

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τρίτη, 1 Ιουνίου 2010

7:30 – 10:30

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1. $\int (2x - \eta\mu x - e^x) dx = x^2 + \sigma\upsilon\nu x - e^x + c$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - e^{2x}}{x^2} = \frac{2\eta\mu 0 + \sigma\upsilon\nu 0 - e^0}{0^2} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ Μ.Ε.} \right)$

D.L.H. $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x - 2e^{2x}}{2x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu 0 + \eta\mu 0 - 2e^0}{0} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ Μ.Ε.} \right)$

D.L.H. $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x - 4e^{2x}}{2} = \frac{-2\eta\mu 0 - \sigma\upsilon\nu 0 - 4e^0}{2} = \frac{-5}{2}$

3. $f(x) = x^2 + 4x + \alpha$

$(1, 2) \Rightarrow 2 = 1^2 + 4 \cdot 1 + \alpha \Rightarrow \alpha = -3$

$f(x) = x^2 + 4x - 3$

$f'(x) = 2x + 4$

$$f'(\chi) = 0 \Rightarrow \chi = -2$$

χ	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(\chi)$	$-$	0	$+$
$f(\chi)$	$\searrow$	$\min$	$\nearrow$

$(-2, -7) \min$

$$4. \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A - A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -\frac{15}{2} \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2B = 2 \begin{pmatrix} -2 & -\frac{15}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -\frac{15}{2} \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A - A^{-1} = 2B$$

5.

$$\left. \begin{array}{l} \chi\psi + 2 = 0 \\ \psi = 2\chi + \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \chi(2\chi + \beta) + 2 = 0 \Rightarrow 2\chi^2 + \beta\chi + 2 = 0$$

$$\text{Εφάπτονται} \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \beta^2 - 16 = 0 \Rightarrow \beta = \pm 4$$

6. Υπάρχουν 5 άνδρες και 6 γυναίκες

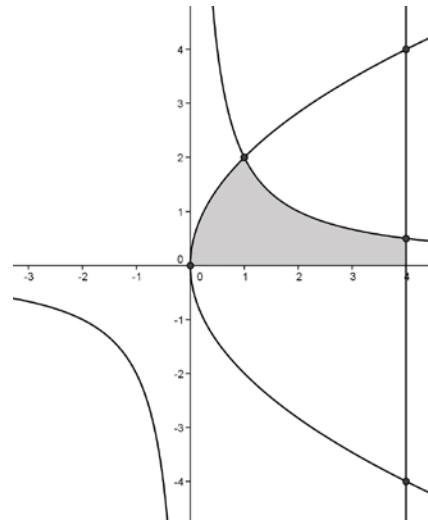
$$\alpha) \quad \binom{11}{3} = \frac{11!}{3!8!} = 165 \text{ τρόποι}$$

$$\beta) \quad \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = \frac{5!}{2!3!} + \frac{6!}{3!3!} = 10 + 20 = 30 \text{ τρόποι}$$

$$7. \psi^2 = 4\chi \text{ και } \chi\psi = 2$$

$$\Rightarrow \psi^3 = 8 \Rightarrow \psi = 2 \Rightarrow \chi = 1$$

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 \psi_{\pi\alpha\rho} d\chi + \int_1^4 \psi_{\upsilon\pi\epsilon\rho} d\chi = \\ &= \int_0^1 2\sqrt{\chi} d\chi + \int_1^4 \frac{2}{\chi} d\chi = 2 \left[\frac{2}{3} \chi^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + 2 [\ln \chi]_1^4 = \\ &= \frac{4}{3} - 0 + 2\ln 4 - 2\ln 1 = \frac{4}{3} + 4\ln 2 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$



$$8. (K): \chi^2 + \psi^2 = 4 \text{ και } (\Lambda): \chi^2 + \psi^2 - 8\chi - 4\psi + 12 = 0$$

$$\Delta_{\Lambda}(\Sigma) = 2\Delta_K(\Sigma)$$

$$\chi^2 + \psi^2 - 8\chi - 4\psi + 12 = 2(\chi^2 + \psi^2 - 4)$$

$$\chi^2 + \psi^2 + 8\chi + 4\psi - 20 = 0$$

$$9. P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) = 1$$

$$P(K) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(E_4) = \frac{2}{3}$$

$$P(\Lambda) = \frac{4}{5} \Rightarrow P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) = \frac{4}{5} \Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{5}$$

$$P(E_2) = P(E_3)$$

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_2) + P(E_4) = 1 \Rightarrow \frac{1}{5} + P(E_2) + P(E_2) + \frac{2}{3} = 1$$

$$\Rightarrow P(E_2) = \frac{1}{15}$$

Β' Τρόπος

$$P(E_4) = P(K') = 1 - P(K) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

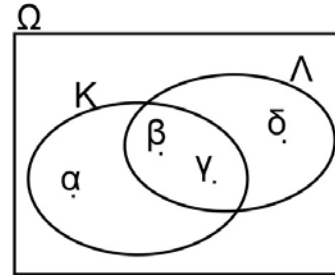
$$P(E_1) = P(\Lambda') = 1 - P(\Lambda) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$P(E_2) = P(E_3)$$

$$P(K) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} + P(E_2) + P(E_2) = \frac{1}{3} \Rightarrow 2P(E_2) = \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow P(E_2) = \frac{1}{15}$$



10. α) Διατύπωση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α, β]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(α, β)$, τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $ξ \in (α, β)$ τέτοιος ώστε $f'(ξ) = \frac{f(β) - f(α)}{β - α}$.

β) Η $f(x) = x + \sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $[1, 4]$ και η $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 4)$ άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $ξ \in (1, 4)$:

$$f'(ξ) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$$

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{ξ}} = \frac{6 - 2}{4 - 1} \Rightarrow 1 + \frac{1}{2\sqrt{ξ}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{ξ}} = \frac{1}{3} \Rightarrow ξ = \frac{9}{4} \text{ και } ξ \in (1, 4)$$

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R} - \{4\}$

Σημεία τομής με άξονες συντεταγμένων:

Για $\chi = 0 \Rightarrow f(0) = -1$, άρα το $(0, -1)$ είναι το σημείο τομής με τον άξονα των ψ .

Για $f(\chi) = 0 \Rightarrow \chi^2 - 4\chi + 4 = 0 \Rightarrow \chi = 2$, άρα το $(2, 0)$ είναι το σημείο τομής με τον άξονα των χ .

Μονοτονία-Ακρότατα:

$$f'(\chi) = \frac{(2\chi - 4)(\chi - 4) - (\chi^2 - 4\chi + 4) \cdot 1}{(\chi - 4)^2} = \frac{\chi^2 - 8\chi + 12}{(\chi - 4)^2}$$

$$f'(\chi) = 0 \Rightarrow \chi^2 - 8\chi + 12 = 0 \Rightarrow \chi = 6 \quad \text{ή} \quad \chi = 2$$

$$(\chi - 4)^2 > 0$$

X	$-\infty$	2	4''	6	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$						
		max		min		

Για $\chi = 2 \Rightarrow f(2) = 0$, $(2, 0)$ max.

Για $\chi = 6 \Rightarrow f(6) = 8$, $(6, 8)$ min.

Διαστήματα Μονοτονίας:

η f είναι αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 2]$ και $[6, +\infty)$

η f είναι φθίνουσα στα διαστήματα $[2, 4)$ και $(4, 6]$

Όρια στα άκρα-ασύμπτωτες :

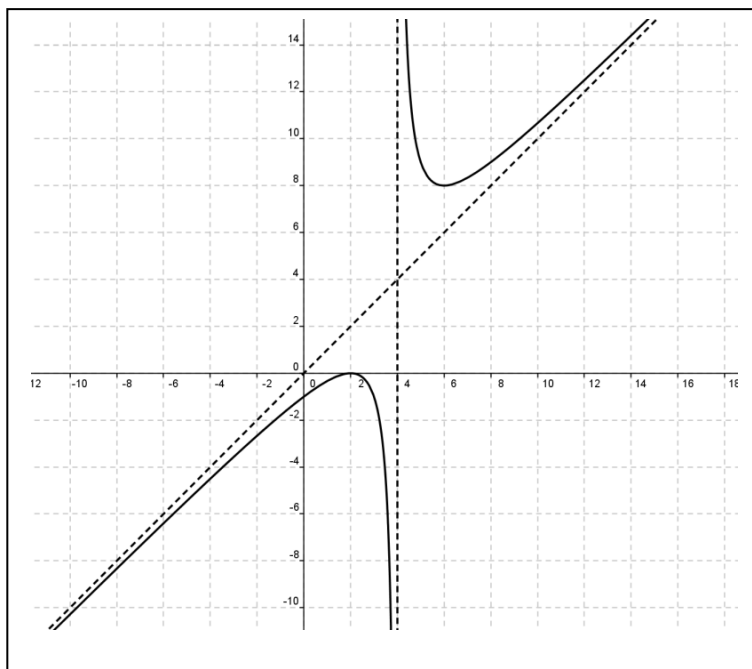
$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 4} = \frac{4}{0^+} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 4} = \frac{4}{0^-} = -\infty,$$

άρα $x = 4$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{-x^2 + 4x} \quad \frac{x - 4}{x}$$

η ευθεία $\psi = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη του διαγράμματος της f .

Γραφική παράσταση:



2.

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \nu \chi}{1 + 2\eta \mu \chi} d\chi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + 2\eta \mu \chi)'}{1 + 2\eta \mu \chi} d\chi = \frac{1}{2} \left[\ln(1 + 2\eta \mu \chi) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln \left(1 + 2\eta \mu \frac{\pi}{2} \right) - \ln(1 + 2\eta \mu 0) \right] = \frac{1}{2} \ln 3$$

(για $0 < \chi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 + 2\eta \mu \chi > 0$)

$$A + B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \nu \chi}{1 + 2\eta \mu \chi} d\chi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu 2\chi}{1 + 2\eta \mu \chi} d\chi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sigma \nu \chi}{1 + 2\eta \mu \chi} + \frac{\eta \mu 2\chi}{1 + 2\eta \mu \chi} \right) d\chi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sigma \nu \chi + 2\eta \mu \chi \sigma \nu \chi}{1 + 2\eta \mu \chi} \right) d\chi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sigma \nu \chi (1 + 2\eta \mu \chi)}{1 + 2\eta \mu \chi} \right) d\chi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \nu \chi d\chi = [\eta \mu \chi]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} A + B = 1 \\ A = \frac{1}{2} \ln 3 \end{array} \right\} \Rightarrow B = 1 - \frac{1}{2} \ln 3$$

3. α) $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{2\chi}{\alpha^2} + \frac{2\psi}{\beta^2} \cdot \frac{d\psi}{d\chi} = 0 \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = -\frac{\beta^2 \chi}{\alpha^2 \psi}$

$$\lambda_{\epsilon\phi} = -\frac{\beta^2 \alpha \sigma \nu \theta}{\alpha^2 \beta \eta \mu \theta} = -\frac{\beta \sigma \nu \theta}{\alpha \eta \mu \theta} \Rightarrow \lambda_{\kappa} = \frac{\alpha \eta \mu \theta}{\beta \sigma \nu \theta}$$

Εξίσωση καθέτου: $\psi - \beta \eta \mu \theta = \frac{\alpha \eta \mu \theta}{\beta \sigma \nu \theta} (\chi - \alpha \sigma \nu \theta)$

$$\beta \sigma \nu \theta \cdot \psi - \beta^2 \eta \mu \theta \sigma \nu \theta = \alpha \eta \mu \theta \cdot \chi - \alpha^2 \eta \mu \theta \sigma \nu \theta$$

$$\alpha \eta \mu \theta \cdot \chi - \beta \sigma \nu \theta \cdot \psi = \alpha^2 \eta \mu \theta \sigma \nu \theta - \beta^2 \eta \mu \theta \sigma \nu \theta$$

$$\alpha \eta \mu \theta \cdot \chi - \beta \sigma \nu \theta \cdot \psi = (\alpha^2 - \beta^2) \eta \mu \theta \sigma \nu \theta$$

β) $\chi = 0 \Rightarrow \psi = -\frac{(\alpha^2 - \beta^2) \eta \mu \theta \sigma \nu \theta}{\beta \sigma \nu \theta} \Rightarrow \psi = \frac{(\beta^2 - \alpha^2) \eta \mu \theta}{\beta}$,

$$B \left(0, \frac{(\beta^2 - \alpha^2) \eta \mu \theta}{\beta} \right)$$

$$X_M = \frac{\alpha \sin \theta}{2}$$

$$\psi_M = \frac{\frac{(\beta^2 - \alpha^2) \eta \mu \theta}{\beta} + \beta \eta \mu \theta}{2} = \frac{\eta \mu \theta (2\beta^2 - \alpha^2)}{2\beta}$$

- Για $\alpha \neq \beta\sqrt{2} \Rightarrow \eta \mu \theta = \frac{2\beta\psi}{2\beta^2 - \alpha^2}$ και $\sin \theta = \frac{2\chi}{\alpha}$

$$\eta^2 \mu^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\left(\frac{2\beta\psi}{2\beta^2 - \alpha^2} \right)^2 + \left(\frac{2\chi}{\alpha} \right)^2 = 1$$

είναι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M.

- Για $\alpha = \beta\sqrt{2} \Rightarrow \psi_M = 0 \Rightarrow \psi = 0$
είναι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M.

4.

$$P(A) = \frac{\binom{39}{9}}{\binom{40}{10}} = \frac{\frac{39!}{9!30!}}{\frac{40!}{30!10!}} = \frac{\frac{39!}{9!}}{\frac{40!}{10!}} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{\binom{20}{10}}{\binom{40}{10}} = \frac{\frac{20!}{10!10!}}{\frac{40!}{30!10!}} = \frac{184756}{847660528} = \frac{1}{4588}$$

$$P(\Gamma) = \frac{\binom{20}{6} \cdot \binom{20}{4}}{\binom{40}{10}} = \frac{\frac{20!}{6!14!} \cdot \frac{20!}{4!16!}}{\frac{40!}{30!10!}} = \frac{187792200}{847660528} \approx 0.22$$

$$5. \alpha) f'(\chi) = \frac{2\chi e^{2\chi} - (1 + \chi^2) 2e^{2\chi}}{e^{4\chi}} = \frac{2e^{2\chi}(\chi - 1 - \chi^2)}{e^{4\chi}} = \frac{-2\chi^2 + 2\chi - 2}{e^{2\chi}}$$

Επειδή $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4 - 16 = -12 < 0$ και $\alpha = -2 < 0$

έχουμε ότι $-2\chi^2 + 2\chi - 2 < 0$, $\forall \chi \in \mathbb{R}$. Επίσης $e^{2\chi} > 0$.

Άρα $f'(\chi) < 0$, $\forall \chi \in \mathbb{R}$ δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

$$f''(\chi) = \frac{(-4\chi + 2)e^{2\chi} - (-2\chi^2 + 2\chi - 2)2e^{2\chi}}{e^{4\chi}} = \frac{4\chi^2 - 8\chi + 6}{e^{2\chi}}$$

Επειδή $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 64 - 96 = -32 < 0$ και $\alpha = 4 > 0$

έχουμε ότι $4\chi^2 - 8\chi + 6 > 0$, $\forall \chi \in \mathbb{R}$. Επίσης $e^{2\chi} > 0$.

Άρα $f''(\chi) > 0$, $\forall \chi \in \mathbb{R}$ δηλαδή η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο $\mathbb{R}$.

β) Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, τότε

$$\forall \alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) > f(\beta) \Rightarrow \frac{1 + \alpha^2}{e^{2\alpha}} > \frac{1 + \beta^2}{e^{2\beta}} \Rightarrow \frac{1 + \alpha^2}{1 + \beta^2} > \frac{e^{2\alpha}}{e^{2\beta}} \Rightarrow \frac{1 + \alpha^2}{1 + \beta^2} > e^{2(\alpha - \beta)}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \int_0^2 \frac{1 + \chi^2}{e^{2\chi}} d\chi &= \int_0^2 (1 + \chi^2) e^{-2\chi} d\chi = \int_0^2 (1 + \chi^2) d\left(\frac{e^{-2\chi}}{-2}\right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left[(1 + \chi^2) e^{-2\chi} \right]_0^2 + \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-2\chi} d(1 + \chi^2) = \\ &= -\frac{5}{2} e^{-4} + \frac{1}{2} + \int_0^2 \chi e^{-2\chi} d\chi = -\frac{5}{2} e^{-4} + \frac{1}{2} + \int_0^2 \chi d\left(\frac{e^{-2\chi}}{-2}\right) = \\ &= -\frac{5}{2} e^{-4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\chi e^{-2\chi} \right]_0^2 + \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-2\chi} d\chi = \\ &= -\frac{5}{2} e^{-4} + \frac{1}{2} - e^{-4} + \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-2\chi} d\chi = \\ &= -\frac{5}{2} e^{-4} + \frac{1}{2} - e^{-4} + \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-2\chi}}{-2} \right]_0^2 = \\ &= -\frac{5}{2} e^{-4} + \frac{1}{2} - e^{-4} - \frac{1}{4} e^{-4} + \frac{1}{4} = \frac{3 - 15e^{-4}}{4} \end{aligned}$$