

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ

κύριο ΦΟΥΝΤΟΥΛΑΚΗ ΜΑΡΙΟ
κύριο ΦΟΥΝΤΟΥΛΑΚΗ ΜΑΝΩΛΗ
του ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ



ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ: ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ ΑΜΑΡΓΙΑΝΑΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A1. Απόδειξη από το σχολικό βιβλίο, σελ. 98.
A2. Ορισμός από το σχολικό βιβλίο, σελ. 141.
A3. Ορισμός από το σχολικό βιβλίο, σελ. 280.

- B. $\alpha \rightarrow \Lambda$
 $\beta \rightarrow \Lambda$
 $\gamma \rightarrow \Lambda$
 $\delta \rightarrow \Sigma$
 $\varepsilon \rightarrow \Sigma$

ΘΕΜΑ 2^ο

a. $z = \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i}, \alpha \in \mathbb{R}$

$$|z| = \left| \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i} \right| = \frac{|2 + \alpha i|}{|\alpha + 2i|} = \frac{\sqrt{2^2 + \alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2 + 2^2}} = 1$$

Άρα ο Γ.Τ. των $M(z)$ είναι κύκλος με κέντρο $K(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

β. Για $\alpha = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = -i, M(z_1): A(0, -1)$

Για $\alpha = 2 \Rightarrow z_2 = \frac{2 + 2i}{2 + 2i} = 1, M(z_2): B(1, 0)$

$$|z_1 - z_2| = |\overline{AB}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\left. \begin{aligned} (z_1)^{2v} &= (-i)^{2v} = ((-i)^2)^v = (-1)^v \\ (-z_2)^v &= (-1)^v \end{aligned} \right| \Rightarrow (z_1)^{2v} = (-z_2)^v$$

ΘΕΜΑ 3°

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
f		T.M.	T.EΛ.	

$$f(-1) = 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2(1 - \eta\mu^2\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$$

$$\text{Αφού } \theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta \neq 0 \Rightarrow f(-1) > 0$$

$$f(1) = -2 - 2\eta\mu^2\theta = -2(1 + \eta\mu^2\theta) < 0$$

Άρα η f παρουσιάζει στο σημείο $x_1 = -1$ τοπικό μέγιστο το $f(-1) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$

και στο σημείο $x_2 = 1$ τοπικό ελάχιστο το $f(1) = -2(1 + \eta\mu^2\theta) < 0$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f''(x) = 6x$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0, \quad f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f		σ.κ.	

$$f(0) = -2\eta\mu^2\theta < 0, \text{ αφού } \theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$$

Άρα η f παρουσιάζει σημείο καμπής για $x_3 = 0$.

Άρα το σημείο $\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

β) Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

$$f \nearrow (-\infty, -1]. \text{ Άρα } f((-\infty, -1]) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right] =$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3, f(-1) \right] = (-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$$

Αφού $0 \in f((-\infty, -1])$ και η $f \nearrow (-\infty, -1]$, άρα

η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(-\infty, -1)$.

$$f \searrow [-1, 1]. \text{ Άρα } f([-1, 1]) = [f(1), f(-1)] =$$

$$= [-2(1 + \eta\mu^2\theta), 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$$

Αφού $0 \in f([-1, 1])$ και $f \searrow [-1, 1]$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(-1, 1)$.

$$f \uparrow [1, +\infty). \text{ Άρα } f([1, +\infty)) = [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = \\ = [-2(1+\eta\mu^2\theta), \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3) = [-2(1+\eta\mu^2\theta), +\infty)$$

Αφού $0 \in f[1, +\infty)$ και $f \uparrow / (1, +\infty)$, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $[1, +\infty)$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες πραγματικές.

β' τρόπος

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Bolzano στα διαστήματα $[-3, -1]$, $[-1, 1]$ και $[1, 3]$, προκύπτει ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον 3 πραγματικές ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $-3 < \rho_1 < -1 < \rho_2 < 1 < \rho_3 < 3$ και αφού η f είναι πολωνυμική 3^{ου} βαθμού με πραγματικούς συντελεστές, έχει το πολύ 3 πραγματικές ρίζες. Άρα έχει ακριβώς 3 πραγματικές ρίζες.

γ) Από το ερώτημα α προκύπτει ότι $A(-1, 2-2\eta\mu^2\theta)$, $B(1, -2-2\eta\mu^2\theta)$ και $\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$

$$\varepsilon: \psi = -2x - 2\eta\mu^2\theta$$

$$A \in \varepsilon \Leftrightarrow \psi_A = -2x_A - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2 - 2\eta\mu^2\theta \quad \underline{\text{ισχύει}}$$

$$B \in \varepsilon \Leftrightarrow \psi_B = -2x_B - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow -2 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta \quad \underline{\text{ισχύει}}$$

$$\Gamma \in \varepsilon \Leftrightarrow \psi_\Gamma = -2x_\Gamma - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow -2\eta\mu^2\theta = -2\eta\mu^2\theta \quad \underline{\text{ισχύει}}$$

Άρα τα σημεία A, B, Γ είναι σημεία της ευθείας ε .

δ) Θέτουμε $g(x) = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ $A_g = \mathbb{R}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) / A_h = \mathbb{R}$

$$h(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta + 2x + 2\eta\mu^2\theta = x^3 - x$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0$$

Άρα $x = 0$ ή $x = -1$ ή $x = 1$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
h(x)	-	0	+	0	+

f, g συνεχείς στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμικές.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_{-1}^1 |h(x)| dx = \int_{-1}^0 h(x) dx + \int_0^1 -h(x) dx =$$

$$= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (-x^3 + x) dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Αφού f συνεχής και $\uparrow$ στο $[0, 1]$ και ισχύει $f(0) > 0$ θα έχουμε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Επίσης $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Άρα $f(x)g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Άρα $f(t)g(t) > 0$ για κάθε $t \in [0, 1]$.

Οπότε και $\int_0^x f(t)g(t)dt > 0 \Leftrightarrow F(x) > 0$, αφού $0 \leq t \leq x \leq 1$.

β) $0 \leq t \leq x \leq 1 \xrightarrow{f \uparrow [0, 1]} f(t) \leq f(x)$.

Άρα $f(t) - f(x) \leq 0 \xrightarrow{g(t) > 0} f(t)g(t) - f(x)g(t) \leq 0$

Έστω $h(t) = f(t)g(x) - f(x)g(t)$

Αφού $h(t) \leq 0$ για κάθε $t \in [0, x]$ και η $h(t)$ δεν είναι εκ ταυτότητος ίση με το 0 θα

ισχύει: $\int_0^x h(t)dt < 0 \Leftrightarrow \int_0^x (f(x)g(t) - f(x)g(t))dt < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^x f(t)g(t)dt - \int_0^x f(x)g(t)dt < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^x f(t)g(t)dt < \int_0^x f(x)g(t)dt < 0$

$F(x) < f(x) \int_0^x g(t)dt \Leftrightarrow F(x) < f(x) \cdot G(x)$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση φ με $\varphi(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1]$ ως

πηλίκο παραγωγίσιμων.

$$\varphi'(x) = \frac{F'(x) \cdot G(x) - F(x) \cdot G'(x)}{G^2(x)} =$$

$$= \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt \right)' \int_0^x g(t)dt - \int_0^x f(t)g(t)dt \left(\int_0^x g(t)dt \right)'}{G^2(x)} =$$

$$= \frac{f(x)g(x) \cdot \int_0^x g(t)dt - \int_0^x f(t)g(t)dt \cdot g(x)}{G^2(x)} = \frac{g(x)(f(x) \cdot G(x) - F(x))}{G^2(x)}$$

$g(x) > 0$ εξ υποθέσεως

$f(x)G(x) > F(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot G(x) - F(x) > 0$ από ερωτ. β $\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \varphi'(x) > 0 \Rightarrow \\ \varphi \uparrow \text{ στο } (0, 1] \end{array} \right.$

Άρα για $x \leq 1 \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(1) \Rightarrow \frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$

$$\delta) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\text{P.L.H. } x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)'}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot \cancel{g(x)}}{\cancel{g(x)}} =$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) > 0$, αφού f συνεχής στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt}{x^5} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\text{P.L.H. } x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu (x^2)^2 \cdot (x^2)'}{5x^4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x^4 \cdot 2x}{5x^4} = \frac{2}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta \mu x^4}{x^4} \cdot x \right)$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x^4}{x^4} \stackrel{u=x^4}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu u}{u} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ θα έχουμε:

$$\frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta \mu x^4}{x^4} \cdot x \right) = \frac{2}{5} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} \cdot \frac{\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt}{x^5} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt}{x^5} = f(0) \cdot 0 = 0$$