

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2006
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – ΤΑΞΗ Β΄ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 5 ΙΟΥΝΙΟΥ 2006

ΔΙΑΡΚΕΙΑ : 2:30΄

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- Να γράψετε με μελάνι – Τα σχήματα με μολύβι.

ΜΕΡΟΣ Α΄ : Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε τις **12 μόνο** .
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες

1. Να αναλύσετε την παράσταση $A = \frac{3-4\chi}{\chi(\chi+3)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών της συνάρτησης: $f(\chi) = \frac{2\chi+3}{\chi-5}$

3. Να υπολογίσετε την τιμή των ορίων:

(α) $\lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{\chi^2 - 4}{\chi - 2}$

(β) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\chi+1}{3\chi-2}$

4. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\sigma\upsilon\nu 7\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\eta\mu 7\alpha - \eta\mu\alpha + \eta\mu 3\alpha} = \sigma\phi 3\alpha$

5. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

(α) $\psi = 3\chi^2 - 2\chi + 4$

(β) $\psi = \frac{e^{3\chi}}{\epsilon\phi\chi}$

6. Σε αριθμητική πρόοδος ο πρώτος όρος της είναι 3 και ο δέκατος-έκτος όρος της είναι τριπλάσιος του πέμπτου όρου της.
- (α) Να βρείτε την πρόοδο.
- (β) Να βρείτε το πλήθος των n πρώτων όρων της που έχουν άθροισμα 168.
7. Κύλινδρος και κώνος έχουν την ίδια βάση. Η ολική επιφάνεια του κώνου είναι διπλάσια από την κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου. Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι 4cm και η γενέτειρα του κώνου είναι 10cm, να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου.
8. Να βρείτε την γενική λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης:
- $$\eta\mu(2\chi - 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu(\chi + 15^\circ)$$
9. Να λύσετε τις εξισώσεις:
- (α) $2^{x+1} + 4^x = 80$
- (β) $\log(x+1) + 2 \cdot \log \sqrt{5x} = 2$
10. Τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ έχει $\hat{B} = 30^\circ$ και $\alpha = 2\beta$.
- (α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$.
- (β) Να δείξετε ότι: $E = \frac{\beta^2 \sqrt{3}}{2}$
11. Δίνεται τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ με κορυφές $A(2,2)$, $B(4,2)$ και $\Gamma(2,4)$. Να δείξετε ότι είναι ισοσκελές.
12. Δίνεται η καμπύλη με τύπο: $\chi^2 + \psi^2 = 2\psi + 9$.
- (α) Να βρείτε την παράγωγο $\frac{d\psi}{d\chi}$.
- (β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης για $\chi = 3$ και $\psi > 0$ είναι: $\psi = -3\chi + 11$
13. Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι 432cm^2 . Αν οι παράπλευρες έδρες σχηματίζουν γωνία 60° με την βάση, να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.

14. Αν $f(\chi) = \frac{\eta\mu 2\chi}{4} - \sigma\upsilon\nu\chi - 3\chi$ και $0^\circ \leq \chi \leq 180^\circ$ να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες $f''(\chi) = 0$.

15. Γεωμετρική πρόοδος έχει $a_{41} = 3$. Να δείξετε ότι το γινόμενο των 81 πρώτων όρων της είναι 3^{81} .

ΜΕΡΟΣ Β' : Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε τις **4 μόνο**.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ δίνονται οι κορυφές $A(0,1)$, $B(4,-2)$ καθώς και η εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$: $5\chi - \psi - 22 = 0$.

(α) Αν η απόσταση της κορυφής Γ από την πλευρά AB είναι $\frac{23}{5}$ να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ με τεταγμένη $\psi > 0$.

(β) Αν η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(5,3)$ να υπολογίσετε την εφαπτομένη της γωνίας $\hat{B}$ του τριγώνου.

(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle A\Gamma M$, όπου M το μέσο της πλευράς AB .

2. (α) Να δείξετε ότι: $\frac{2}{7} + \frac{4}{7^2} + \frac{2}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \frac{2}{7^5} + \frac{4}{7^6} + \dots = \frac{3}{8}$

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $\left(\frac{2}{5}\right)^{(x+2)} = e^{2 \cdot \ln 5} \cdot 10^{-\log 4}$

3. Δίνεται η εξίσωση: $\ln \psi = \chi \ln 2 + \ln \chi$.

(α) Να δείξετε ότι $\psi' = \frac{\psi}{\chi} + \psi \ln 2$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $\psi' - \psi \cdot \ln 2 + 12 = 4^z$

4. Ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ=14cm, ΓΔ=8cm και ύψος 4cm, στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα $\Psi\Psi'$ παράλληλο προς την ΑΒ που απέχει 2cm από αυτήν. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.
5. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \ln \sqrt{a-2x}$ και $g(x) = \ln(x+a)$.
- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων, $f(x)$ και $g(x)$.
- (β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = f(x) - g(x)$.
- (γ) Αν η $h(x)$ περνά από την αρχή των αξόνων να βρείτε την τιμή του «α» όταν $a > 0$.
- (δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $h(x)$ για $a = 1$ στο σημείο $O(0,0)$.
6. Δίνονται οι συναρτήσεις
- $$f(x) = \frac{\sin 2x}{\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x + 1} \cdot \frac{1}{\epsilon\phi x - 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{\log_3 \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{\log_3 x}}$$
- (α) Να δείξετε ότι $f(x) = -\frac{1}{2}$
- (β) Να λύσετε την εξίσωση $g(x) = 0$.

Η Διευθύντρια

(Χρυσόθεμις Χατζηπαναγή)

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2006

ΜΑΘΗΜΑ:	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	2/ 06 / 2006
ΤΑΞΗ:	Β΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ	ΩΡΑ:	7. 30΄ π.μ.
ΣΥΝ. ΣΕΛ. :	2	ΔΙΑΡΚΕΙΑ:	2. 30΄ ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ: Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρη πένα.

Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 12. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα : $K = \frac{x}{(x-2)(x^2+1)}$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \frac{3x+5}{x-3}$

3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $y = e^{4x} \sin 5x$ β) $2x^2 + 5xy + y^2 = 5$

4. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου μ , $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες:
$$\begin{cases} \varepsilon_1 : (\mu - 1)x + \mu y = 3 \\ \varepsilon_2 : x - 2y = 3 \end{cases}$$
 να είναι κάθετες.

5. Ο πέμπτος όρος αριθμητικής προόδου είναι 14 ενώ το άθροισμα του πρώτου και του τρίτου όρου είναι 10. Να βρείτε το άθροισμα των δεκαπέντε πρώτων όρων της.

6. Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 + x - 2}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x^2}$

7. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που περνά από το σημείο A(3,2) και είναι παράλληλη με την ευθεία $3x + 4y = 5$.

8. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \sigma\phi\frac{\alpha}{2}$

9. Οι αριθμοί $\log 2$, $\log(5^x - 1)$, $\log(5^x + 3)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να βρείτε την τιμή του x .

10. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ύψος ίσο με a cm και οι παράπλευρες ακμές της σχηματίζουν με τη βάση γωνία 45° . Να υπολογίσετε συναρτήσει του a το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και τον όγκο της.

11. Να λύσετε την εξίσωση: $\sin 2x + 3\eta\mu x = 2$

12. Κολώνια πωλείται σε δυο είδη μπουκαλιών στην ίδια τιμή το καθένα. Το πρώτο μπουκάλι έχει σχήμα κώνου με διάμετρο βάσης 6cm και ύψος 7cm. Το δεύτερο είναι κυλινδρικό με ακτίνα βάσης 2cm και εμβαδό κυρτής επιφάνειας $20\pi \text{ cm}^2$. Ποιο μπουκάλι έχει καλύτερη τιμή;

13. Δίνεται τρίγωνο $\triangle \text{AB}\Gamma$, με $\text{A}(2,3)$ $\text{B}(1,-2)$ $\Gamma(5,1)$. Να βρείτε:

i) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ, ii) το μήκος του ύψους ΑΔ και iii) το εμβαδόν του τριγώνου $\hat{\Delta}$ ΒΓ.

14. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\varepsilon\phi\text{A} = \frac{\eta\mu\text{B} + \eta\mu\text{Γ}}{\sigma\upsilon\nu\text{B} + \sigma\upsilon\nu\text{Γ}}$, να δείξετε ότι $\hat{\text{A}} = 60^\circ$.

15. Σε ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 6\text{ cm}$ παίρνουμε χορδή $AG = 3\text{ cm}$. Με κέντρο το σημείο A και ακτίνα ίση με AG γράφουμε τόξο μέσα στον κύκλο που τέμνει τη διάμετρο στο σημείο Δ . Να βρείτε το εμβαδόν του μικτόγραμμου σχήματος $B\Gamma\Delta$.

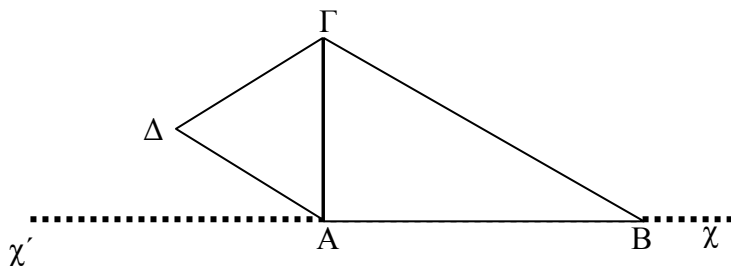
ΜΕΡΟΣ Β': Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 4. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει

$$\hat{A} = 90^\circ, \quad \hat{B} = 30^\circ, \quad B\Gamma = 8\text{ cm} \text{ και το τρίγωνο } \Delta A\Gamma$$

είναι ισόπλευρο. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα $\chi'\chi$.

Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που παράγεται.



2. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_v = \frac{3^v - 2^v}{3^v + 2^v}$

i) Να δείξετε ότι: $1 + \alpha_v = \frac{2}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^v}$

ii) Να δείξετε ότι: $\frac{1}{1 + \alpha_1} + \frac{1}{1 + \alpha_2} + \frac{1}{1 + \alpha_3} + \dots + \frac{1}{1 + \alpha_v} = \frac{v}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^v + 1$

3. Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$. Η εξίσωση της πλευράς AB και της διαγωνίου $A\Gamma$ είναι $\alpha x + \beta y - 38 = 0$, $5\alpha x + \beta y - 50 = 0$ αντιστοίχως.

i) Αν $A(3,7)$ να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 5$.

ii) Αν $(4,2)$ είναι μια άλλη κορυφή του ρόμβου να βρείτε τις άλλες συντεταγμένες των κορυφών του ρόμβου.

4. Αν $\alpha^2 - \beta^2 = \gamma^{2006}$ και $x = \log_{\alpha-\beta} \gamma$ και $y = \log_{\alpha+\beta} \gamma$

i) Να δείξετε ότι $x + y = 2006xy$

ii) Αν $\log_{\alpha-\beta} \gamma = 1002 \log_{\alpha+\beta} \gamma$ να δείξετε ότι $\gamma^2 = \alpha - \beta$

5. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ οι γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$, ($\hat{A} < \hat{B} < \hat{\Gamma}$) είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά ω . Στο ίδιο τρίγωνο οι $\sigma\tau\epsilon\mu 2\hat{A}, \sigma\tau\epsilon\mu 2\hat{B}, \sigma\tau\epsilon\mu 2\hat{\Gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να δείξετε ότι:

i) $0 < \omega < \frac{\pi}{3}$ ii) $\sigma\upsilon\nu 2\omega = -\frac{1}{4}$

6. α) i) Να δώσετε τον ορισμό της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)$.

ii) Αν $f(x) = \eta\mu x$ με βάση τον ορισμό να δείξετε ότι $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$

β) Αν για τη συνάρτηση $g(x)$ ισχύει η σχέση $g(\alpha + \beta) = g(\alpha) + g(\beta) + 2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \quad \forall \alpha, \beta \in \Re$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 3 \text{ να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης } g(x).$$

Η Διευθύντρια

Ελένη Παπαχριστοδούλου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
(ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)

ΤΑΞΗ : Β΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 25/05/2006

ΩΡΑ : 07.30 – 10.00 π.μ.

Το γραπτό αποτελείται από 3 σελίδες.

Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

Να γράφετε με πέννα, καθαρά και επιμελημένα (μόνο γραφικές παραστάσεις και σχήματα μπορούν να γίνονται με μολύβι). Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

Μέρος Α΄: Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.1) Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{x-6}{(x-1)(x+4)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.2) Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \frac{1-2\chi}{\chi-1}$. Να βρείτε:α) το πεδίο ορισμού β) το πεδίο τιμών και γ) το $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \psi$ 3) Να λύσετε την εξίσωση $\sin 2\chi - 5\eta\mu\chi + 2 = 0$ 4) Να λυθεί η εξίσωση $\log_2 x - 2\log_x 2 = 1$

5) Ο πέμπτος όρος αριθμητικής προόδου είναι 14 και ο δέκατος 29. Να βρεθούν:

α) ο πρώτος όρος της

β) το άθροισμα των 15 πρώτων όρων της.

6) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς λ και μ ώστε το πολώνυμο $\varphi(\chi) \equiv \chi^3 + \lambda\chi^2 + (\mu-2)\chi + 6$ να έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και -1.

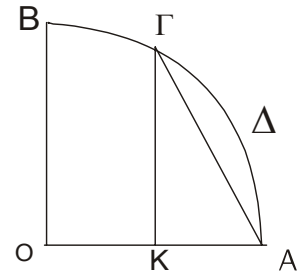
7) Να βρείτε τις παραγώγους των πιο κάτω συναρτήσεων

α) $\psi = \frac{\eta\mu 3\chi}{e^{2\chi}}$

β) $\psi^2 - 2\chi\psi + \chi^3 = 4$

8) Να δείξετε ότι $\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha}{\eta\mu 2\alpha} = \epsilon\phi\alpha + 1$ 9) Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ, αν $E = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $\beta = 4 \text{ cm}$ και $\gamma = 2\sqrt{3} \text{ cm}$.

- 10) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $2\chi - 5\psi + 3 = 0$ και $\chi - 3\psi - 7 = 0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $4\chi + \psi = 1$.
- 11) Να βρείτε την οξεία γωνία την οποία σχηματίζουν οι ευθείες $\psi = \mu\chi$ και $(1+\mu)\chi = (1-\mu)\psi$.
- 12) Κώνος έχει περίμετρο βάσης 12π cm και ύψος 8cm. Να βρεθούν:
α) ο όγκος του κώνου
β) το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου.
- 13) Ορθό τριγωνικό πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο, που έχει κάθετες πλευρές μήκους a . Αν το ύψος του πρίσματος είναι ίσο με την υποτείνουσα της βάσης του, να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας
- 14) Δίνεται κανονική τετραγωνική πυραμίδα Κ.ΑΒΓΔ. Το τρίγωνο ΑΚΓ είναι ισόπλευρο πλευράς $2a$. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.



- 15) Δίνεται τεταρτοκύκλιο OAB με ακτίνα $OA = 6$ cm. Η κάθετη ευθεία στο μέσο Κ της ακτίνας OA τέμνει το τόξο του κυκλικού τομέα στο σημείο Γ.
Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του κυκλικού τμήματος ΑΔΓΑ.

Μέρος Β΄: Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε **μόνο τις 4**.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) Δίνεται η καμπύλη $\psi = \chi^2 \cdot e^\chi$
α) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $\chi = -1$ περνά από την αρχή των αξόνων.

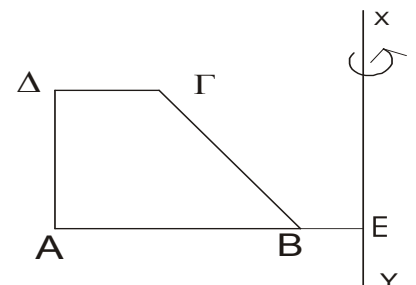
β) Να δείξετε ότι $\frac{d^2\psi}{d\chi^2} - 2 \cdot \frac{d\psi}{d\chi} + \psi = 2 \cdot e^\chi$

- 2) Το ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ του σχήματος στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα ΧΥ που είναι παράλληλος με την ΑΔ.

Να υπολογίσετε την:

- α) ολική επιφάνεια και
β) τον όγκο του στερεού που παράγεται.

Δίνονται: $(\Gamma\Delta)=2\text{cm}$, $(A\Delta)=4\text{cm}$, $(AB)=5\text{cm}$, $(BE)=1\text{cm}$ και $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$.



- 3) α) Δίνεται η καμπύλη $\psi = \alpha \chi - \beta \ln \chi - 2$, $\chi > 0$. Στο σημείο $A(1, 2)$ η εξίσωση της καθέτου της καμπύλης είναι $2\psi + \chi = 5$. Να υπολογίσετε τα α και β .
- β) Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος $\log_2 \chi, \log_4 \chi, \log_{16} \chi, \dots$.
- i) Να αποδείξετε ότι είναι φθίνουσα Γ.Π..
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $\log_2 \chi + \log_4 \chi + \log_{16} \chi + \dots = 2$.
- 4) α) i) Να δείξετε ότι $\sigma\phi\chi - \sigma\tau\epsilon\mu 2\chi = \sigma\phi 2\chi$. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $3(\sigma\phi\chi - \sigma\tau\epsilon\mu 2\chi)^2 = 1$ αν $0^\circ < \chi < 180^\circ$.
- ii) Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\alpha\sigma\upsilon\nu B + \beta\sigma\upsilon\nu A = 2\alpha\sigma\upsilon\nu A$ να δείξετε ότι $\hat{A} = \hat{B}$ ή $\hat{\Gamma} = 2\hat{A}$.
- β) Να λυθεί η εξίσωση $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$.
- 5) Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, με κορυφή $A(-8, 2)$ και εξίσωση της μίας διαγωνίου $7\chi - \psi + 8 = 0$. Να βρεθούν
- α) η εξίσωση της άλλης διαγωνίου
- β) η κορυφή Γ
- γ) η εξίσωση της πλευράς $A\Delta$.
- 6) α) Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f με τύπο $\psi = \chi^2 - 4\chi + 5$, $\chi \in [2, +\infty)$. Αν ορίζεται η f^{-1} να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.
- β) Σε κύκλο (O, R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στο εσωτερικό του κύκλου (O, R) , γράφουμε το τόξο $B\Gamma$ με κέντρο το A και ακτίνα AB .
- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου είναι $E = \frac{R^2}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$.

Ο Διευθυντής

Δημητριάδης Αλέξανδρος

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2006

Μάθημα: Μαθηματικά κατεύθυνσης
Τάξη: Β΄

Ημερομηνία: 26-5-2006
Χρόνος: 2,5 ώρες

Οδηγίες : α) Να γράφετε με μελάνι μπλε ή μαύρο
β) Επιτρέπεται η χρήση εγκεκριμένης υπολογιστικής μηχανής
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού

ΜΕΡΟΣ Α΄: Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο 12. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{5x+4}{(x+2)(x-1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των παρακάτω συναρτήσεων :

α. $y = \frac{x^2+1}{2x}$

β. $y = \sin 3x + e^{2x}$.

3. Να βρείτε τα όρια : α. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x}$ και β. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x}{x^2-9}$

4. Να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης $\eta\mu x - \sin 2x = 0$.

5. Σε αριθμητική πρόοδος το άθροισμα του δεύτερου και του πέμπτου όρου είναι 27 ενώ ο έβδομος όρος είναι διπλάσιος του τρίτου. Να βρείτε την πρόοδο.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x+2}{x-4}$. Να βρείτε :

α. το πεδίο ορισμού της

β. το πεδίο τιμών της

γ. την τιμή $f^{-1}(2)$.

7. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας ενός κώνου είναι $18\pi \text{ cm}^2$ και η γενέτειρα του σχηματίζει γωνία 60° με την βάση του. Να βρείτε τον όγκο του κώνου.

8. Δίνεται κανονική τετραγωνική πυραμίδα με ύψος 4α. Αν ο όγκος της είναι $48\alpha^3$ να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της.

9. Να αποδείξετε ότι $\frac{1+\eta\mu 2\theta - \sin 2\theta}{1+\eta\mu 2\theta + \sin 2\theta} = \varepsilon\phi\theta$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $y = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x$.

α. Να δείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = 2\eta\mu 2x$

β. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{dy}{dx} + \sqrt{3} = 0$, στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

11. Να λύσετε την εξίσωση $\log(16^x - 7 \cdot 4^x + 11) = 0$.

12. Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: 3x + 4y + 8 = 0$ και $\epsilon_2: 7x + y - 1 = 0$. Να βρείτε :

α. Την οξεία γωνία των δύο ευθειών.

β. την απόσταση του σημείου $\Sigma(2, -1)$ από την ϵ_1 .

13. Η εφαπτομένη της καμπύλης $y^2 - 3x + xy + 3 = 0$ στο σημείο της $A(1, -1)$ τέμνει τον άξονα των x στο B και τον άξονα των y στο Γ . Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης του $B\Gamma$.

14. Δίνεται κύκλος (K, R) και σημείο Σ έξω από αυτόν, έτσι ώστε $(K\Sigma) = 2R$. Φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣA και ΣB (A και B τα σημεία επαφής). Να υπολογίσετε, συναρτήσει του R , το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου ΣAB (τόξο AB μικρότερο του ημικυκλίου).

15. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, 3)$, $B(3, -1)$ και $\Gamma(\alpha, \beta)$ όπου α και β ακέραιοι. Αν η κορυφή Γ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $2x - 3y = 2$ και το εμβαδόν του τριγώνου είναι 5τ.μ. να υπολογίσετε τα α και β .

ΜΕΡΟΣ Β': Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο 4. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1. α. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\eta\mu 5x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu 4x}{\sigma\upsilon\nu 5x \cdot \sigma\upsilon\nu 3x - \sigma\upsilon\nu 6x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x} = \sigma\phi x$

β. Να λύσετε την εξίσωση: $9^{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \sqrt{3}$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ και $g(x) = \log_2 x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο των δύο συναρτήσεων

β. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της f στο σημείο $A(0, 1)$ και της g στο σημείο $B(1, 0)$ είναι κάθετες.

γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων αυτών.

3. Αν $y = \ln \sqrt{1 + 2x^2}$ να δείξετε ότι:

α. $e^{2y} \cdot \frac{dy}{dx} = 2x$

β. $e^{2y} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + 2e^{2y} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2 = 0$.

4. Σε τρίγωνο ABΓ δίνονται η κορυφή Γ(3,-1) και οι εξισώσεις του ύψους ΑΔ : $3x - 4y + 6 = 0$ και της διαμέσου ΑΜ : $2x + y - 7 = 0$. Να βρείτε :

α. την εξίσωση της πλευράς ΒΓ .

β. τις συντεταγμένες της κορυφής Α , του σημείου Μ και της κορυφής Β .

γ. το μήκος της διαμέσου ΑΜ .

5. Δίνονται τα αθροίσματα με άπειρους όρους :

$$\Sigma_1 = 1 + a^\nu + a^{2\nu} + a^{3\nu} + \dots$$

$$\Sigma_2 = 1 + a^{2\nu} + a^{4\nu} + a^{6\nu} + \dots$$

$$\Sigma_3 = 1 - a^\nu + a^{2\nu} - a^{3\nu} + \dots \quad , \text{ όπου } -1 < a < 1 \quad , \quad a \neq 0 \quad \text{ και } \nu \in \mathbb{N}^* .$$

Να υπολογίσετε , συναρτήσει του α, τα Σ_1 , Σ_2 και Σ_3 και να δείξετε ότι :

α. Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β. $(\Sigma_1)^2$, Σ_2 , $(\Sigma_3)^2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

6. Ορθογώνιο τραπέζιο με βάσεις 7cm και 10cm στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την μεγάλη βάση του. Αν ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι $128\pi \text{ cm}^3$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού.

Η Διευθύντρια

Άρτεμις Αριστείδου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ 2006

ΤΑΞΗ: Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
 ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Κατεύθυνσης

ΗΜΕΡΟΜ.: 23/5/2006
 ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ½ ώρες

- ΟΔΗΓΙΕΣ: 1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής σφραγισμένης από το σχολείο.
 2. Να γράφετε με μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
 3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΜΕΡΟΣ Α'

Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.
 Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

1. Να βρεθεί το άθροισμα: $\Sigma = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \dots$
2. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος των συναρτήσεων:
 α) $\psi = 2x^3 + x^2 - 5$ β) $\psi^2 + \frac{\psi}{x} = 3x$
3. Να βρεθούν οι γενικές λύσεις της εξίσωσης: $2\sin x + \sqrt{3} = 0$
4. Να αναλυθεί το κλάσμα $A = \frac{2x+1}{(x-2)(x^2+1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
5. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει μήκος 10cm, πλάτος 8cm και όγκο 320cm^3 . Να βρεθούν:
 α) Το ύψος του
 β) Το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας
6. Να βρεθεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[e^{\frac{1}{x}} + \frac{\eta\mu \frac{x}{2}}{x} \right]$
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1} + 1$. Να βρεθούν:
 α) Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της
 β) Ο τύπος της συνάρτησης $f \circ f^{-1}(x)$

8. Αν $2K = \varepsilon\phi x - \sigma\phi x$
 α) Ναδειχθεί ότι $K = -\sigma\phi 2x$
 β) Να λυθεί στο διάστημα $(0^0, 360^0)$ η εξίσωση $K = 1$
9. Τρίγωνο ΑΒΓ έχει κορυφή Α(3,1) και πλευρά ΒΓ: $8x - 6y + 2 = 0$. Να βρεθεί το μήκος του ύψους του ΑΔ.
10. Ο όγκος κώνου είναι $8\pi\text{cm}^3$ και το ύψος του είναι τριπλάσιο από την ακτίνα της βάσης του. Να βρεθεί το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου.
11. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης και της καθέτου της καμπύλης $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$ στο σημείο $x_0 = 1$.
12. Ναδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει: $(\alpha - \beta)(\eta\mu A + \eta\mu B) = (\alpha + \beta)(\eta\mu A - \eta\mu B)$
13. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδό βάσης 144cm^2 και παράπλευρο ύψος 10cm. Να βρεθούν:
 α) Το εμβαδόν ολικής επιφάνειας
 β) Ο όγκος της
14. Αν οι αριθμοί $\log 22$, $\log \sqrt{9(2^x + 2 \cdot 3^x)}$, $x \log 3$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να υπολογίσετε το x.
15. Αν το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους του διπλανού σχήματος είναι $8\pi\alpha^2\text{cm}^2$ να υπολογιστούν:
 α) Η ακτίνα ΑΓ του τεταρτοκυκλίου ΑΓΒ
 β) Η περίμετρος του μεικτόγραμμου τριγώνου ΑΓΒ

ΜΕΡΟΣ Β΄

Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1. Αν $2\psi = x - \eta\mu x \sin x$
 α) Ναδειχθεί ότι $\psi'' = \eta\mu 2x$
 β) Να βρεθούν οι γενικές λύσεις της εξίσωσης $\psi'' - 2\psi' = 0$
2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(2,5) Β(0,2) Γ(8,1)
 α) Ναδειχθεί ότι είναι ορθογώνιο
 β) Να βρεθεί το εμβαδόν του
 γ) Το μήκος του ύψους του ΑΔ
 δ) Ναδειχθεί ότι η διάμεσος $AM = BM$ [δηλ. $(AM) = \frac{(B\Gamma)}{2}$]

3. Στο σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $AB = 3a$ $A\Delta = 4a$ και $A\Gamma$ διαγώνιος. Το σχήμα στρέφεται ολόκληρη στροφή γύρω από άξονα $x\psi$ παράλληλο στη $B\Gamma$ και σε απόσταση a . Να βρεθούν συναρτήσει του a , το εμβαδόν και ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του σκιασμένου μέρους του σχήματος.

4. α) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται $\alpha = 8\text{cm}$, $\beta = 4\text{cm}$, $\gamma = 4\sqrt{3}\text{cm}$

Να υπολογιστούν οι γωνίες του $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$

β) Ναδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει:
$$E = \frac{\beta^2 \eta \mu A \eta \mu \Gamma}{2 \eta \mu B}$$

5. α) Ναδειχθεί ότι $2 \log_2 6 - 2 \log_2 \sqrt{3} = 2$

β) Ναλυθεί η εξίσωση $\log x = \log_5 2x$

6. Μιας αριθμητικής προόδου ο πρώτος όρος είναι ίσος με $\log 2$ και ο δεύτερος όρος με $\log 8$.

α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα Σ_n των n -πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο

$$\Sigma_n = n^2 \log 2$$

β) Να βρεθεί ο $n^{\text{ος}}$ όρος της.

Ο Διευθυντής

Γεώργιος Μάρκου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2006
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Χρόνος: 2:30'

Ημερομηνία: 23/5/2006

ΟΔΗΓΙΕΣ: Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρη πένα (τα σχήματα με μολύβι) .
Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού .
Το γραπτό αποτελείται από 4 σελίδες .
Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

ΜΕΡΟΣ Α': Από τα 15 θέματα να απαντήσετε ΜΟΝΟ στα 12. Κάθε σωστό θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 5}{3x^2 - 4}$

2) Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{x+1}{x^2-x}$

3) Να λύσετε την εξίσωση: $\sin(3x - 30^\circ) = \sin x$

4) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που περνά από το σημείο A(1,1) και είναι κάθετη με την ευθεία (ε): $\psi = \frac{1}{2}x + 1$

5) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\sin 2x + 1}{\eta\mu x + \eta\mu 3x} = \frac{1}{2\eta\mu x}$

6) Κανονικό τριγωνικό πρίσμα έχει εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $240\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
Αν η ακμή της βάσης είναι 4 cm να βρείτε τον όγκο του .

7) Να υπολογίσετε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των συναρτήσεων:

α) $\psi = e^{2x} \eta\mu 3x$

β) $x^2 - 3x^4 \psi + \psi^3 = 1$

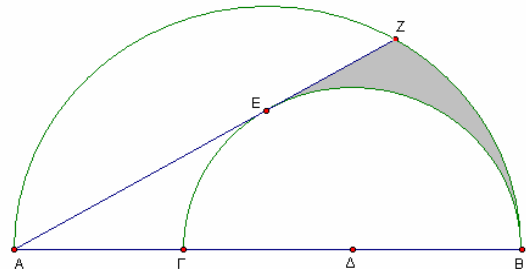
8) Να λύσετε την εξίσωση: $\log_2(\sin 2x + \sin \frac{x}{2}) + \log_{\frac{1}{2}}(\eta\mu x + \sin \frac{x}{2}) = 0$

9) Να λύσετε την εξίσωση: $9 \cdot 3^{\log_x^2 4} - \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_x \frac{1}{8}} = 0$

10) Το άθροισμα του τρίτου και του δέκατου όρου Αριθμητικής Προόδου ισούται με 28. Αν ο έβδομος όρος είναι 15 να βρεθεί το άθροισμα των είκοσι πρώτων όρων της.

11) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $E_{\pi} = 128 \text{ cm}^2$ και η παράπλευρη έδρα της σχηματίζει με τη βάση γωνία 60° . Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.

12) Στο διπλανό σχήμα AB και ΓB είναι διάμετροι των ημικυκλίων. Η AZ είναι εφαπτομένη του μικρού κύκλου (E σημείο επαφής) και $AG = \Gamma\Delta = \Delta B = 2\alpha$. Να υπολογίσετε συναρτήσει του α το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου EZB.



13) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες με την ευθεία (ε): $x + 2y - 2 = 0$ και σχηματίζουν με τους άξονες OX και OY τρίγωνο με εμβαδόν $E = 9 \text{ τ.μ.}$

14) Να λύσετε την εξίσωση: $1 + \sin x + \sin 2x = \eta \mu x + \eta \mu 2x$

15) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta \mu 3x}{\eta \mu x} - \frac{\sigma \upsilon \nu 3x}{\sigma \upsilon \nu x} = 2$ και να υπολογίσετε την τιμή της

παράστασης $K = \frac{1}{\eta \mu 15^\circ} - \frac{1}{\sigma \upsilon \nu 15^\circ}$

ΜΕΡΟΣ Β': Από τα 6 θέματα να απαντήσετε **ΜΟΝΟ** στα 4. Κάθε σωστό θέμα βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1) α) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{x+1} - 2^x = 3^{x-1} + 2^{x+3}$

β) Αν $y = e^{3x} \eta \mu 4x$ να δείξετε ότι: $\frac{d^2y}{dx^2} - 6 \frac{dy}{dx} + 25y = 0$

2) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης $\psi = -8x - x^2$ στα σημεία της με $x_1 = -6$ και $x_2 = 1$. Αν Α είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων αυτών, Β και Γ είναι τα σημεία που τέμνουν οι εφαπτόμενες τον άξονα των ψ , αντίστοιχα, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

3) Τρίγωνο ΑΒΓ έχει κορυφή Α(2,1). Οι εξισώσεις δύο υψών του είναι $3\chi + \psi - 11 = 0$ και $\chi - \psi + 3 = 0$. Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών του.

β) Το εμβαδόν του.

γ) Το μήκος του ύψους που φέρουμε απο τη κορυφή Α.

4) α) Αν $\epsilon \phi \frac{\beta}{2} = 4 \epsilon \phi \frac{\alpha}{2}$ να αποδείξετε ότι $\epsilon \phi \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{3 \eta \mu \alpha}{5 - 3 \sigma \upsilon \nu \alpha}$

β) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\sigma \upsilon \nu B + \sigma \upsilon \nu \Gamma = \sqrt{2} \sigma \upsilon \nu \frac{B - \Gamma}{2}$ να δείξετε ότι το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 90^\circ$).

5) Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB // \Gamma \Delta$) με $AB = a \text{ cm}$, $\Gamma \Delta = 3a \text{ cm}$ και $\hat{A} = 60^\circ$. Αν $(\epsilon) \perp \Gamma \Delta$ στο σημείο Δ να βρείτε:

α) Τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του ΑΒΓΔ γύρω απο την (ϵ) .

β) Την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ αν ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι $162\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

6) Δίνεται η συνάρτηση $y = \eta\mu^2 \frac{x}{4}$ όπου $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Να δείξετε ότι:

α) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4} \eta\mu \frac{x}{2}$

β) $\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^5y}{dx^5} + \frac{d^6y}{dx^6} + \dots = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} + \eta\mu \frac{x}{2} \right)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1-y}{5} = \frac{1}{10} \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} + \frac{1}{5} \eta\mu \frac{x}{2}$ στο διάστημα $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Ο Διευθυντής

Σάββας Πολυδώρου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2006

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 1.6.2006

ΤΑΞΗ : Β΄

ΧΡΟΝΟΣ : 2,5 ΩΡΕΣ

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες

ΟΔΗΓΙΕΣ : 1) ΔΕΝ επιτρέπεται η χρήση προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής
2) Να γράψετε μόνο με μελάνι (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
3) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΜΕΡΟΣ Α : Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε **ΜΟΝΟ** τις 12.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{x}{x^2-4}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-5} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$.

3. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων
α) $\psi = \sqrt{x} - e^x + 10$ β) $\psi = e^{-2x} \cdot \ln 4x$

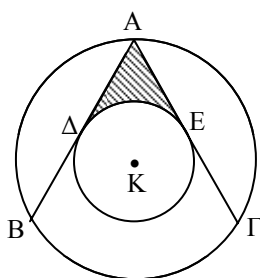
4. Να βρείτε τα όρια

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-5x-x^2}{4+6x^2}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0^-} 4^{\frac{1}{x}}$

5. Να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης $\sin(2x + 60^\circ) = \frac{1}{2}$.

6. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ακμή βάσης 10cm και όγκο 400cm³. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$, $x \geq 0$. Να βρείτε :
- το πεδίο τιμών της $f(x)$
 - τον τύπο και το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.
9. Η ρίζα της εξίσωσης $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$ είναι ο πρώτος όρος φθίνουσας Γεωμετρικής προόδου της οποίας το άθροισμα των απείρων όρων της ισούται με 3. Να βρείτε τον έβδομο όρο της Γ.Π.
10. Σε τρίγωνο ABΓ δίνονται A (0, 2), B (1, 3), AΓ: $x + 3y - 6 = 0$ και BΓ: $x + y - 4 = 0$
- Να βρείτε το μήκος της BΓ
 - Να δείξετε ότι η διάμεσος AM // x'x .
11. Να λύσετε την εξίσωση $\log x + \log x^3 + \log x^5 + \dots + \log x^{17} = 162$
12. Κώνος έχει όγκο $V = 9\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$ και η γενέτειρα του σχηματίζει γωνία 30° με το ύψος του. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του .
13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3x - 2$ με $x > 1$ και $g(x) = \sqrt{4x - x^2}$, να βρείτε το τύπο και το πεδίο ορισμού της $g \circ f$.
14. Να δείξετε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$
15. Οι χορδές AB=ΑΓ=λ₃ του κύκλου (K, R) εφάπτονται σε κύκλο (K, ρ) στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα όπως στο πιο κάτω σχήμα. Να βρείτε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΔΕ συναρτήσει του R.



ΜΕΡΟΣ Β: Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε **ΜΟΝΟ** τις 4.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Σε φθίνουσα Γεωμετρική πρόοδο δίνεται $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{3}{2}$ και $\alpha_1 - 3 = \alpha_2$

- α) να βρείτε την Γ.Π.,
β) να βρείτε το άθροισμα των απείρων όρων της.

2. α) Να λύσετε την εξίσωση: $\log_3^2 x - 3^{\log_3^4} = \log_3 x + \log_3 \frac{1}{81}$

β) Να σχηματίσετε πολώνυμο $f(x)$ δευτέρου βαθμού που έχει ρίζες τις λύσεις τις πιο πάνω εξίσωσης και $f(0) = 3$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = xe^{2ax}$, $a \in \mathbb{R}$.

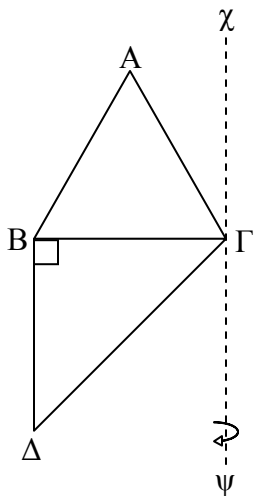
α) Αν $\frac{d\psi}{dx} = 0$ για $x = -\frac{1}{4}$ να δείξετε ότι $a = 2$.

β) Για $\psi = xe^{4x}$

i) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης αυτής στο σημείο της με τετμημένη $x = \frac{1}{4}$,

ii) να δείξετε ότι $\frac{e^{4x}}{2} \frac{d^2\psi}{dx^2} - \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + 16\psi^2 = 3e^{8x}$.

4. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά $2a$. Εκτός του τριγώνου να κατασκευάσετε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΒΓΔ ($\hat{B}\Delta = 90^\circ$). Το σχήμα ΑΒΔΓ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα χΓψ κάθετο στην ΒΓ στο Γ. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\eta\mu 4x(1+\sigma\upsilon\nu 4x)}{\sigma\upsilon\nu^3 2x}$ και $g(x) = \eta\mu^2 x - \eta\mu^2 3x$

- α) να δείξετε ότι i) $f(x) = 4\eta\mu 2x$
 ii) $g(x) = -\eta\mu 2x \cdot \eta\mu 4x$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2}$

γ) Να βρείτε την λύση της εξίσωσης $f(x) + g(x) = 0$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$

6. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας με $\lambda > 0$ που διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $2x - 3\psi + 21 = 0$ και $3x + 4\psi - 11 = 0$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο που έχει εμβαδόν ίσο με 32 τ.μ.

Η Διευθύντρια

Ευφροσύνη Αργυρίδου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2006

Ημερομηνία: 25/05/2006

Χρόνος: 2,5 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
β) Να γράφετε μόνο με μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α': α) Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 12 .
β) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 (πέντε) μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα: $\frac{x+3}{x(x+1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
2. Να λύσετε την εξίσωση: $2\log\sqrt{x} + \log(x+3) = 1$.
3. Σε αριθμητική πρόοδο, το άθροισμα του τέταρτου και του έβδομου όρου είναι 16 και ο δέκατος ένατος όρος της, είναι τριπλάσιος του δευτέρου όρου της. Να βρείτε το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων της.
4. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:
(α) $\psi = \frac{3x^2}{2x+1}$ (β) $\psi = \eta\mu x + \epsilon\phi 2x$.
5. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται οι συντεταγμένες των κορυφών Α(-1,4), Β(2,3) και Γ(-2,5). Να βρείτε:
(α) Την εξίσωση της διαμέσου ΒΔ.
(β) Το μήκος του ύψους ΑΗ.
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{1}{3}x}$. Να βρείτε το άθροισμα: $f(0) + f'(0) + f''(0) + f'''(0) + \dots$.
7. Να υπολογίσετε τα όρια:
(α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$ και (β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 4}}{2x}$.
8. Να δείξετε ότι: $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 6A}{\eta\mu 6A} + \frac{\eta\mu 6A}{1 - \sigma\upsilon\nu 6A} = 2\sigma\upsilon\nu 3A \sigma\tau\epsilon\mu 3A$.
9. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει βάση τετράγωνο, η διαγώνιος του είναι τριπλάσια από το ύψος του και ο όγκος του είναι 500 m^3 . Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.
10. Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της $\psi = x^2 + 4x - 5$, $x > -2$.
Αν ορίζεται η $f^{-1}(x)$ να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.
11. Ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = 6\text{cm}$ και $ΑΓ = 8\text{cm}$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα που δεν τέμνει το τρίγωνο, παράλληλο προς τη ΑΓ και σε απόσταση 1cm από την ΑΓ. Να βρείτε το εμβαδόν του στερεού που παράγεται.
12. Δίνεται η καμπύλη $\psi^x = e$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο με $x=1$.

13. Να λύσετε την εξίσωση: $\varepsilon\varphi x \cdot \varepsilon\varphi 3x = 1$.

14. Σε κώνο η ακτίνα R , το ύψος u και η γενέτειρα λ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Αν ο όγκος του είναι αριθμητικά ίσος με το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας, να βρείτε τον όγκο του.

15. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι $2E=R\beta\sigma\upsilon\nu(A-\Gamma)$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

ΜΕΡΟΣ Β' : α) Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε **ΜΟΝΟ** τις 4 .

β) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 (δέκα) μονάδες.

1. Σε αριθμητική και γεωμετρική πρόοδο με θετικούς όρους, η διαφορά της αριθμητικής προόδου ισούται με το λόγο της γεωμετρικής προόδου. Ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου είναι διπλάσιος του πρώτου όρου της γεωμετρικής και ο 17^{ος} όρος της αριθμητικής προόδου ισούται με το τετράγωνο του πρώτου όρου της γεωμετρικής. Αν το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου ισούται με τον πρώτον όρο της αριθμητικής, να βρείτε τις δύο προόδους.

2. α) Αν ισχύει η σχέση: $\ln \psi = \ln x + x \ln 3$, να δείξετε ότι: $\psi = x \cdot 3^x$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\psi' - \psi \ln 3 + 12 = 9^x$.

3. Να λύσετε την εξίσωση: $\log_3(9 \cdot 4^{\eta\mu^2 x}) - \log_3\left(\frac{1}{8^{\sigma\upsilon\nu x}}\right) = 2$.

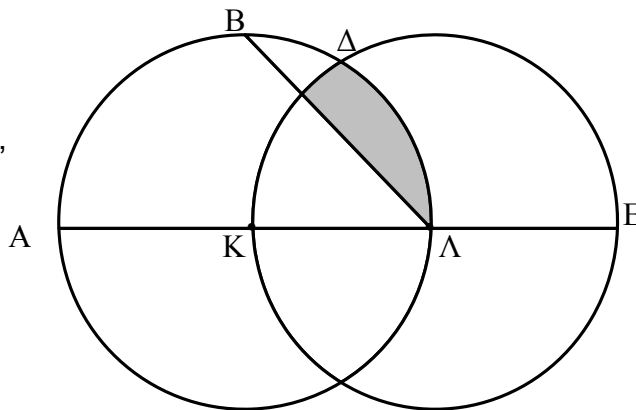
4. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$.

(α) Να δείξετε ότι: $(\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B)^2 + (\eta\mu A - \eta\mu B)^2 = 4\eta\mu^2 \frac{\Gamma}{2}$.

(β) Αν ισχύει η σχέση: $e^{\sigma\upsilon\nu(A+B)} \cdot e^{\sigma\upsilon\nu(A-B)} = 1$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

5. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon_1: 5x + 2\psi = 30$ η οποία τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ στο σημείο A . Ευθεία ε_2 παράλληλη με την ευθεία $\psi = 5x$ τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ στο σημείο B και την ευθεία ε_1 στο σημείο Γ . Αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ να είναι $\frac{15}{2}$ τ.μ. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

6. Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (K,R) , (Λ,R) και $B\Lambda = \lambda_4$. Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτογράμμου τριγώνου $\Lambda\Gamma\Delta$, συναρτήσει του R .



ΛΥΚΕΙΟ ΑΡΧ. ΜΑΚΑΡΙΟΥ Γ' ΛΑΣΟΥΠΟΛΗΣ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ : 2005 – 2006

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2006 .

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Κατεύθυνσης

ΤΑΞΗ : Β'

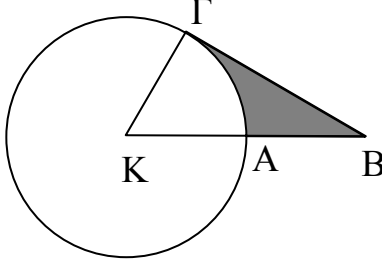
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 23 /5/2006

ΧΡΟΝΟΣ : 2.30'

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
- α) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τρεις σελίδες .
 - β) Να γράψετε μόνο με μελάνι .(Τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι.)
 - γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού .
 - δ) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που να φέρει την σφραγίδα του σχολείου .

ΜΕΡΟΣ Α' : Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12 .
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 1 μονάδα .

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα : $\frac{x-5}{(x+1)(x-2)}$.
2. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :
 - α) $\psi = 4x^6 - 2\sin 7x$
 - β) $\psi = \frac{e^{4x}}{x^3 + 7}$
3. Να σχηματίσετε την Αριθμητική Πρόοδο στην οποία το άθροισμα του τρίτου και του όγδοου όρου της είναι 4 και ο δεύτερος όρος της είναι τετραπλάσιος του πέμπτου όρου της.
4. Να βρείτε τα όρια :
 - α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x}{3x^2 + 1}$
 - β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$
5. Να δείξετε την ταυτότητα : $\frac{\sin 2\theta - 2\sin\theta + 1}{\eta\mu 2\theta - 2\eta\mu\theta} = \sigma\phi\theta$
6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :
 - α) $\psi = \frac{x}{x^2 - 4}$
 - β) $\psi = \ln(2x - 3)$
7. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει περίμετρο βάσης ίση με 24 m . Το παράπλευρο ύψος της σχηματίζει με το επίπεδο της βάσης γωνία 60° . Να βρείτε τον όγκο της και την παράπλευρη ακμή της .

8. Κύλινδρος έχει όγκο $100\pi \text{ cm}^3$ και ύψος ίσο με τα $\frac{4}{5}$ της ακτίνας του. Ένας κώνος έχει ακτίνα 8 cm . Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι διπλάσιο του εμβαδού της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου. Να βρείτε τον όγκο του κώνου.
9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = x^2$.
- α) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 8x}{g(x) + 4x}$.
- β) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g \circ f$.
10. Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(\log_3(3x) - 3\log_9 x - 1) = 0$.
11. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) , η γωνία $\hat{KB\Gamma} = 30^\circ$ και $B\Gamma$ εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ . Να βρείτε συναρτήσει του R το εμβαδόν και την περίμετρο του μεικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.
- 
12. Να λύσετε την εξίσωση: $2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2} - \eta\mu^2 x = 2$
13. Να δείξετε, με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής, ότι ισχύει η πρόταση: $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2v-1) \cdot (2v+1)} = \frac{v}{2v+1} \quad \forall v \in \mathbb{N}^*$
14. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση: $\chi^2 - \psi^3 - \chi \cdot \psi - 1 = 0$.
- α) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της με $\psi = 1$ και $\chi > 0$.
- β) Αν η πιο πάνω κάθετη σχηματίζει γωνία 45° με την ευθεία $\chi - \psi = 3$ να βρείτε τις τιμές του κ .
15. Η ευθεία: $2\chi + \psi - 4 = 0$ εφάπτεται κύκλου κέντρου $O(-8, 0)$ και ακτίνας R .
- α) Να βρείτε το μήκος της ακτίνας R του κύκλου.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (O, R) που είναι παράλληλη προς την ευθεία: $2\chi + \psi - 4 = 0$.

ΜΕΡΟΣ Β' : Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 2 μονάδες.

1. Δίνεται η καμπύλη: $\psi = x^2 \cdot \ln x$, $x > 0$.

- α) Να δείξετε ότι : $x \cdot \left(\frac{d^2\psi}{dx^2} + 1 \right) = 3x + \frac{d\psi}{dx}$.
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της καμπύλης $\psi = x^2 \cdot \ln x$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τον άξονα $\chi\chi$.
2. Ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει πλευρά $2a$ cm . Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ κατά μήκος $\Gamma\Delta = a$ cm και φέρνουμε τη $\Delta\chi$ κάθετη στη $B\Delta$. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του τριγώνου $AB\Gamma$ γύρω από τη $\Delta\chi$.
3. Η εξίσωση $\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$ έχει ρίζες x_1, x_2 με $x_1 > x_2$.
Να σχηματίσετε τη Γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο το x_1 και πέμπτο όρο το $(x_2)^6$.
4. Οι ευθείες $(\epsilon_1) : \psi = \chi$ και $(\epsilon_2) : \chi + \psi = 6$ τέμνονται στο A . Η (ϵ_1) τέμνει τον άξονα $\psi\psi$ στο O και η (ϵ_2) τέμνει τον άξονα $\chi\chi$ στο B .
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων O, B και A .
β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές .
γ) Να βρείτε:
ι) Την εξίσωση του ύψους AD .
ii) Το εμβαδόν του τριγώνου OAB .
iii) Τις συντεταγμένες του Γ ώστε το τετράπλευρο $OAB\Gamma$ να είναι τετράγωνο.
5. Να δείξετε ότι : $\frac{\eta\mu\alpha - \eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha} = \epsilon\phi 2\alpha$. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση: $\frac{3(\eta\mu\alpha - \eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha} - 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 0$.
6. α) Δίνονται τα αθροίσματα : $\Sigma_1 = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta + \dots$
 $\Sigma_2 = 1 + \sigma\upsilon\nu 2\theta + \sigma\upsilon\nu^2 2\theta + \dots$, με $\theta \neq \frac{\kappa\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.
Να δείξετε ότι : $\frac{1}{\Sigma_2} = \frac{4}{\Sigma_1} - \frac{2}{\Sigma_1^2}$.
β) Δίνεται η Αριθμητική Πρόοδος : $1, 3, 5, 7, 9, \dots$
Να δείξετε ότι: $\rho \cdot \mu (\Sigma_{\mu+\rho} - \Sigma_{\rho-\mu}) = 4\Sigma_{\rho\mu}$. $\mu, \rho \in \mathbb{N}$, $\rho > \mu$.

Ο Διευθυντής

Κ. Μάρκου

7. α) Αν $\psi = \ln \sqrt{1+3x^2}$ να δείξετε ότι $e^{2\psi} \cdot \frac{d\psi}{dx} - 3x = 0$.

β) Δίνεται η καμπύλη $\psi = x \cdot \ln x$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της καμπύλης $\psi = x \cdot \ln x$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$

8. Αν $\psi = \frac{\pi}{4} - 2x$ να δείξετε ότι :

α) $\varepsilon\phi\psi = \frac{1 - 2\varepsilon\phi\chi - \varepsilon\phi^2\chi}{1 + 2\varepsilon\phi\chi - \varepsilon\phi^2\chi}$

β) Από την (α) να δείξετε ότι : $\varepsilon\phi^2 \frac{\pi}{8} + 2\varepsilon\phi \frac{\pi}{8} - 1 = 0$

γ) Από το (β) να δείξετε ότι : $\varepsilon\phi \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

9. Αν $\psi \cdot \sin \chi = e^x$ να δείξετε ότι $\frac{d^2\psi}{dx^2} - 2\varepsilon\phi\chi \cdot \frac{d\psi}{dx} - 2\psi = 0$

10. α) Να λύσετε την εξίσωση $3^{\eta\mu^2\chi} = 9^{\sin^2\chi - \eta\mu^2\chi}$, στο διάστημα $0 < \chi < 2\pi$.

β) Να δείξετε ότι $\log_a \beta + \log_{a^2} \beta + \log_{a^4} \beta + \dots = \log_a \beta^2$

11. Αριθμητική και Γεωμετρική πρόοδος έχουν τον ίδιο λόγο και ο πρώτος όρος της Α.Π. είναι διπλάσιος του πρώτου όρου της Γ.Π. Ο 17^{ος} όρος της Α.Π. ισούται με το τετράγωνο του πρώτου όρου της Γ.Π., ενώ το άθροισμα των άπειρων όρων της Γ.Π. ισούται με τον πρώτο όρο της Α.Π. Να σχηματίσετε τις δύο προόδους

12. Να δείξετε ότι $\frac{2\eta\mu 5\omega \cdot \sin 3\omega - \eta\mu 8\omega}{2\sin 3\omega \cdot \sin 2\omega - \sin 5\omega} = 2\eta\mu\omega$.

13. Να σχηματίσετε τη Γεωμετρική Πρόοδο που έχει $\Sigma_\infty = 16$ και ο $a_4 = 4a_6$.

14. Να λύσετε την εξίσωση $\sin 2\chi - 3\eta\mu\chi + 1 = 0$.

16. Να λύσετε την εξίσωση $\ln(3^{2x+1} - 3^x - 23) = 0$

17. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης $x^2 + \psi^2 + x\psi - 1 = 0$ στο σημείο της με $\psi = -1$ και $\chi > 0$.

18. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(-1,1), Β(4,-3) και Γ(7, 11).

α) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΒΜ.

β) Να βρείτε την απόσταση της κορυφής Γ από την ευθεία ΑΒ.

19. Φθίνουσα Γεωμετρική πρόοδος έχει πρώτο όρο $a_1 = \eta\mu 4\theta$ και λόγο $\lambda = \sin 4\theta$. Να δείξετε ότι το άθροισμα των άπειρων όρων της είναι $\Sigma_\infty = \sigma\phi 2\theta$.

20. Να δείξετε με την μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι ισχύει η πρόταση :

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2v - 1) = v^2 \quad \forall v \in \mathbb{N}.$$

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2006**ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)****ΤΑΞΗ : Β΄**

Ημερομηνία : 23 / 05 / 2006

Χρόνος : 2,5 ώρες

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **3** σελίδες.**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Να γράψετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α΄

- Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα : $\frac{5x+2}{x(x+1)}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$.

Να βρείτε :

(α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της

(β) τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} και το πεδίο ορισμού της.

3. Να λύσετε την εξίσωση : $\log(x^2 - 7) - \log(x - 2) = \log(x + 1)$.

4. Δίνεται η ευθεία ε : $3x+4y-5=0$ και $A(3,-1)$ ένα σημείο της. Αν $B(-2,-13)$ σημείο εκτός της ε , να βρείτε:

(α) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB

(β) την απόσταση του B από την ε .

5. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{d\psi}{dx}$ των συναρτήσεων :

(α) $\psi = (2x^3 + 5)^2$ (β) $\psi = \ln x \cdot \varepsilon\phi 4x$

6. Να λύσετε την εξίσωση: $2\eta\mu^2 x - \eta\mu 2x = 0$ στο διάστημα $[0^\circ, 360^\circ)$.

7. Σε αριθμητική πρόοδο η διαφορά του δεύτερου από τον έβδομο όρο της είναι 15 και το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων της είναι 155. Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο και τον εικοστό όρο της.
8. Ορθό τριγωνικό πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 5 cm και 12 cm. Αν το ύψος του πρίσματος είναι 8 cm, να βρείτε :
 (α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και
 (β) τον όγκο του.
9. Να υπολογίσετε τα όρια :
 (α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{5 - 3x^2}$ (β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{x^2 - 3x + 2}$.
10. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 10 cm και όγκο $\frac{500\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$. Να βρείτε:
 (α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.
 (β) τη γωνία που σχηματίζει το παράπλευρο ύψος της με την βάση.
11. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $3x^2\psi + x\psi^2 + 4 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της που έχει τετμημένη $x = -1$ και τεταγμένη $\psi > 0$.
12. Το πολυώνυμο $f(x) \equiv 3x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει ρίζα το -1. Αν $f'(-1) = 0$ και τα α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να βρείτε τα α, β και γ .
13. Η ακτίνα R και το ύψος u ενός κυλίνδρου ικανοποιούν την σχέση $R+u=9$ και $u>R$. Αν το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι $40\pi \text{ cm}^2$, να βρείτε:
 (α) την ακτίνα και το ύψος του κυλίνδρου
 (β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του κυλίνδρου.
14. Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha}$
 (α) Να δείξετε ότι $K = \epsilon\phi 2\alpha$.
 (β) Αν $K=2$ και $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ να δείξετε ότι $\epsilon\phi\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.
15. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους: $f(x) = \ln x$ και $g(x) = x^2 + 9$.
 (α) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $h = f \circ g$ και $\frac{f}{g}$, να βρείτε τον τύπο τους και το πεδίο ορισμού τους.
 (β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης h.

ΜΕΡΟΣ Β΄

➤ Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.

➤ Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Οι εξισώσεις δύο πλευρών παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι οι: $x - \psi = 0$ και $x + \psi - 2 = 0$. Το σημείο (3,5) είναι μία από τις κορυφές του.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του παραλληλογράμμου.

(β) Να δείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδόν του.

2. (α) Να βρείτε το άθροισμα: $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \dots$. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση: $\left[6 \cdot \left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \dots \right) \right]^{2 \log_5 x} = \log 1000^x + 4$.

(β) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση: $\eta\mu A(\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma) = \frac{\beta + \gamma}{2R}$, να δείξετε ότι είναι ορθογώνιο.

3. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και χορδή του ΑΒ ίση με την πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Στο Α φέρουμε την εφαπτομένη ΧΧ' του κύκλου και από το Β την κάθετη στη ΧΧ' που την τέμνει στο Γ. Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτογράμμου τριγώνου ΑΒΓ.

4. Οι αριθμοί x, ψ, ω είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Ο αριθμός ψ είναι η ακέραια ρίζα της εξίσωσης $9 \cdot (2 \cdot 3^{2\psi-2} + 1) = 19 \cdot 3^\psi$. Αν οι αριθμοί $x-2, \psi^3, \omega+18$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να υπολογίσετε τους αριθμούς x, ψ και ω .

5. (α) Αν $\psi = \eta\mu(e^x - 1)$ να δείξετε ότι $\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{d\psi}{dx} + \psi \cdot e^{2x} = 0$.

(β) Η καμπύλη $\psi = \alpha \cdot \ln x + \beta x$ περνά από το σημείο Α(1,2). Αν η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο Α είναι 5, να βρείτε τα α και β .

6. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ=α cm, ΓΔ=3α cm και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Το τραπέζιο περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε) η οποία είναι κάθετη στη ΓΔ στο σημείο Δ. Να βρείτε τον όγκο και την επιφάνεια του στερεού που παράγεται από την περιστροφή συναρτήσει του α .

Η Διευθύντρια

(Βικτώρια Λοΐζου)

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2006

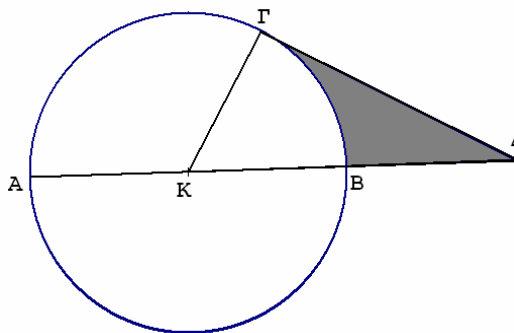
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΤΑΞΗ: Β' (κατεύθυνσης)

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 26/5/2006
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2.30'

ΟΔΗΓΙΕΣ: Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
Να γράφετε με μελάνη μπλε ή μαύρο.
Το εξεταστικό αποτελείται από 4 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α': Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{6x-6}{x(x-3)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
2. Σε αριθμητική πρόοδο ο τέταρτος όρος της είναι 11 και το άθροισμα του πέμπτου και του ένατου όρου της είναι 40. Να βρεθεί η πρόοδος.
3. Να λύσετε την εξίσωση: $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$.
4. Ορθό πρίσμα έχει ύψος 10cm βάση ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 5cm. Να βρείτε: α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και β) τον όγκο του.
5. Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu 2\chi - 5\eta\mu\chi + 2 = 0$
6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 60^\circ$, $\beta = \sqrt{3}$ cm και $\gamma = 1$ cm. Να βρείτε τις γωνίες Α και Γ, την πλευρά α, καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου.
7. Δίνεται κύκλος (Κ, R) με διάμετρο ΑΒ. Αν ΚΔ=2R και ΓΔ εφαπτόμενη να βρεθεί το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου ΒΔΓ συναρτήσει του R.



8. Να βρείτε τις παραγώγους των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $\psi = \frac{4\chi^5 - 3}{\eta\mu\chi}$

β) $\psi = e^{3x} \ln 5x$

9. Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 5\alpha + 2\eta\mu 4\alpha + \eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu 5\alpha + 2\sigma\upsilon\nu 4\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha} = \epsilon\phi 4\alpha$

10. Δίνονται τα σημεία $A(2,5)$ και $B(3,-7)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το μέσο M του ευθυγράμμου τμήματος AB και είναι κάθετη στην ευθεία $2x + 3y - 5 = 0$.
11. Σε κανονική τετραγωνική πυραμίδα οι παράπλευρες έδρες σχηματίζουν με τη βάση γωνία 30° . Αν το εμβαδόν της βάσης της πυραμίδας είναι 100m^2 , να υπολογίσετε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας και τον όγκο της.
12. Να λύσετε την εξίσωση: $\log_2(4x^2 + 3x - 3) - 2 = 2\log_2(2 - x)$.
13. α) Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{2}{x}$ και $g(x) = \frac{3x}{x-1}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g$, $f \cdot g$ και τα πεδία ορισμού τους.
- β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(4,-2)$, $B(7,5)$ και $\Gamma(2,3)$ είναι ισοσκελές.
14. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + 3}{3x^2 + 4x + 1}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x - \eta\mu 3x}{2x}$
15. Αν $\psi = \ln(\sin x)$, να δείξετε ότι $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 - 1 = -2$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(7,5)$, $B(2,3)$ και $\Gamma(4,-2)$.
 - Να βρείτε εξίσωση του ύψους BD .
 - Να βρείτε την απόσταση της κορυφής A από το ύψος BD .
 - Δείξτε ότι $\hat{B} = 90^\circ$.
 - Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Δίνεται η συνάρτηση $\psi = xe^{kx}$, με $k \in \mathbb{R}$.
 - Αν για $x = 1 \Rightarrow \frac{d\psi}{dx} = 0$, να δείξετε ότι $k = -1$.
 - Για την $\psi = xe^{-x}$:
 - Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης αυτής για $x = 0$.
 - Να δείξετε ότι: $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2}{1-x} \cdot \frac{d\psi}{dx} - \psi = 0$.

3. α) Να αναλυθεί σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{\chi + 2}{(\chi - 2)(\chi^2 + 4)}$

β) Να βρείτε το άθροισμα: $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{4}{9} - \frac{1}{8} + \dots$

4. α) Να δείξετε ότι: $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\chi}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\chi} = \sigma\phi^2 \chi$

β) Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύει:

$$\beta\sigma\upsilon\nu \Gamma - \gamma\sigma\upsilon\nu B = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha}$$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 2\chi = \eta\mu(\chi + 60^\circ)$ στο διάστημα $0^\circ < \chi < 360^\circ$.

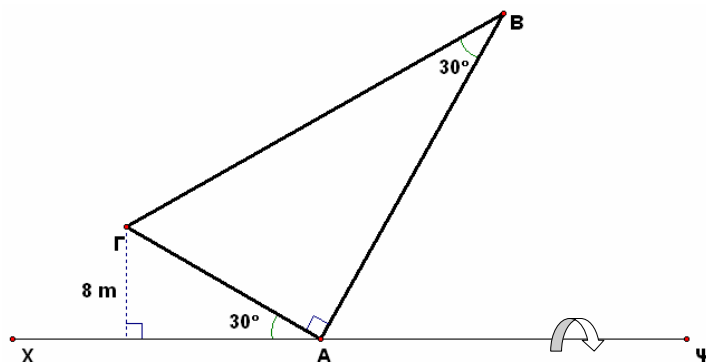
5. Οι αριθμοί $2\chi - 3$, $2\chi + 1$, $3\chi + 1$ αποτελούν τρεις διαδοχικούς όρους μίας αριθμητικής προόδου. Οι αριθμοί $\chi - 1$, ψ , $2\chi + \psi - 2$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

α) Να βρείτε τα χ και ψ .

β) Να βρείτε τις δύο προόδους όπου $\psi > 0$

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου.

6. Να βρείτε τον όγκο και την επιφάνεια του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του ορθογωνίου τριγώνου ABΓ γύρω από την ευθεία XΑΨ.



ΤΕΛΟΣ

Ο Διευθυντής

Μιχάλης Οικονομίδης

Εισηγητές:

Στέλιος Θεοφίλου (Συντονιστής Β.Δ.)

Ελένη Φωτίου

Μενελάου Κούλα

Τσιήρτου Ρηγίνα

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2006

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΤΑΞΗ : Β' ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

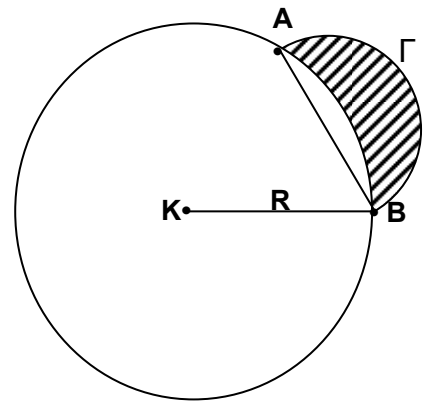
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23 / 5 / 2006
ΧΡΟΝΟΣ: 2: 30'

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής
β) Να γράφετε μόνο με μπλέ ή μαύρο μελάνι(στα σχήματα επιτρέπεται το μολύβι).
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΜΕΡΟΣ Α': Από τα 15 θέματα να λύσετε ΜΟΝΟ τα 12.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 1 μονάδα.

- 1) Σε αριθμητική πρόοδο ο 1^{ος} όρος ισούται με -3 και ο 3^{ος} όρος με 7. Να βρείτε τον 15^ο όρο της προόδου.
- 2) Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{5-\chi}{\chi^2-\chi-2}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
- 3) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης: $\psi = e^x \cdot \sigma\upsilon\nu^2\chi$
- 4) Να λύσετε την εξίσωση: $\log_3(\chi+6) - \log_3(4-\chi) = 2$
- 5) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x+5}{2x-3}$. Να βρείτε:
 - i. το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της $f(x)$
 - ii. τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης $f^{-1}(x)$ και το πεδίο ορισμού της.
- 6) Να δείξετε ότι: $\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2B}{\eta\mu 2B} \cdot \sigma\phi B = 1$
- 7) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη προς την ευθεία (ϵ): $3\chi - 4\psi - 2 = 0$ και περνά από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB με άκρα A(3,1) και B(5,-5).
- 8) Να βρείτε την παράγωγο $\frac{d\psi}{d\chi}$ της καμπύλης: $\eta\mu 3\chi + \chi\psi - 5\psi^2 = 6$
- 9) Να βρείτε τη γενική λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης: $\sigma\upsilon\nu 2\chi - 3\eta\mu\chi + 1 = 0$
- 10) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-5} - \sqrt{x-1})$
- 11) Σε φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο ο λόγος της είναι τριπλάσιος του πρώτου όρου και το άθροισμα των απείρων όρων της είναι διπλάσιο του πρώτου όρου. Να βρείτε:
 - i. τον πρώτο όρο και το λόγο της προόδου
 - ii. τους πέντε πρώτους όρους της.

- 12) Κύλινδρος και κώνος έχουν ίσες βάσεις, ενώ η γενέτειρα του κώνου είναι διπλάσια του ύψους του κυλίνδρου. Αν ο κύλινδρος έχει εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $80\pi \text{ cm}^2$ και ύψος 5 cm , να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου.
- 13) Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \ln(1+\chi)^2$.
- Να βρείτε την πρώτη παράγωγό της
 - Να δείξετε ότι: $e^\psi \cdot (\psi' - 1) = 1 - \chi^2$
- 14) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει παράπλευρες έδρες ισόπλευρα τρίγωνα που έχουν πλευρές μήκους α . Να βρείτε συναρτήσει του α :
- το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας
 - τον όγκο της πυραμίδας.
- 15) Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) . Αν AB είναι χορδή του κύκλου, τέτοια ώστε $\widehat{ABK} = 60^\circ$ και $\widehat{B\Gamma A}$ ημικύκλιο διαμέτρου AB , να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου μηνίσκου συναρτήσει του R .



ΜΕΡΟΣ Β': Από τα 6 θέματα να λύσετε ΜΟΝΟ τα 4.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 2 μονάδες.

- 1) Δίνεται πολυώνυμο $f(\chi) \equiv \alpha\chi^3 + \beta\chi^2 + \gamma\chi + \delta$
- Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α , β , γ , δ , έτσι ώστε το πολυώνυμο να έχει ρίζες τους αριθμούς 0 και 3, $f(-1) = -8$ και $f'(-1) = 14$.
 - Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{f(x)}$.
- 2) Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών των f και g .
 - Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.
 - Να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται η $f \circ g$.

3) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να δείξετε ότι:

i. Ισχύει η σχέση: $2 \cdot \eta\mu A \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\Gamma}{2} + 2 \cdot \eta\mu \Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} = \eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma$.

ii. Αν ισχύει η σχέση: $2 \cdot \eta\mu A \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\Gamma}{2} + 2 \cdot \eta\mu \Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} = 1 + \frac{\beta + \gamma}{2R}$, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

4) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με διαγωνίους τις ΑΓ=24cm και ΒΔ=10cm. Ευθεία (ε) περνά από την κορυφή Β και είναι παράλληλη προς τη διαγώνιο ΑΓ. Ο ρόμβος ΑΒΓΔ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε). Να υπολογίσετε:

i. τον όγκο και

ii. το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

5) Παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει κορυφές Β(-3,-1) και Δ(3,-3). Η ΑΔ έχει εξίσωση: $\psi = -2\chi + 3$, ενώ η ΑΒ έχει εξίσωση: $4\chi - 3\psi + 9 = 0$.

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Γ, και να δείξετε ότι η ΑΓ συμπίπτει με τον άξονα των ψ.

ii. Να υπολογίσετε το μήκος της ΓΔ.

iii. Να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής Α από την ευθεία ΓΔ.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

6) (α) Να δείξετε τη σχέση:

$$\log_2 32 + \log_2 \sqrt{32} + \log_2 \sqrt[4]{32} + \log_2 \sqrt[8]{32} + \dots = 10$$

(β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\left(\log_2 32 + \log_2 \sqrt{32} + \log_2 \sqrt[4]{32} + \log_2 \sqrt[8]{32} + \dots \right)^{\log(\chi^2 - 2\chi)} = \log 100^\chi + \log \frac{1}{1000}$$

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Λ. Κακογιάννης

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Γ. Στυλιανού Β.Δ

Κ. Κολοकाσίδου - Λειβαδιώτου

Χ. Συρίμη - Σκίτσα

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2006**ΜΑΘΗΜΑ : Μαθηματικά (κατεύθυνσης)****Διάρκεια : 2:30΄****ΤΑΞΗ : Β΄ Ενιαίου Λυκείου****Ημερομηνία : 25/5/2006****Οδηγίες :**

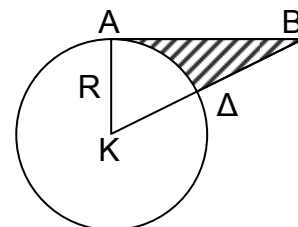
1. Να γράφετε μόνο με μελάνι. (Τα σχήματα με μολύβι)
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
3. Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής μη προγραμματισμένης.
4. Τα σχήματα του φυλλαδίου να μεταφέρονται στη θέση που λύεται η άσκηση.

Μέρος Α΄ (60 Μονάδες)Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε **μόνο** τις 12.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$. Να βρείτε:
α) Το πεδίο ορισμού, β) Το πεδίο τιμών, γ) Τον τύπο της $f^{-1}(x)$.
2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:
α) $f(x) = \frac{x^2-3}{x+1}$, β) $f(x) = e^x \cdot \eta\mu x$
3. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{x+6}{x(x+3)}$
4. Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4}$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x})$
5. Να βρεθεί το εμβαδόν κυκλικού τομέα τόξου 120° σε κύκλο ακτίνας 6cm.
6. Να επιλυθεί το οξυγώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$, αν $E = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $\beta = 4 \text{ cm}$, $\gamma = 2\sqrt{3} \text{ cm}$.
7. Να λύσετε την εξίσωση: $2\eta\mu^2 x + 3\eta\mu x - 2 = 0$
8. Να λύσετε την εξίσωση: $2\log_4 (x^2 + 3) - \log_2 (x + 3) = 1$
9. Δίδεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(2, 4)$, $B(-3, 5)$ και $\Gamma(-4, -6)$. Να υπολογίσετε: α) Το μήκος της πλευράς AB . β) Το εμβαδόν του τριγώνου.
10. Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu \alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu \alpha} = 4\sigma\upsilon\nu 2\alpha$
11. Αριθμητικής προόδου ο τρίτος όρος είναι 2 και ο όγδοος όρος είναι -8. Να υπολογίσετε το άθροισμα των 15 πρώτων όρων της.

12. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης και της καθέτου της καμπύλης $x^2 + y^2 = 5$, στο σημείο $A(1, -2)$ αυτής.
13. Ο όγκος κυλίνδρου είναι $54\pi \text{ m}^3$ και το ύψος του είναι διπλάσιο από την ακτίνα της βάσης του. Να βρεθεί το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.
14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - (\alpha + 2\beta)x^2 + 2\alpha x - 2$. Να βρείτε τα α και β αν $f(1)=0$ και $f'(1)=1$.
15. Στο διπλανό σχήμα η AB είναι εφαπτομένη του κύκλου (K, R) στο σημείο A . Αν $\hat{B} = 30^\circ$ και $KB = 8\text{cm}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.



Μέρος Β' (40 Μονάδες)

Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε **μόνο** τις 4.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες

1. Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, η AB έχει εξίσωση $x + y = 1$ και η $A\Delta$ έχει εξίσωση $x - y = -3$.
(α) Αν μια από τις κορυφές έχει συντεταγμένες $(7, 2)$, να αποδειχτεί ότι είναι η κορυφή Γ .
(β) Να υπολογισθούν οι συντεταγμένες των κορυφών A , B και Δ .
(γ) Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών $B\Gamma$ και $\Delta\Gamma$.
(δ) Να αποδειχτεί ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο.

2. α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \eta\mu x + \beta \sigma\upsilon\eta x$ με α, β σταθερές. Αν $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$, να βρεθούν:

i) οι τιμές των α, β

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{2x}$

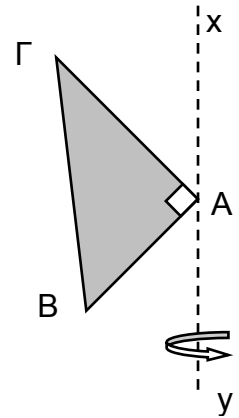
β) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{2\sigma\upsilon\eta 5\alpha \cdot \sigma\upsilon\eta 3\alpha - \sigma\upsilon\eta 8\alpha}{\sigma\upsilon\eta 2\alpha - \sigma\upsilon\eta 6\alpha} = \frac{\sigma\tau\epsilon\mu^2 2\alpha}{4}$$

3. α) Να λύσετε την εξίσωση: $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$

β) Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση: $\epsilon\varphi \frac{B}{2} = \frac{\eta\mu B}{\eta\mu A + \eta\mu \Gamma}$ να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

4. Στο σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$), η $ΑΓ=4\text{cm}$, η $ΑΒ=3\text{cm}$ και η γωνιά που σχηματίζει η ΑΓ με τον άξονα xy είναι 45° . Να βρείτε την επιφάνεια και τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το τρίγωνο ABΓ κάνει πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα xy .



5. Δίνεται η συνάρτηση $y = \ln \frac{1}{x+1}$, $x > -1$.

α) Να αποδείξετε ότι $x \cdot y' + 1 = e^y$

β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με τετμημένη $x = e - 1$.

6. Δίνεται η συνάρτηση: $y = 1 + \sin 2x$

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί y , $-\frac{1}{2} \cdot \frac{dy}{dx}$, $2\eta\mu^2 x$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, με λόγο $\lambda = \epsilon\phi x$.

β) Αν A είναι το άθροισμα των απείρων όρων της πιο πάνω γεωμετρικής προόδου με $0^\circ < x < 45^\circ$ και $\frac{A}{\sin x} = 3(\sin x + \eta\mu x)$, να υπολογίσετε τη γωνία x .

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ :

Άγγελος . Χατζηαγαθαγγέλου
Αθηνά Λάντου
Μυρούλα Κεπερτή – Παλλαρή
Δήμητρα Σκαπούλλαρου - Χαρή
Χρήστος Βαλανίδης

Αλέξανδρος Γιωργαλλίδης (Β.Δ.)
Συντονιστής Μαθηματικών

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Ιάκωβος Κορνιώτης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2006

Μάθημα: Μαθηματικά κατεύθυνσης

Τάξη : Β.

Ημερομηνία : 23/05/06

Ώρα : 7.45-10.15

(Διάρκεια 2.30').

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
2. Να γράφετε μόνο με μελάνι (με μολύβι μόνο τα σχήματα)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΜΕΡΟΣ Α: Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο 12.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με τύπο:

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}.$$

2. Αν $x > 0$ και $x \neq 1$ να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\log_x 3$, 1 , $\log_3 x$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

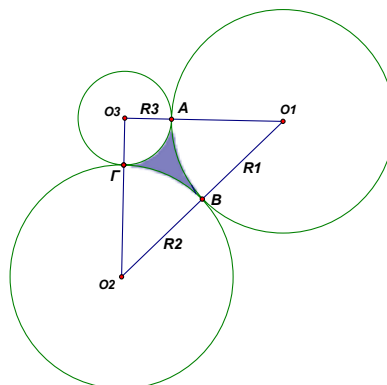
3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{4x^2 - 3x}.$

4. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x) = \sqrt{2x} \cdot e^{3x} + \sigma\upsilon\nu(x^2) \cdot \ln x \quad (\beta) f(x) = \frac{x^2}{x+3} - \frac{\varepsilon\phi 3x}{e^x}$$

5. Να βρείτε τις τιμές της γωνίας $x \in (0, \pi)$ που ικανοποιούν την εξίσωση $\eta\mu 5x + \eta\mu x = \eta\mu 3x.$

6. Στο διπλανό σχήμα δίνονται τρεις κύκλοι οι οποίοι εφάπτονται ανά δύο εξωτερικά στα σημεία Α, Β και Γ. Αν $R_1 = R_2 = \sqrt{2}$ και $R_3 = 2 - \sqrt{2}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.



7. Να λύσετε την εξίσωση: $\log \left[\ln \left(4 \cdot 9^x - 2 \cdot 3^x - 2 + e \right) \right] = 0$.
8. Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου που έχει ύψος 3cm και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $20\pi \text{ cm}^2$.
9. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (a_n) με λόγο $\lambda = -\sin 2a$, $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ και πρώτο όρο $a_1 = \eta \mu 2a$. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των άπειρων όρων της προόδου είναι $\varepsilon \phi a$.
10. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο A(3,-1) και σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία ϑ τέτοια ώστε $\sin 2\vartheta = -\frac{1}{2}$.
11. Αν α, β, γ είναι πλευρές ενός τριγώνου ABΓ, και ισχύει: $\varepsilon \phi \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{\alpha + \gamma}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο A.
12. Αν οι ευθείες $(\varepsilon_1): (\kappa - 1)x + (\lambda + 3)y + 3 = 0$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ με $\kappa > 1, \lambda > 0$ και $(\varepsilon_2): x + 2y + 1 = 0$ είναι παράλληλες και η ευθεία (ε_1) τέμνει τους άξονες xx' και yy' στα σημεία A και B αντίστοιχα έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου AOB, όπου O η αρχή των αξόνων να είναι $\frac{9}{16}$ τ.μ να βρείτε τις τιμές των κ και λ .
13. Να βρείτε τις εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης $x^2y + xy^2 = 6$ στο σημείο της με $x = 1$ και $y > 0$.
14. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και τον όγκο κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας αν η πλευρά της βάσης της είναι a cm και η παράπλευρη ακμή της είναι ίση με την διαγώνιο της βάσης της.
15. Σε τρίγωνο ABΓ με A(4,-1) δίνονται οι εξισώσεις του ύψους ΓΚ: $2x - 3y + 12 = 0$ και της διαμέσου ΓΜ: $2x + 3y = 0$. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών ΑΓ και ΑΒ του τριγώνου.

ΜΕΡΟΣ Β΄. Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 4.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 /100.

1. Δίνεται η συνάρτηση $P(x) = (x-1)(x+2)$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Αφού αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης P είναι

$P'(x) = 2x+1$ να γράψετε το κλάσμα $\frac{P'}{P}$, στη μορφή

$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$ και να προσδιορίσετε τις τιμές των A και B .

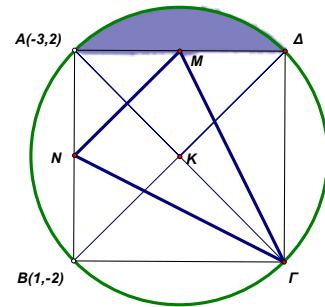
(β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{P''(x)P(x) - [P'(x)]^2}{P^2(x)} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $P(x) \neq 0$.

2. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο με $A(-3,2)$, $B(1,-2)$ και εξίσωση της διαγωνίου του $B\Delta$: $x-1=0$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου K του τετραγώνου και των κορυφών του Γ και Δ .

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου κυκλικού τμήματος $A\Delta$.

(γ) Αν M και N τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων $A\Delta$ και AB αντίστοιχα να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $MN\Gamma$.



3. (α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{2}{(1+\varepsilon\phi x)(1+\sigma\phi x)} = \frac{\eta\mu 2x}{1+\eta\mu 2x}$.

(β) Να λύσετε στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση:

$$\log 2 - \log(1 + \varepsilon\phi x) - \log(1 + \sigma\phi x) = -\log 3.$$

4. (α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f(x) = \ln \frac{3x-1}{x+2}$ και

$g(x) = \ln(3x-1) - \ln(x+2)$ είναι ίσες.

(β) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη της f δίνεται από τον τύπο

$y = f^{-1}(x) = \frac{2e^x + 1}{3 - e^x}$ και να βρείτε το πεδίο τιμών της.

(γ) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + 1}{3 - e^x}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x + 1}{3 - e^x}$.

5. (α) Αν η ευθεία (ε) που διέρχεται από το σημείο $P(5,4)$ και σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα των x , τέμνει την ευθεία $y=1$ στο σημείο B και τον x' άξονα στο σημείο A να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.
 (β) Αν η κάθετη (κ) στην (ε) στο σημείο B, τέμνει τον $y'y$ άξονα στο σημείο Γ να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το τετράπλευρο OABΓ, όπου O η αρχή των αξόνων, περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα των y .
6. (α) Δίνεται η ακολουθία (a_n) με $a_1 = 2$ και $a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{3}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.
 Να αποδείξετε ότι για την ακολουθία $\beta_n = a_n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{2}{3}$ και να βρείτε το νιοστό της όρο και το άθροισμα των άπειρων όρων της.
 (β) Αν οι $\beta_\kappa, \beta_\rho, \beta_\mu$ είναι διαδοχικοί όροι μιας άλλης γεωμετρικής προόδου (γ_n) , να αποδείξετε ότι οι κ, ρ, μ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

X. Παπαχριστοδούλου

ΜΑΘΗΜΑ : Μαθηματικά

ΤΑΞΗ : Β ΚΑΤ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 1 Ιουνίου 2006

ΔΙΑΡΚΕΙΑ : 2,5 ώρες

ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ : Ευαγόρας Ευαγόρου, Ιωάννου Χρίστος, Χριστοδούλου Άντρη, Χρήστου Ιωάννης

Οδηγίες: α) να γράφετε με μελάνι μπλε ή μαύρο

β) επιτρέπεται η χρήση εγκεκριμένης υπολογιστικής μηχανής

γ) δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΜΕΡΟΣ Α΄

Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ 12. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

- 1) Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{3x}{(x-1)(x+2)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
- 2) Να λύσετε την εξίσωση $|x + 1| = 4$
- 3) Σε αριθμητική πρόοδο ο τρίτος όρος είναι ίσος με 7 και ο έβδομος ίσος με 19. Να βρείτε την πρόοδο και το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.
- 4) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $y = \ln(1 - x^3)$.
- 5) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 5} - 2}$.
- 6) Να δείξετε ότι $\frac{\eta\mu 3x + \eta\mu x}{2\eta\mu 2x} = \sigma\upsilon\nu x$
- 7) Να παραγωγίσετε τις συναρτήσεις και τα αποτελέσματα να τα εκφράσετε στη πιο απλή τους μορφή.
 - i. $y = \frac{\eta\mu(3x + 2)}{e^x}$
 - ii. $y = \sqrt[4]{1 + x^4}$
- 8) Να βρείτε το άθροισμα $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} \dots\dots\dots$
- 9) Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu 3x + \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu 2x$
- 10) Να λύσετε την εξίσωση $3^{x+1} - 2^x = 3^{x-1} + 2^{x+3}$
- 11) Αν $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = 3x^2$ να βρείτε τις τιμές $(g \circ f)(\frac{\pi}{4})$ και $(f \circ g)(0)$.
- 12) Σε κύκλο (K,R) παίρνουμε τόξα $AB=60^\circ$ και $B\Gamma=30^\circ$. Να βρείτε το εμβαδόν και τη περίμετρο του χωρίου που περικλείεται από τις χορδές AB, ΑΓ και το τόξο ΒΓ.
- 13) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης $y^2 + 3xy = 2x^2 - 1$ στο σημείο (2, 1).

14) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{(x+1)(x^2 + 1)}$.

ι. Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x)$ σαν άθροισμα απλών κλασμάτων.

ιι. Να βρείτε την $f'(1)$

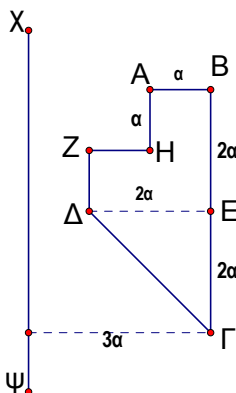
15) Να βρείτε τη τιμή του α έτσι ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ \alpha & x = 1 \end{cases}$$

ΜΕΡΟΣ Β'

Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ 4. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1) Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδό της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από τη πλήρη περιστροφή του σχήματος ΑΒΓΔΖΗ γύρω από τον άξονα $\chi\psi$.



2) Η λύση της εξίσωσης $9^{\log x} + 2 \cdot 3^{\log x} - 3 = 0$ είναι ρίζα του πολωνύμου

$f(x) = x^3 + ax^2 + \beta x - 2$ και $f(2) = 12$. Να βρεθούν τα α, β καθώς και οι άλλες ρίζες του πολωνύμου.

3) i. Δίνονται οι καμπύλες με εξισώσεις $y = x^{\eta\mu x}$, $x \in \mathbb{R}$ και $y = \pi \ln(\ln x)$, $x \in (1, +\infty)$

Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των καμπύλων στα σημεία τους που έχουν τετμημένη $x = \pi$ είναι κάθετες.

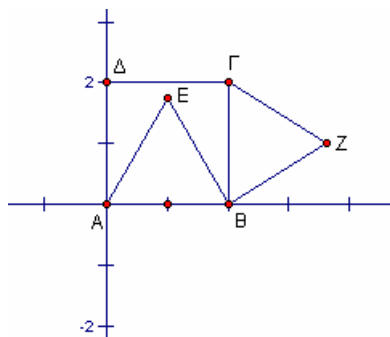
ii. Αν $\phi(x) = \frac{2 \log x + 1}{2 \log x - 1}$ να λύσετε την εξίσωση $\phi(x) + \phi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{10}{3}$

4) Αν $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \eta\mu x}{1 - \eta\mu x}}$, $x \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

i. Να δείξετε ότι $y' = \tau\epsilon\mu x$

ii. Να λύσετε την εξίσωση $2y'' \sigma\upsilon\nu x - y' = 0$, $0^\circ \leq x \leq 2\pi$

- 5) i. Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση $\eta\mu\alpha\eta\mu\beta=1-\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}$ να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
 ii. Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 2\chi + \sigma\upsilon\nu \chi = 0$ στο διάστημα $[0, \pi]$.
- 6) Στο πιο κάτω σχήμα το ABΓΔ είναι τετράγωνο ενώ ΕΑΒ και ΖΒΓ είναι ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς α=2.
- Να βρείτε τις συντεταγμένες των Ε και Ζ
 - Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.
 - Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου ABΖΔ.



Οι Εισηγητές

Ο Συντονιστής

Η Διευθύντρια

1. Ευαγόρου Ευαγόρας

Ιουλιανού Μιχάλης

Χατζηναθανάηλ Μαρία

2. Ιωάννου Χρίστος

.....

.....

3. Χριστοδούλου Άντρη

4. Χρίστου Ιωάννης

.....

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2006

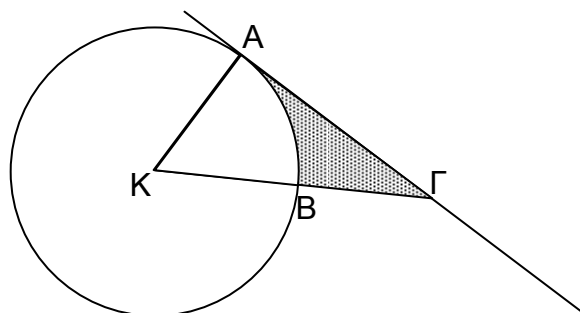
Μάθημα: Μαθηματικά Κατεύθυνσης
Τάξη: Β΄

Χρόνος: 2:30΄
Ημερομηνία: 09/06/2006

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
β) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
γ) Να γράφετε μόνο με πέννα χρώματος μπλε ή μαύρου. (Τα σχήματα επιτρέπονται και με μολύβι)

ΜΕΡΟΣ Α΄ : Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με μία μονάδα.

- Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \frac{2x-3}{x-1}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και το πεδίο τιμών της.
- Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{5x-7}{(x-2)(x+1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
- Να λύσετε την εξίσωση $4^x - 2 \cdot 2^x - 8 = 0$.
- Να υπολογίσετε τα όρια:
(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{3x^2 + 1}$ (β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4}$
- Το άθροισμα των απείρων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου είναι 9. Αν ο πρώτος όρος της είναι 6, να βρείτε τον πέμπτο όρο της.
- Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(-2, 8), Β(3, 1) και Γ(5, 3).
(α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ).
(β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΒΔ.
- Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:
(α) $\psi = \frac{2x^3 - 4}{x^2 + 1}$ (β) $\psi = e^{2x} + \ln(\eta\mu x)$
- Στο διπλανό σχήμα δίνονται:
ΚΒ = ΒΓ = α και ΑΓ εφαπτομένη του κύκλου στο Α. Να υπολογίσετε συναρτήσει του α:
(α) Το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ και
(β) την περίμετρο του ίδιου τριγώνου.



9. (α) Να λύσετε την εξίσωση $\log_2 x - \log_x 8 + 2 = 0$.
 (β) Να βρείτε το άθροισμα: $2 + \log_2 2 + \log_4 2 + \log_{16} 2 + \dots$
10. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης $2a$ και οι παράπλευρες έδρες της σχηματίζουν με τη βάση γωνία 45° . Να βρείτε συναρτήσει του a :
 (α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και
 (β) τον όγκο της πυραμίδας.
11. Σε αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος της είναι τριπλάσιος της διαφοράς της ενώ το άθροισμα του δεύτερου και του πέμπτου όρου της είναι 22. Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.
12. Κώνος έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας $36\pi \text{ cm}^2$. Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου αν ισχύει η σχέση $4l = 5R$.
13. Δίνονται τα σημεία $A(3, 1)$ και $B(6, 5)$.
 (α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία A και B είναι η $4x - 3y - 9 = 0$.
 (β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου $\Gamma(3, -4)$ από την ευθεία AB .
14. Να λύσετε την εξίσωση: $2\epsilon\phi 3x + 4\epsilon\phi 3x + 8\epsilon\phi 3x + \dots + 256\epsilon\phi 3x = 170\sqrt{3}$,
 $0^\circ < x < 180^\circ$.
15. Δίνεται η συνάρτηση $\ln \psi = x \cdot \ln 2 + \ln x$. Να δείξετε ότι:
 (α) $\psi' = \frac{\psi}{x} + \psi \ln 2$.
 (β) Η παράσταση $\psi' - \psi \cdot \ln 2 + 12 = 4^x$ μετασχηματίζεται στη μορφή $4^x - 2^x - 12 = 0$.

ΜΕΡΟΣ Β' : Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.
 Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δύο μονάδες.

1. (α) Αν $\psi = x \cdot e^{-x}$, να δείξετε ότι $\frac{d^2\psi}{dx^2} + 2\frac{d\psi}{dx} + \psi = 0$.
 (β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $\psi = x \cdot e^{-x}$ στο σημείο της για το οποίο $x = -1$ και να εξετάσετε αν η εφαπτομένη αυτή περνά από το σημείο $(1, 3e)$.

2. Παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ δίνονται οι εξισώσεις των πλευρών ΑΒ: $\chi - \psi + 3 = 0$, ΒΓ: $2\chi - \psi + 3 = 0$ και το σημείο τομής των διαγωνίων Κ(-1, 3). Να βρείτε:
- Τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Δ.
 - Την εξίσωση της πλευράς ΓΔ.
 - Την εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ.
 - Το εμβαδόν του τριγώνου ΚΒΓ.
3. Η ρίζα της εξίσωσης $9^{x+1} - 2 \cdot 3^{x+2} - 27 = 0$ είναι μία από τις ρίζες του πολυωνύμου $f(x) \equiv x^3 - 7x^2 + \lambda x - 8$.
- Να δείξετε ότι $\lambda = 14$ και ακολούθως ότι $f(2) = 0$ και $f(4) = 0$.
 - Οι ρίζες του πολυωνύμου είναι κατά σειρά μεγέθους οι τρεις πρώτοι όροι μίας προόδου. Αν το άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι 63, να βρείτε το n .
4. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\hat{\Gamma} = 120^\circ$, $AB = 6$ cm και $\Gamma\Delta = 3$ cm. Το τραπέζιο στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ΑΒ.
- Να δείξετε ότι το εμβαδόν που γράφει η πλευρά ΒΓ ισούται με το εμβαδόν που γράφει η πλευρά ΓΔ.
 - Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πιο πάνω στροφή.
5. Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση

$$\beta \sin B + \gamma \sin \Gamma = \alpha \cdot \sin(B - \Gamma)$$
Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω σχέση και αν ισχύει $\beta \sin B + \gamma \sin \Gamma = 0$, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.
6. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta \mu \omega - 2\eta \mu 2\omega + \eta \mu 3\omega}{\sigma \nu \omega - 2\sigma \nu 2\omega + \sigma \nu 3\omega}$.
- Να δείξετε ότι $A = \varepsilon \varphi 2\omega$.
 - Αν $A = 2$ και $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, να δείξετε ότι $\varepsilon \varphi \omega = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Η Διευθύντρια

Νίκη Παπαπέτρου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2006

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Β' Επιλογής

ΣΕΙΡΑ: Α'

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 2/6/2006

ΠΕΡΙΟΔΟΣ: 7:45'-10:15'ΧΡΟΝΟΣ: 2 1/2 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ: (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 (β) Να γράφετε μόνο με μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι).
 (γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

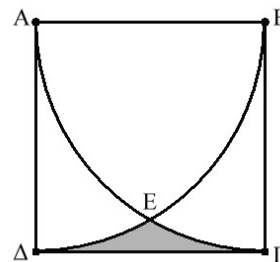
ΜΕΡΟΣ Α': Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.
 Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 1 μονάδα.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα: $\frac{4\chi + 2}{(\chi - 2)(\chi + 3)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ με κορυφές Α(1, 0), Β(-1, 8) και Γ(9, -2).
3. Να λύσετε την εξίσωση: $\log_2(\chi - 1) + 2\log_2 \sqrt{2\chi - 1} = 0$.
4. Να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης: $\varepsilon\varphi(2\chi + 40^\circ) = \sqrt{3}$.
5. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi^2 - 2\chi}{\chi^3 + 2\chi^2 - 1}$ β) $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\eta\mu\chi}{\chi \tau\epsilon\mu\chi}$
6. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{d\psi}{d\chi}$ των συναρτήσεων:
 α) $\psi = \sqrt{\chi} - 2\eta\mu\chi + e^\chi - \ln 2$ (β) $\psi = \sigma\upsilon\nu^3\chi \cdot \ln 2\chi$
7. Αν $f(\chi) = \sqrt{\chi}$ και $g(\chi) = \frac{\chi - 1}{\chi^2 + 2}$, να βρεθούν:
 α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g, και
 β) ο τύπος της σύνθετης συνάρτησης $g \circ f$ και το πεδίο ορισμού της.
8. Να βρεθούν επτά αριθμοί, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν το άθροισμα τους είναι 7 και ισχύει $a_3 + a_6 + a_7 = 7$.
9. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Α(-2, 2), Β(-3, -1) και Γ(4, 0). Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης (ε) του ευθυγράμμου τμήματος ΒΔ.
10. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\beta = 2\gamma$ και $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι

ορθογώνιο.

11. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση: $\chi^2 - 3\chi\psi + 4\psi^2 = 2$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο A με τετμημένη $\chi = 1$ και με $0 < \frac{d\psi}{d\chi} < 1$ στο σημείο A.

12. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τετράγωνο ABΓΔ πλευράς a . Με κέντρα τα A και B και με ακτίνα a γράφουμε δύο τεταρτοκύκλια μέσα στο τετράγωνο, τα οποία τέμνονται το E. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου ΓΔΕ.



13. Σε μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα με πλευρά βάσης a , το παράπλευρο ύψος είναι $\frac{5}{6}a$. Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας, αν η ολική της επιφάνεια έχει εμβαδόν 24 cm^2 .
14. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κώνου είναι $32\pi \text{ cm}^2$ και η γενέτειρα του λ σχηματίζει γωνία 60° με τη βάση του. Να βρείτε τον όγκο του κώνου.
15. Να λύσετε την εξίσωση: $\log\left(\frac{1}{2^x + x - 1}\right) = x(\log 5 - 1)$.

ΜΕΡΟΣ Β': Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 2 μονάδες.

1. α) Δίνεται $\varphi(\chi) \equiv \chi^3 + (a^2 + 1)\chi^2 + 2(a^2 - 3)\chi - (a + 6)$ και $\varphi(2) = 24$ και $a \geq 0$.
i) Να δείξετε ότι $a = 2$,
ii) Αν $(\chi + 2)P(\chi) \equiv \varphi(\chi)$, να προσδιορίσετε το πολυώνυμο $P(\chi)$.
- β) Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = 2^{\chi-1}$.
i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της f ,
ii) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης της f .
1. Δίνεται το εμβαδόν ενός τριγώνου ABΓ ίσο με 21 τετραγωνικές μονάδες και οι συντεταγμένες των κορυφών $A(1, -3)$ και $B(4, 5)$. Αν η εξίσωση της ευθείας BΓ είναι: $\chi - 3\psi + 11 = 0$ και το μέσο M της πλευράς του BΓ έχει τετμημένη 1, να βρείτε:
α) την απόσταση του A από το BΓ
β) το μήκος της BΓ
γ) τις εξισώσεις των ευθειών (ϵ_1) , (ϵ_2) οι οποίες περνούν από το M και σχηματίζουν με την πλευρά BΓ γωνία 45°
δ) το εμβαδόν του τριγώνου που περικλείεται από τις ευθείες (ϵ_1) , (ϵ_2) και τον άξονα των χ .

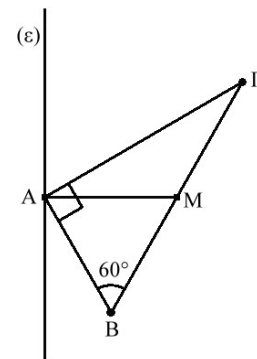
2. α) Αν $e^{\Psi} = \eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi$, να αποδείξετε ότι: $\frac{d^2\Psi}{d\chi^2} = \frac{2}{\eta\mu 2\chi - 1}$.

β) Δίνεται η συνάρτηση: $f(\chi) = \frac{1}{2} \ln(2 - \chi)$, όπου $\chi < 2$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M της καμπύλης $f(\chi)$, στο οποίο η κλίση της καθέτου είναι 8.

3. α) Αν σε τρίγωνο ισχύει η σχέση: $\sigma\upsilon\nu(A - \Gamma) + \sigma\upsilon\nu B = 2 - 2\sigma\upsilon\nu^2 B$, να αποδείξετε ότι οι πλευρές του τριγώνου α, β, γ αποτελούν Γεωμετρική πρόοδο.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - \chi\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} + \chi\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{3} - \chi\right)\eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + \chi\right)} = -1$.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), με $\hat{B} = 60^\circ$ και $AB = 6 \text{ cm}$. Φέρουμε την διάμεσο AM και ευθεία (ε) κάθετη στην AM στο A . Να βρείτε τον όγκο και την ολική επιφάνεια του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του τριγώνου $AB\Gamma$ γύρω από την ευθεία (ε) .



5. α) Ένας κυκλικός δίσκος, ακτίνας R , διαιρείται σε 12 κυκλικούς τομείς των οποίων τα εμβαδά είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Αν το εμβαδόν του μεγαλύτερου τομέα είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του μικρότερου τομέα, να βρείτε την γωνία του μικρότερου τομέα.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\log_{\sqrt{27}} \chi + \log_{27} \chi + \log_{3^6} \chi + \dots = \frac{4}{3}$.

Ο Διευθυντής

(Χρίστος Εκκέσιης)