binom{14}{4}$. Άρα $N(\Omega)=\binom{14}{4}$.	1
	$P(A) = \dfrac{\binom{9}{4}}{\binom{14}{4}} = \dfrac{\frac{9!}{5!4!}}{\frac{14!}{4!10!}} = \dfrac{9!10!}{5!14!} = \dfrac{18}{143}$. (1) (2) (1)	1
	$P(B) = \dfrac{\binom{13}{3}}{\binom{14}{4}} = \dfrac{\frac{13!}{10!3!}}{\frac{14!}{4!10!}} = \dfrac{13!4!}{3!14!} = \dfrac{2}{7}$. (1)	1
	P(Γ) = η πιθανότητα να περιλαμβάνονται τρεις γυναίκες και η πιθανότητα να περιλαμβάνονται μόνο γυναίκες 1 1 $= \dfrac{\binom{5}{3}\binom{9}{1}}{\binom{14}{4}} + \dfrac{\binom{5}{4}}{\binom{14}{4}} = \dfrac{90}{1001} + \dfrac{5}{1001} = \dfrac{95}{1001}$.	1 + 1
A13	Αριθμός Καθηγητών  Έτη Υπηρεσίας	2 + 1
	Μέση υπηρεσία = $\dfrac{2X6+6X14+10X26+14X22+18X12}{80}$ =11.	2

1,5 0,5

A14	$x^2+y^2+u^2=25^2$ $x^2+y^2=15^2$ (εξίσωση 1) 'Αρα $u=\sqrt{25^2-15^2}=20$ cm $E_{\text{Παράπλευρη επιφ.}}=2(x+y)u=840$ => $x+y=21$ (εξίσωση 2)  Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων που έχουν προκύψει και βρίσκουμε τις διαστάσεις της βάσης 9cm και 12cm Όγκος του στερεού=μήκοςΧπλάτοςΧύψος=9Χ12Χ20=2160 cm^3.	0,5 ✓ 0,5 ✓ 0,5 ✓ 1 ✓ 2 ✓ 0,5 ✓
A15	(α) Τα ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος τύχης είναι ασυμβίβαστα αν η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου. Δεκτές και οι απαντήσεις Όταν $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ ή $A\cap B=\emptyset$. Όταν $P(A\cap B)=0$. (β) Δεκτό ένα υποσύνολο του Ω, το οποίο δεν περιέχει οποιοδήποτε από τα στοιχεία {α,β,ε} και το οποίο δεν είναι το συμπλήρωμα του Α. $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{8}$ $P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=....$	2 1 1 1

ΜΕΡΟΣ Β

Β1	(α) Αριθμός υπαλλήλων εταιρείας: 20 (β) Μέση τιμή $\overline{x}=\dfrac{4\cdot160+6\cdot220+5\cdot240+2\cdot280+3\cdot320}{20}$=£234 Διάμεσος $x_\delta=\dfrac{220+240}{2}$=£230 Επικρατούσα τιμή x_ε=£220 (γ) τυπική απόκλιση = $\sqrt{\dfrac{4\cdot(-74)^2+6\cdot(-14)^2+5\cdot6^2+2\cdot46^2+3\cdot86^2}{20}}$ = 49,84 με ακρίβεια 2 δ.ψ. (δ) Οι 10 πιο χαμηλόμισθοι υπάλληλοι παίρνουν αύξηση ώστε ο μισθός τους να γίνει £234. (1) Η μέση τιμή των νέων μισθών είναι $\dfrac{10\cdot234+5\cdot240+2\cdot280+3\cdot320}{20}$=£253 (2)	(1) 2 1 1 2 ~~2~~ 1 ~~1~~ (2)
Β2	V = $E_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma}$υ=108$\sqrt{3}$ cm^3 και υ=2α $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\alpha^2 2\alpha$ =108$\sqrt{3}$ α^3=216 => α=6 cm υ=12 cm $E_{o\lambda.}=E_\pi+2E_\beta$ = 3αυ+2$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\alpha^2$= 216 +18$\sqrt{3}$ cm^2  	1 3 1 + 1 + 1 2 + 1
Β3	‘Εστω ότι αγόρασε τη ζάχαρη προς £x τον τόνο. Από τους 200 τόνους κέρδισε £200·0,11x = 22x Από τους 320 τόνους κέρδισε £320·0,125x = 40x Από τους υπόλοιπους τόνους κέρδισε £230·0,2x =46x Το συνολικό του κέρδος ήταν 22x + 40x + 46x = 39960 => x = £370 τον τόνο	 2 2 2 2 2

B4	Γνωρίζουμε ότι $P(A)=0{,}09$, $P(B)=0{,}16$ και $P(A\cap B)=0{,}05$ 1 $P(E) = P(A\cup B) = P(A)+P(B)- P(A\cap B) = 0{,}20$ 2 $P(Z) = P(A\cap B') + P(A'\cap B) = P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B) =$ 2 $P(A)+P(B)- 2P(A\cap B) = 0{,}15$ 1 1 $P(H) =1- P(A\cup B) = 0{,}80$ 2 1 Δεκτή και λύση με τη χρήση διαγράμματος Venn  7 σχήμα 1 1 1 1/10	3 4 3
B5	Ύψος του ΑΖ του τριγώνου ΑΒΓ $\sqrt{25\alpha^2-16\alpha^2}=3\alpha$ cm 1 $E_{ολικό} = E_{AB} + E_{AΓ} + E_{ΓΔ} + E_{EΔ}$ $= \pi 4\alpha\cdot 5\alpha + \pi(4\alpha+8\alpha)5\alpha + 2\pi 8\alpha\cdot 8\alpha + \pi(8\alpha)^2 =$ $= 272\alpha^2\pi\ cm^2$ Όγκος = $V_{κυλίδρου}+V_{κόλουρου\ κώνου}-V_{κώνου}=$ (1) $\pi(8\alpha)^2 8\alpha+\frac{1}{3}\pi 3\alpha[(8\alpha)^2+8\alpha\cdot 4\alpha+(4\alpha)^2]-\frac{1}{3}\pi(4\alpha)^2 3\alpha=$ $608\pi\alpha^3\ cm^3$ (2)  1,5	Σχήμα 1,5 1 4 3 0,5

B6	Σχηματίζονται $\Delta_3^5 = 60$ διαφορετικοί τριψήφιοι αριθμοί.	2
	(α) Ε Δ Μ $\boxed{1}\boxed{4}\boxed{3}$ Έχουμε 1.4.3=12 αριθμούς μικρότερους του 200.	2
	(β) Ε Δ Μ $\boxed{3}\boxed{4}\boxed{2}$ Έχουμε 3.4.2=24 άρτιους αριθμούς.	2
	(γ) Αφού είναι τριψήφιοι, θα πρέπει να αποτελούνται από ένα από τα ψηφία {2,4} και δύο από τα ψηφία {1,3,5}. Οι διαφορετικές επιλογές των τριών ψηφίων είναι $\binom{2}{1}\binom{3}{2}=6$. (2) Η κάθε τριάδα μπορεί να σχηματίσει 3! διαφορετικούς αριθμούς. Έτσι το σύνολο των ζητουμένων τριψηφίων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν είναι $6 \cdot 3! = 36$. (2)	4