

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: **Πέμπτη, 31/5/2012**

8:30 – 11:30

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int (5x^4 + e^{2x} - 3) dx$

ΛΥΣΗ:

$$\int (5x^4 + e^{2x} - 3) dx = \frac{5x^5}{5} + \frac{e^{2x}}{2} - 3x + c = x^5 + \frac{e^{2x}}{2} - 3x + c$$

2. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Να βρείτε τον πίνακα:

$$\Gamma = A \cdot B - 2A$$

ΛΥΣΗ:

$$\begin{aligned} \Gamma = A \cdot B - 2A &= A \cdot (B - 2 \cdot I) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Να βρείτε την θέση των δύο κύκλων:

$$(K): \chi^2 + \psi^2 = 4 \text{ και } (\Lambda): \chi^2 + \psi^2 - 6\chi - 8\psi + 16 = 0$$

ΛΥΣΗ:

$$(K): \chi^2 + \psi^2 = 4 \Rightarrow K(0,0) \text{ και } R_1=2$$

$$(\Lambda): \chi^2 + \psi^2 - 6\chi - 8\psi + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$g = -3, \quad f = -4, \quad c = 16$$

$$\Lambda(-g, -f) \Rightarrow \Lambda(3, 4)$$

$$R_2 = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{9 + 16 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

$$(K\Lambda) = \sqrt{(\chi_2 - \chi_1)^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Παρατηρούμε ότι:

$$R_1 + R_2 = 2 + 3 = 5$$

$$\Rightarrow (K\Lambda) = R_1 + R_2$$

Άρα οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

4. Η συνάρτηση: $\psi = \chi^3 + \alpha\chi^2 + \beta\chi + 5$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχει σημείο καμπής το σημείο

$\Sigma(1, -21)$. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β .

ΛΥΣΗ:

$$\psi = \chi^3 + \alpha\chi^2 + \beta\chi + 5$$

$$\Rightarrow \psi' = 3\chi^2 + 2\alpha\chi + \beta$$

$$\Rightarrow \psi'' = 6\chi + 2\alpha$$

Το σημείο $\Sigma(1, -21)$ είναι σημείο καμπής $\Rightarrow$ για $\chi = 1$ $\psi'' = 0$

$$\Rightarrow 6 + 2\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = -3}$$

Το σημείο $\Sigma(1, -21)$ είναι σημείο της καμπύλης $\Rightarrow$ για $\chi = 1$ $\psi = -21$

$$\Rightarrow -21 = 1 + \alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + 5$$

$$\Rightarrow -21 = 1 - 3 + \beta + 5$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = -24}$$

5. Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν A, B είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα με $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $P(B)$, $P(A' \cap B)$ και $P(A' / B)$.

ΛΥΣΗ:

Τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$P(A \cap B) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot P(B) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{5}$$

$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

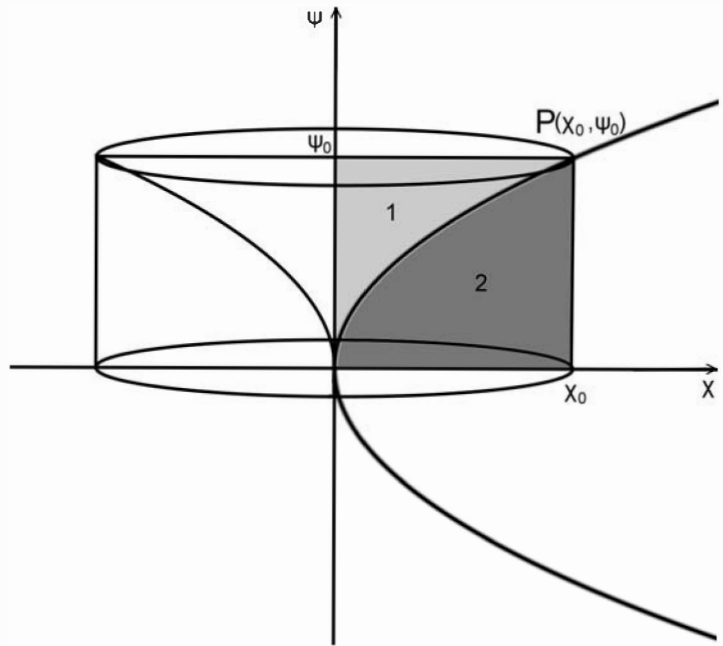
$$P(A' / B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

6. Δίνεται παραβολή $\psi^2 = \kappa\chi$, $\kappa > 0$, και σημείο $P(\chi_0, \psi_0)$ της παραβολής στο πρώτο τεταρτημόριο. Από το P φέρνουμε τις κάθετες προς τους άξονες των χ και ψ και σχηματίζεται ορθογώνιο. Το ορθογώνιο χωρίζεται από την παραβολή σε δυο χωρία τα οποία περιστρέφονται πλήρως γύρω από τον άξονα των ψ . Να δείξετε ότι ο λόγος των όγκων των δυο στερεών που σχηματίζονται είναι 4:1.

ΛΥΣΗ:

$$\psi^2 = \kappa\chi \Rightarrow \chi = \frac{\psi^2}{\kappa}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^{\psi_0} \chi^2 d\psi = \pi \int_0^{\psi_0} \left(\frac{\psi^2}{\kappa} \right)^2 d\psi \\ &= \pi \int_0^{\psi_0} \frac{\psi^4}{\kappa^2} d\psi = \pi \left[\frac{\psi^5}{5\kappa^2} \right]_0^{\psi_0} \\ &= \pi \frac{\psi_0^5}{5\kappa^2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V_2 &= V_{\text{κυλ}} - V_1 = \pi R^2 u - \pi \frac{\psi_0^5}{5\kappa^2} \\ &= \pi \chi_0^2 \psi_0 - \pi \frac{\psi_0^5}{5\kappa^2} = \pi \frac{\psi_0^4}{\kappa^2} \psi_0 - \pi \frac{\psi_0^5}{5\kappa^2} \\ &= \pi \frac{\psi_0^5}{\kappa^2} - \pi \frac{\psi_0^5}{5\kappa^2} = \pi \frac{4\psi_0^5}{5\kappa^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_2 = 4V_1 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{4}{1}$$

7. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \int_x^0 t^2 e^t dt$

α) Να δείξετε ότι: $f(x) = 2 - (x^2 - 2x + 2)e^x$

β) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ΛΥΣΗ:

α)

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^0 t^2 e^t dt = \int_x^0 t^2 d(e^t) \\ &= [t^2 e^t]_x^0 - \int_x^0 e^t 2t dt \\ &= [t^2 e^t]_x^0 - \left[2 \int_x^0 t d(e^t) \right] \\ &= [t^2 e^t]_x^0 - 2 \left[[t e^t]_x^0 - \int_x^0 e^t dt \right] \\ &= [t^2 e^t]_x^0 - 2 [t e^t]_x^0 + 2 [e^t]_x^0 \\ &= -x^2 e^x - 2(-x e^x) + 2e^0 - 2e^x \\ &= 2 - (x^2 - 2x + 2)e^x \end{aligned}$$

β)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2 - e^x (x^2 - 2x + 2)] = 2 - \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x (x^2 - 2x + 2)]$$

Για το όριο:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x (x^2 - 2x + 2)] &= [e^{-\infty} \cdot (+\infty) = 0 \cdot (+\infty) \text{ A.M.}] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{(x^2 - 2x + 2)}{e^{-x}} \right] = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \text{ A.M.} \right] \\ &\stackrel{\text{(DLH)}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{(2x - 2)}{-e^{-x}} \right] = \left[\frac{-\infty}{-\infty} \text{ A.M.} \right] \\ &\stackrel{\text{(DLH)}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2}{e^{-x}} \right] = \frac{2}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

8. Δίνονται η υπερβολή: $x\psi = 1$ και η παράσταση: $A \equiv x + \psi + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{\psi+1}$

Να δείξετε ότι: $A \geq 3$, για κάθε σημείο $\Sigma(x, \psi)$ της υπερβολής στο πρώτο τεταρτημόριο.

ΛΥΣΗ:

Από την $x\psi = 1 \Rightarrow \psi = \frac{1}{x}$

$$A = x + \psi + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{\psi+1} \Rightarrow A = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{\frac{1}{x}+1}$$

$$\Rightarrow A = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+1} \Rightarrow \boxed{A = x + \frac{1}{x} + 1}$$

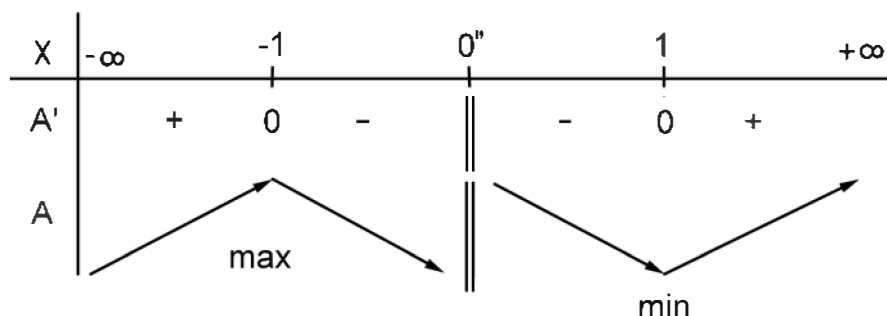
Μονοτονία και ακρότατα του A.

$$A'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \boxed{A'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1) \cdot (x+1) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

$$\text{Από το } x^2 = 0 \Rightarrow x = 0''$$



$$A_{\min} = 1 + \frac{1}{1} + 1 \Rightarrow A_{\min} = 3$$

Για κάθε σημείο Σ στο πρώτο τεταρτημόριο $\Rightarrow A \geq 3$

9. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0,1)$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, στο πεδίο ορισμού της, και ικανοποιεί τη σχέση: $f^2(x) + f'(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο πεδίο ορισμού της.

ΛΥΣΗ:

Από $f: \mathbb{R} \rightarrow (0,1) \Rightarrow 0 < f(x) < 1$.

Για την μελέτη των κοίλων της συνάρτησης πρέπει να βρούμε το πρόσημο της $f''(x)$.

$$f^2(x) + f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = 1 - f^2(x) \Rightarrow$$

$$f''(x) = -2f(x)f'(x)$$

$$f''(x) = -2f(x)(1 - f^2(x)) \Rightarrow$$

$$f''(x) = -2f(x)(1 - f(x))(1 + f(x)) \Rightarrow$$

$$\text{Όμως, } 0 < f(x) < 1 \Rightarrow 1 - f(x) > 0 \text{ και } (1 + f(x)) > 0$$

$$\Rightarrow f''(x) < 0$$

Συνεπώς, η συνάρτηση $f(x)$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $\mathbb{R}$.

10. Με ψηφία από το σύνολο $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ σχηματίζουμε τριψήφιους φυσικούς αριθμούς χωρίς επανάληψη ψηφίου. Να βρείτε:

- α) το πλήθος των τριψήφιων φυσικών αριθμών που σχηματίζονται και
- β) το άθροισμα όλων των τριψήφιων φυσικών αριθμών που σχηματίζονται.

ΛΥΣΗ:

- α) Μπορούν να σχηματιστούν $\Delta_3^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ τριψήφιοι αριθμοί.
- β) Ένα οποιονδήποτε ψηφίο του συνόλου εμφανίζεται στη θέση των μονάδων σε $4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$ τριψήφιους αριθμούς.

Ομοίως

Ένα οποιονδήποτε ψηφίο του συνόλου εμφανίζεται στη θέση των δεκάδων σε $4 \cdot 1 \cdot 3 = 12$ τριψήφιους αριθμούς.

και

Ένα οποιονδήποτε ψηφίο του συνόλου εμφανίζεται στη θέση των εκατοντάδων σε $1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$ τριψήφιους αριθμούς.

$$\text{Αξία μονάδων: } 12(4 + 5 + 6 + 7 + 8) \cdot 1 = 12 \cdot 30 = 360$$

$$\text{Αξία δεκάδων: } 12(4 + 5 + 6 + 7 + 8) \cdot 10 = 12 \cdot 30 \cdot 10 = 3600$$

$$\text{Αξία εκατοντάδων: } 12(4 + 5 + 6 + 7 + 8) \cdot 100 = 12 \cdot 30 \cdot 100 = 36000$$

Συνολικά το άθροισμα όλων των τριψήφιων αριθμών που σχηματίζονται είναι: $360 + 3600 + 36000 = \boxed{39960}$

ΜΕΡΟΣ Β΄ Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$

α) Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)$, να την παραστήσετε γραφικά στο πεδίο ορισμού της.

β) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = f(x)$, και τις ευθείες $\psi = x - 1$, $x = 0$ και $x = \lambda$, $\lambda > 0$, είναι ίσο με 4τμ.

Να υπολογίσετε την τιμή του λ .

ΛΥΣΗ:

α) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$

Πεδίο ορισμού: $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \text{Π.Ο.} = \mathbb{R} - \{-1\}$

Σημεία τομής με τους άξονες:

Αν $x = 0 \Rightarrow \psi = 3 \Rightarrow (0, 3)$

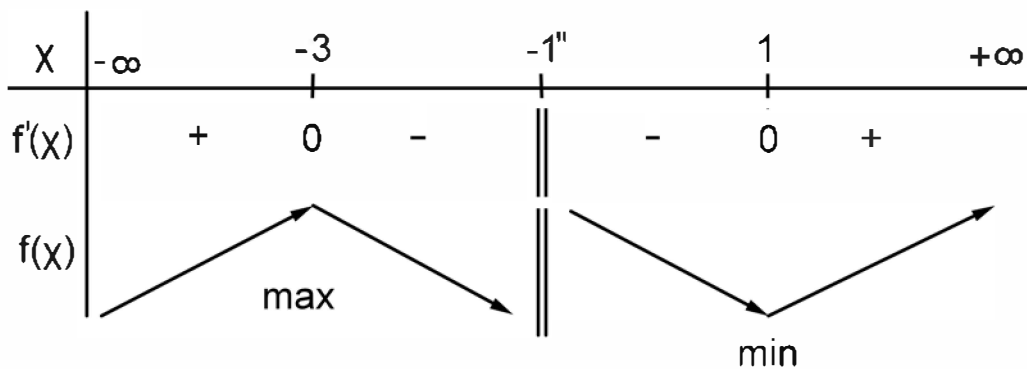
$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 3}{x + 1} = 0 \Rightarrow x^2 + 3 = 0$ αδύνατη εξίσωση.

Τοπικά ακρότατα και μονοτονία:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x + 1) - (x^2 + 3)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} = \frac{(x + 3)(x - 1)}{(x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ ή } x = 1$$

$$\text{και } (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1''$$



Για $x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1^2 + 3}{1 + 1} = 2 \Rightarrow (1, 2)_{\min}$ και για

$x = -3 \Rightarrow f(1) = \frac{(-3)^2 + 3}{-3 + 1} = -6 \Rightarrow (-3, -6)_{\max}$

Ασύμπτωτες:

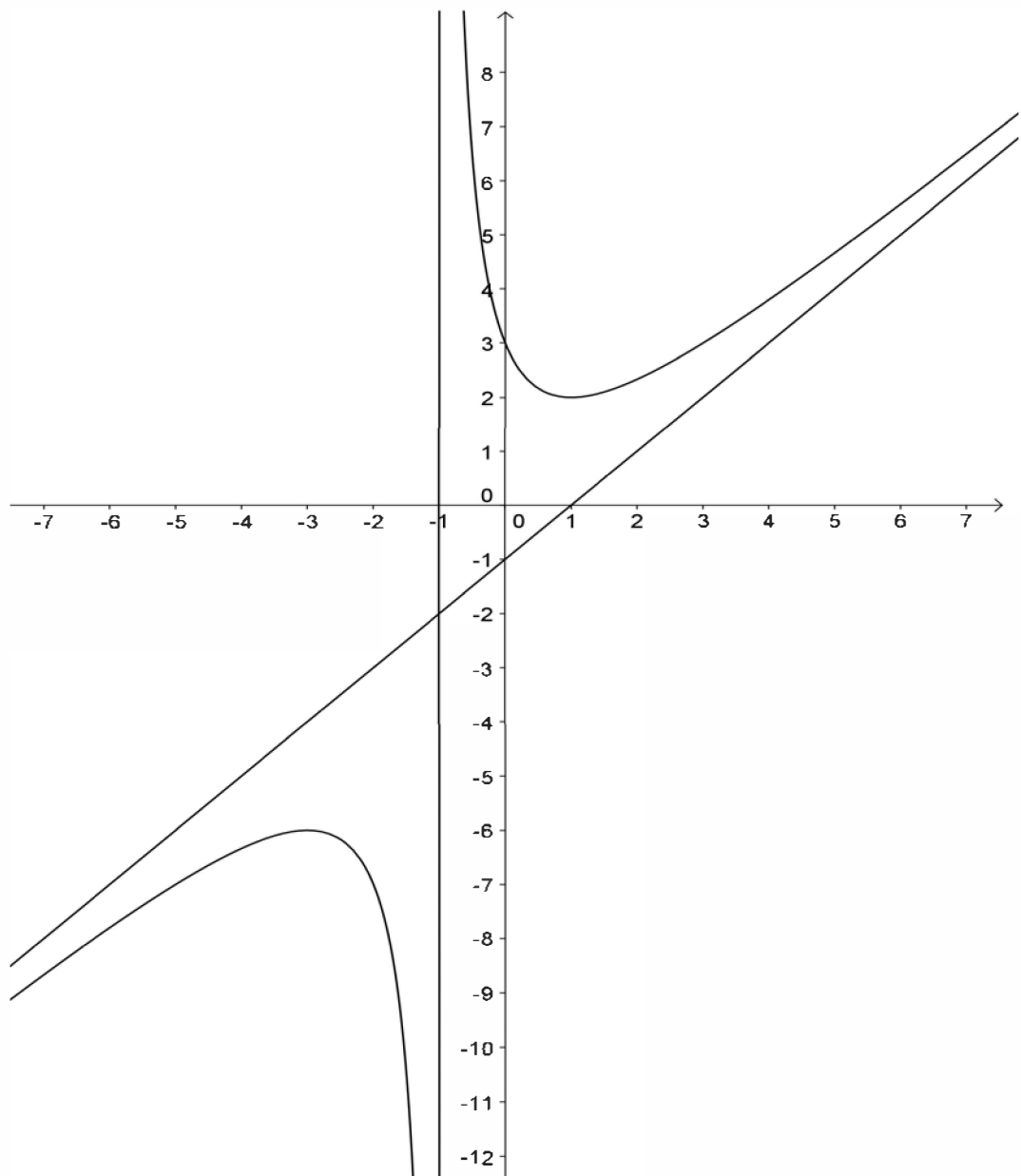
Κατακόρυφη ασύμπτωτη:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 3}{x + 1} &= \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3}{x + 1} &= \frac{4}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = -1 \text{ K.A.}$$

Από την διαίρεση:

$$\begin{array}{r} x^2 + 3 \quad | x+1 \\ -x^2 - x \quad | x-1 \\ \hline -x + 3 \\ +x + 1 \\ \hline +4 \end{array}$$

$\Rightarrow$ η ευθεία $\psi = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη του διαγράμματος της f .



β) $E = 4 \text{ τμ}$

$$\Rightarrow \int_0^{\lambda} \left(\frac{x^2 + 3}{x+1} - (x-1) \right) dx = 4$$

$$\Rightarrow \int_0^{\lambda} \frac{4}{x+1} dx = 4 \Rightarrow 4 [\ln(x+1)]_0^{\lambda} = 4$$

$$\Rightarrow \ln|\lambda+1| - \ln 1 = 1 \Rightarrow \ln|\lambda+1| = 1$$

$$\Rightarrow \lambda + 1 = e^1 \Rightarrow \boxed{\lambda = e - 1}$$

2. Σε ένα διαγώνισμα Ιστορίας το οποίο έχει 5 ερωτήσεις, η πιθανότητα ένας μαθητής να απαντήσει σωστά σε μια οποιανδήποτε ερώτηση είναι $\frac{4}{5}$.

α) Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A: Ο μαθητής να απαντήσει σωστά σε 2 ακριβώς ερωτήσεις.

B: Ο μαθητής να απαντήσει σωστά σε 2 ακριβώς ερωτήσεις που να είναι συνεχόμενες.

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να απάντησε σωστά σε μια τουλάχιστον ερώτηση.

ΛΥΣΗ:

α)

$$P(\Sigma\Sigma\Lambda\Lambda\Lambda) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^3$$

$$\begin{aligned} P(A) &= M_5^x \cdot P(\Sigma\Sigma\Lambda\Lambda\Lambda) \\ &= \frac{5!}{3! \cdot 2!} \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 10 \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{125} = \frac{32}{625} \end{aligned}$$

$$P(B) = 4 \cdot P(\Sigma\Sigma\Lambda\Lambda\Lambda) = 4 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{64}{3125}$$

β)

$$P(\text{μια τουλάχιστον ερώτηση σωστή}) = 1 - P(\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda) = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{3124}{3125}$$

3. Δίνονται η έλλειψη: $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ και A τυχαίο σημείο της. Από την αρχή O

των αξόνων φέρνουμε ημιευθεία (ε) παράλληλη προς την εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο A, η οποία τέμνει την έλλειψη στο σημείο B.

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου M της χορδής AB και να τον χαρακτηρίσετε.

β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου AOB είναι σταθερό, καθώς το σημείο A κινείται πάνω στην έλλειψη.

ΛΥΣΗ:

$$\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{2\chi}{\alpha^2} + \frac{2\psi\psi'}{\beta^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\psi\psi'}{\beta^2} = -\frac{\chi}{\alpha^2} \Rightarrow \psi' = -\frac{\beta^2\chi}{\alpha^2\psi}$$

$$\lambda\epsilon\phi = \psi' \Big|_A = -\frac{\beta^2\alpha\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha^2\beta\eta\mu\theta} = -\frac{\beta\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha\eta\mu\theta}$$

$$\text{Εξίσωση της OB: } \psi = -\frac{\beta\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha\eta\mu\theta}\chi$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1 \\ \psi = -\frac{\beta\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha\eta\mu\theta}\chi \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\frac{\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\alpha^2\eta\mu^2\theta}\chi^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta\chi^2}{\alpha^2\eta\mu^2\theta} = 1$$

$$\eta\mu^2\theta\chi^2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta\chi^2 = \alpha^2\eta\mu^2\theta \Rightarrow \chi^2 = \alpha^2\eta\mu^2\theta \Rightarrow$$

$$\chi = \pm\alpha\eta\mu\theta \Rightarrow \psi = \mp\beta\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$B(-\alpha\eta\mu\theta, \beta\sigma\upsilon\nu\theta) \text{ ή } B(\alpha\eta\mu\theta, -\beta\sigma\upsilon\nu\theta)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το $B(-\alpha\eta\mu\theta, \beta\sigma\upsilon\nu\theta)$ (για το άλλο σημείο B ομοίως)

$$\chi_M = \frac{\chi_A + \chi_B}{2} = \frac{\alpha(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)}{2} \Rightarrow (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta) = \frac{2\chi_M}{\alpha} \Rightarrow$$

$$(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)^2 = \left(\frac{2\chi_M}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta - 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu^2\theta = \left(\frac{2\chi_M}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow 1 - 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = \left(\frac{2\chi_M}{\alpha}\right)^2$$

$$\psi_M = \frac{\psi_A + \psi_B}{2} = \frac{\beta(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)}{2} \Rightarrow (\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta) = \frac{2\psi_M}{\beta} \Rightarrow$$

$$(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 = \left(\frac{2\psi_M}{\beta}\right)^2 \Rightarrow \eta\mu^2\theta + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = \left(\frac{2\psi_M}{\beta}\right)^2 \Rightarrow 1 + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = \left(\frac{2\psi_M}{\beta}\right)^2$$

$$\left(\frac{2\chi_M}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{2\psi_M}{\beta}\right)^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{2\chi_M}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{2\psi_M}{\beta}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{\chi_M^2}{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{\psi_M^2}{\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

Ο γεωμετρικός τόπος του M είναι η έλλειψη: $\frac{\chi^2}{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{\psi^2}{\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$

β)

$$D = \begin{vmatrix} \alpha\sigma\upsilon\nu\theta & \beta\eta\mu\theta & 1 \\ -\alpha\eta\mu\theta & \beta\sigma\upsilon\nu\theta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha\beta\sigma\upsilon\nu^2\theta + \alpha\beta\eta\mu^2\theta = \alpha\beta$$

$$E = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2}|\alpha\beta| = \frac{1}{2}\alpha\beta \quad \text{σταθερό.}$$

4. Δίνονται τα ολοκληρώματα:

$$A = \int_0^{\alpha} \frac{f(x)}{f(x) + f(\alpha - x)} dx \quad \text{και} \quad B = \int_0^{\alpha} \frac{f(\alpha - x)}{f(x) + f(\alpha - x)} dx$$

α) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό: $u = \alpha - x$, να δείξετε ότι $A = B$.

β) Να υπολογίσετε το A .

γ) Με τη βοήθεια των πιο πάνω, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\Gamma = \int_0^1 \frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x} + 2e^x + e} dx$$

ΛΥΣΗ:

α)

$$u = \alpha - x \Rightarrow x = \alpha - u \Rightarrow dx = -du$$

$$x = 0 \Rightarrow u = \alpha$$

$$x = \alpha \Rightarrow u = 0$$

$$A = \int_0^{\alpha} \frac{f(x)}{f(x) + f(\alpha - x)} dx = \int_{\alpha}^0 \frac{f(\alpha - u)}{f(\alpha - u) + f(u)} (-du) = \int_0^{\alpha} \frac{f(\alpha - u)}{f(\alpha - u) + f(u)} du = B$$

$$\begin{aligned} A + B &= \int_0^{\alpha} \frac{f(x)}{f(x) + f(\alpha - x)} dx + \int_0^{\alpha} \frac{f(\alpha - x)}{f(x) + f(\alpha - x)} dx \\ &= \int_0^{\alpha} \frac{f(x) + f(\alpha - x)}{f(x) + f(\alpha - x)} dx = \int_0^{\alpha} 1 dx = [x]_0^{\alpha} = \alpha \end{aligned}$$

$$2A = \alpha \Rightarrow \boxed{A = \frac{\alpha}{2}}$$

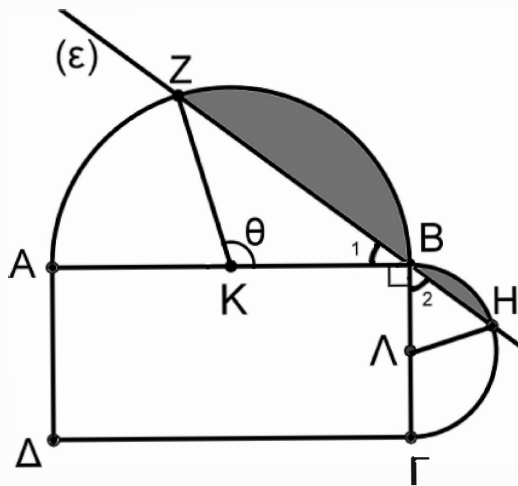
$$\beta) \quad \Gamma = \int_0^1 \frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x} + 2e^x + e} dx = \int_0^1 \frac{e^x(e^x + 1)}{e^x(e^x + 2 + e^{1-x})} dx = \int_0^1 \frac{(e^x + 1)}{(e^x + 2 + e^{1-x})} dx$$

Θέτουμε $f(x) = e^x + 1$. Τότε $f(1-x) = e^{1-x} + 1$ και

$$\Gamma = \int_0^1 \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)} dx = \frac{1}{2}$$

5. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές ΑΒ = 2α και ΒΓ = 2β . Με διαμέτρους τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ φτιάχνουμε ημικύκλια εκτός του ορθογωνίου, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Μεταβλητή ευθεία (ε) που περνά από το Β τέμνει τα δυο ημικύκλια και σχηματίζει δυο κυκλικά τμήματα (τα σκιασμένα μέρη).

- α) Να βρείτε την τιμή $\theta_{ελ}$ της γωνίας θ για την οποία το άθροισμα των εμβαδών των δυο κυκλικών τμημάτων να είναι ελάχιστον.
 β) Αν ΑΒ = ΒΓ να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta_{ελ}$.



Υπενθύμιση:

Το εμβαδόν κυκλικού τομέα γωνίας θ (ακτίνα) και ακτίνας R είναι $E = \frac{1}{2}R^2\theta$

ΛΥΣΗ:

$$\text{Από το τρίγωνο KBZ} \Rightarrow B_1 = \frac{\pi - \theta}{2}$$

$$\text{Επίσης } B_1 + B_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow B_2 = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \Lambda = \pi - \theta$$

$$E = E_{\kappa. \tau\mu. BZ} + E_{\kappa. \tau\mu. BH} = E_{\kappa. \tau\mu. BKZ} - E_{\tau\pi\gamma. BKZ} + E_{\kappa. \tau\mu. B\Lambda H} - E_{\tau\pi\gamma. B\Lambda H} \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2}\alpha^2\theta - \frac{1}{2}\alpha^2\eta\mu\theta + \frac{1}{2}\beta^2(\pi - \theta) - \frac{1}{2}\beta^2\eta\mu(\pi - \theta)$$

$$E = \frac{1}{2}\alpha^2\theta - \frac{1}{2}\alpha^2\eta\mu\theta + \frac{1}{2}\beta^2(\pi - \theta) - \frac{1}{2}\beta^2\eta\mu\theta$$

$$\begin{aligned}\frac{dE}{d\theta} &= \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\beta^2\sigma\upsilon\nu\theta \\ &= \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2) - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\sigma\upsilon\nu\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dE}{d\theta} = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2) - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \\ \Rightarrow \boxed{\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}} &\Rightarrow \boxed{\theta = \text{τοξ}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\right)} \quad \text{διότι } 0 < \theta < \pi\end{aligned}$$

Η λύση αυτή είναι μοναδική γιατί $0 < \theta < \pi$.

$$\frac{d^2E}{d\theta^2} = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\eta\mu\theta > 0 \quad \forall \quad 0 < \theta < \pi \Rightarrow \exists \text{min} \quad \text{για } \theta = \text{τοξ}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\right).$$

$$\beta) \text{ Αν } AB = B\Gamma \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow \theta = \text{τοξ}\sigma\upsilon\nu(0) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$