

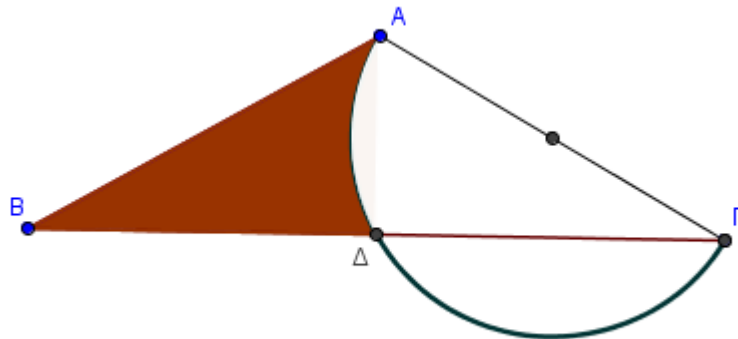
ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2009**ΜΑΘΗΜΑ:** Μαθηματικά (Κατεύθυνση)**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** 1η Ιουνίου 2009**ΤΑΞΗ:** Β' Ενιαίου Λυκείου**ΔΙΑΡΚΕΙΑ:** 2,5 ώρες

- Οδηγίες:**
- (α) Να γράφετε με μελάνι μπλε (τα σχήματα και με μολύβι).
 - (β) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
 - (γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
 - (δ) Τα σχήματα να μεταφέρονται στο γραπτό.
 - (ε) Επισυνάπτεται τυπολόγιο.
 - (στ) Το γραπτό αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α':**Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 12. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.**

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$. Να βρείτε:
 - (α) Το πεδίο ορισμού της
 - (β) Το πεδίο τιμών της
2. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{3x-1}{(x+1) \cdot (x-3)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
3. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - x + 8}{x^2 + 4}$
4. Να λύσετε την εξίσωση : $16^x - 3 \cdot 4^x - 4 = 0$.
5. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:
 - (α) $\psi = \eta\mu 3x$
 - (β) $\psi = \frac{x^2 + 1}{2x}$
6. Σε αριθμητική πρόοδο το άθροισμα του δεύτερου και του πέμπτου όρου είναι 27 ενώ ο έβδομος όρος είναι διπλάσιος του τρίτου. Να σχηματίσετε την πρόοδο.
7. Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση: $\frac{1 + \eta\mu 4\omega - \sigma\upsilon\nu 8\omega}{\sigma\upsilon\nu 4\omega + \eta\mu 8\omega} = \varepsilon\phi 4\omega$.

8. Ορθό κανονικό τριγωνικό πρίσμα έχει πλευρά βάσης 5cm και ύψος 10cm . Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του πρίσματος.
9. Σε κανονική τετραγωνική πυραμίδα οι παράπλευρες έδρες σχηματίζουν με τη βάση γωνία 60° και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της είναι 432cm^2 . Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.
10. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(0, 4\sqrt{3})$, $B(4, 0)$ και $\Gamma(-4, 0)$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
11. Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση :
- $$\alpha \sigma \nu A + \beta \sigma \nu B = \gamma \sigma \nu (A - B)$$
12. Δίνεται η συνάρτηση $x^2 + \psi^2 = 25$ με $\psi > 0$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο με $x = -3$ είναι παράλληλη με την ευθεία $(\varepsilon): 3x - 4\psi + 7 = 0$
13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3$ και $g(x) = \sqrt{x - 4}$ Να βρείτε:
 (α) Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων
 (β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$ και αν ορίζεται να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.
14. Να λύσετε την εξίσωση : $\left[4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots \right) \right]^{2 \log_3 x} = \log 100^x + 3$
15. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = 2\alpha$ και $\hat{A} = 120^\circ$. Με διάμετρο την πλευρά $A\Gamma$ γράφουμε ημικύκλιο που τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο Δ . Να βρείτε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Delta$ συναρτήσει του α .

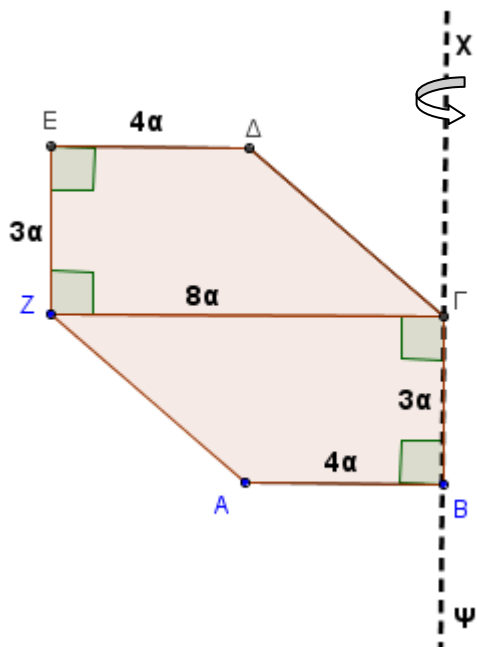


ΜΕΡΟΣ Β΄:

Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 4. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1,1)$, $B(7,-5)$ και $\Gamma(-3,3)$.
Να βρείτε :
(α) Την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$
(β) Την εξίσωση του ύψους $ΑΔ$
(γ) Το μήκος του ύψους $ΑΔ$
(δ) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
2. Σε αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι $\log \alpha$ και ο δεύτερος $\log \beta$ με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να δείξετε ότι:
(α) Η διαφορά της προόδου είναι $\delta = \log \frac{\beta}{\alpha}$
(β) Ο νιοστός όρος της προόδου είναι $\alpha_n = \log \frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-2}}$
(γ) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της προόδου είναι $\Sigma_n = \frac{1}{2} \log \frac{\beta^{n(n-1)}}{\alpha^{n(n-3)}}$
3. Δίδεται η συνάρτηση $\psi = x \cdot e^{-x}$.
(α) Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση : $\frac{d^2\psi}{dx^2} + 2 \frac{d\psi}{dx} + \psi = 0$
(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης ψ στο σημείο της για το οποίο $x = -1$
(γ) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη περνά από το σημείο $A(1, 3e)$
4. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{\eta\mu 4x \cdot (1 + \sigma\nu n 4x)}{\sigma\nu n^3 2x}$ και $g(x) = \eta\mu^2 x - \eta\mu^2 3x$.
(α) Να δείξετε ότι : $f(x) = 4\eta\mu 2x$ και $g(x) = -\eta\mu 2x \cdot \eta\mu 4x$
(β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2}$
(γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + g(x) = 0$ στο διάστημα $[0, 180^\circ]$
5. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \log_2 \frac{x-2}{x(x-1)} - \log_{\sqrt{2}} 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}} (x-1)$
(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
(β) Να δείξετε ότι: $f(x) = \log_2 \frac{(x-2) \cdot (x-1)}{x}$
(γ) Να βρείτε την τιμή του λ , $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η ισότητα:
 $2\lambda f(4) = \log_2 3^{\lambda-2} + (2-\lambda) \cdot \log_2 2$

6. Το πολύγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $\chi\psi$.
 Να βρείτε συναρτήσει του α :
- Τον όγκο του στερεού που παράγεται
 - Την επιφάνεια του στερεού που παράγεται.



ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

.....
 Σεβέρη Μαρία

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2009

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 26 / 05 / 2009

ΤΑΞΗ: Β΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΩΡΑ: 8.00 π.μ.

ΣΥΝ. ΣΕΛ. : 3

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΟΔΗΓΙΕΣ: Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρη πένα.
Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

ΜΕΡΟΣ Α΄:

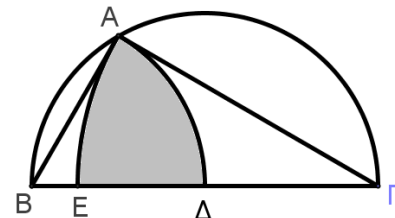
Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 12. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $K = \frac{\chi - 7}{(\chi + 2)(\chi - 1)}$.
2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:
α) $\psi = 4\chi^3 - \frac{2}{\chi} + \frac{\sqrt{\chi}}{3} - \ln 7$, β) $\psi = \frac{\sin 3\chi}{e^{2\chi}}$.
3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη προς την ευθεία (ε) $3\chi - 4\psi - 2 = 0$ και περνά από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB με άκρα A(3,1) και B (5,-5).
4. Να υπολογίσετε τα όρια:
α) $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi^2 - 2\chi}{\chi^3 + 2\chi^2 - 1}$, β) $\lim_{\chi \rightarrow 3} \frac{\chi^2 - 9}{\chi - 3}$.
5. Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης: $\sin 2\chi + 3\sin \chi = 1$.
6. Κατασκευάζεται αποθήκη οικοδομικών υλικών σε σχήμα αντεστραμμένου κώνου, χωρίς κάλυμμα, με ακτίνα βάσης ρ και γενέτειρα 2ρ. Να υπολογίσετε συναρτήσει του ρ το εμβαδόν της λαμαρίνας που χρειάζεται για την κατασκευή της και τον όγκο της αποθήκης.
7. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} \cdot \frac{\sin \alpha + 1}{\sin \alpha} = \sigma\phi \frac{\alpha}{2}$.
8. Να λύσετε την εξίσωση $\log \chi + \log \chi^3 + \log \chi^5 + \dots + \log \chi^{21} = 242$.
9. Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση $\eta\mu 2A + \eta\mu 2B = 2\eta\mu \Gamma$ να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
10. Ο γενικός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_v = \ln \sqrt{\frac{3}{e^{v-5}}}$.
α) Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_v) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\delta = -\frac{1}{2}$.
β) Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου (α_v) ισούται με $\frac{1}{2}(1 + \ln 3)$;
γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι $10\left(-\frac{11}{2} + \ln 3\right)$.

11. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης $2a\sqrt{2}$ cm και οι παράπλευρες ακμές της σχηματίζουν με το επίπεδο της βάσης γωνία 45° . Να βρείτε τον όγκο της πυραμίδας συναρτήσει του a .

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:
 α) την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της $A(0,1)$ και
 β) το άθροισμα $\Sigma = f(0) + f'(0) + f''(0) + f'''(0) + \dots$

13. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο $B\Gamma = 2a$ cm και τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο με πλευρά $AB = \lambda_6$. Με κέντρο το B και ακτίνα BA φέρουμε τόξο $A\Delta$ και με κέντρο το Γ και ακτίνα ΓA φέρουμε τόξο $A\epsilon$. Να βρείτε συναρτήσει του a το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $A\epsilon\Delta$.



14. Δίνεται η εξίσωση: $\ln \psi = x \ln 2 + \ln x$.

α) Να δείξετε ότι $\frac{d\psi}{dx} = \frac{\psi}{x} + \psi \ln 2$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{d\psi}{dx} - \psi \ln 2 + 12 = 4^x$.

15. Αν σε Γ.Π. ο λόγος είναι $\lambda = 3$ και ισχύει η σχέση $\Sigma_{3n} = \Sigma_{2n} + 81\Sigma_n$ όπου $\Sigma_n, \Sigma_{2n}, \Sigma_{3n}$ είναι το άθροισμα των $n, 2n, 3n$ πρώτων όρων της προόδου αντίστοιχα, να βρείτε το n .

ΜΕΡΟΣ Β΄:

Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 4. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Οι αριθμοί $\log(3 \cdot 2^x - 1), \log(4 \cdot 2^x - 1), \log(8 \cdot 2^x - 2)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να δείξετε ότι $x = -1$.

β) Αν $a_4 = -\log 2$, να βρείτε το πλήθος των όρων που έχουν άθροισμα $5 \log 2$.

2. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, να δείξετε ότι:

α) ισχύει η σχέση $(\sin A + \sin B)^2 + (\eta\mu A - \eta\mu B)^2 = 4\eta\mu^2 \frac{\Gamma}{2}$,

β) αν ισχύει η σχέση $\alpha^{\sin(A+B)} \cdot \alpha^{\sin(A-B)} = 1$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

3. Δίνεται η καμπύλη $y = \frac{2}{x}$, $x \neq 0$, και σημείο της $M\left(t\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{t}\right)$ με $t \in \mathbb{R} - \{0\}$.

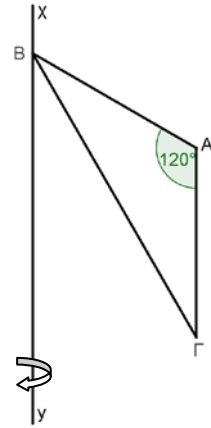
α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο M , και να δείξετε ότι, καθώς το M μεταβάλλεται, η εφαπτομένη αυτή δε μπορεί να είναι παράλληλη ποτέ προς τον άξονα των Oy .

β) Αν A και B είναι τα σημεία τομής της εφαπτομένης με τους άξονες Ox και Oy αντίστοιχα, να δείξετε ότι το M είναι το μέσον του AB .

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB έχει σταθερό εμβαδόν.

4. Παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ έχει κορυφές $B(-3, -1)$ και $\Delta(3, -3)$. Η $A\Delta$ έχει εξίσωση $\psi = -2\chi + 3$, ενώ η AB έχει εξίσωση $4\chi - 3\psi + 9 = 0$.
- Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A και Γ και να δείξετε ότι η $A\Gamma$ συμπίπτει με τον άξονα των ψ .
 - Να υπολογίσετε το μήκος της $\Gamma\Delta$.
 - Να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής A από την ευθεία $\Gamma\Delta$.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

5. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma = 4a$ cm και $\hat{A} = 120^\circ$. Η ευθεία χBy είναι παράλληλη προς την πλευρά $A\Gamma$ του τριγώνου. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ περιστρέφεται πλήρως γύρω από την ευθεία χBy . Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του τριγώνου $AB\Gamma$ συναρτήσει του a .



6. α) Ένας τετραγωνικός κήπος έχει πλευρά $40\sqrt{2}$ m. Στις τέσσερις κορυφές των γωνιών του κήπου τοποθετούνται περιστρεφόμενοι μηχανισμοί ποτίσματος που έχουν τη δυνατότητα να ποτίζουν κυκλικές περιοχές (κυκλικούς δίσκους) ακτίνας 25 m. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που δεν ποτίζεται όταν λειτουργούν και οι τέσσερις μηχανισμοί ταυτόχρονα.
- β) Ένας πέμπτος μηχανισμός, που τοποθετείται στο κέντρο του κήπου και ποτίζει μια κυκλική περιοχή αυτού, λειτουργεί ταυτόχρονα με τους άλλους τέσσερις. Ποια είναι η ακτίνα της μεγαλύτερης περιοχής που πρέπει να ποτίζει ο κεντρικός μηχανισμός, έτσι ώστε καμιά περιοχή του κήπου να μην ποτίζεται από δύο ή περισσότερους μηχανισμούς;
- γ) Πόσο είναι το εμβαδόν του κήπου που παραμένει απότιστο στην περίπτωση (β);
- δ) Ποια είναι η ακτίνα της μικρότερης κυκλικής περιοχής που πρέπει να ποτίζει ο κεντρικός μηχανισμός, έτσι ώστε καμιά περιοχή του κήπου να μη μένει απότιστη όταν λειτουργούν και οι πέντε μηχανισμοί ταυτόχρονα;

Η Διευθύντρια

Ερμιόνη Θεοδούλου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
(ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)

ΤΑΞΗ : Β΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 03 Ιουνίου 2009

ΩΡΑ : 7:30 π.μ.

*Το γραπτό αποτελείται από 3 σελίδες.**Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.**Να γράφετε με μπλε ή μαύρη πένα, καθαρά και επιμελημένα (μόνο γραφικές παραστάσεις και σχήματα μπορούν να γίνονται με μολύβι). Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.***Μέρος Α΄:** Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα $\frac{3x-1}{(x+1)(x^2+1)}$.
2. Να λύσετε τις εξισώσεις : (α) $4^{3x+1} = \frac{1}{8}$ (β) $\log_5 \sqrt[3]{25} = x$
3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Η κορυφή Α έχει συντεταγμένες (2, 6) και η πλευρά ΒΓ έχει εξίσωση $3x + 4y - 5 = 0$. Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΔ.
4. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{d\psi}{dx}$ των συναρτήσεων:
(α) $\psi = 3x^2 + \sqrt[3]{x} + 5$ (β) $\psi = (x+3) \cdot \eta\mu 5x$
5. Δίνεται το αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ = 2 cm, ΒΓ = $2\sqrt{3}$ cm και $\hat{B} = 30^\circ$. Να επιλύσετε το τρίγωνο ΑΒΓ.
6. Δίνεται ορθό τριγωνικό πρίσμα με βάση ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$). Αν ΑΒ = 5cm, ΒΓ = 13cm και ο όγκος του πρίσματος είναι 300cm^3 , να υπολογίσετε την παράπλευρη επιφάνεια του.
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x-1}{x-5}$ με $x < 3$.
(α) Να βρείτε το πεδίο τιμών της.
(β) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης $f^{-1}(x)$.
8. Να βρείτε τις γενικές λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu 4x + \eta\mu 2x - 2\eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x = 0$.
9. Σε φθίνουσα Γεωμετρική Πρόοδο ο πρώτος όρος, το άθροισμα των δύο πρώτων όρων και το άθροισμα των απείρων όρων της είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Πρόοδου. Να βρείτε το λόγο της Γεωμετρικής Πρόοδου.
10. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$(α) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x^2-5} \quad (β) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-5x}{x^2-25} \quad (γ) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+5}{2-x}$$

11. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης 64cm^2 και η παράπλευρη ακμή της σχηματίζει με τη βάση γωνία 45° . Να βρείτε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.
12. Δίνεται συνάρτηση με εξίσωση $3x\psi - 4\psi^2 = -10$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην καμπύλη στο σημείο της με τετμημένη $x=1$ και $\psi > 0$.
13. Δίνεται κύκλος (K, R) και χορδή του ΔE ίση με την πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Στο Δ φέρουμε την εφαπτομένη (ϵ) του κύκλου. Στη συνέχεια φέρουμε την $E\Gamma$ κάθετη στην (ϵ). Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου $\Gamma\Delta E$.
14. Η εξίσωση $\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$ έχει ρίζες x_1, x_2 με $x_1 > x_2$. Να σχηματίσετε τη Γεωμετρική Πρόοδο με πρώτο όρο x_1 και πέμπτο όρο $(x_2)^6$.
15. Η ευθεία (ϵ): $2x + \psi - 4 = 0$ εφάπτεται του κύκλου (K, R) με κέντρο $(-8, 0)$ στο σημείο A .
 (α) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου A είναι $(0, +4)$.
 (β) Να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας R του κύκλου
 (γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης του κύκλου που είναι παράλληλη προς με την ευθεία (ϵ).

Μέρος Β΄: Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.
 Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται φθίνουσα Αριθμητική Πρόοδος της οποίας ο έκτος όρος είναι τριπλάσιος του ενδέκατου όρου και η διαφορά του όγδοου όρου από τον τρίτο όρο είναι 20.
 (α) Να σχηματίσετε την πρόοδο.
 (β) Να υπολογίσετε τον δέκατο όρο της προόδου.
 (γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των θετικών όρων της προόδου.
2. (α) Αν $e^\psi = e^x + e^{-x}$ να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 = 1$.
 (β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $ax^2 + bx\psi^2 = \ln(x^2 - 3) + 1$ στο σημείο $A(2, -1)$ είναι παράλληλη με την $x + \psi = 5$. Να βρείτε τα a και b .
3. Ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = a$, $\Gamma\Delta = 2a$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ κάνει πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $\chi\Gamma\psi$ η οποία είναι κάθετη στη $\Gamma\Delta$. Να υπολογίσετε:
 (α) Την ολική επιφάνεια του στερεού που παράγεται, συναρτήσει του a .
 (β) Για ποια τιμή του a ο όγκος του στερεού είναι $V = 96\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$;
4. Δίνεται το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $A(1, 1)$, $B(2, 7)$, $\Gamma(3, 1)$ και η κορυφή Δ βρίσκεται πάνω στις ευθείες $2x + \psi = -1$ και $x - \psi = 7$.
 (α) Να δείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.
 (β) Να υπολογίσετε τη γωνία B ($\hat{B} < 90^\circ$).
 (γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ρόμβου.

5. (α) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να δείξετε ότι $(\sin A + \sin B)^2 + (\eta\mu A - \eta\mu B)^2 = 4\eta\mu^2 \frac{\Gamma}{2}$

(β) Αν ισχύει η σχέση $e^{\sin(A+B)} \cdot e^{\sin(A-B)} = 1$, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

(γ) Να δείξετε ότι $\frac{2\eta\mu 2x}{(1+\epsilon\phi x)(1+\sigma\phi x)} = \frac{1}{1+\eta\mu 2x}$

6. (α) Να λύσετε την εξίσωση $\log_3(9 \cdot 4^{\eta\mu^2 x}) - \log_3\left(\frac{1}{8^{\sin x}}\right) = 2, 0 \leq x < 360^\circ$.

(β) Με βάση τον ορισμό της παραγώγου να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $\psi = \sqrt{x^2 + 1}$.

Η Διευθύντρια

.....
Ευφροσύνη Τρυφωνίδου

ΛΥΚΕΙΟ ΑΠΟΣΤΟΛΩΝ ΠΕΤΡΟΥ & ΠΑΥΛΟΥ

ΣΧ. ΧΡΟΝΙΑ 2008-09

Γραπτές προαγωγικές εξετάσεις Μαΐου-Ιουνίου
Μαθηματικά Κατεύθυνσης- Β' Ενιαίου Λυκείου

Ημερομηνία: 27/05/09

Ώρα: 7:30-10:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- 1) Επιτρέπεται η χρήση μόνο σφραγισμένης υπολογιστικής μηχανής.
- 2) Να γράφετε μόνο με μελάνι (με μολύβι μόνο τα σχήματα)
- 3) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- 4) Το γραπτό αποτελείται από 3 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α' **(Από τα 15 θέματα να λύσετε μόνο 12. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 / 100)**

A1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(α) \quad 2^{x+1} + 2^x = 96 \qquad (β) \quad \log(x+1) + 2 \cdot \log \sqrt{5x} = 2$$

A2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$α) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-5x-x^2}{4+6x^2} \qquad β) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} 4^{\frac{1}{x}}$$

A3. Να βρείτε το πεδίο τιμών της συνάρτησης με τύπο $y = \frac{1}{x+3}$ αν $x > 1$.A4. Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με κορυφές $A(2,2)$, $B(4,2)$ και $\Gamma(2,4)$.

- (α) Να δείξετε ότι είναι ισοσκελές.
- (β) Να βρείτε το μήκος του ύψους που φέρεται από την κορυφή Α στην πλευρά ΒΓ.

A5. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $3x^2y + xy^2 + 4 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της $(-1, y)$ με $y > 0$.A6. Η εφαπτομένη της παραβολής $y = (x-3)^2$ στο σημείο της $M(5,4)$ τέμνει τους άξονες x και y στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, αν Ο είναι η αρχή των αξόνων.A7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin^4 2x - \eta\mu^4 2x + 3$.

- (α) να δείξετε ότι $f(x) = \sin 4x + 3$
- (β) να βρείτε τα σημεία τομής στα οποία η $f(x)$ τέμνει την ευθεία $y = 3$ όταν $x \in [0, \pi]$.

A8. Σε αριθμητική πρόοδο ισχύουν οι σχέσεις: $\frac{\alpha_2 + \alpha_5}{\alpha_5 + \alpha_6} = \frac{1}{2}$ και $\alpha_{10} = 17$. Να βρείτε το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της προόδου.

A9. Να βρείτε τις τιμές του x , αν: $x^2 + 4x^2 + 7x^2 + \dots + 58x^2 = 1180$

A10. Η ακτίνα το ύψος και η γενέτειρα ενός κώνου (R, u, λ) είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και το άθροισμα τους είναι 24cm. Αν ο όγκος του κώνου είναι $96\pi \text{ cm}^3$, να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του.

A11. Σε κύκλο (K, R) η AB είναι διάμετρος του και η χορδή $B\Gamma = R$. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος μεταξύ του μικρού τόξου $A\Gamma$ και της χορδής $A\Gamma$, συναρτήσει του R και π .

A12. Αν $y = \ln(1 - \sin x)$, να δείξετε ότι $\frac{d^2 y}{dx^2} + e^{-y} = 0$

A13. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\frac{\sin(B - \Gamma)}{\eta\mu A + \eta\mu(B - \Gamma)} = \sigma\phi B$. Να δείξετε ότι είναι ορθογώνιο.

A14. Αν η ακμή ενός κύβου αυξηθεί κατά 1cm τότε ο όγκος του αυξάνεται κατά 19cm^3 . Να βρείτε τον όγκο του αρχικού κύβου.

A15. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (αν) ο $\alpha_{40} = 10$. Να δείξετε ότι το γινόμενο των 79 πρώτων όρων της ισούται με 10^{79} .

ΜΕΡΟΣ Β' (Από τα 6 θέματα να λύσετε μόνο 4. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 / 100)

B1. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$ και την συνάρτηση $h(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \dots$ (με άπειρους όρους).

(α) να δείξετε ότι: $h(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$

(β) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $h(x)$ στο σημείο της με $x = \ln 2$

B2. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που περνά από την αρχή των αξόνων και τέμνει τις δύο παράλληλες ευθείες $2x + 3y - 6 = 0$ και $2x + 3y + 9 = 0$ σε σημεία τα οποία απέχουν απόσταση ίση με 5 μονάδες.

B3. Δίνεται η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \frac{2 \log x + 1}{2 \log x - 1}$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{10}{3}$

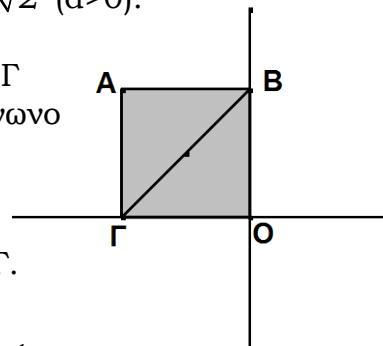
B4. (α) Το ΑΒΟΓ είναι τετράγωνο με διαγώνιο $B\Gamma = \alpha\sqrt{2}$ ($\alpha > 0$).

Αν τούτο στραφεί περί την ΒΟ πλήρη στροφή,
να δείξετε ότι ο όγκος που παράγει το τρίγωνο ΑΒΓ
είναι διπλάσιος από τον όγκο που παράγει το τρίγωνο
ΒΓΟ.

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών

Α, Β, Γ του τετραγώνου συναρτήσει του α.

(γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών ΒΓ και ΑΓ.



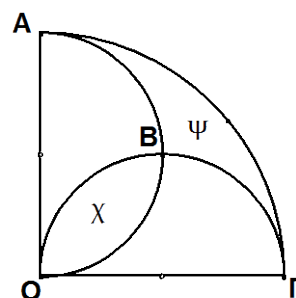
B5. Δίνεται η παράσταση: $f(x) = \frac{\sin 2x}{\eta\mu 2x + \sin 2x + 1} \cdot \frac{1}{\epsilon\phi x - 1}$

(α) Να την απλοποιήσετε και να καταλήξετε, ότι $f(x) = -\frac{1}{2}$

(β) Να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης $f(x) = \eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$.

B6. Σε ένα τεταρτοκύκλιο ΑΟΓ με ακτίνα $2a$, σχεδιάζουμε δύο ημικύκλια με διαμέτρους ΑΟ και ΟΓ που τέμνονται στο Β. Δημιουργούνται δύο περιοχές με εμβαδά χ και ψ . Η περιοχή χ είναι η τομή των δύο ημικυκλίων ενώ η περιοχή ψ είναι το καμπυλόγραμμο τρίγωνο ΑΒΓ.

Να δείξετε ότι $\psi = \chi$.



Οι Εισηγητές

Ο Συντονιστής

Ο Διευθυντής

Γ. Ιωάννου

Ν. Αβερκίου

Ρ. Ρηγίνα

Χρ. Πιερίδης

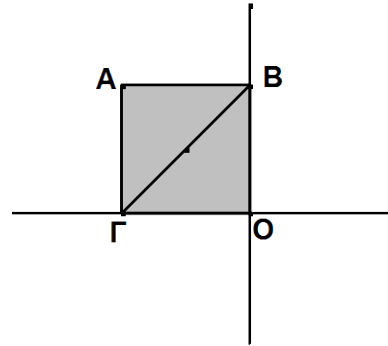
Γ. Ζερβίδης

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 3^x + f^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Να δείξετε ότι $f''(0) = \ln 3$

και να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = e^{f''(0)} + \ln f'(0)$

A5. Ορθό τριγωνικό πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 5 cm και 12 cm. Αν το ύψος του πρίσματος είναι 8 cm, να βρείτε :

- (α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και
(β) τον όγκο του.



A4. Να δείξετε ότι : $\frac{1+\sin 6\alpha}{\sin 6\alpha} + \frac{\sin 6\alpha}{1-\sin 6\alpha} = 2 \cot 3\alpha$

B2. (α) Αν ισχύει η σχέση $\left(\frac{\ln y}{\ln x}\right)^2 - 4 \cdot \frac{\log y}{\log x} + 4 = 0$, να δείξετε ότι $y = x^2$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $(\log_3 x)^2 - 3^{\log_3 4} = \log_3 x + \log_3 \frac{1}{81}$

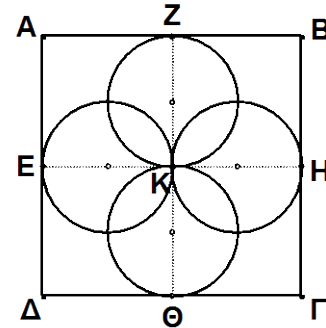
A6. Αν $f(x) = \frac{\eta\mu 2x}{4} - \sigma\upsilon\nu x - 3x$ και $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f''(x) = 0$.

B4. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές α, β, γ περιστρέφεται γύρω από την υποτείνουσα και παράγει στερεό με όγκο V . Ακολουθώς περιστρέφεται διαδοχικά γύρω από τις δύο κάθετες πλευρές του και παράγει στερεά με

όγκους V_1 και V_2 . Δείξετε ότι $\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$

A5. Οι βάσεις ενός ορθού τριγωνικού πρίσματος έχουν ακμές $9a$, $12a$, $15a$ και το ύψος του πρίσματος είναι $32a$. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του.

B5. Σε ένα τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά $4a$, Σημειώνουμε τα μέσα των πλευρών του E , Z , H , Θ και το κέντρο του K . Με διαμέτρους τα τμήματα EK , ZK , HK και ΘK σχεδιάζουμε τέσσερις ίσους κύκλους. Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου τετράφυλλου.



Σε απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο δίνονται:

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{3}{2} \text{ και } a_1 - 3 = a_2$$

- να βρείτε τους τρεις πρώτους όρους της προόδου.
- να υπολογίσετε το άθροισμα των απείρων όρων της.

A5. Ορθό τριγωνικό πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 5 cm και 12 cm . Αν το ύψος του πρίσματος είναι 8 cm , να βρείτε :

- το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και
- τον όγκο του.

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2009

ΤΑΞΗ Β΄

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 27/05/2009

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΩΡΑ: 7:45 – 10:15

ΒΑΘΜΟΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΣ:

ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:

ΥΠΟΓΡΑΦΗ:

ΟΝΟΜΑ: ΤΜΗΜΑ: ΑΡ.:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο που αποτελείται από μία σελίδα.
- Να γράψετε με μελάνι μαύρο ή μπλε (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.

ΜΕΡΟΣ Α: Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα .
2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$. Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης της f .
3. Να βρείτε τα όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} \right)$$

(β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2 - x}{x^2 + 1} \right)$.

4. Σε αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι 3 και ο δέκατος έκτος όρος της είναι τριπλάσιος του πέμπτου όρου.

(α) Να σχηματίσετε την πρόοδο.

(β) Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το μέσο M του ευθυγράμμου τμήματος AB με άκρα τα σημεία A(2, 5) και B(4, -7) και είναι παράλληλη με την ευθεία .

6. Να λύσετε την εξίσωση $\log(2^x + 1) = 2 \log 3$.

7. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

(α) $f(x) = 3x^2 - \eta \mu x +$

(β) $f(x) = e^x \cdot \sigma \upsilon \nu 2x$.

8. Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta \mu 3\alpha}{\eta \mu \alpha} + \frac{\sigma \upsilon \nu 3\alpha}{\sigma \upsilon \nu \alpha}$.

9. Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $\eta\mu(2x - 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu(x + 15^\circ)$.

10. Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση $\varepsilon\varphi A = \frac{\eta\mu B + \eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma}$, να δείξετε ότι $\hat{A} = 60^\circ$.

11. Σε κανονική τετραγωνική πυραμίδα το παράπλευρο ύψος σχηματίζει με τη βάση γωνία 60° . Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι ίσο με . Να βρείτε τον όγκο της πυραμίδας.

12. Σε ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 6a \text{ cm}$ παίρνουμε χορδή $AG = 3a \text{ cm}$. Με κέντρο το σημείο A και ακτίνα ίση με AG γράφουμε τόξο μέσα στον κύκλο που τέμνει τη διάμετρο στο σημείο Δ. Να βρείτε το εμβαδόν του μικτόγραμμου σχήματος BΓΔ.

13. Να λύσετε την εξίσωση $\ln[(2e^{2x} - 3e^x + 2)] = \ln 2 + \ln(3e^x - 1)$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $y = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x$.

(α) Να δείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = 2\eta\mu 2x$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{dy}{dx} + \sqrt{3} = 0$, στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

15. Η ακολουθία α_n είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda \neq 1$. Αν ισχύει $\beta_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$, να δείξετε ότι η ακολουθία β_n είναι γεωμετρική πρόοδος με τον ίδιο λόγο λ .

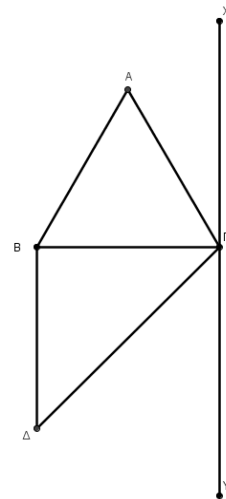
ΜΕΡΟΣ Β: Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο με πλευρά a και το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ ορθογώνιο και ισοσκελές ($\angle B\Gamma\Delta = 90^\circ$). Το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ περιστρέφεται κατά 360° γύρω από τον άξονα $X\Gamma Y$ κάθετο στην $B\Gamma$. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.

2. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι σχέσεις $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ και $\angle A = 120^\circ$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

3. Δίνεται η



συνάρτηση $f(x) = \sin x$. Η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $M(a, f(a))$, τέμνει τους άξονες των συντεταγμένων στα σημεία A και B.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο M .

(β) Να δείξετε ότι το σημείο M είναι το μέσο του AB.

(γ) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του a .

4. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x + y - 4 = 0$ και το σημείο $A(-1, 1)$.

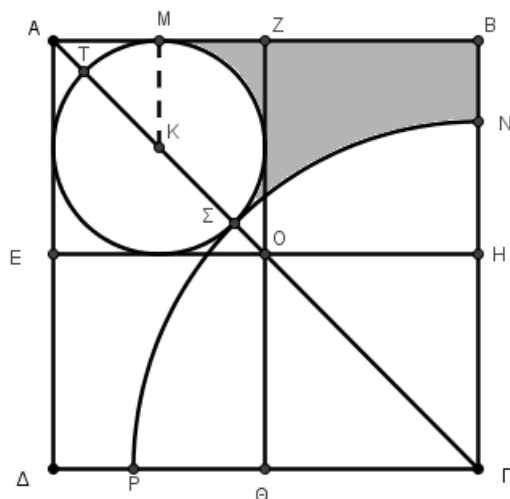
(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής K της κάθετης που άγεται από το A πάνω στην ευθεία ε .

(β) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του συμμετρικού Γ του σημείου A ως προς την ευθεία ε , είναι $(3, 5)$.

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B, Δ της ε όταν η τετμημένη του B είναι ίση με 3 έτσι, ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο.

(δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

5. Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά 4α , τα σημεία E, Z, H και Θ είναι τα μέσα των πλευρών $AD, AB, B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Φέρουμε τη διαγώνιο $A\Gamma$ και τα τμήματα EH και $Z\Theta$. Ο κύκλος (K, ρ) είναι εγγεγραμμένος στο τετράγωνο $AZOE$ και εφάπτεται της AZ στο M . Ο κύκλος με κέντρο το Γ εφάπτεται του (K, ρ) στο σημείο Σ και τέμνει τις πλευρές $B\Gamma$ και $\Delta\Gamma$ στα σημεία N και P αντίστοιχα. Να βρείτε τη περίμετρο και το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας $MBN\Sigma$ συναρτήσει του α .



6. (α) Να δείξετε ότι ισχύει γενικά

$$\alpha^{\log_{\beta} \gamma} = \gamma^{\log_{\beta} \alpha} \quad \text{με } \alpha, \beta, \gamma > 0, \gamma \neq 1.$$

(β) Με βάση το προηγούμενο ή με άλλο τρόπο να λύσετε την εξίσωση

$$3 \cdot x^{\log_5 2} + 2^{\log_5 x} = 64.$$

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2009

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ : Β΄ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 4/6/2009

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ώρες

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
- α) Δεν επιτρέπεται η χρήση προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 - β) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού
 - γ) Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε ή μαύρο.
(Τα σχήματα με μολύβι)
 - δ) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας όπου είναι αναγκαίο

ΜΕΡΟΣ Α΄ : Από τα 15 θέματα να λύσετε μόνο τα 12. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 (πέντε) μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα $\frac{4-\chi}{(\chi-1)\cdot(\chi-2)}$

2. Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της $f(\chi)=\frac{2\chi-3}{\chi-1}$.

Αν ορίζεται να βρείτε τον τύπο της , το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της αντίστροφης συνάρτησης.

3. Να υπολογίσετε τα όρια : (α) $\lim_{\chi \rightarrow \infty} \frac{4\chi^2 - 3\chi + 1}{2 - \chi^2}$

(β) $\lim_{\chi \rightarrow 3} \frac{\chi^2 - 2\chi - 3}{2\chi - 6}$

4. Να λύσετε την εξίσωση $\log_2 \chi = \log_4 (2 - \chi)$.

5. Σε αριθμητική πρόοδος η διαφορά του δεύτερου από τον έβδομο όρο της είναι 15 και το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων της είναι 155. Να βρείτε την πρόοδο.

6. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων: (α) $\psi = \chi^3 \cdot e^{2\chi}$

(β) $\psi = 2\sigma\upsilon\nu\chi + \ln \chi + e^\pi$

7. Τρίγωνο ΑΒΓ έχει κορυφές Α(1, 4), Β(-1, 2) και Γ(5, 0).

(α) να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

(β) να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

8. Σε φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος $0 < \lambda < 1$, ο πρώτος όρος της είναι τετραπλάσιος του τρίτου όρου της. Αν το άθροισμα των απείρων όρων της είναι 4. Να σχηματίσετε την πρόοδο.

9. Να δείξετε ότι: $\frac{2\eta\mu 3\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu 2\alpha}{2\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 4\alpha + 1} = \varepsilon\phi 2\alpha$

10. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης $\psi = \ln(7 - 3x) - x^2$ στο σημείο με τετμημένη $x = 2$.

11. Να λύσετε την εξίσωση $9\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x = 3$ στο διάστημα $[0, 360^\circ)$.

12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x}$ και $g(x) = \frac{x - 1}{x}$.

(α) Να εξετάσετε αν $f = g$. Στην περίπτωση που $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο $f = g$.

(β) Να ορίσετε την $f \cdot g$, $\frac{g}{f}$.

13. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει περίμετρο βάσης 32cm και όγκο

$$V = \frac{256\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3. \text{ Να υπολογίσετε:}$$

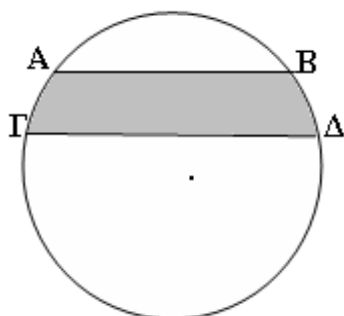
(α) Το ύψος της.

(β) Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας.

(γ) Την γωνιά που σχηματίζει η παράπλευρη έδρα με την βάση της.

14. Κώνος έχει κυρτή επιφάνεια $8\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$ και η γενέτειρα του σχηματίζει γωνία 45° με την βάση του. Να βρεθεί ο όγκος και το εμβαδό της ολικής του επιφάνειας.

15.



Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (Κ, R) και ΑΒ, ΓΔ δύο παράλληλες χορδές του. Αν $AB = \lambda_6$ και $\Gamma\Delta = \lambda_3$ να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδό του μεικτόγραμμου τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΓ και ΒΔ τόξα) συναρτήσει της ακτίνας R.

ΜΕΡΟΣ Β΄ : Από τα 6 θέματα να λύσετε μόνο τα 4. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 (δέκα) μονάδες.

1. α) Να λύσετε την εξίσωση : $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 1000^{\log(\sqrt[3]{3})} = 0$.
- β) Να βρείτε το άθροισμα $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \dots$. Στην συνέχεια να λύσετε την εξίσωση : $\left[6 \cdot \left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \dots \right) \right]^{2 \log_5 x} = \log 1000^x + 4$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \sin 2x + \eta \mu 2x$, με $\sin x \neq 0$

α) Να δείξετε ότι : $f(x) \cdot \epsilon \phi x = 1 - \sin 2x + \eta \mu 2x$

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 4$ στο διάστημα $[0^\circ, 180^\circ]$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x}{1-3x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.

β) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο και την αριθμητική τιμή της στο $x = 4$.

γ) Να δείξετε ότι : $\frac{d^2 y}{dx^2} - 9 \cdot e^y \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2} = 0$

4. Οι αριθμοί $\alpha_1 = \log(\beta\gamma)$, $\alpha_2 = \log(\alpha\gamma)$, $\alpha_3 = \log(\beta\alpha)$ (με $\alpha, \beta, \gamma > 0$) αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά δ .

Να δείξετε ότι:

α) Οι αριθμοί α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου .

β) Η διαφορά δ της αριθμητικής προόδου είναι $\delta = \log \frac{\alpha}{\beta}$.

γ) Ο τέταρτος όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_4 = 2 \log \alpha$.

δ) Το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων της Α.Π είναι $\Sigma_{10} = 5 \cdot \log \frac{\alpha^7}{\beta^3}$

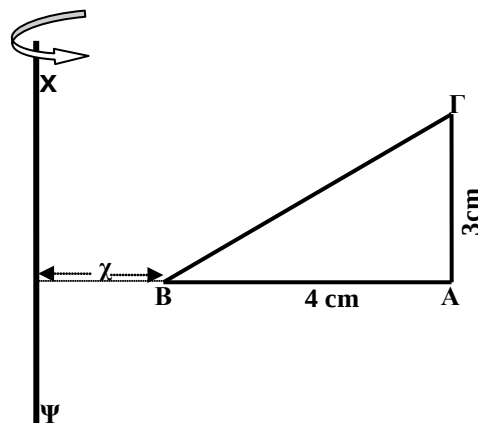
5. Παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ έχει κορυφές $A(8, 2)$ και $B(2, -1)$. Αν $AB \perp BD$, η γωνιά $\hat{A} = 45^\circ$ και η κορυφή Δ βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο τότε :

α) Να βρείτε τις άλλες δύο κορυφές.

β) Αν Σ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, να βρείτε την απόσταση του Σ από την πλευρά $A\Delta$ του παραλληλογράμμου.

γ) Να βρείτε το εμβαδό του παραλληλογράμμου.

6.



Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο

τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$)

στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $x\psi$ που είναι παράλληλος με την AG και απέχει χ cm από την κορυφή B . Αν ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή είναι $44\pi \text{ cm}^3$ να υπολογίσετε:

α) Την τιμή του χ .

β) Το εμβαδό της επιφάνειας που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του τριγώνου $AB\Gamma$.

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΛΟΙΖΟΣ ΣΕΠΟΣ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2009

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΤΑΞΗ : Β'

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 3/6/2009
ΧΡΟΝΟΣ : 2,5 ΩΡΕΣ

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες

ΟΔΗΓΙΕΣ :

- 1) Επιτρέπεται η χρήση **μη προγραμματιζόμενης** υπολογιστικής μηχανής, σφραγισμένης από το σχολείο.
- 2) Να γράψετε **μόνο** με μελάνι (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- 3) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΜΕΡΟΣ Α :

- Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε **ΜΟΝΟ** τις 12.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{\chi+16}{(\chi-5)(\chi+2)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης $\eta\mu 2\chi - \eta\mu\chi = 0$.

3. Να βρείτε τα όρια

$$\alpha) \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3\chi}{\chi} \quad \beta) \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{6\chi^2 - 3}{-3\chi^2 + 5\chi + 2}$$

4. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων

$$\alpha) \psi = \ln(\chi^2 + 3\chi - 7) \cdot \varepsilon\varphi\chi \quad \beta) \psi = \chi^2 - \frac{3\varpi\upsilon\nu}{\chi} + \sqrt{\eta\mu 5\chi}$$

5. Να αποδείξετε την ταυτότητα $\frac{\eta\mu 6\alpha + \eta\mu 4\alpha}{\sigma\upsilon\nu 3\alpha - \sigma\upsilon\nu 7\alpha} = \frac{1}{2\eta\mu\alpha}$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{2\chi+1}{\chi+3}$, $\chi \geq -2$ και $g(\chi) = \frac{2-\chi}{\chi}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών τους.

β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$ και $\frac{f}{g}$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού τους.

7. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \chi \cdot e^{-\chi}$. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2} + \frac{2}{1-\chi} \cdot \frac{d\psi}{d\chi} - \psi = 0.$$

8. α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $4 + 8 + 12 + \dots + 400$.

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των ακεραίων αριθμών από το 1 μέχρι το 400 οι οποίοι δε διαιρούνται με το 4.

9. Κώνος και κύλινδρος έχουν την ίδια βάση. Αν η γενέτειρα του κώνου είναι ίση με 20cm, το ύψος του κυλίνδρου είναι ίσο με 8cm και η ολική επιφάνεια του κώνου είναι διπλάσια από την κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου, να βρείτε τον όγκο του κώνου.

10. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\alpha) 4^x = 8^{x+1} \quad \beta) \log_{3\chi} \left(\frac{\chi}{27} \right) + \log 9 = 0$$

11. Να δείξετε, με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι ισχύει

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{v-1} = \frac{\alpha^v - 1}{\alpha - 1} \quad \forall v \in \mathbb{N}, \text{ όπου } \alpha \neq 1.$$

12. Δίνεται η καμπύλη $\psi = \frac{\chi^2}{8}$ και το σημείο της $A(4\alpha, \alpha^2)$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο A είναι η $\chi + \alpha\psi = 4\alpha + 2\alpha^3$.

β) Αν η κάθετη αυτή είναι παράλληλη με την εφαπτόμενη της καμπύλης $\psi = \frac{8}{\chi}$ στο

σημείο $B(4,2)$, να βρείτε την τιμή του α .

13. Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει η σχέση

$$\frac{\gamma^2 - \beta^2}{2R} = a \cdot \eta\mu(\Gamma - B)$$

14. Το παράπλευρο ύψος κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι ίσο με α και σχηματίζει με τη βάση της γωνία ω .

Να δείξετε ότι: $E_{\alpha\lambda} = 8\omega^2 \sin \nu \cdot \frac{\omega}{2}$

15. Δίνεται γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_{26} = 7$. Να δείξετε ότι το γινόμενο των 51 πρώτων όρων της είναι ίσο με 7^{51} .

ΜΕΡΟΣ Β:

- Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε **ΜΟΝΟ** τις 4.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x+1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Δεδομένου ότι ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει η σχέση $(g \circ f)(x) = f(g(x))$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της.

ii) Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f , και αν ορίζεται να βρείτε τον τύπο της $f^{-1}(x)$.

iii) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f^{-1}(x)$ και $f(x)$ είναι ίσες.

2. Να λύσετε την εξίσωση $\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$.

Αν x_1 και x_2 οι λύσεις της πιο πάνω εξίσωσης με $x_1 > x_2$, να βρείτε το άθροισμα

των 13 πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου που έχει $a_3 = \frac{x_1}{2x_2}$ και $a_6 = \frac{1}{2x_1}$.

3. Αν $\sin x - \sin 2x = \alpha$ και $\eta \mu x + \eta \mu 2x = \beta$,

α) Να δείξετε ότι:

$$(i) \alpha^2 + \beta^2 = 2 \cdot (1 - \sin 3x)$$

$$(ii) \frac{\alpha}{\beta} = \tan \frac{x}{2}$$

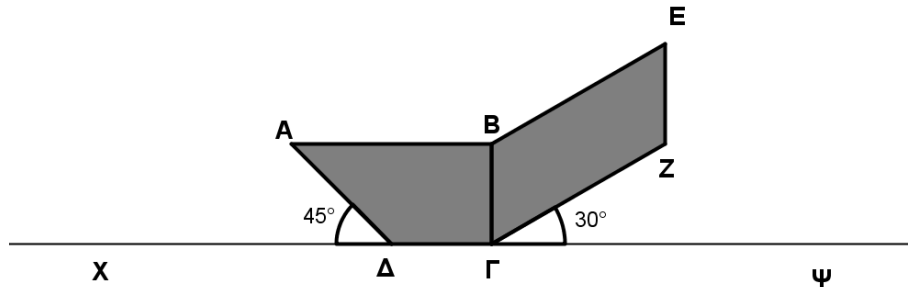
β) Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $\tan^2 \frac{x}{2} - \frac{2\alpha^2}{\beta^2} = 0$.

4. Δίνεται $S = -21 + 22 + 7 + 11 - \frac{7}{3} + \frac{11}{2} + \frac{7}{9} + \frac{11}{4} - \dots$

α) Να αποδείξετε ότι $S = \frac{113}{4}$.

β) Να αποδείξετε ότι η πρόοδος με γενικό όρο $a_n = \frac{80 \cdot S}{113} \cdot n - 1912$ είναι Αριθμητική Πρόοδος.

5. Στο πιο κάτω σχήμα είναι: $AB = 8 \text{ cm}$, $B\Gamma = 4 \text{ cm}$, $BE = 8 \text{ cm}$, $BEZ\Gamma$ παραλληλόγραμμο, $B\Gamma \perp \Delta\Gamma$, $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{\Psi} = 30^\circ$ $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{X} = 45^\circ$.
Το σχήμα στρέφεται πλήρως γύρω από την ευθεία $\chi\psi$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.



6. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ οι κορυφές A και B έχουν συντεταγμένες $A(0,1)$ και $B(4,-2)$, η εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ είναι $5x - y - 22 = 0$, η απόσταση της κορυφής Γ από την πλευρά AB ισούται με $\frac{23}{5}$ μονάδες και η κορυφή Γ έχει τεταγμένη $y_\Gamma > 0$.
- α) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής Γ είναι $(5, 3)$ και να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου M είναι το μέσο της πλευράς AB .
- β) Να υπολογίσετε την εφαπτομένη της γωνίας $\hat{B}$ του τριγώνου.

Η Διευθύντρια

Αναστασία Χατζηβασιλείου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΤΑΞΗ: Β΄

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 01/06/2009 - Α΄ Σειρά

ΧΡΟΝΟΣ: 2:30 ώρες

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
1. Να γράψετε με μελάνι μπλε ή μαύρο.
 2. Τα σχήματα με γεωμετρικά όργανα. Επιτρέπεται να είναι με μολύβι.
 3. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
 5. Δίνεται τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α΄ : Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ 12. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων την παράσταση $K = \frac{\chi + 8}{(\chi + 2)(\chi - 1)}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $\Psi = \frac{3\chi + 5}{\chi - 3}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, β) το πεδίο τιμών της και γ) το $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \Psi$.

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{\chi \rightarrow 3} \frac{\chi^2 - 9}{\chi - 3}$ β) $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5\chi \cdot \sigma\upsilon\nu 3\chi}{\chi}$

4. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $\Psi = e^{2\chi} - 3\chi^5 + \ln(\chi + 1)$ β) $\Psi = \epsilon\phi(2\chi - 3) + \sigma\upsilon\nu^2 \chi$.

5. Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 2\chi - 5\eta\mu\chi + 2 = 0$.

6. Να λύσετε την εξίσωση $2\log\sqrt{\chi} + \log(\chi + 3) = 1$.

7. Να αποδείξετε την ταυτότητα $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \sigma\phi\frac{\alpha}{2}$.

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με Α(-1, 4), Β(2, 3) και Γ(-2, 5). Να βρείτε:

α) την εξίσωση της διαμέσου ΒΜ, β) την απόσταση της κορυφής Α από τη διάμεσο ΒΜ.

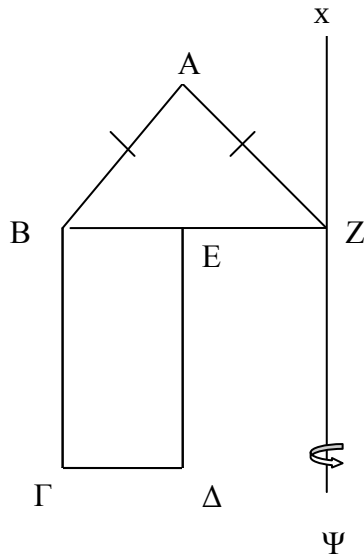
9. Ένας κυλινδρικός σωλήνας με ύψος 30 cm και διάμετρο βάσης 2 cm περιέχει υγρό μέχρι το μέσο του. Αν αδειάσουμε το περιεχόμενο του σωλήνα σε δοχείο σχήματος κώνου με ακτίνα βάσης 3 cm , το δοχείο θα γεμίσει. Να υπολογίσετε το ύψος του κωνικού δοχείου.
10. Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της $\Psi = \chi^2 + 4\chi - 5$, όπου $\chi > -2$.
Αν ορίζεται, να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.
11. Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι 432 cm^2 . Αν οι παράπλευρες έδρες σχηματίζουν γωνία 60° με τη βάση, να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.
12. Να δείξετε ότι $\frac{2}{7} + \frac{4}{7^2} + \frac{2}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \frac{2}{7^5} + \frac{4}{7^6} + \dots = \frac{3}{8}$
13. Δίνεται η καμπύλη: $\chi^2 + \psi^2 - 4\chi + 3\psi = 3$
- α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{d\psi}{d\chi} = \frac{4-2\chi}{2\psi+3}$
- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης
στο σημείο της με $\chi = -1$ και $\psi > -2$
14. Αν $f(\chi) = \frac{\eta\mu 2\chi}{4} - \sigma\upsilon\nu\chi - 3\chi$ και $0^\circ \leq \chi \leq 180^\circ$ να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες $f''(\chi) = 0$.
15. Να λύσετε την εξίσωση $\log \chi + \log \chi^3 + \log \chi^5 + \dots + \log \chi^{17} = 162$.

ΜΕΡΟΣ Β΄ : Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ 4. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1. (α) Αν $\Psi = \eta\mu(e^\chi - 1)$ να δείξετε ότι $\frac{d^2\Psi}{d\chi^2} - \frac{d\Psi}{d\chi} + \Psi \cdot e^{2\chi} = 0$. (Μον. 5)

(β) Η καμπύλη $\Psi = \alpha \cdot \ln \chi + \beta \chi$ περνά από το σημείο $A(1, 2)$. Αν η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο A είναι 5, να βρείτε τα α και β . (Μον. 5)

2. Στο πιο κάτω σχήμα το ABZ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο με $AB=AZ=a\sqrt{2}$ cm και η πλευρά AZ σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα περιστροφής XΨ. Το BΓΔΕ είναι ορθογώνιο με $BΓ=2BE$, το E είναι το μέσο της BZ και $BZ \perp X\Psi$. Να βρείτε το Εμβαδόν ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται με την πλήρη περιστροφή του σχήματος ABΓΔΕΖ γύρω από τον άξονα XΨ.



3. Δίνεται ρόμβος ABΓΔ. Η εξίσωση της πλευράς AB είναι η $\alpha x + \beta y - 38 = 0$ και η εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ είναι η $5\alpha x + \beta y - 50 = 0$.
- α) Αν η κορυφή Α του ρόμβου είναι η $A(3, 7)$ να βρεθούν οι τιμές των α και β . (Μον. 4)
- β) Αν το σημείο $(4, 2)$ είναι μια άλλη κορυφή του ρόμβου να βρείτε τις άλλες συντεταγμένες των κορυφών του ρόμβου. (Μον. 6)

4. α) Σε μια Αριθμητική πρόοδο ισχύει: $a_1 = \log 2$ και $a_2 = \log 8$.

Να δείξετε ότι: $\sum v = v^2 \cdot \log 2$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\log\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \dots + \log\left(1 - \frac{1}{v}\right) = -\log v$$

5. Δίνονται τα αθροίσματα με άπειρους όρους:

$$\Sigma_1 = 1 + \alpha^v + \alpha^{2v} + \alpha^{3v} \dots$$

$$\Sigma_2 = 1 + \alpha^{2v} + \alpha^{4v} + \alpha^{6v} \dots$$

$$\Sigma_3 = 1 - \alpha^v + \alpha^{2v} - \alpha^{3v} \dots \quad \text{όπου } -1 < \alpha < 1, \alpha \neq 0 \text{ και } v \in \mathbb{N}.$$

- α) Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α τα $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$. (Μον. 4)
- β) Να δείξετε ότι οι όροι $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (Μον. 3)
- γ) Να δείξετε ότι οι όροι $(\Sigma_1)^2, \Sigma_2, (\Sigma_3)^2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μον. 3)

6. α) i) Να γράψετε τον ορισμό της παραγώγου της συνάρτησης $\Psi = f(x)$. (Μον. 1)

ii) Αν $f(x) = \sqrt{x}$ με βάση τον ορισμό της παραγώγου να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. (Μον. 4)

β) Αν για τη συνάρτηση $g(x)$ ισχύει η σχέση $g(a + b) = g(a) + g(b) + 2\eta\mu a \cdot \eta\mu b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 3$ να βρείτε, με βάση τον ορισμό της παραγώγου, την παράγωγο της συνάρτησης $g(x)$ στο πεδίο ορισμού της. (Μον. 5)

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

.....
Ιωακείμ Μάριος

Ο ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ

.....
Χριστοδούλου Φειδίας Β.Δ

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

.....
Δημητριάδης Αλέξανδρος

.....
Νεοκλέους Ελένη

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2009

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**ΤΑΞΗ:** Β' (ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ)

Ημερομηνία: 29/5/2008

Διάρκεια: 2.30'

ΟΔΗΓΙΕΣ : Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού .
Να γράφετε με μελάνι μπλε ή μαύρο (με μολύβι μόνο τα σχήματα).
Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α' : Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{2x+4}{x^2(x-2)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 2x + 2}{3x^2 + x}$

3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

Να βρείτε: α) Το πεδίο ορισμού της
β) Το πεδίο τιμών της .

4. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = e^{5x} \cdot \eta\mu 2x$ β) $g(x) = \frac{5x^2}{3x-5}$

5. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους :

$$f(x) = 2 - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{3x}{2x-1}, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

α) Αν $h = f \circ g$ να βρείτε το $h(2)$

β) Να λύσετε την εξίσωση $g(f(x)) = \frac{1}{2}$

6. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα με ακμή βάσης a και παράπλευρο ύψος $h = \frac{5a}{6}$

έχει εμβαδό ολικής επιφάνειας $E_{ολ} = 384 \text{ cm}^2$.

Να βρείτε: α) Την ακμή της βάσης της
β) Το παράπλευρο ύψος της.

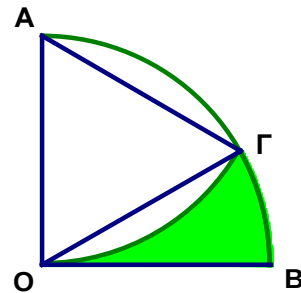
7. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1$.

8. Να αποδείξετε την ταυτότητα $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}$

9. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln x, x > 0$.

Να λύσετε την εξίσωση $f(2 - \eta\mu x) - f(\sigma\upsilon\nu 2x) = f(3)$ αν $x \in (0, \frac{\pi}{4})$.

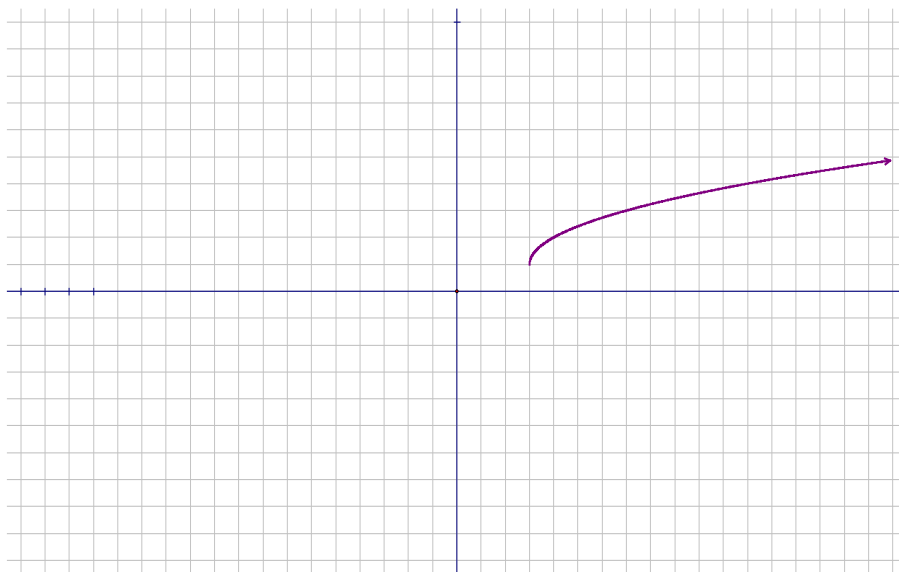
10. Δίνεται τεταρτοκύκλιο ΟΑΓΒΟ ακτίνας R .
Αν Γ είναι το σημείο τομής του κύκλου (A, R)
με το τεταρτοκύκλιο, να υπολογίσετε το
εμβαδόν και την περίμετρο του μικτόγραμμου
σχήματος ΟΒΓ συναρτήσει της ακτίνας R .



11. Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \sqrt{x-3} + 1$.

α) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}

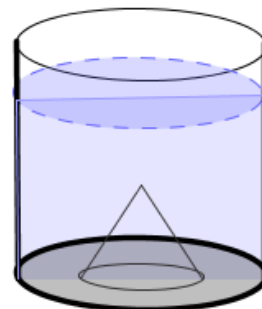
β) Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της $y = f^{-1}(x)$.



12. Να λύσετε την εξίσωση $(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$.

13. Αν A , B και Γ είναι γωνίες τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι
 $\eta\mu 2A - \eta\mu 2B + \eta\mu 2\Gamma = 4\sigma\upsilon\nu A \cdot \eta\mu B \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma$.

14. Κώνος με ακτίνα $\rho=5\text{m}$ και ύψος $\upsilon=6\text{m}$ είναι πλήρως βυθισμένος μέσα σε νερό που βρίσκεται μέσα σε ένα κύλινδρο με ακτίνα βάσης $R=10\text{m}$.
 Να υπολογίσετε πόσο θα κατέβει η στάθμη του νερού στον κύλινδρο αν ο κώνος αφαιρεθεί.



15. Η εξίσωση $(4 \cdot 2^x - 1)^2 = (3 \cdot 2^x - 1) \cdot (8 \cdot 2^x - 2)$ έχει ρίζες x_1 και x_2 με $x_1 > x_2$.
 Αν x_1 είναι ο πρώτος όρος αριθμητικής προόδου και x_2 η διαφορά της να υπολογίσετε:
 α) Τον 5^ο όρο της προόδου
 β) Το άθροισμα Σ_{10} των δέκα πρώτων όρων της.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.
 Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες

1. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα $\eta\mu 2x - \epsilon\phi x = \epsilon\phi x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$, $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$
 β) Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω ταυτότητα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu 2x - \epsilon\phi x = \sqrt{3} \sigma\upsilon\nu 2x$ στο διάστημα $0 \leq x \leq 2\pi$.

2. Δίνεται η καμπύλη $x^2 - 4xy + 2y^2 = 1$

α) i) Να δείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{x-2y}{2x-2y}$

ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της A με τετμημένη $x=1$ και τεταγμένη $y > 0$ έχει εξίσωση $3x - 2y + 1 = 0$.

β) Αν η εφαπτομένη της καμπύλης σε σημείο B είναι παράλληλη με την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο A , να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B .

3. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $(\epsilon): 3x + y + a = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

α) Αν η απόσταση του A από το B είναι ίση με την απόσταση του A από την ευθεία (ϵ) , να βρείτε το a .

β) i) Αν $a = 4$ και Γ το σημείο τομής της ευθείας (ϵ) με τον άξονα $y'y$ να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία A , B και Γ .

ii) Να βρείτε το σημείο της ευθείας (ϵ) που έχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή O των αξόνων.

4. Σε αριθμητική πρόοδο (a_n) με διαφορά δ , ισχύει $a_{\mu+\nu} = a_\mu + a_\nu$.

α) Να δείξετε ότι $a_1 = \delta$

β) Αν $\delta=5$ και $K_n = \frac{1+\delta+\delta^2+\dots+\delta^{n-1}}{1+2\delta+4\delta^2+\dots+(2\delta)^{n-1}}$ να δείξετε ότι $K_n = \frac{9(5^n-1)}{4(10^n-1)}$

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n$

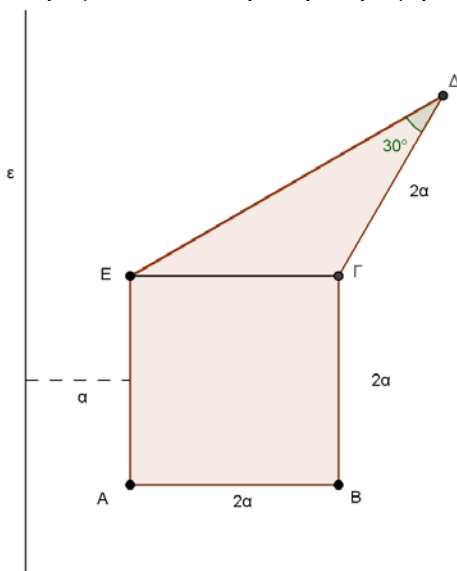
5. α) Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Με χρήση του ορισμού της παραγώγου να αποδείξετε ότι

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

β) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

και στη συνέχεια να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot g'(x) = 1$.

6. Στο πιο κάτω σχήμα το πολύγωνο ΑΕΔΓΒ αποτελείται από το τετράγωνο ΑΒΓΕ πλευράς $2a$ cm και το ισοσκελές τρίγωνο ΕΓΔ με $ΕΓ = ΓΔ = 2a$ cm και $\widehat{ΕΓΔ} = 30^\circ$. Το πολύγωνο ΑΕΔΓΒ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε) που είναι παράλληλη προς την ΑΕ και απέχει από αυτήν a cm. Να υπολογίσετε (συναρτήσει του a), τον όγκο V και το εμβαδόν $E_{ολ}$ της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται κατά την περιστροφή.



Η Διευθύντρια

Ιουλία Παναγή

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2009

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά κατεύθυνσης
ΤΑΞΗ: Β΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 28/05/2009
ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ώρες

Οδηγίες: α) Να γράφετε με πένα μπλε ή μαύρη.
β) Επιτρέπεται η χρήση εγκεκριμένης υπολογιστικής μηχανής.
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΜΕΡΟΣ Α: Από τις 15 ασκήσεις του Α΄ μέρους να λύσετε μόνο τις 12. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

1. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{4x^2 + 1}$.
2. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{2x+19}{(x-4)(x+5)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
3. Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu(2x - 60^\circ) = 1$ στο διάστημα $0 \leq x \leq 180^\circ$.
4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης: $y = \frac{x+3}{2x+1}$
5. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $64\sqrt{2} \text{ m}^2$ και το παράπλευρο ύψος σχηματίζει με την βάση γωνία 45° . Να υπολογίσετε τον όγκο της.
6. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των ευθειών :
 $\varepsilon_1 : 7x + 3y + 2 = 0$
 $\varepsilon_2 : 5y + 2x = 3$
7. Το άθροισμα των απείρων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου ισούται με το διπλάσιο του πρώτου όρου της και ο τέταρτος όρος της είναι κατά 3 μικρότερος του δεύτερου όρου της. Να γράψετε την πρόοδο.

8. Σε κύκλο η ακτίνα R , το ύψος u και η γενέτειρα λ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Αν ο όγκος του είναι αριθμητικά ίσος με το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας, να βρείτε τον όγκο του.

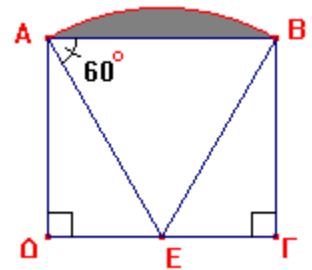
9. Τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ έχει $\hat{B} = 30^\circ$ και $\alpha = 2\beta$.

i. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$.

ii. Να δείξετε ότι: $E = \frac{\beta^2 \sqrt{3}}{2}$

10. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με πλευρά

$AD = 3\sqrt{3} \text{ cm}$. Το σημείο E είναι το μέσο της AD . Με κέντρο το E και ακτίνα AE γράφουμε τόξο AB όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν η γωνία $\hat{EAB} = 60^\circ$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους του διπλανού σχήματος.



11. Να λύσετε την εξίσωση: $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x + \dots = \log_2 25$

12. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $y = x^3 - ax + 2$ και A το σημείο τομής της με τον άξονα Oy . Αν η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο A έχει κλίση $\lambda = 1$ να δείξετε ότι $a = -1$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της στο A .

13. Να δείξετε ότι: $(\sin^2 x + 2\eta \mu x \sin x - \eta \mu^2 x)^2 = 1 + \eta \mu 4x$

14. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(2,3)$, $B(4,-1)$ και $\Gamma(1,1)$. Να βρείτε:

- το εμβαδόν τριγώνου και
- το μήκος του ύψους AD

15. Αν $y = xe^{-x}$ και $\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + 5 = e^{x^2} - y$ να δείξετε ότι $x^2 = \ln 5$

ΜΕΡΟΣ Β: Από τις 6 ασκήσεις του Β' μέρους να λύσετε μόνο τις 4. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1. Αν $\ln(\sin y) = x + \ln x$ να δείξετε ότι:

i. $-\eta \mu y \frac{dy}{dx} = (x+1)e^x$

ii. $x(x+1)e^{2x} \frac{dy}{dx} - \eta \mu^2 y \frac{d^2 y}{dx^2} = (x+2)e^x \eta \mu y$

2. α) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση :

$$\beta \sigma \nu \nu \beta = \alpha \sigma \nu \nu \Gamma \sigma \nu \nu \beta + \beta \sigma \nu \nu \alpha \sigma \nu \nu \Gamma$$

να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

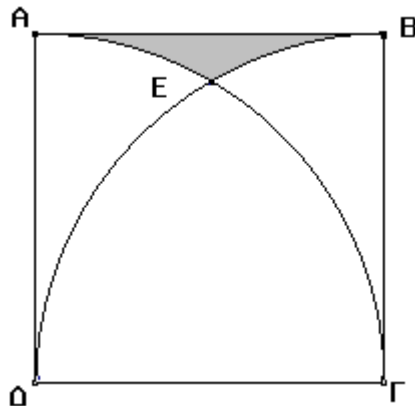
β) Να λύσετε την εξίσωση: $\log_3(9 \cdot 4^{\eta \mu^2 x}) - \log_3\left(\frac{1}{8^{\sigma \nu \nu x}}\right) = 2.$

3. Οι εξισώσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΔ ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $AB: y = -\frac{1}{2}x + 4$

και $AD: y = 2x - 1$. Αν το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι το $O\left(2, \frac{1}{2}\right)$ να βρείτε:

- Τις συντεταγμένες των κορυφών του ορθογωνίου
- Το εμβαδόν του.

4. Το πιο κάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 4α cm και τα τόξα $\widehat{A\Gamma}$ και $\widehat{B\Delta}$ γράφτηκαν με κέντρα τα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα. Να βρείτε συναρτήσει του α την περίμετρο και το εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος.



5. α) Να δείξετε ότι $\frac{\eta \mu x - \eta \mu 2x + \eta \mu 3x}{\sigma \nu \nu x - \sigma \nu \nu 2x + \sigma \nu \nu 3x} = \epsilon \phi 2x.$

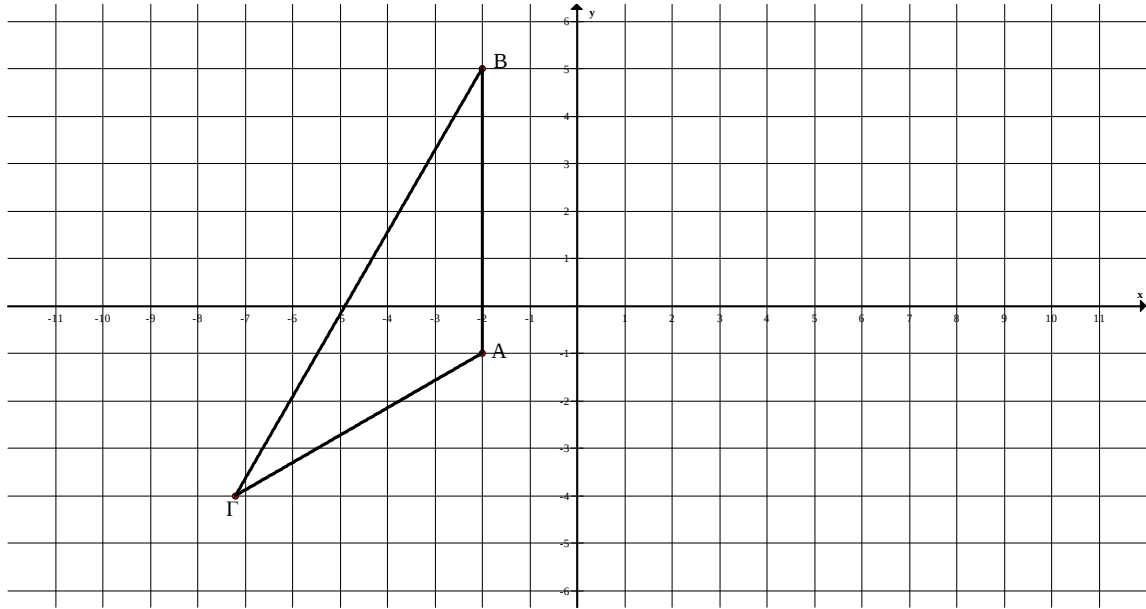
Αν $\frac{\eta \mu x - \eta \mu 2x + \eta \mu 3x}{\sigma \nu \nu x - \sigma \nu \nu 2x + \sigma \nu \nu 3x} = 2$ και $0 < x < 90^\circ$ χωρίς την χρήσης υπολογιστικής μηχανής να

δείξετε ότι $\epsilon \phi x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$

- β) Η ρίζα της εξίσωσης $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$ είναι ο πρώτος όρος αριθμητικής προόδου της οποίας το άθροισμα των δώδεκα πρώτων όρων της ισούται με 222. Να βρείτε τον έβδομο όρο της Α.Π.

6. Στο πιο κάτω σχήμα τα σημεία A, B, Γ έχουν συντεταγμένες $(-2, -1)$, $(-2, 5)$ και $(-2 - 3\sqrt{3}, -4)$ αντίστοιχα.

- i. Να δείξετε ότι $(AB)=(A\Gamma)=6$ cm και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.
- ii. Το τρίγωνο ABΓ περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα y. Να υπολογίσετε:
A) τον όγκο
B) και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.



Ο Διευθυντής

Αντρέας Παύλου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2009

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**ΤΑΞΗ:** Β' (ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ)

Ημερομηνία: 29/5/2008

Διάρκεια: 2.30'

ΟΔΗΓΙΕΣ : Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού .
Να γράφετε με μελάνι μπλε ή μαύρο (με μολύβι μόνο τα σχήματα).
Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α' : Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{2x+4}{x^2(x-2)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 2x + 2}{3x^2 + x}$

3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

Να βρείτε: α) Το πεδίο ορισμού της
β) Το πεδίο τιμών της .

4. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = e^{5x} \cdot \eta\mu 2x$ β) $g(x) = \frac{5x^2}{3x-5}$

5. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους :

$$f(x) = 2 - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{3x}{2x-1}, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

α) Αν $h = f \circ g$ να βρείτε το $h(2)$

β) Να λύσετε την εξίσωση $g(f(x)) = \frac{1}{2}$

6. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα με ακμή βάσης a και παράπλευρο ύψος $h = \frac{5a}{6}$

έχει εμβαδό ολικής επιφάνειας $E_{ολ} = 384 \text{ cm}^2$.

Να βρείτε: α) Την ακμή της βάσης της
β) Το παράπλευρο ύψος της.

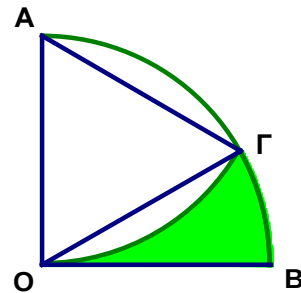
7. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1$.

8. Να αποδείξετε την ταυτότητα $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}$

9. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln x, x > 0$.

Να λύσετε την εξίσωση $f(2 - \eta\mu x) - f(\sigma\upsilon\nu 2x) = f(3)$ αν $x \in (0, \frac{\pi}{4})$.

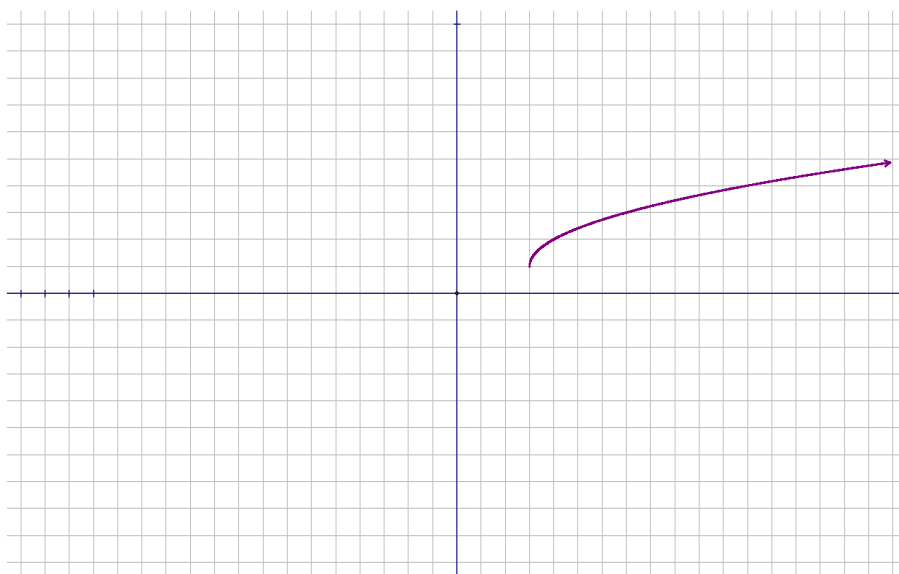
10. Δίνεται τεταρτοκύκλιο ΟΑΓΒΟ ακτίνας R .
Αν Γ είναι το σημείο τομής του κύκλου (A, R) με το τεταρτοκύκλιο, να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτόγραμμου σχήματος ΟΒΓ συναρτήσει της ακτίνας R .



11. Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \sqrt{x-3} + 1$.

α) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}

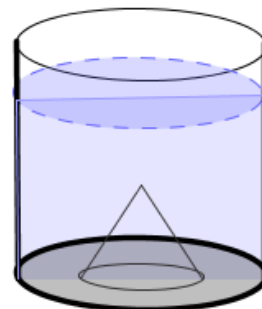
β) Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της $y = f^{-1}(x)$.



12. Να λύσετε την εξίσωση $(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$.

13. Αν A , B και Γ είναι γωνίες τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι
 $\eta\mu 2A - \eta\mu 2B + \eta\mu 2\Gamma = 4\sigma\upsilon\nu A \cdot \eta\mu B \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma$.

14. Κώνος με ακτίνα $\rho=5\text{m}$ και ύψος $u=6\text{m}$ είναι πλήρως βυθισμένος μέσα σε νερό που βρίσκεται μέσα σε ένα κύλινδρο με ακτίνα βάσης $R=10\text{m}$.
 Να υπολογίσετε πόσο θα κατέβει η στάθμη του νερού στον κύλινδρο αν ο κώνος αφαιρεθεί.



15. Η εξίσωση $(4 \cdot 2^x - 1)^2 = (3 \cdot 2^x - 1) \cdot (8 \cdot 2^x - 2)$ έχει ρίζες x_1 και x_2 με $x_1 > x_2$.
 Αν x_1 είναι ο πρώτος όρος αριθμητικής προόδου και x_2 η διαφορά της να υπολογίσετε:
 α) Τον 5^ο όρο της προόδου
 β) Το άθροισμα Σ_{10} των δέκα πρώτων όρων της.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.
 Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες

1. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα $\eta\mu 2x - \epsilon\phi x = \epsilon\phi x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$, $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$
 β) Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω ταυτότητα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu 2x - \epsilon\phi x = \sqrt{3} \sigma\upsilon\nu 2x$ στο διάστημα $0 \leq x \leq 2\pi$.

2. Δίνεται η καμπύλη $x^2 - 4xy + 2y^2 = 1$

α) i) Να δείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{x-2y}{2x-2y}$

ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της A με τετμημένη $x=1$ και τεταγμένη $y > 0$ έχει εξίσωση $3x - 2y + 1 = 0$.

β) Αν η εφαπτομένη της καμπύλης σε σημείο B είναι παράλληλη με την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο A , να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B .

3. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $(\epsilon): 3x + y + a = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

α) Αν η απόσταση του A από το B είναι ίση με την απόσταση του A από την ευθεία (ϵ) , να βρείτε το a .

β) i) Αν $a = 4$ και Γ το σημείο τομής της ευθείας (ϵ) με τον άξονα $y'y$ να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία A , B και Γ .

ii) Να βρείτε το σημείο της ευθείας (ϵ) που έχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή O των αξόνων.

4. Σε αριθμητική πρόοδο (a_n) με διαφορά δ , ισχύει $a_{\mu+\nu} = a_\mu + a_\nu$.

α) Να δείξετε ότι $a_1 = \delta$

β) Αν $\delta=5$ και $K_n = \frac{1+\delta+\delta^2+\dots+\delta^{n-1}}{1+2\delta+4\delta^2+\dots+(2\delta)^{n-1}}$ να δείξετε ότι $K_n = \frac{9(5^n-1)}{4(10^n-1)}$

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n$

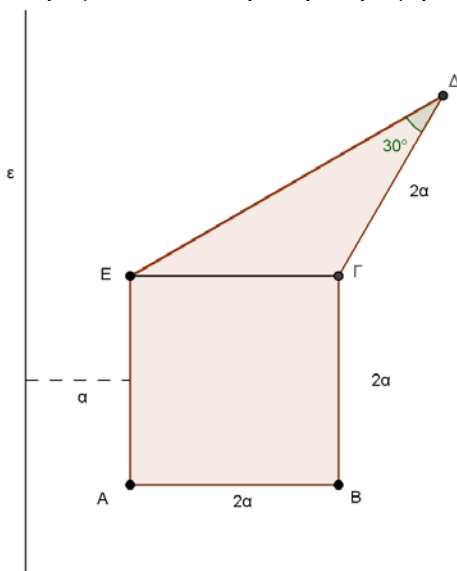
5. α) Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Με χρήση του ορισμού της παραγώγου να αποδείξετε ότι

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

β) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

και στη συνέχεια να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot g'(x) = 1$.

6. Στο πιο κάτω σχήμα το πολύγωνο ΑΕΔΓΒ αποτελείται από το τετράγωνο ΑΒΓΕ πλευράς $2a$ cm και το ισοσκελές τρίγωνο ΕΓΔ με $ΕΓ = ΓΔ = 2a$ cm και $\widehat{ΕΓΔ} = 30^\circ$. Το πολύγωνο ΑΕΔΓΒ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε) που είναι παράλληλη προς την ΑΕ και απέχει από αυτήν a cm. Να υπολογίσετε (συναρτήσει του a), τον όγκο V και το εμβαδόν $E_{ολ}$ της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται κατά την περιστροφή.



Η Διευθύντρια

Ιουλία Παναγή

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ 2009

ΤΑΞΗ: Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Κατεύθυνσης

ΗΜΕΡΟΜ.: 27/5/2009
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ½ ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ: 1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής σφραγισμένης από το σχολείο.
2. Να γράφετε με μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΜΕΡΟΣ Α'

Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

1. Να υπολογίσετε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου 5, 8, 11, ...

2. Να αναλύσετε το κλάσμα $A = \frac{3x+4}{(x-2)(x+3)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

β) $g(x) = e^{3x} \cdot \ln x$

4. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 6\chi + \eta\mu 4\chi}{\eta\mu 2\chi} = \frac{\eta\mu 5\chi}{\eta\mu \chi}$

5. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 7x - 6}{x^4 + 5x - 1}$

β) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 7x + \sigma\upsilon\nu 3x}{2x}$

6. Αν $f(x) = \ln(1-x)$ να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και

β) Τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} .

7. α) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (ϵ) που διέρχεται από το σημείο $A(3, -2)$ και από το σημείο τομής των ευθειών $\chi-\psi=5$ και $2\chi+\psi=7$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης ευθείας στην (ϵ) που διέρχεται από το σημείο $A(3, -2)$.

8. Σε κανονική τετραγωνική πυραμίδα οι παράπλευρες έδρες σχηματίζουν με τη βάση γωνία 60° . Αν το εμβαδόν της βάσης είναι 36 cm^2 να υπολογίσετε:

- α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και
- β) Τον όγκο της πυραμίδας.

9. Αν $f(x) = ax + \beta$ και $g(x+1) = 2x+1$,

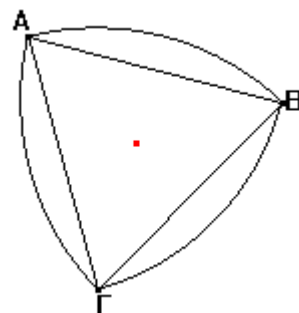
- α) να αποδείξετε ότι $g(x) = 2x - 1$ και
- β) να βρείτε τη συνθήκη μεταξύ των a, β ώστε να είναι $g \circ f = f \circ g$.

10. Να λύσετε την εξίσωση : $\log_3 x + \log_x 81 = 5$.

11. Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} < 90^\circ, \hat{\Gamma} < 90^\circ$), αν

$$E = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2, \quad \gamma = 4\sqrt{3} \text{ cm} \quad \text{και} \quad a = 8 \text{ cm}.$$

12. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς a . Με κέντρα τα A, B, Γ και ακτίνα a γράφουμε από ένα τόξο με άκρα τις άλλες δύο κορυφές του τριγώνου. Να υπολογίσετε τη περίμετρο και το εμβαδό του καμπυλόγραμμου τριγώνου που σχηματίζεται συναρτήσει του a .



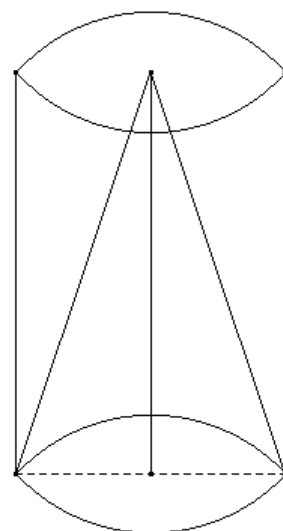
13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin x + \eta \mu x$

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) + f''(x) = 0$.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0, 1)$.
- γ) Να βρείτε τη τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\lambda f'(\frac{\pi}{2}) - 2f(\frac{\pi}{2}) = 2$$

14. Κώνος είναι εγγεγραμμένος σε κύλινδρο. Αν ο κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης 5 cm και ύψος 12 cm να βρείτε:

- α) Τον όγκο του στερεού που υπάρχει ανάμεσα στον κώνο και τον κύλινδρο.
- β) Την γενέτειρα λ του κώνου.
- γ) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου.



15. Να βρείτε τον $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το όριο της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x - \sqrt{x^2 + x^4}}{x^2 - x}, & \text{αν } x < 0 \\ x^2 + \lambda, & \text{αν } x > 0 \end{cases} \quad \text{στο σημείο } x_0 = 0$$

ΜΕΡΟΣ Β'

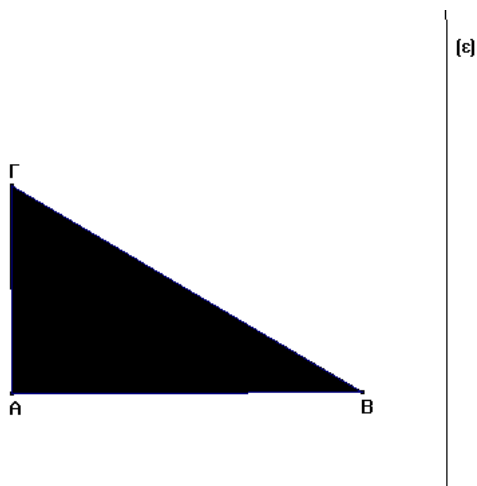
Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1. α) Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + 9x - 12$ $a, \beta \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τα a, β έτσι ώστε το σημείο $A(2, -10)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο σημείο A να έχει συντελεστή διεύθυνσης -3 .

β) Δίνεται η συνάρτηση g η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $g(-1)=7$. Αν f είναι μια συνάρτηση με $f(x) = 3 \cdot (x-2)^2 \cdot g(2x-5)$ να υπολογίσετε την $f''(2)$.

2. Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$), η ευθεία (ε) είναι παράλληλη με την πλευρά $A\Gamma$ και απέχει από αυτή 5 cm . Επίσης $(A\Gamma) = 3 \text{ cm}$ και $(AB) = 4 \text{ cm}$. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ κάνει πλήρη περιστροφή γύρω από την ευθεία (ε) . Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του παραγόμενου στερεού.



3. Σε κύκλο (O, ρ) φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους AB και $\Gamma\Delta$. Γράφουμε τόξο με κέντρο A και ακτίνα $A\Gamma$ που έχει άκρα τα Γ, Δ και τέμνει την AB στο σημείο M . Να αποδείξετε ότι ο μνηίσκος $\Gamma M \Delta B \Gamma$ έχει το ίδιο εμβαδό με το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$.

4. α) Αν $\psi = \varepsilon\phi\chi$ και $\chi \in [0, 2\pi]$ με $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ να λύσετε την εξίσωση $\psi + \frac{d\psi}{dx} = 1$

β) Αν σε Γ.Π. είναι $a_1 = \eta\mu 2x$ και $a_2 = 1 + \sigma\upsilon\nu 2x$ με $0 < x < \frac{\pi}{2}$ να

δείξετε ότι $\lambda = \sigma\phi\chi$.

γ) Για την παραπάνω Γ.Π. αν $a_3 = 2 \cdot \eta\mu^2 x$ να δείξετε ότι $x = \frac{\pi}{4}$.

5. Έστω η ευθεία (ε): $4\chi - 2\psi + 8 = 0$.

α) Να βρείτε τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που σχηματίζουν γωνία 45° με την (ε) και διέρχονται από το σημείο $A(1, 3)$.

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των παραπάνω ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με τον οριζόντιο άξονα είναι αντίστοιχα $B(2, 0)$ και $\Gamma(-8, 0)$.

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

δ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους AD και το μήκος της διαμέσου AM .

6. Ο τρίτος όρος μιας αριθμητικής προόδου (a_n) είναι ίσος με $\log 125$ και η διαφορά της είναι ίση με $\log 5$.

α) Να δείξετε ότι ο πρώτος όρος της προόδου είναι ίσος με τη διαφορά της.

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα $A = a_{21} + a_{22} + a_{23} + \dots + a_{29}$

γ) Αν (β_n) είναι μια γεωμετρική πρόοδος με $\beta_1 = a_1$ και $\beta_2 = a_2$, όπου a_1 και a_2 ο πρώτος και ο δεύτερος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου αντίστοιχα και

$$B = \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \dots + \beta_{1999} + \beta_{2001} \text{ να αποδείξετε ότι } B = \frac{\log 5}{3} \cdot (4^{1001} - 1).$$

Η Διευθύντρια

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2009
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – ΤΑΞΗ Β΄ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 29 ΜΑΪΟΥ 2009

ΔΙΑΡΚΕΙΑ : 2:30΄

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 3 σελίδες .

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- Να γράψετε με μπλε μελάνι – Τα σχήματα με μολύβι.

ΜΕΡΟΣ Α΄ : Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε τις **12 μόνο** .
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες

1. Να λύσετε την εξίσωση: $4^{x-1} = 8^x$.
2. Δίνονται τα σημεία A(3,-2) , B(1,0) και Γ(-5,4). Να βρείτε:
(α) την εξίσωση της διαμέσου BM του τριγώνου ABΓ
(β) την εξίσωση του ύψους AD του τριγώνου ABΓ.
3. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:
(α) $\psi = \frac{x}{5} - \sqrt[3]{x}$ (β) $\psi = e^{-2x} \text{τεμχ}$
4. Να σχηματίσετε πολυώνυμο f(x) , δευτέρου βαθμού, το οποίο έχει ρίζες το 1 και το -2 και για το οποίο ισχύει f(0) = 6 .
5. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x + 2}{2^x - 3}$.
6. Αν το άθροισμα των απείρων όρων της ακολουθίας 1 , ημω , ημ²ω , . . . ισούται με 2 και 0<ω<90⁰ να υπολογίσετε την τιμή της γωνίας ω .
7. Να βρείτε το άθροισμα: $\Sigma = 2 + 5 + 8 + \dots + 41$.

8. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης a cm και παράπλευρο ύψος $\frac{5}{6}a$ cm. Να υπολογίσετε τον όγκο της αν το εμβαδόν της ολικής της επιφάνειας είναι 24 cm^2 .
9. Αν $\varepsilon_{\alpha} = 3 \varepsilon_{\beta}$, να δείξετε ότι: $\varepsilon_{(\alpha-\beta)} = \frac{\eta\mu 2\beta}{1+2\eta\mu^2\beta}$.
10. Να βρείτε το πεδίο τιμών της συνάρτησης: $\psi = \frac{4x^2+1}{2x}$.
11. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\beta = 2\gamma$ και $\hat{A} = 60^\circ$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
12. Να αναλύσετε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^3-5x^2-3x+8}{x^2-2x-3}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
13. Αν $\psi = \ln\sqrt{1+5x^2}$, να δείξετε ότι: α) $e^{2\psi} \frac{d\psi}{dx} = 5x$ και
β) $e^{2\psi} \frac{d^2\psi}{dx^2} + 2e^{2\psi} \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 = 5$.
14. Αν οι αριθμοί $\log_2(x-1)$, $\log_4\sqrt{x-1}$, 1 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να βρείτε το x .
15. Κόλουρος κώνος έχει όγκο $224\pi \text{ cm}^3$. Αν το εμβαδόν της κυρτής του επιφάνειας είναι $100\pi \text{ cm}^2$, το ύψος του 8 cm και το άθροισμα των δύο ακτίνων του ισούται με την γενέτειρα του, να βρείτε τις ακτίνες του.

ΜΕΡΟΣ Β΄ : Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε τις **4 μόνο**.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση : $(\sin\chi + \sin\psi)^2 + (\eta\mu\chi + \eta\mu\psi)^2 = 4\sin^2\left(\frac{\chi + \psi}{2}\right)$. Ακολούθως να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης : $(\sin\chi + \sin 30^\circ)^2 + (\eta\mu\chi + \eta\mu 30^\circ)^2 = 3$.
2. Να λύσετε την εξίσωση : $\log_3\left(4^x + 2^{x+1} + \frac{5}{2}\right) = 1 + 2\log_9(2^{x-1} + 1)$.
3. Ορθογώνιο τραπέζιο με βάσεις 3 cm και 9 cm στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τη μεγάλη βάση. Αν ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι $320\pi \text{ cm}^3$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

4. Δίνεται η εξίσωση της καμπύλης $\frac{\chi^2}{3} + \frac{\psi^2}{4} = 1$.
- (α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με $\psi = 1$ και $\chi > 0$.
- (β) Να δείξετε ότι $\frac{d^2\psi}{d\chi^2} = \frac{-16}{3\psi^3}$.
5. Τρίγωνο ABΓ έχει κορυφές A(2, 3), B(5, 2), Γ(α, β) και είναι ισοσκελές και ορθογώνιο στο A.
- α) Να βρείτε τα α και β αν $\beta > 0$.
- β) Να δείξετε ότι η πλευρά BΓ έχει εξίσωση $2x + y - 12 = 0$
- γ) Να βρείτε το μήκος του ύψους ΑΔ.
- δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ABΕΓ να είναι τετράγωνο.
6. Αριθμητική πρόοδος και φθίνουσα Γεωμετρική πρόοδος έχουν τον ίδιο πρώτο όρο και ο πέμπτος όρος της Γεωμετρικής προόδου ισούται με 1. Η διαφορά της Αριθμητικής προόδου ισούται με τον τρίτον όρο της Γεωμετρικής προόδου. Το άθροισμα των δύο πρώτων όρων της Γεωμετρικής προόδου είναι ίσο με τον τρίτο όρο της Αριθμητικής προόδου.
- α) Να σχηματίσετε τις δύο προόδους.
- β) Αν ισχύει η σχέση: $\Sigma_n = 12(1 + \Sigma_\infty)$, όπου Σ_n το άθροισμα των n πρώτων όρων της Αριθμητικής προόδου και Σ_∞ το άθροισμα των άπειρων όρων της Γεωμετρικής προόδου να βρείτε το n.

Η Διευθύντρια

Στέλλα Μάρκου

Οι εισηγητές

Παντζιαράς Γιώργος
Κοκκαλή Θεονίτσα
Ανδρέου Ναυσικά
Καραμάνου Αθηνά
Νικολάου Ιρίνα

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2009

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' Ενιαίου Λυκείου - Κατεύθυνση

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 25/ 5 / 09

ΔΙΑΡΚΕΙΑ : 2. 30'

ΟΔΗΓΙΕΣ :

- α) Να γράφετε μόνο με **μπλε ή μαύρο** μελάνι (μόνο τα σχήματα με μολύβι)
β) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
γ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΜΕΡΟΣ Α'Από τα 15 θέματα να λύσετε μόνο τα 12.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 1 μονάδα

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{x-5}{(x-2)(x+1)}$
2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$.
 - α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης f .
 - β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f . Αν ορίζεται να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τον τύπο της.
3. Να βρείτε τα όρια :
 - α) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x}$
 - β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x - 1}{3x^2 + 2x - 5}$
4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(2,8) και Β(6,6). Το σημείο Μ(3,5) είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.
 - i) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ.
 - ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.
5. Σε Α.Π το άθροισμα του τέταρτου και του έβδομου όρου της είναι 55 και ο τρίτος όρος της ισούται με 20. Να βρεθεί η Α.Π και το άθροισμα των 50 πρώτων όρων της.
6. Δίνεται κύλινδρος με όγκο $100\pi \text{ cm}^3$ και ύψος 4cm. Κώνος έχει ακτίνα 8cm και το εμβαδόν της κυρτής του επιφάνειας είναι διπλάσιο του εμβαδού της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου. Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου.

7. Να βρείτε τη παράγωγο των συναρτήσεων:

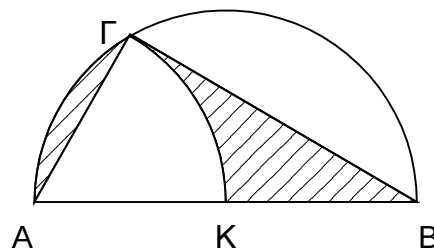
α) $y = \frac{\chi^2 - 5\chi}{\chi + 2}$ β) $y^2 + 5\chi y - e^{3x} = 7$

8. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα ΚΑΒΓΔ έχει όγκο $288m^3$ και η παράπλευρη έδρα σχηματίζει με την βάση της γωνία ίση με 45° . Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

9. Να δείξετε ότι:
$$\frac{\eta\mu 2\alpha \sigma\upsilon\nu 3\alpha + \eta\mu 3\alpha \sigma\upsilon\nu 2\alpha - 2\eta\mu \alpha \sigma\upsilon\nu 4\alpha}{\frac{\epsilon\phi 5\alpha - \epsilon\phi 2\alpha}{1 + \epsilon\phi 5\alpha \epsilon\phi 2\alpha}} = \sigma\upsilon\nu 3\alpha$$

10. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Μ(1,2) και απέχει εξίσου από τα σημεία Α(0,-2) και Β(4,0).

11. Δίνεται ημικύκλιο (Κ, R) διαμέτρου ΑΒ. Η χορδή ΑΓ είναι πλευρά εγγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου και η χορδή ΓΒ είναι πλευρά εγγεγραμμένου ισόπλευρου τριγώνου. Να βρείτε το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας.



12. Να λύσετε την εξίσωση : $\log_9 \left(\frac{5\sigma\upsilon\nu\chi - 1}{2} \right) = \log_3(\eta\mu\chi)$, $\chi \in (0, \frac{\pi}{2})$

13. Να υπολογίσετε το άθροισμα των άπειρων όρων :

$$A = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots \right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \dots \right) + \dots \left(\frac{1}{2^v + 1} + \frac{1}{(2^v + 1)^2} + \frac{1}{(2^v + 1)^3} + \dots \right) + \dots$$

14. Να βρείτε τις τιμές του $\chi \in R$ για τις οποίες οι όροι

$\log 178$, $\log \sqrt{81(2^\chi + 2 \cdot 3^\chi)}$, $\chi \log 3$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

15. Αν $\sigma\upsilon\nu(a - \beta) = \eta\mu \alpha \cdot \eta\mu \beta$ να δείξετε ότι: $\epsilon\phi^2 \frac{\alpha}{2} + \epsilon\phi^2 \frac{\beta}{2} = \frac{2}{(1 + \sigma\upsilon\nu \alpha)(1 + \sigma\upsilon\nu \beta)}$

ΜΕΡΟΣ Β'

Από τα 6 θέματα να λύσετε μόνο τα 4 .

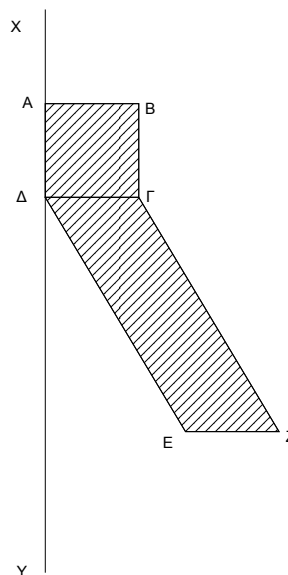
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 2 μονάδες.

1. Τραπεζίο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) έχει κορυφές $B(-3,2)$, $\Gamma(-2,6)$ και εξίσωση της πλευράς $\Gamma\Delta$: $6x+7y-30=0$.
 - α) Να βρείτε την εξίσωση της AB .
 - β) Να βρείτε την απόσταση των παραλλήλων πλευρών.
 - γ) Φέρνουμε την διαγώνιο $B\Delta$ του τραπεζίου. Αν $\hat{\Delta B\Gamma} = 90^\circ$ να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ .
 - δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta B\Gamma$.
 - ε) Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας Γ .
2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\eta\mu 4x(1+\sigma\upsilon\nu 4x)}{\sigma\upsilon\nu^3 2x}$ και $g(x) = \eta\mu^2 x - \eta\mu^2 3x$
 - α) Να δείξετε ότι:
 - i) $f(x) = 4\eta\mu 2x$
 - ii) $g(x) = -\eta\mu 2x \cdot \eta\mu 4x$
 - β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2}$
 - γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + g(x) = 0$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.
3. α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $f(x)$ δευτέρου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{2}$, 2 και $f'(\lambda) = -1$ όπου λ η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$ είναι $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$
 - β) Να αναλύσετε το $\frac{2x^3 - 3x^2 - 4x - 2}{f(x)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^2$. Να δείξετε ότι:
 - α) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \cdot f(x)$
 - β) $(1+x^2) \cdot f''(x) + x \cdot f'(x) = 4 \cdot f(x)$
 - γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x f'(x) = 0$

5. Στο πιο κάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο και το $\Gamma\Delta EZ$ παραλληλόγραμμο με $\Delta E = 3(\Delta\Gamma)$ και $\hat{\Gamma ZE} = 60^\circ$. Το σκιασμένο χωρίο περιστρέφεται γύρω από την ευθεία XY και δίνει εμβαδόν επιφάνειας $198\pi \text{ cm}^2$.

α) Να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

β) Αν $AB = 3 \text{ cm}$ να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πιο πάνω περιστροφή.



6. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους:

$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{2x+44}}{2-x}, \quad g(x) = \frac{1}{2} \ln(2x+44) - \ln(2-x).$$

α) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο $f = g$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $f(x)$ στο σημείο της με τεταγμένη $y = 0$.

γ) Η συνάρτηση $h(x)$ δίνεται από τον τύπο $h(x) = 2f'(x) \cdot \frac{(x+22)}{(x+46)}$

να δείξετε ότι $h(x) = \frac{1}{2-x}$

δ) Αν $\phi(x) = 6 - x^2$ να ορίσετε την συνάρτηση $h \circ \phi$ (τύπος και πεδίο ορισμού).

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Ζήνων Ταύρου (Σ.Β.Δ.)

Δημήτρης Γαβαλάς

Ελένη Γεωργιάδου

Κώστας Χαραλαμπίδης

Ιάκωβος Κλώνης

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Δέσποινα Λυσάνδρου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2009Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**Ημερομηνία: **25 / 05 / 2009**Χρόνος: **2.5 ώρες****ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- Να γράφετε με **μπλε** μελάνι.
- Επιτρέπεται να κατασκευάζετε τα σχήματα με μολύβι.
- Επιτρέπεται η χρήση σφραγισμένης υπολογιστικής μηχανής.
- **Δεν** επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α : Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε **μόνο τις 12**.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100 μονάδες.

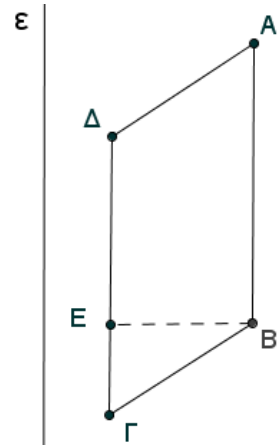
1. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης: $\psi=4x^3-2x+7$.
2. Να λύσετε την εξίσωση: $2^{2x} = 16$.
3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\rho = 1$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.
4. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 6}{2x^4 - 7x + 2}$.
5. Για τη γωνία α ισχύει ότι $5\sigma\upsilon\nu 2\alpha - 14\sigma\upsilon\nu \alpha - 7 = 0$. Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu \alpha = -\frac{3}{5}$.
6. Δίνονται τα σημεία $A(8, 0)$ και $B(0, 4)$ του καρτεσιανού επιπέδου $Ox\psi$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O και το μέσο Δ του τμήματος AB .
7. Να αποδείξετε ότι: $(\eta\mu 15^0 - \sigma\upsilon\nu 15^0)^2 = \frac{1}{2}$.
8. Να αποδείξετε ότι: $\log_3 \sqrt{81 \sqrt[3]{27}} = \frac{5}{2}$.

9. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \frac{\sqrt{6-x} \cdot \sqrt{10-x}}{x-5}$.
10. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\sin 2\alpha - \sin 3\alpha}{\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \epsilon\phi \frac{\alpha}{2}$.
11. Να λύσετε την εξίσωση: $\log x^2 = (\log x)^2$.
12. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει βάση με πλευρά 8cm και οι παράπλευρες έδρες της σχηματίζουν με τη βάση γωνία 30° . Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.
13. Ο πρώτος όρος αριθμητικής προόδου είναι ίσος με 1 και το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων είναι ίσο με 100, να βρεθεί η πρόοδος.
14. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις α, β, γ και εμβαδόν παράπλευρης 24cm^2 . Αν οι διαστάσεις του είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο 2. Να υπολογίσετε τον όγκο του.
15. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης με εξίσωση $x^2 - 2\chi\psi - \psi^2 - x = 0$, τετμημένη $\chi > 0$ και τεταγμένη $\psi = -2$.

ΜΕΡΟΣ Β : Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε **μόνο τις 4**.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100 μονάδες.

1. Αν καμπύλη με εξίσωση $x^{2k} - \chi\psi + 4\psi = 2^k$ περνά από το σημείο $A(2, -1)$, να βρείτε την τιμή του k . Στην συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο A .
2. α) Να υπολογίσετε τις τιμές του $\chi \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε οι αριθμοί $\log 178, \log \sqrt{81(2^x + 2 \cdot 3^x)}, x \log 3$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. (μ. 6)
- β) Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{x+3}{x^2-1}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων. (μ. 4)
3. I. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x}{x-1}$ και $g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-1}$
- α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f(x), g(x)$ είναι ίσες. Αν είναι $f \neq g$ να βρείτε το «ευρύτερο» υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι $f=g$. (μ. 2)
- β) Να βρείτε το πεδίο τιμών της $g(x)$. (μ. 2)
- γ) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της $g(x)$ και το πεδίο ορισμού της. (μ. 1)
- II. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης: $\psi = \ln \frac{\eta\mu 2\chi}{e^{2\chi}}$. (μ. 5)

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=8m, ΒΓ=5m, ΒΕ=4m (ΒΕ η απόσταση του Β από το ΔΓ) και η πλευρά ΔΓ απέχει απόσταση 2m από την ευθεία ε. Το παραλληλόγραμμο περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία ε όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε:
τον όγκο και το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την περιστροφή.



5. α) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα $\frac{\eta\mu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B + \eta\mu\Gamma} = \epsilon\phi B$ να αποδείξετε ότι αυτό το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
β) Να λύσετε την εξίσωση $\epsilon\phi(\chi+60^\circ) \cdot \epsilon\phi(\chi-60^\circ) = 0$ στο διάστημα $(0^\circ, 360^\circ)$.
6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $\chi - \psi + 1 = 0$ και $2\chi - 3\psi + 5 = 0$ και απέχει από το σημείο Α(3, 2) απόσταση ίση με $\frac{7}{5}$.

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

.....

Πρωτ. Ανδρέας Πετρίδης

Η ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΡΙΑ Β.Δ

.....

Σελιά Χαραλάμπους Γιώτα

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

.....

Γ. Τοουλιάς

.....

Μ. Ροΐδη

.....

Γ. Ανδρονίκου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2009

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 25/05/2009

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **4** σελίδες.
- Να γράψετε μόνο με **μπλε** ή **μαύρο** μελάνι (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι για τα σχήματα).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Επιτρέπεται η χρήση **μη** προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

ΜΕΡΟΣ Α' (60 ΜΟΝΑΔΕΣ)**Από τα δεκαπέντε (15) θέματα να λύσετε μόνο τα δώδεκα (12).****Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.**

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{3x+1}{(x+2)(x-3)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 4x + 1}{3x^2 - 2x^3}$.

3. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{d\psi}{dx}$ των παρακάτω συναρτήσεων :

(α) $\psi = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^2 - 5$

(β) $\psi = e^{4x} \cdot \eta\mu 2x$

4. Ο πρώτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου ισούται με 5 και ο πέμπτος όρος της ισούται με 405. Να βρείτε:

(α) το λόγο λ της προόδου, αν $\lambda > 0$

(β) το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της.

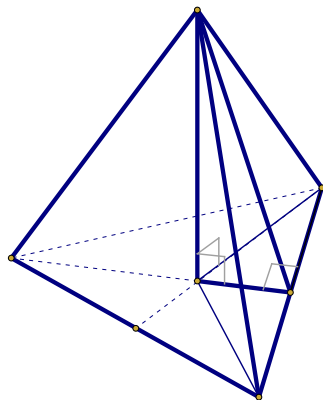
5. Δίνεται η τριγωνομετρική εξίσωση: $\sin 2x + 3\eta\mu x + 1 = 0$.

Να βρείτε: (α) τη γενική λύση της εξίσωσης,

(β) τις λύσεις της εξίσωσης που βρίσκονται στο διάστημα $(\pi, 3\pi)$.

- 6.** (α) Να σχηματίσετε την Α.Π. στην οποία ο δεύτερος όρος και ο όγδοος όρος της έχουν άθροισμα 29 και ο τρίτος και ο πέμπτος όρος της έχουν άθροισμα 25.
 (β) Να υπολογίσετε τον 21^ο όρο της.
 (γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 40 πρώτων όρων της.
- 7.** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = 3x - 4$ και $g(x) = ax + 3$, $a \in \mathbb{R}$.
 (α) Να βρείτε τις συναρτήσεις: $f \circ g$ και $g \circ f$.
 (β) Να υπολογίσετε την τιμή του a , ώστε $f \circ g = g \circ f$.
- 8.** Ένας κόλουρος κώνος έχει όγκο $V = 700 \pi \text{ cm}^3$ και ύψος $u = 12 \text{ cm}$. Αν η ακτίνα της μιας βάσης είναι διπλάσια από την ακτίνα της άλλης βάσης, να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κόλουρου κώνου.
- 9.** Να λύσετε την εξίσωση: $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x + \dots = \log_2 25$.
- 10.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $x.e^y = y - 1$ στο σημείο της $(-1, 0)$.
- 11.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(2, 3), Β(-2, 1) και Γ(4, -5). Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου και την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ.
- 12.** (α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\eta\mu 5x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu 4x}{\sigma\upsilon\nu 5x \cdot \sigma\upsilon\nu 3x - \sigma\upsilon\nu 6x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x} = \sigma\phi x$
 (β) Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ταυτότητα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 5x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu 4x}{\sigma\upsilon\nu 5x \cdot \sigma\upsilon\nu 3x - \sigma\upsilon\nu 6x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x} + \epsilon\phi x = \frac{2}{\eta\mu 2x}$
- 13.** Κανονική τετραγωνική πυραμίδα Κ.ΑΒΓΔ έχει όγκο $V = 288 \text{ cm}^3$ και οι παράπλευρες έδρες της σχηματίζουν με τη βάση της γωνίες 45° . Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.
- 14.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = k \ln x + \lambda x^2 + 3$, $x > 0$, η οποία διέρχεται από τα σημεία: Α(1, 7) και Β(e, $4e^2$). Να βρείτε:
 (α) τους πραγματικούς αριθμούς k και λ ,
 (β) την εξίσωση της καθέτου της καμπύλης στο σημείο Α.

15. Να αποδείξετε ότι ο όγκος V ενός κανονικού τετραέδρου ακμής a (σχήμα κάτω) είναι $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$.



ΜΕΡΟΣ Β' (40 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Από τα έξι (6) θέματα να λύσετε μόνο τα τέσσερα (4). Κάθε θέμα βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Οι αριθμοί x , ψ , ω είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. με ψ ακέραιη ρίζα της εξίσωσης $9(2 \cdot 3^{2\psi-2} + 1) = 19 \cdot 3^\psi$. Αν οι $x-2$, ψ^3 , $\omega+18$ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π., να υπολογίσετε τα x , ψ , ω .

2. (α) Να λύσετε την εξίσωση $(\epsilon\phi x)^{\eta\mu x} = (\sigma\phi x)^{\sigma\upsilon\nu x}$ στο διάστημα $(0, \pi)$.

(β) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A , να δείξετε ότι:

$$\log_{a+\beta} \log_{a-\beta} 2 \log_{a+\beta} \log_{a-\beta}$$

3. (α) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 5} - 2}$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = a\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x$ με a και β σταθερές.

(i) Να δείξετε ότι: $f''(x) + f(x) = 0$.

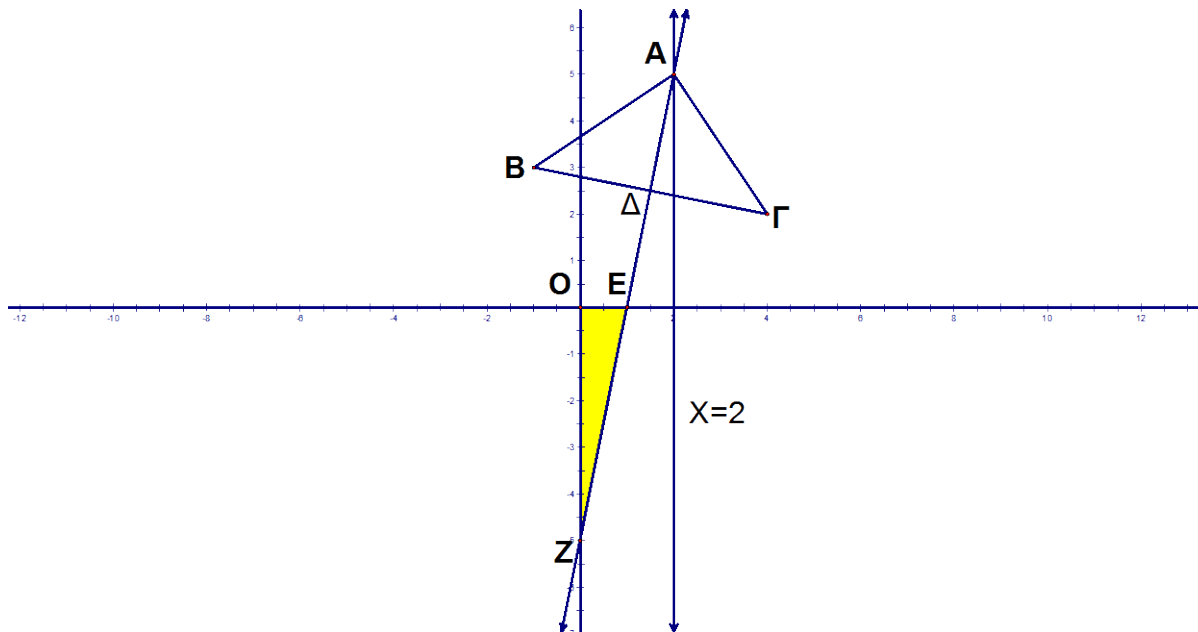
(ii) Αν $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$, να βρείτε τις τιμές των a και β .

4. Αν $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$, να αποδείξετε ότι:

(α) $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} \cdot f'(x)$

(β) $4(1 + x^2)f(x) + 4xf'(x) = f(x)$

5. Τα σημεία $A(2,5)$, $B(-1,3)$ και $\Gamma(4,2)$ είναι κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$ (σχήμα κάτω).
 (α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
 (β) Να δείξετε ότι η εξίσωση του ύψους $A\Delta$ είναι $5x - y - 5 = 0$.
 (γ) Αν η ευθεία $A\Delta$ τέμνει τους άξονες xx' και yy' στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του τριγώνου OEZ γύρω από την ευθεία $x = 2$ (O η αρχή των αξόνων).



6. (α) Να αποδείξετε ότι: $\log\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \dots + \log\left(1 - \frac{1}{2009}\right) = -\log 2009$
 (β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \in (2, +\infty)$.
 (i) Να βρείτε το πεδίο τιμών της.
 (ii) Να αποδείξετε ότι είναι ένα προς ένα.
 (iii) Να βρείτε την αντίστροφη της $\psi = f^{-1}(x)$.

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

1. ΤΑΣΟΣ ΕΥΑΓΟΡΟΥ

2. ΙΩΑΚΕΙΜ ΚΥΡΙΑΚΟΥ

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΝΙΚΟΛΑΪΔΗΣ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2009

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 26.5.2009

ΤΑΞΗ : Β΄

ΧΡΟΝΟΣ : 2,5 ΩΡΕΣ

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 3 σελίδες

- ΟΔΗΓΙΕΣ :**
- 1) ΔΕΝ επιτρέπεται η χρήση προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής
 - 2) Να γράψετε μόνο με μελάνι (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
 - 3) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΜΕΡΟΣ Α : Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε **ΜΟΝΟ** τις 12.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{\chi - 12}{(\chi - 2)(\chi + 3)}$
2. Αν $1, e^{\ln 2}, \log \chi$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να βρείτε το χ .
3. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:
α) $f(\chi) = \chi^3 - 4\chi - \eta\mu\chi$, β) $f(\chi) = e^{2\chi} \cdot \ln \chi$
4. Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{\chi - 2}{\chi^2 - 4}$, β) $\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4\chi^2 - 9}}{2\chi}$
5. Κώνος έχει εμβαδόν βάσης $16\pi \text{ m}^2$ και εμβαδό κυρτής επιφάνειας $20\pi \text{ m}^2$. Να βρείτε τον όγκο του.
6. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(\chi) = \frac{2\chi + 3}{\chi - 2}$. Να βρείτε:
α) το πεδίο ορισμού, β) το πεδίο τιμών, γ) τον τύπο και το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(\chi)$.
7. Τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ έχει κορυφές $A(2, 3)$, $B(-1, 4)$ και $\Gamma(1, -2)$. Να βρείτε την εξίσωση και το μήκος του ύψους του $\triangle$.
8. Να δείξετε ότι ισχύει η ισότητα: $\frac{\eta\mu 3\theta}{\eta\mu\theta} + \frac{\sigma\upsilon\nu 3\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = 4\sigma\upsilon\nu 2\theta$

9. Το παράπλευρο ύψος κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας σχηματίζει με το ύψος της γωνία 60° . Αν η ακμή της βάσης της είναι ίση με 8cm, να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.
10. Να λύσετε την εξίσωση: $\log_3(9^x - 2 \cdot 3^{x+1}) = \log_2(8 - \log_{100} 1)$
11. Να λύσετε την εξίσωση: $\sin 2x = 7\eta\mu x + 4$
12. Δίνεται η καμπύλη $\psi = f(x)$ με τύπο $f(x) = x^3 + (\alpha - 2)x^2 + \beta x + \gamma$. Η γραφική παράσταση της καμπύλης περνά από την αρχή των αξόνων και η ευθεία $5x - \psi = 7$ είναι παράλληλη με την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο της (1, 1). Να βρείτε τα α , β και γ .
13. Να επιλύσετε το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ αν: $E = 8\sqrt{3}m^2$, $\gamma = 4\sqrt{3}m$ και $\alpha = 8m$ ($\hat{B} < 90^\circ$).
14. Ισόπλευρο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Με διαμέτρους τις πλευρές του τριγώνου γράφουμε ημικύκλια έξω από τον κύκλο. Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο του καμπυλόγραμμου τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ που σχηματίζεται από τα τρία ημικύκλια συναρτήσει του R.
15. Να δείξετε ότι: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ΜΕΡΟΣ Β: Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε **ΜΟΝΟ** τις 4.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. α) Να βρείτε τον τύπο της πολωνυμικής συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$ πρώτου βαθμού για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:
(i) η ρίζα της είναι η λύση της εξίσωσης $\log_2 x + \log_x 2 = 2$
(ii) $f(3) = 2$
β) Αν $f(x) = 2x - 4$ με πεδίο ορισμού $A = [-2, 5)$ και $g(x) = \sqrt{x-1}$, να ορίσετε την $g \circ f$.
2. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = f(x)$ με τύπο $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$.
α) Να δείξετε ότι ισχύει η ισότητα: $x^3 \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} + x \cdot \frac{d\psi}{dx} - \psi = 0$
β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης με τύπο $\psi = f'(x)$ στο σημείο της με τετμημένη $x = 1$.

3. Σε φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο ισχύει : $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{4}{9} \Sigma_{\infty}$ και $\alpha_2 - \alpha_3 = 17 + 14 + 11 + \dots - 16$

α) Να σχηματίσετε τη γεωμετρική πρόοδο

β) Να υπολογίσετε το n ώστε να ισχύει: $26\Sigma_n = 52\Sigma_{\infty} - 27\Sigma_{2n}$

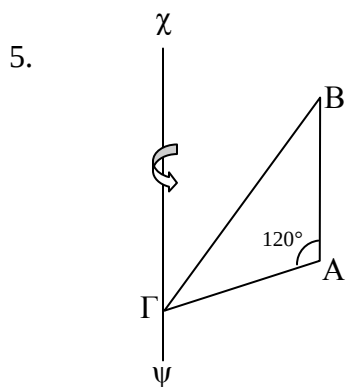
4. Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με κορυφή $\Gamma(8, -1)$. Η διχοτόμος του τριγώνου AE έχει εξίσωση $7x - y = 7$ (E σημείο της $B\Gamma$) και η κάθετος ED που φέρουμε από το E προς την $A\Gamma$ (D σημείο της $A\Gamma$) έχει εξίσωση $3x - 4y = 3$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής A .

β) Να δείξετε ότι $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 90^\circ$

γ) Να δείξετε ότι το σημείο D είναι μέσο της $A\Gamma$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle A\Gamma E$.



Το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma = 10\text{cm}$ και $\hat{A} = 120^\circ$. Να βρείτε το εμβαδόν και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του τριγώνου γύρω από την ευθεία $\chi\Gamma\psi$ που είναι παράλληλη με την AB .

6. α) Να λύσετε την εξίσωση $(2^{\phi 2\chi})^2 = \frac{1}{4^{\phi\chi}}$, $\chi \in [0^\circ, 360^\circ)$

β) Αν σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\frac{\sigma\upsilon\nu(A-\Gamma)}{\beta+2R\eta\mu(A-\Gamma)} = \frac{\gamma}{4R^2\sigma\upsilon\nu\Gamma}$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Η Διευθύντρια

Κυριακή Ανδρονίκου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2009

Ημερομηνία: 05/06/2009

Χρόνος : 2,5 ώρες

- ΟΔΗΓΙΕΣ:** α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
β) Να γράφετε μόνο με μελάνι (τα σχήματα επιτρέπονται με μολύβι).
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
δ) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 3 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α' : α) Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε **ΜΟΝΟ** τις 12 .
β) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 (πέντε) μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{x-6}{x(x-3)}$
2. Σε αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι ίσος με 5 και ο ένατος όρος της είναι τριπλάσιος από το δεύτερο . Να σχηματίσετε την αριθμητική πρόοδο.
3. Να υπολογίσετε τα όρια:
α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{4x^2 + 3}$ και β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3x - 6}$
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+1}{x-4}$, $x \neq 4$.
Να εξετάσετε αν ορίζεται η $f^{-1}(x)$. Αν ορίζεται, να βρείτε τον τύπο της, το πεδίο ορισμού της και το πεδίο τιμών της.
5. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:
α) $\psi = 4x^5 + \eta\mu 5x - \ln x$ β) $\psi = (e^x + 5) \cdot \epsilon\phi^3 x$
6. Κύβος έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας ίσο με 96 cm^2 . Να βρείτε:
α) Την ακμή του κύβου.
β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που έχει ύψος ίσο με την ακμή του κύβου, όγκο ίσο με 288 cm^3 και το μήκος της βάσης του είναι διπλάσιο από το πλάτος της.
7. Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης : $2\sigma\upsilon\nu(2x - 30^\circ) - \sqrt{3} = 0$.
8. Να δείξετε ότι: $\frac{1 + \eta\mu 4\alpha - \sigma\upsilon\nu 4\alpha}{1 + \eta\mu 4\alpha + \sigma\upsilon\nu 4\alpha} = \epsilon\phi 2\alpha$

9. Δίνεται η καμπύλη $\psi^2 + 3x\psi = 4$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο αυτής Α, με τετμημένη $x = -1$ και $\psi > 0$, έχει εξίσωση $12x + 5\psi = 8$.

10. Να λύσετε την εξίσωση : $\log(4^{x+1} - 1) = \log 6 + \log(2^{x-1})$

11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(1,-1), Β(3,4) και εξισώσεις των πλευρών

ΑΓ : $x - 4\psi = 5$ και ΒΓ : $2x + \psi = 10$. Να βρείτε:

α) Το μήκος της πλευράς ΑΒ.

β) Την εξίσωση της διαμέσου ΓΜ.

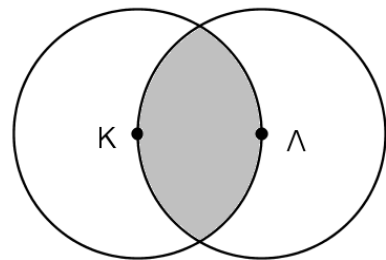
12. Κύλινδρος και κώνος έχουν την ίδια ακτίνα βάσης και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι διπλάσιο από το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου. Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι 3α cm και η γενέτειρα του κώνου είναι 15α cm, να βρείτε τον όγκο του κώνου συναρτήσει του α .

13. Στο σχήμα δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, R).

Αν η περίμετρος του σκιασμένου μέρους είναι ίση με 12π cm, να βρείτε :

α) Την ακτίνα R.

β) Το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους.



14. Αν $2^{\log_3 x} \cdot 2^{\log_9 x} \cdot 2^{\log_{81} x} \cdot \dots = 64$, $x > 0$, να βρείτε την τιμή του x .

15. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \frac{e^{\alpha x}}{(x-3)^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \sigma\phi^2(x-3)$.

Αν το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x)}{g'(x)} = e^6$, να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α .

ΜΕΡΟΣ Β': α) Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 4.

β) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 (δέκα) μονάδες.

1. Φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος και αριθμητική πρόοδος έχουν τον ίδιο πρώτο όρο και η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι τετραπλάσια του λόγου της γεωμετρικής προόδου. Αν το άθροισμα των άπειρων όρων της γεωμετρικής προόδου είναι ίσο με τον τέταρτο όρο της αριθμητικής προόδου και το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι ίσο με 36, να βρείτε τις δύο προόδους.

2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(2,4)$, $B(4,2)$, $\Gamma(6,8)$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

Να βρείτε :

- Την εξίσωση της πλευράς $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Το μήκος του ύψους MD του τριγώνου $AM\Gamma$.
- Το εμβαδόν του τριγώνου $AM\Gamma$.
- Τις συντεταγμένες κορυφής E , ώστε το $M\Delta E$ να είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

3. Αν $\psi = \ln(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)$, $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$, να δείξετε ότι:

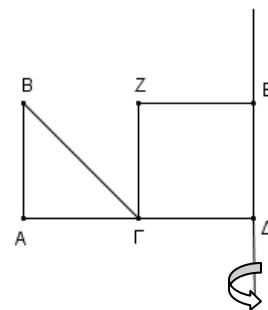
α) $\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2}{\eta\mu 2x - 1}$

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{8}{2\sigma\upsilon\nu 4x + 5}$, στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$.

4. Στο σχήμα δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$

($\hat{A} = 90^\circ$) και τετράγωνο $\Gamma\Delta EZ$. Η $A\Delta = 10$ cm και το Γ είναι το μέσο της. Το σχήμα $A\Delta EZ\Gamma B$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την $E\Delta$.

Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

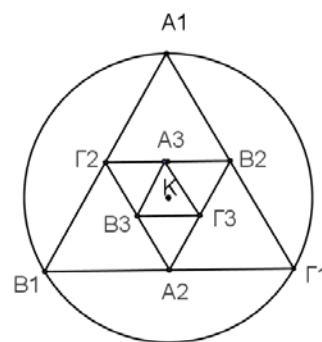


5. Στο σχήμα το τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ είναι ισόπλευρο εγγεγραμμένο στον κύκλο (K, R) . Ενώνουμε τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ και σχηματίζουμε τρίγωνο $A_2B_2\Gamma_2$. Το ίδιο επαναλαμβάνεται και παίρνουμε τα τρίγωνα $A_3B_3\Gamma_3$, $A_4B_4\Gamma_4$, ..., $A_nB_n\Gamma_n$.

Αν $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_n$ είναι οι περιμέτροι των n τριγώνων αντίστοιχα και $S_n = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \dots + \Pi_n$

α) Να αποδείξετε ότι : $S_n = 6R\sqrt{3}\left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right)$.

β) Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 18\sqrt{3}$, να βρείτε την ακτίνα R του κύκλου.



6. α) Αν οι αριθμοί x , $\sqrt[4]{e \cdot x}$, $x^{\ln x}$ είναι τρεις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να βρείτε τις τιμές του x , $x > 0$, $x \neq 1$.

β) Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ να δείξετε ότι : $\frac{\beta + \gamma}{\beta - \gamma} \cdot \epsilon\phi \frac{A}{2} = \sigma\phi \frac{B - \Gamma}{2}$.

Η Διευθύντρια

Γκλόρια Σέπου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2009

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΤΑΞΗ : Β

ΗΜΕΡ.: 1 / 6 / 2009
ΔΙΑΡΚΕΙΑ : 2:30'

*** Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 3 σελίδες ***

ΟΔΗΓΙΕΣ :

- α) Να γράφετε μόνο με **μπλε ή μαύρο** μελάνι (μόνο τα σχήματα με μολύβι)
β) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
γ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΜΕΡΟΣ Α'

Από τα 15 θέματα να λύσετε μόνο τα 12.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 1 μονάδα.

- 1) Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{19-x}{(x-3)(x+5)}$
- 2) Να λύσετε την εξίσωση $\varphi(3x-30^\circ) = \sqrt{3}$ στο διάστημα $[0^\circ, 180^\circ]$.
- 3) Να δείξετε ότι ισχύει η τριγωνομετρική ταυτότητα: $\frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\alpha + \sigma\upsilon\upsilon 3\alpha} = \frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1\epsilon\varphi\alpha^2}$
- 4) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:
α) $y = \sqrt{x} \cdot \eta\mu 3x$, β) $y = 5x^3 + \frac{x^2}{3} - 5$
- 5) Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 3x + 2}{7 - 3x^2}$, β) $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{3}{x}}$
- 6) Σε κανονική τετραγωνική πυραμίδα το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας της είναι ίσο με 260cm^2 και το εμβαδό της βάσης της ίσο με 100cm^2 . Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδό της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.
- 7) Σε αριθμητική πρόοδο το άθροισμα των 6 πρώτων όρων είναι ίσο με 57 και ο τέταρτος όρος είναι ίσος με 11. Να σχηματίσετε την πρόοδο.
- 8) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο στον κύκλο(Κ,Ρ). Το μήκος του τόξου $\widehat{ΑΒ}$ είναι $4\pi\text{ cm}$. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

9) Να λυθεί η εξίσωση $\log_3 x = \log_9(10 - 3x)$.

10) Δίνονται τα σημεία $A(2, -3)$, $B(5, -2)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 3x + 4y = 5a$ με $a > 0$. Η απόσταση του σημείου B από την (ε) είναι ίση με 3. Να υπολογίσετε:
α) το μήκος του (AB) ,
β) την τιμή του a .

11) Κώνος έχει εμβαδό κυρτής επιφάνειας ίσο με $60\pi \text{ cm}^2$. Εάν $\lambda - R = 4 \text{ cm}$, να υπολογίσετε το εμβαδό της ολικής επιφάνειας του κώνου και τον όγκο του.

12) Εάν $f(x) = 10x - \frac{x^3}{3}$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\eta\mu(x-4)}{f'(x)+6}$

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3-x}{x+1}$ με $x \geq 2$. Να βρείτε:

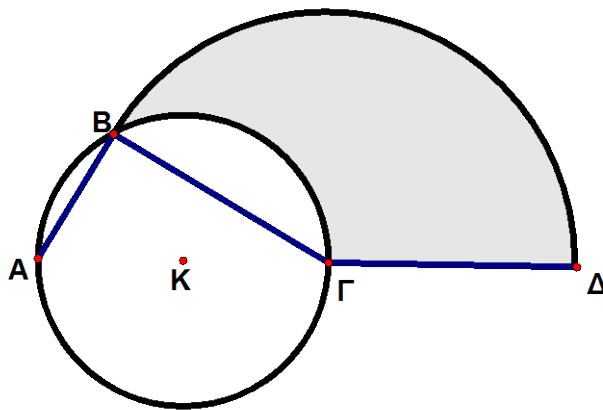
α) τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης $f^{-1}(x)$.

β) το $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f'(x)}{f(x)}$.

14) Στον κύκλο (K, R) δίνονται οι χορδές $AB=R$ και $B\Gamma = R\sqrt{3}$. Με κέντρο το Γ και ακτίνα τη ΓB γράφουμε τόξο $\widehat{B\Delta}$ που τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο Δ .

α) Να δείξετε ότι $A\Gamma$ είναι διάμετρος.

β) Να βρείτε το εμβαδό του σκιασμένου μέρους, συναρτήσει του R .



15) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 \cdot e^{3x})$. Η κάθετη της καμπύλης στο σημείο της A με τετμημένη $x=1$ τέμνει τον άξονα των x στο σημείο B . Το σημείο $\Gamma(7, \kappa)$ βρίσκεται στο τέταρτο τεταρτημόριο και το εμβαδό του τριγώνου $OB\Gamma$ είναι ίσο με 16 τετραγωνικές μονάδες (O είναι η αρχή των αξόνων).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης στο A είναι $x + 5y = 16$.

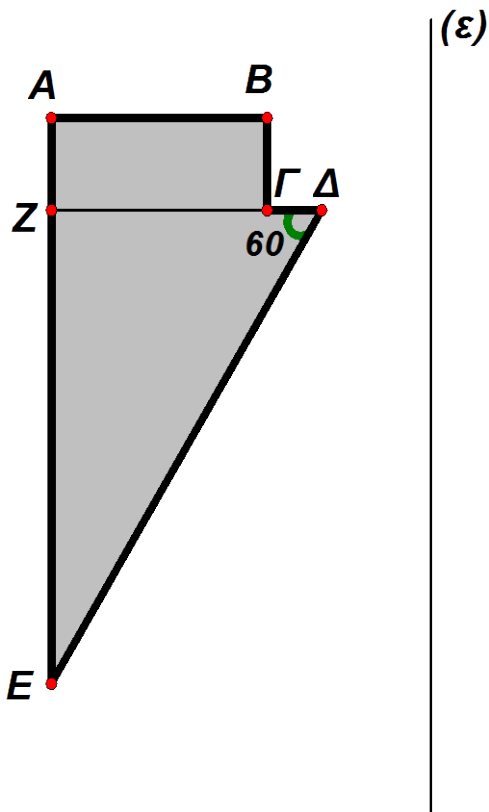
β) Να υπολογίσετε την τεταγμένη του σημείου Γ .

ΜΕΡΟΣ Β'

Από τα 6 θέματα να λύσετε μόνο τα 4 .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 2 μονάδες.

- 1) Αριθμητική πρόοδος και φθίνουσα Γεωμετρική πρόοδος έχουν τον πρώτο τους όρο ίσο με 2. Ο τρίτος όρος της Α.Π είναι ίσος με τρίτο όρο Γ.Π. Ο δεύτερος όρος της ΑΠ είναι μεγαλύτερος από το δεύτερο όρο της ΓΠ κατά $\frac{1}{4}$. Να υπολογίσετε:
- α) τον πέμπτο όρο της Α.Π.
β) το άθροισμα των απείρων όρων της Γ.Π.
- 2) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η ευθεία (ε) // ΑΕ, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΖ με ΑΒ=4 cm, ΒΓ = $\sqrt{3}$ cm και το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ με $\hat{Z} = 90^\circ$, $\hat{Z}\hat{\Delta}E = 60^\circ$, ΔΓ=1 cm. Η απόσταση του Ε από την ευθεία (ε) είναι ίση με 7 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδό και τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το σκιασμένο χωρίο ΑΒΓΔΕ περιστραφεί γύρω από την ευθεία (ε).



- 3) Δίνεται η εξίσωση $\log_2(4^x - e^{\ln 4}) = x + \log_2(2^{x-1} + 1)$,
- α) Να λυθεί η πιο πάνω εξίσωση.
β) Εάν η λύση της πιο πάνω εξίσωσης είναι $x=2$, να προσδιορίσετε πολυώνυμο $f(x)$ δευτέρου βαθμού το οποίο έχει ρίζα τη λύση της πιο πάνω εξίσωσης και ισχύει $f'(x) + f'(x+1) \equiv 8x$.

- 4) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $B(3, -2)$. Η πλευρά του AB έχει εξίσωση $x + 3y = -3$, το μέσο της πλευράς του $B\Gamma$ είναι το σημείο $K(4, -4)$:
- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών A και Γ ,
 - β) Εάν $A(6, -3)$ και $\Gamma(5, -6)$, να υπολογίσετε:
 - i. τη γωνία B .
 - ii. το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - γ) Εάν $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο:
 - i. να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ ,
 - ii. να δείξετε ότι το $AB\Delta\Gamma$ είναι τετράγωνο.

- 5) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 8 - x^2$, $g(x) = \frac{1}{2} \ln(x+1)$,
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $h(x) = (g \circ f)(x)$
 - β) Εάν $h(x) = \ln \sqrt{9 - x^2}$,
 - i. να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $h(x)$ στο σημείο της A με τετμημένη 2 είναι η $2x + 5y = \ln(e^4 \sqrt{5^5})$.
 - ii. να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $\frac{x \cdot h'(x)}{e^{2 \cdot h(x)}} - \frac{9}{[f(x) + 1]^2} = h''(x)$

- 6) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2\eta\mu x$ και $g(x) = \sqrt{2}\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 3$ όπου $x \in \mathbb{R}$.
- α) Να αποδείξετε ότι $f = g$.
 - β) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2} \cdot [3 + g(x)] \cdot \eta\mu\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu 4x$
 - γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2} \cdot [3 + g(x)] \cdot \eta\mu\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = -2\sigma\upsilon\nu^2 2x$.

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Πέτρος Μιχαήλ (Σ.Β.Δ.)
Γεωργία Φιλίππου

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Μαρία Χατζηγιάννη

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά ΚατεύθυνσηςΤΑΞΗ : Β΄ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 9 /6/2009ΧΡΟΝΟΣ : 2.30΄**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- α) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις σελίδες.
 β) Να γράψετε μόνο με μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
 γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
 δ) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που να φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.

ΜΕΡΟΣ Α΄:

- Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.
 ➤ Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 1 μονάδα.

1. Σε αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι 7 και ο ένατος όρος της είναι -17 . Να σχηματίσετε την αριθμητική πρόοδο.

2. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{d\psi}{dx}$ των συναρτήσεων:

$$\alpha) \psi = e^{2x} - \sin x \quad \beta) \psi = \frac{x^3}{2x-5}$$

3. Να λύσετε την εξίσωση: $2 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x + 3 = 0$.

4. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}$.

5. Η κυρτή επιφάνεια κώνου είναι $60\pi \text{ cm}^2$ και ισχύει η σχέση $3\lambda - 5R = 0$. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου.

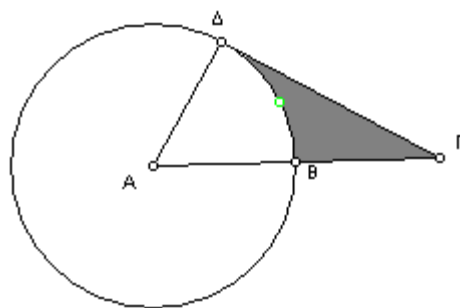
6. Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης: $2\eta\mu 3x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 2}{5 - x^2} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 5}{x - 2}$$

8. Να δείξετε την ταυτότητα: $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 4a - 2\sigma\upsilon\nu 2a}{\eta\mu a \cdot \sigma\upsilon\nu^2 a - \eta\mu^3 a} = -4\eta\mu a$.

9. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (A, α) , η $\Gamma\Delta$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Δ με $\Gamma\Delta = \alpha\sqrt{3}$ cm. Να βρείτε συναρτήσει του α το εμβαδόν του μεικτογράμμου τριγώνου $B\Gamma\Delta$.



10. Δίνονται τα σημεία $A(2, -3)$, $B(4, 1)$ και $\Gamma(0, -2)$. Να βρείτε:
 α) Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB .
 β) Την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες AB και ΓM όπου M το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB .
11. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει περίμετρο βάσης $8\sqrt{3}$ cm. Το παράπλευρο ύψος της σχηματίζει με το επίπεδο της βάσης γωνία 30° . Να βρείτε:
 α) Τον όγκο της πυραμίδας.
 β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.
12. Σε φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο με $\lambda < 0$, το άθροισμα των δύο πρώτων όρων της είναι 6 και το άθροισμα των απείρων όρων της είναι ίσο με $\frac{27}{4}$.
 α) Να σχηματίσετε την πρόοδο.
 β) Να βρείτε το άθροισμα των 6 πρώτων όρων της.
13. Να δείξετε, με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής, ότι ισχύει η πρόταση :
- $$2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + (n+1) \cdot 2^n = n \cdot 2^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
14. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \ln x$ και $g(x) = x^2 - x - 2$.
 α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών των πιο πάνω συναρτήσεων.
 β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις: $g \circ f$ και $\frac{f}{g}$.
15. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση: $\psi^2 + x^3 \cdot \psi + 2x + 2 = 0$.
 α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της $P(-1, \psi)$ με $\psi > 0$.
 β) Αν η εφαπτομένη και η κάθετη τέμνουν τον άξονα x στα σημεία A και B αντίστοιχα, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου APB .

ΜΕΡΟΣ Β΄:

- Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 2 μονάδες.

1. α) Να λύσετε την εξίσωση: $e^{\ln(\ln x)} - \log_x e = \ln\left(\frac{e^2}{x^2}\right)$.

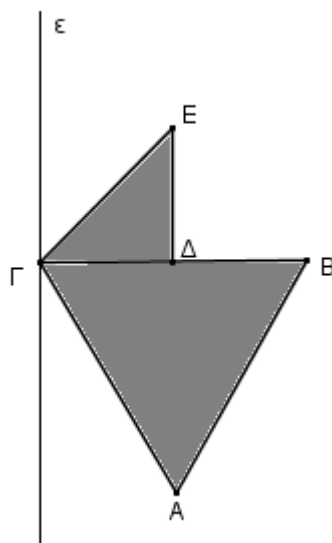
β) Να αποδείξετε ότι: $(\log_2 3) \cdot (\log_3 4) \cdot (\log_4 5) \dots (\log_{31} 32) = 5$.

2. Δίνεται η καμπύλη : $f(x) = \eta\mu(\ln x)$.

α) Να δείξετε ότι : $x^2 \cdot f''(x) + x f'(x) + f(x) = 0$.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu ax}{x} + \frac{2ax^2 + 3x}{x} \right) = f'(1)$ να βρείτε το a .

3. Το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο με πλευρά 4α, το Δ είναι μέσο της ΒΓ και το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του ΑΒΔΕΓ γύρω από την ευθεία $\varepsilon \perp \text{ΒΓ}$.



4. α) Να δείξετε ότι $\sigma\varphi 2x + \varepsilon\varphi x = \sigma\tau\epsilon\mu 2x$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $3(\sigma\varphi 2x + \varepsilon\varphi x)^2 = 4$.

- β) Να δείξετε την ταυτότητα $1 - \varepsilon\varphi^2 x = \frac{2\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi 2x}$. Με την βοήθεια της ταυτότητας αυτής ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να δείξετε ότι : $(1 - \varepsilon\varphi^2 20^\circ)(1 - \varepsilon\varphi^2 40^\circ)(1 - \varepsilon\varphi^2 80^\circ) = -8$

5. α) Σε αριθμητική πρόοδο $a_1, a_2, a_3 \dots$ να αποδείξετε ότι: $a_{\kappa+1} + a_{\nu-\kappa} = a_1 + a_\nu$.

β) Αν $\log_\psi x, x^{\frac{\psi}{x^2}}, \log_\beta \psi$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου να δείξετε ότι :

$$\psi = \log_x(\log_\beta x)$$

6. α) Δίνεται κύκλος με κέντρο $K(4, 0)$. Αν τα σημεία $A(0, 3)$ και $\Gamma(\alpha, 2\alpha)$ είναι σημεία του κύκλου, να βρείτε:

ι) Την εξίσωση της διαμέτρου AB .

ii) Την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο B .

iii) Την τιμή του α ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ να είναι 23 τετραγωνικές μονάδες.

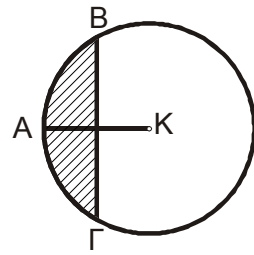
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την τομή των ευθειών $x - 3\psi + 1 = 0$, $2x + 5\psi - 9 = 0$ και η απόσταση της αρχή O των αξόνων από αυτήν είναι 2 μονάδες.

Η Διευθύντρια

Μαρία Λοίζου

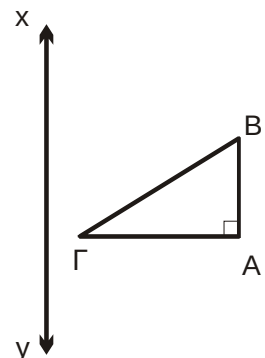
ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ώρες

9. Δίνονται τα σημεία $A(4,5)$ και $B(2,-1)$. Η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος AB τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο Γ . Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$.
10. Να λύσετε την εξίσωση: $9(1 + 2 \cdot 3^{2x-2}) = 3^{x+2}$.
11. Δίνεται ο κύκλος (K,R) και χορδή $B\Gamma$ η οποία είναι κάθετη στο μέσον της ακτίνας KA . Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος $BA\Gamma$ συναρτήσει του R .
(Το σχήμα της άσκησης να μεταφερθεί στο γραπτό.)
12. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κώνου ισούται με $60\pi\text{cm}^2$ και ισχύει η σχέση $3\lambda = 5R$. Να υπολογίσετε τον όγκο κυλίνδρου που έχει την ίδια ακτίνα και το ίδιο ύψος με τον κώνο.
13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{x+1} - e^{x+1}$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο x_0 όπου $f''(x_0) = 0$ και να δείξετε ότι αυτή είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $x - y = 0$.
14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^2}$ και η συνάρτηση $g(x) = x + 1$, $x > 0$. Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της $f \circ g$.
15. Ο πρώτος όρος αριθμητικής προόδου είναι $\ln \alpha$ και η διαφορά της $\ln \beta$.
- Να δείξετε ότι $\sum_v = \frac{v}{2} \cdot \ln(\alpha^2 \beta^{v-1})$.
 - Αν $\beta = 1$ και $\alpha = 2$ να βρείτε το άθροισμα $e^{\sum_1} + e^{\sum_2} + \dots + e^{\sum_v}$.



ΜΕΡΟΣ Β': Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Έστω α το άθροισμα των απείρων όρων της ακολουθίας $4, -\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \dots$ και β η ακέραια ρίζα της εξίσωσης $2\ln(6x) - 3\ln 3 = \ln(x + 9)$.
Αν το πολυώνυμο $\Pi(x) \equiv 2x^3 - 3x^2 + \gamma x + \delta$, ($\gamma, \delta \in \mathbb{R}$) έχει ρίζα τον αριθμό α και $\Pi'(\beta) = 25$, να υπολογίσετε τις τιμές των α, β, γ και δ .
2. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = 3\text{cm}$ και $B\Gamma = 5\text{cm}$. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα xy που είναι παράλληλος προς την AB και απέχει 6cm από αυτήν. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.
(Το σχήμα της άσκησης να μεταφερθεί στο γραπτό.)



3. Τριγώνου ABΓ δίνονται οι κορυφές A(0,1), B(4,-2) καθώς και η εξίσωση της πλευράς BG : $5x - y - 22 = 0$
- Αν η απόσταση της κορυφής Γ από την πλευρά AB είναι $\frac{23}{5}$ να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ με τεταγμένη $y > 0$.
Αν η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες Γ (5,3)
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΜ, όπου Μ το μέσο της πλευράς AB.
 - Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ ώστε το ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο.
4. (α) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 4x + 5$ και $g(x) = x^2 + 2x - 4$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο σημείο της A(3,2).
 - Αν η ευθεία (ε) εφάπτεται και της γραφικής παράστασης της $g(x)$ στο σημείο Β να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β.
- (β) Αν $y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Να δείξετε ότι $y' = \frac{2}{\cos x}$
 - Να λύσετε την εξίσωση $2y' \sin x - y' = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$
5. i. Να αποδείξετε ότι: $\left(\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha} \right)^2 = \frac{1}{1-\sin 2\alpha}$.
- Με τη βοήθεια του πιο πάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να αποδείξετε ότι:
- Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \frac{1+\sin \frac{\Gamma}{4}}{1-\sin \frac{\Gamma}{4}}$ τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
6. Θεωρούμε την Α.Π. (α_n) που ορίζεται ως εξής: $\alpha_1 = \log \frac{4}{9}$ και $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \log \frac{2}{3}$ με $n \geq 1$.
- Να δείξετε ότι $\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{4}{3}$.
 - Να δείξετε ότι η ακολουθία με γενικό όρο $\beta_n = 10^{\alpha_n}$ είναι Γ.Π. με λόγο $\lambda = \frac{2}{3}$.
 - Αν $\left(\frac{3}{2} \right)^{n-9} = \beta_n$ να βρείτε την τιμή του n .

Η Διευθύντρια

Γεωργία Κούμα

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΤΑΞΗ: Β΄

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 01/06/2009 - Α΄ Σειρά

ΧΡΟΝΟΣ: 2:30 ώρες

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
1. Να γράψετε με μελάνι μπλε ή μαύρο.
 2. Τα σχήματα με γεωμετρικά όργανα. Επιτρέπεται να είναι με μολύβι.
 3. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
 5. Δίνεται τυπολόγιο.
-

ΜΕΡΟΣ Α΄ : Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ 12. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων την παράσταση $K = \frac{\chi + 8}{(\chi + 2)(\chi - 1)}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $\Psi = \frac{3\chi + 5}{\chi - 3}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, β) το πεδίο τιμών της και γ) το $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \Psi$.

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{\chi \rightarrow 3} \frac{\chi^2 - 9}{\chi - 3}$ β) $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5\chi \cdot \sigma\upsilon\nu 3\chi}{\chi}$

4. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $\Psi = e^{2\chi} - 3\chi^5 + \ln(\chi + 1)$ β) $\Psi = \epsilon\phi(2\chi - 3) + \sigma\upsilon\nu^2 \chi$.

5. Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 2\chi - 5\eta\mu\chi + 2 = 0$.

6. Να λύσετε την εξίσωση $2\log\sqrt{\chi} + \log(\chi + 3) = 1$.

7. Να αποδείξετε την ταυτότητα $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \sigma\phi\frac{\alpha}{2}$.

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με Α(-1, 4), Β(2, 3) και Γ(-2, 5). Να βρείτε:

α) την εξίσωση της διαμέσου ΒΜ, β) την απόσταση της κορυφής Α από τη διάμεσο ΒΜ.

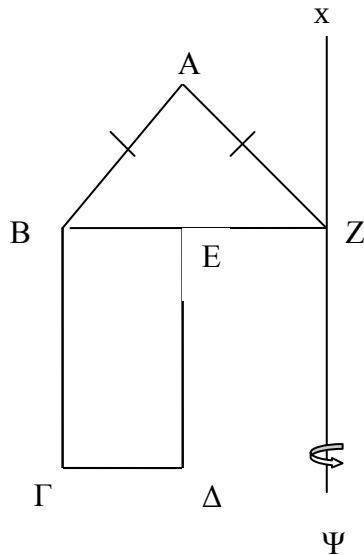
9. Ένας κυλινδρικός σωλήνας με ύψος 30 cm και διάμετρο βάσης 2 cm περιέχει υγρό μέχρι το μέσο του. Αν αδειάσουμε το περιεχόμενο του σωλήνα σε δοχείο σχήματος κώνου με ακτίνα βάσης 3 cm , το δοχείο θα γεμίσει. Να υπολογίσετε το ύψος του κωνικού δοχείου.
10. Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της $\Psi = \chi^2 + 4\chi - 5$, όπου $\chi > -2$.
Αν ορίζεται, να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.
11. Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι 432 cm^2 . Αν οι παράπλευρες έδρες σχηματίζουν γωνία 60° με τη βάση, να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.
12. Να δείξετε ότι $\frac{2}{7} + \frac{4}{7^2} + \frac{2}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \frac{2}{7^5} + \frac{4}{7^6} + \dots = \frac{3}{8}$
13. Δίνεται η καμπύλη: $\chi^2 + \psi^2 - 4\chi + 3\psi = 3$
- α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{d\psi}{d\chi} = \frac{4-2\chi}{2\psi+3}$
- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης
 $\chi^2 + \psi^2 - 4\chi + 3\psi = 3$ στο σημείο της με $\chi = -1$ και $\psi > -2$
14. Αν $f(\chi) = \frac{\eta\mu 2\chi}{4} - \sigma\upsilon\nu\chi - 3\chi$ και $0^\circ \leq \chi \leq 180^\circ$ να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες $f''(\chi) = 0$.
15. Να λύσετε την εξίσωση $\log \chi + \log \chi^3 + \log \chi^5 + \dots + \log \chi^{17} = 162$.

ΜΕΡΟΣ Β΄ : Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ 4. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1. (α) Αν $\Psi = \eta\mu(e^\chi - 1)$ να δείξετε ότι $\frac{d^2\Psi}{d\chi^2} - \frac{d\Psi}{d\chi} + \Psi \cdot e^{2\chi} = 0$. (Μον. 5)

(β) Η καμπύλη $\Psi = \alpha \cdot \ln \chi + \beta \chi$ περνά από το σημείο $A(1, 2)$. Αν η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο A είναι 5, να βρείτε τα α και β . (Μον. 5)

2. Στο πιο κάτω σχήμα το ABZ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο με $AB=AZ=a\sqrt{2}$ cm και η πλευρά AZ σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα περιστροφής XΨ. Το BΓΔΕ είναι ορθογώνιο με $BΓ=2BE$, το E είναι το μέσο της BZ και $BZ \perp X\Psi$. Να βρείτε το Εμβαδόν ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται με την πλήρη περιστροφή του σχήματος ABΓΔΕΖ γύρω από τον άξονα XΨ.



3. Δίνεται ρόμβος ABΓΔ. Η εξίσωση της πλευράς AB είναι η $\alpha x + \beta y - 38 = 0$ και η εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ είναι η $5\alpha x + \beta y - 50 = 0$.
- α) Αν η κορυφή Α του ρόμβου είναι η $A(3, 7)$ να βρεθούν οι τιμές των α και β . (Μον. 4)
- β) Αν το σημείο $(4, 2)$ είναι μια άλλη κορυφή του ρόμβου να βρείτε τις άλλες συντεταγμένες των κορυφών του ρόμβου. (Μον. 6)

4. α) Σε μια Αριθμητική πρόοδο ισχύει: $a_1 = \log 2$ και $a_2 = \log 8$.

Να δείξετε ότι: $\sum v = v^2 \cdot \log 2$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\log\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \dots + \log\left(1 - \frac{1}{v}\right) = -\log v$$

5. Δίνονται τα αθροίσματα με άπειρους όρους:

$$\Sigma_1 = 1 + \alpha^v + \alpha^{2v} + \alpha^{3v} \dots$$

$$\Sigma_2 = 1 + \alpha^{2v} + \alpha^{4v} + \alpha^{6v} \dots$$

$$\Sigma_3 = 1 - \alpha^v + \alpha^{2v} - \alpha^{3v} \dots \quad \text{όπου } -1 < \alpha < 1, \alpha \neq 0 \text{ και } v \in \mathbb{N}.$$

- α) Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α τα $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$. (Μον. 4)
- β) Να δείξετε ότι οι όροι $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (Μον. 3)
- γ) Να δείξετε ότι οι όροι $(\Sigma_1)^2, \Sigma_2, (\Sigma_3)^2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μον. 3)

6. α) i) Να γράψετε τον ορισμό της παραγώγου της συνάρτησης $\Psi = f(x)$. (Μον. 1)

ii) Αν $f(x) = \sqrt{x}$ με βάση τον ορισμό της παραγώγου να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. (Μον. 4)

β) Αν για τη συνάρτηση $g(x)$ ισχύει η σχέση $g(a + b) = g(a) + g(b) + 2\eta\mu a \cdot \eta\mu b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 3$ να βρείτε, με βάση τον ορισμό της παραγώγου, την παράγωγο της συνάρτησης $g(x)$ στο πεδίο ορισμού της. (Μον. 5)

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

.....
Ιωακείμ Μάριος

Ο ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ

.....
Χριστοδούλου Φειδίας Β.Δ

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

.....
Δημητριάδης Αλέξανδρος

.....
Νεοκλέους Ελένη

ΛΥΚΕΙΟ ΚΟΚΚΙΝΟΧΩΡΙΩΝ ΦΩΤΗ ΠΙΤΤΑ
ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2008/2009

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ / ΙΟΥΝΙΟΥ 2009	
ΤΑΞΗ: Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 25/5/2009
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)	ΧΡΟΝΟΣ: 2, 5 ΩΡΕΣ

Οδηγίες:

- 1) Να γράφετε μόνο με μελάνι (μαύρο ή μπλε)
- 2) Απαγορεύετε η χρήση διορθωτικού υγρού
- 3) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- 4) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 6 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α

Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε **ΜΟΝΟ** τις 12.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 1 μονάδα.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{x+9}{(x-3) \cdot (x+1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
2. Σε μια Γεωμετρική Πρόοδο ο πέμπτος όρος ισούται με 162 και ο πρώτος όρος με 2. Να βρεθεί ο τέταρτος όρος.
3. Να λυθεί η λογαριθμική εξίσωση: $\log x + \log(x-3) = 1$
4. α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:
$$f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x}{x+2}$$

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

5. α) Ναδειχθεί ότι:

$$\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

β) Ναλυθεί η εξίσωση

$$\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -\frac{1}{2}$$

6. Ναβρεθεί η παράγωγος των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $y = \frac{x^3 + 5}{x - 2}$

β) $y = x^2 \cdot \ln(1 + x^2)$

7. Ναβρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη της ευθείας $2y + x = 8$ (ε) και περνά από το μέσο του ΑΒ όπου Α(2,5) και Β(-4,7).

8. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = e^x$ στο σημείο της με $y=3$ είναι η: $3x - y + 3 - \ln 27 = 0$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x\alpha + \beta, & x > 2 \\ 2x^2 + \alpha x + 2\beta, & x \leq 2 \end{cases}$

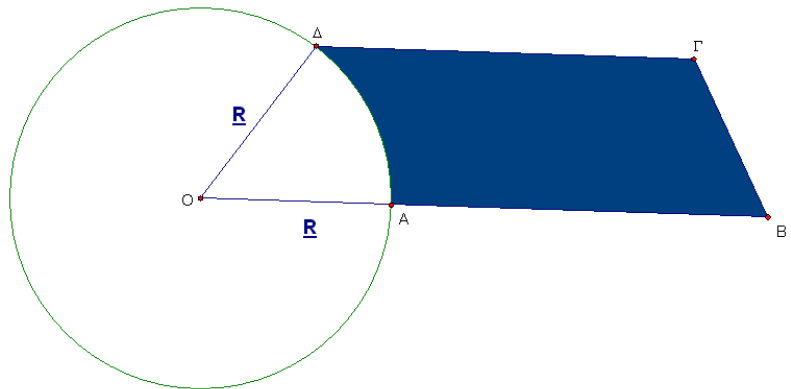
Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\beta = 0$

β) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 12$

10. Δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο πλευράς $a=2\text{m}$ και ύψος 10m περιέχει νερό μέχρι ενός ύψους. Για να γεμίσει τελείως η δεξαμενή χρειάζεται επιπλέον νερό. Γι' αυτό πρέπει να προστεθεί νερό με κουβά σχήματος κολουρου κώνου με μεγάλη ακτίνα βάσης $0,6\text{m}$, μικρή ακτίνα βάση $0,3\text{m}$ και ύψος 1m . Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται 20 φορές. Να βρεθεί το ύψος του νερού που υπήρχε μέσα.

11. Αν σε μια Αριθμητική Πρόοδο ισχύει η σχέση: το πηλίκο του αθροίσματος των έξι πρώτων όρων προς το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων ισούται με $\frac{7}{5}$. Ναδειχθεί ότι το πηλίκο του δεκάτου πέμπτου όρου, προς τον εικοστό τρίτον όρο είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.
12. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ως βάση τετράγωνο, με διαγώνιο $6\sqrt{2}cm$. Αν η παράπλευρη ακμή της πυραμίδας είναι ίση με τη διαγώνιο του τετραγώνου, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας.
13. Να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί:
 $4\ln(2\epsilon\phi x), \ln[2(1-\sigma\upsilon\nu 2x)], 4\ln \sigma\upsilon\nu x$ όπου $0 < x < \frac{\pi}{4}$, αποτελούν διαδοχικούς όρους Αριθμητικής Προόδου.
14. Ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 150^\circ$ και $AB = A\Gamma = a$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα AB . Αν ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι $18\pi cm^3$ να υπολογίσετε το a .
15. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) και $\hat{\Delta O A} = 60^\circ$
 $\Delta\Gamma = \lambda_4, AB = \lambda_3,$
 $\Delta\Gamma // AB$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου. (λ_n πλευρά κανονικού n -γώνου)



ΜΕΡΟΣ Β

Από τις 6 ασκήσεις να **λύσετε ΜΟΝΟ τις 4**.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 2 μονάδες.

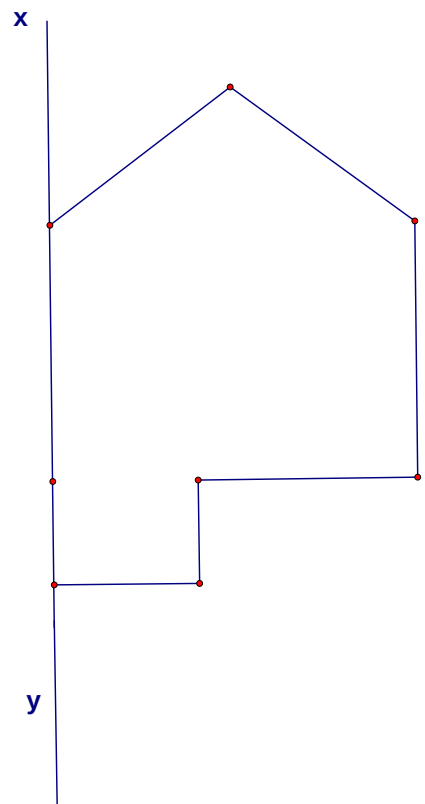
1. α) Αν $y \cdot x = e^x$ ναδειχθεί ότι: $x \cdot y'' + 2y' = xy$

β) Ναλυθεί η εξίσωση: $5\left(\frac{3}{7}\right)^{1-2x} - 25^x = 0$

2. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓ είναι ισοσκελές τρίγωνο ΑΒ=ΒΓ=13cm και ΑΓ=24cm, το ΑΓΔΥ ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με ΓΔ=8cm και το ΥΕΖΗ ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με ΕΖ=2cm και ΗΖ=3cm. Το σχήμα ΑΒΓΔΕΖΗ περιστρέφεται ολόκληρη στροφή γύρω από τον άξονα χγ.

Να υπολογίσετε:

- α) το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που παράγεται και
β) τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται.



3. α) Δίδεται η συνάρτηση $y = x^2 + 5x + 6$, $x \geq -\frac{5}{2}$ να αποδείξετε ότι

ορίζεται η αντίστροφη της

β) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης, εάν υπάρχει.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

δ) Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \sqrt{x-3}$ και $g(x) = x^2 - 1$ να βρεθεί η σύνθεση $f \circ g$ και το πεδίο ορισμού της.

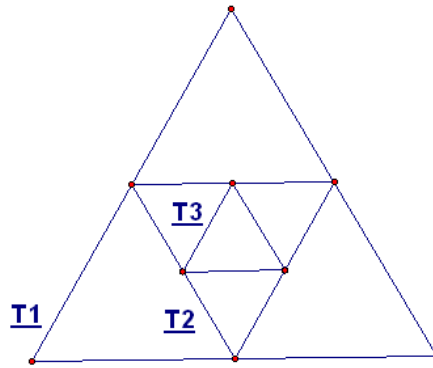
4. Στο διπλανό σχήμα υπάρχουν τρία ισόπλευρα τρίγωνα. Το τρίγωνο T_1 έχει πλευρά μήκους α , το T_2

έχει πλευρά μήκους $\frac{\alpha}{2}$ και το

T_3 έχει πλευρά μήκους

$\frac{\alpha}{4}$ αντίστοιχα. Συνεχίζουμε να

κατασκευάζουμε τρίγωνα τέτοια ώστε το μήκος της πλευράς του επόμενου τριγώνου να είναι κάθε φορά ίσο με το μισό του προηγούμενου.



α) Να βρείτε την περίμετρο του τριγώνου T_5

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των περιμέτρων των 8 πρώτων τριγώνων.

γ) Αν με $E_1, E_2, E_3, \dots$ συμβολίζουμε τα αντίστοιχα εμβαδά των τριγώνων, τότε να βρείτε αν αυτά αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικούς προόδου.

δ) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών του απείρου πλήθους των τριγώνων που σχηματίζονται με τον τρόπο αυτό.

5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $B(15, 5)$ και $\Gamma(3, -1)$.

Η εξίσωση του ύψους AD είναι $y+2x=1$ και η εξίσωση του ύψους BE είναι $x-3y=0$.

Να βρείτε:

α) την εξίσωση της ευθείας $A\Gamma$

β) τις συντεταγμένες της κορυφής A

γ) την εξίσωση του ύψους ΓZ

δ) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

6. Αν $\hat{A}, \hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι γωνίες ενός τριγώνου $AB\Gamma$ και ισχύουν συγχρόνως:

α) $2\log\left(\eta\mu\frac{A}{2}\right) + \log 2 = 0$

β) η παράγωγος της συνάρτησης:

$$f(x) = x^3 + (\eta\mu B)x^2 - (2\eta\mu\Gamma)x + \left(2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}\right)\ln x \text{ στο } x=1$$

ισούται με 4.

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Ιάκωβος Ιακωβίδης (Συντονιστής Β.Δ)
Αδάμος Αδάμου
Αντρέας Τσαγκάρης
Καλλισθένη Φωτιάδου Καραβιώτου

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ:

Μιχάλης Παπαζαχαρίου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΤΑΞΗ Β΄

Ημερομηνία: 01/06/2009

Χρόνος: 2.30΄

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 3 σελίδες.

- ΟΔΗΓΙΕΣ:** α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
β) Να γράφετε μόνο με μελάνι (μόνο τα σχήματα με μολύβι).
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α΄

Από τα δεκαπέντε (15) θέματα να λύσετε μόνο τα δώδεκα (12). Κάθε θέμα βαθμολογείται με μία (1) μονάδα.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{x+3}{x(x-3)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Να δείξετε ότι : $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = 1$

3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 3x - 4}{x^2 - 5x + 7}$

4. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των συναρτήσεων:

α) $y = x + \varepsilon\phi x$

β) $y = x \ln 2x$

5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x-1}{3x+2}$

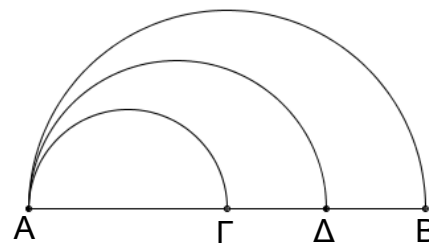
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$.

β) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f^{-1}(x)$.

6. Να δείξετε ότι : $\frac{2\eta\mu 6\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 2\alpha - \eta\mu 8\alpha}{2\sigma\upsilon\nu 7\alpha \sigma\upsilon\nu 5\alpha - \sigma\upsilon\nu 12\alpha} = 4\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha$

7. Να λύσετε την εξίσωση : $\log_4(x-3) + \log_4 x = 1$

8. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $f(x) = \frac{x-3}{x^2+1}$ στο σημείο με τετμημένη $x=1$.
9. Να υπολογίσετε τον όγκο κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, αν η περίμετρος της βάσης είναι ίση με 96cm και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι ίσο με 624cm^2 .
10. Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές τα σημεία $A(1, -2)$ και $\Gamma(2, 1)$.
- α) Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου $B\Delta$.
- β) Να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής A από τη διαγώνιο $B\Delta$.
11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+7}$ και $g(x) = \sqrt{1-x}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$ και $\frac{f}{g}$.
12. Σε αριθμητική πρόοδο το άθροισμα του δευτέρου και του τρίτου όρου της είναι ίσο με 5. Αν το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων της είναι ίσο με 115, να βρείτε:
- α) Την πρόοδο.
- β) Το n , αν ισχύει $\Sigma_n = 33$.
13. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και $B\Gamma = 2\alpha$. Ευθεία $\chi\psi$ που ανήκει στο επίπεδο του τριγώνου, περνά από το Γ και είναι κάθετη στην AG . Το τρίγωνο κάνει πλήρη στροφή γύρω από τη $\chi\psi$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που παράγεται.
14. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους: $f(x) = x^2 - 2$ και $g(x) = \sqrt{x-1}$
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- β) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g \circ f$.
15. Στο διπλανό σχήμα το Γ είναι το μέσο της AB , το Δ είναι το μέσο της ΓB και $AB = 4\alpha$. Αν E_1, E_2, E_3 τα εμβαδά των ημικυκλίων με διαμέτρους τις $A\Gamma, A\Delta$ και AB αντίστοιχα να δείξετε ότι $4E_2 - 2E_3 = E_1$



ΜΕΡΟΣ Β΄

Από τα έξι (6) θέματα να λύσετε μόνο τα τέσσερα (4). Κάθε θέμα βαθμολογείται με δύο (2) μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση : $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$.

2. α) Σε γεωμετρική πρόοδος $\Sigma_6 = 9\Sigma_3$. Να υπολογίσετε το λόγο λ της προόδου.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}\right) = 2\ln 2$.

3. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Δίνονται η κορυφή $A(-1, 3)$, το σημείο τομής των διαγωνίων του $M(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και η εξίσωση της πλευράς $\Delta\Delta: 2x + 3y - 7 = 0$. Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της διαγωνίου $B\Delta$.

β) Τις συντεταγμένες των κορυφών Γ , Δ και B .

4. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu 2x - 1}{\sigma\upsilon\nu 2x - \eta\mu 2x + 1}$

α) Να δείξετε ότι: $A = \varepsilon\phi x$

β) Να λύσετε την εξίσωση : $(\eta\mu 4x + \eta\mu 2x) \cdot A - \eta\mu 6x = 0$.

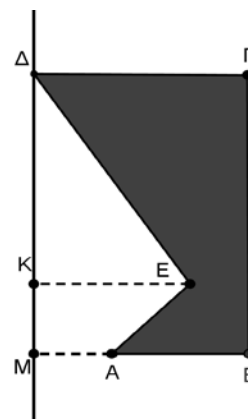
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

β) $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$

6. Στο διπλανό σχήμα, αν το χωρίο $AB\Gamma\Delta E$ κάνει πλήρη στροφή γύρω από την ΔM , να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται. Δίνονται:

$\hat{K\Delta E} = 30^\circ$, $KE \perp \Delta M$, $AM \perp \Delta M$, $\Delta E = 8m$, $AM = 2m$, $\Delta\Gamma = 6m$, $B\Gamma = 6\sqrt{3}m$.



Ο Διευθυντής

Λουκάς Ορφανίδης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2009**ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)****ΤΑΞΗ : Β΄**

Ημερομηνία : 26 / 05 / 2009

Χρόνος : 2,5 ώρες

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Να γράψετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α΄

- Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{x+5}{(x+1)(x-3)}$.

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{x^2+2x-1}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 7x - \eta\mu 2x}{x}$

3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{5x}{4-x}$. Να βρείτε:

(α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της

(β) τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}

4. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των συναρτήσεων:

(α) $y = 3x^2 - 2\sqrt{x} + \frac{5}{x^3} + 4e$ (β) $y = \frac{3x^2-2}{2x+3}$

5. Το άθροισμα του τρίτου και του δέκατου όρου αριθμητικής προόδου είναι ίσο με 28. Αν ο έβδομος όρος της ισούται με 15, να βρεθεί το άθροισμα των είκοσι πρώτων όρων της.

6. Δίνεται κώνος με εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $15\pi \text{ cm}^2$ και ακτίνα 3 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο του.

7. Σε τρίγωνο ABΓ με $\widehat{B} = 30^\circ$ και $\alpha = 2\beta$, να υπολογίσετε τις γωνίες του και να δείξετε ότι $2E = \beta^2\sqrt{3}$.
8. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης 144 cm^2 και παράπλευρο ύψος 10 cm . Να βρείτε την ολική επιφάνεια και τον όγκο της.
9. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \cdot \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2\sigma\upsilon\nu^2 \alpha} = \epsilon\phi^3 \alpha$.
10. Να βρείτε την απόσταση του σημείου τομής των ευθειών $3x - y = 1$ και $x + y = 3$ από την ευθεία $4x + 3y = 2$.
11. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$) με $AB = AG = \alpha \text{ cm}$. Με κέντρο το B και ακτίνα ίση με α γράφουμε τόξο μέσα στο τρίγωνο το οποίο τέμνει τη BΓ στο σημείο Δ. Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο του μεικτόγραμμου τριγώνου AΓΔ, συναρτήσει του α .
12. Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση: $\eta\mu 2A + \eta\mu 2B = \frac{\gamma}{R}$, να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.
13. (α) Να λύσετε την εξίσωση: $\log_2 x - \log_x 8 + 2 = 0$.
 (β) Να βρείτε το άθροισμα: $2 + \log_2 2 + \log_4 2 + \log_{16} 2 + \dots$
14. Αν $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{x}{x-3}$, να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $\frac{g}{f}$ και $g \circ f$.
15. (α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2$.
 (β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{1}{\eta\mu 15^\circ} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 15^\circ}$.
 (Χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής).

ΜΕΡΟΣ Β΄

- Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφή $B(4, 1)$, εξίσωση του ύψους AD : $x + 2y = 6$ και εξίσωση της διαμέσου AM : $3x - y = 4$. Να βρείτε:
 - (α) την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$
 - (β) τις συντεταγμένες των κορυφών A και Γ
 - (γ) το μήκος του ύψους AD
 - (δ) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
2. Αν η καμπύλη με εξίσωση $x^{2\mu} + 8xy - 12y = 4 \cdot 2^\mu$ περνά από το σημείο $A(2, 1)$, να δείξετε ότι $\mu = 1$. Στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο A .
3. Δίνεται η συνάρτηση $y = e^{\alpha x} \cdot \eta \mu x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - (α) Αν $\frac{dy}{dx} = 0$ για $x = \frac{\pi}{4}$, να δείξετε ότι $\alpha = -1$
 - (β) Για $y = e^{-x} \cdot \eta \mu x$
 - i. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της πιο πάνω καμπύλης στο σημείο της με $x = 0$.
 - ii. Να δείξετε ότι: $y'' + 2y' + 2y = 0$.
4. Αν $\log_6 4$, $\log_6 \sqrt{18^x + 3 \cdot 2^x}$, x είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να βρείτε το x .
5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ και $AB = 4$ cm. Κατασκευάζουμε έξω από το τρίγωνο $AB\Gamma$ ένα ισόπλευρο τρίγωνο ABE . Το τετράπλευρο $EB\Gamma A$ περιστρέφεται πλήρη στροφή με άξονα περιστροφής την $A\Gamma$. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.

6. Σε αριθμητική πρόοδο δίνονται $\alpha_3 = \ln(xy^2)$ και $\alpha_4 = \ln(xy^3)$.

i. Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά δ της προόδου και να δείξετε ότι το

$$\text{άθροισμα των } n \text{ πρώτων όρων της } \Sigma_n = \frac{n}{2} \cdot \ln(x^2 y^{n-1}).$$

ii. Αν $x = e$, $y = e$ και $\Sigma_n = 36$, να βρείτε το n .

Ο Διευθυντής

(Αντωνίου Σάββας)

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά
Χρόνος: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΤΑΞΗ: Β' Κατεύθυνση
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 25 Μαΐου 2009

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Επιτρέπεται η χρήση **ΜΗ** προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
- Να γράψετε μόνο με μελάνι ή μαύρο ή μπλε (τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΜΕΡΟΣ Α': Από τις 15 ασκήσεις να λυθούν **ΜΟΝΟ** οι 12.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{x+1}{(x-2)(x-1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
2. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων :
i. $\psi = 5x^2 - 6x + 2$ ii. $\psi = x \cdot \ln x$
3. Να βρεθεί ο $15^{\text{ος}}$ όρος της ακολουθίας 98, 94, 90, 86, 82, ...
4. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $2\sin 2x - \sqrt{3} = 0$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.
5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$.

Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της.

β) τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} .

6. Να λυθεί η εξίσωση $3^{x+1} + 3^{x-1} = 30$.
7. Να υπολογίσετε την τιμή των ορίων:

i. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$ ii. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+1}{6x-2}$

8. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται $\alpha = 8\text{cm}$, $\beta = 4\text{cm}$ και $\gamma = 4\sqrt{3}\text{cm}$ να βρείτε πόσες μοίρες είναι η μεγαλύτερη γωνιά του τριγώνου.

9. Να βρεθεί η απόσταση των ευθειών $\varepsilon_1 : 4x + 2y - 1 = 0$
 $\varepsilon_2 : 4x + 2y - 7 = 0$
10. Με βάση τον ορισμό της παραγώγου να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^3$.
11. Να βρεθεί το άθροισμα των τετραγήφων περιττών αριθμών.
12. Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 4\sigma\upsilon\nu 2\alpha$
13. Περιστρέφουμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ γύρω από την ΑΒ και προκύπτει στερεό με όγκο 18π . Αν όμως περιστρέψουμε το ορθογώνιο γύρω από την ΑΔ, το στερεό που προκύπτει έχει όγκο 12π . Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.
14. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ στο σημείο $A(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta, \beta\eta\mu\theta)$ είναι $\beta\sigma\upsilon\nu\theta \cdot x + \alpha\eta\mu\theta \cdot y = \alpha\beta$
15. Δίνεται κύβος ακμής 2cm . Με πριόνι αποκόπτουμε από κάθε κορυφή κομμάτια έτσι ώστε οι τομές να περνούν από τα μέσα των τριών άκμων που ορίζουν κάθε κορυφή. Να δείξετε ότι η ολική επιφάνεια του στερεού που θα απομείνει θα έχει εμβαδό $E = a^2(12 + 4\sqrt{3})\text{cm}^2$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Από τις 6 ασκήσεις να λυθούν **ΜΟΝΟ** οι 4.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. α) Το άθροισμα των απείρων όρων γεωμετρικής προόδου είναι 36 και το άθροισμα των τετραγώνων των απείρων όρων της είναι 432. Να βρείτε την πρόοδο.
 β) Να λυθεί η εξίσωση $\log_2 x - 2\log_x 2 = 1$.
2. α) Να αποδείξετε ότι: $\log\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \dots + \log\left(1 - \frac{1}{2009}\right) + \log 2009 = 0$
 β) Να λυθεί η εξίσωση $1 + \sigma\upsilon\nu x = 2\eta\mu^2 x$.

3. α) Αν $\eta\mu\psi = 2\eta\mu\chi$ να δείξετε ότι $\left(\frac{d\psi}{d\chi}\right)^2 = 1 + 3\epsilon\mu^2\psi$
- β) Η καμπύλη $y = \frac{a}{x} + \beta x^2$ περνά από το σημείο (1,5) και η κλίση της καμπύλης στο σημείο αυτό είναι 4. Να υπολογιστούν το a και β
4. Ρόμβος ΑΒΓΔ με ΑΓ=12cm και ΒΔ=16cm στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από ευθεία (ε) που περνά από το Γ και είναι κάθετη στην ΑΓ. Να υπολογίσετε το εμβαδό Ε και τον όγκο V του στερεού που παράγεται.
5. Να παραστήσετε γραφικά τις ευθείες $(\varepsilon_1): \psi = \chi$ και $(\varepsilon_2): \chi + \psi = 6$ που τέμνονται στο Α.
Η (ε_1) τέμνει τον άξονα ψ' στο Ο και η (ε_2) τέμνει τον άξονα χ' στο Β.
- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Ο, Β και Α.
- β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
- γ) Να βρείτε:
- Την εξίσωση του ύψους ΑΔ του τριγώνου ΟΑΒ.
 - Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.
6. Αν $\eta\mu\left(\frac{x+y}{2}\right) = a$, $a \neq 0$ $\eta\mu x + \eta\mu y =$ να υπολογισθούν συναρτήσει του a :
- $\sigma\upsilon\nu(x+y)$
 - $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-y}{2}\right)$,
 - $\sigma\upsilon\nu(x-y)$

Οι Εισηγητές

Π. Ζαμπυρίνης
Α. Μπάρος
Γ. Παναγή
Γ. Χρ. Παπαλλάς

Ο Συντονιστής Β.Δ.Α.

Π. Ζαμπυρίνης

Ο Διευθυντής

Χ. Χαραλάμπους

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2009

Μάθημα : Μαθηματικά κατ.
 Τάξη: Β' Ενιαίου Λυκείου
 Ημερομηνία: 25 / 5 / 2009
 Διάρκεια: 2.30'

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Επιτρέπεται η χρήση μόνο μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής
2. Να γράφετε με μελάνι (με μολύβι μόνο τα σχήματα)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΜΕΡΟΣ Α'

Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 12. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες

A1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 16}$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x}$

A2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $y = 3x^4 - 6x + 5$

β) $y = \frac{e^{2x}}{x^2 + 1}$

A3. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα $\frac{3x - 9}{(x + 2)(x - 1)}$

A4. Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου είναι $25\pi \text{ cm}^2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο κυκλικού τομέα του ιδίου κύκλου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 40°

A5. Να λύσετε την εξίσωση $2\log_x 5 + \log_5 x = 3$

A6. Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $3\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x^2 = 1$

A7. Να δείξετε ότι $\frac{\eta\mu^3 \alpha}{\sigma\upsilon\nu \alpha} + \frac{\sigma\phi \alpha}{1 + \sigma\phi^2 \alpha} = \epsilon\phi \alpha$

- A8.** Η περίμετρος της βάσης κώνου είναι 10π m και το εμβαδόν της κυρτής του επιφάνειας είναι 65π m². Να βρείτε τον όγκο του κώνου.
- A9.** Σε αριθμητική πρόοδο δίνονται ότι $\alpha_1 = \alpha$ και $\alpha_{2v+1} = \beta$. Να βρείτε το α_{v+1} συναρτήσει των α και β .
- A10.** Αν $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ και $\frac{3}{2} < \alpha < 2\pi$, με τη βοήθεια του τύπου $\sin(\alpha + \beta)$ να υπολογίσετε το $\sin 3\alpha$.
- A11.** Δίνονται τα σημεία A(1,2) και B(3,1). Να βρείτε:
 α) την εξίσωση της ευθείας AB
 β) την εξίσωση της ευθείας που περνά από το A και είναι κάθετη στην AB.
- A12.** Ο λόγος φθίνουσας γεωμετρικής προόδου είναι τετραπλάσιος του πρώτου όρου της και το άθροισμα των απείρων όρων της είναι ίσο με $\frac{1}{4}$.
 Να σχηματίσετε την πρόοδο.
- A13.** Να δείξετε ότι

$$\sin x + \sin y + \sin \omega + \sin(x + y + \omega) = 4 \sin \frac{x + \omega}{2} \sin \frac{\omega + x}{2} \sin \frac{+}{2}$$
- A14.** Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ακμή βάσης 2 cm και οι παράπλευρες έδρες σχηματίζουν γωνία 60° με το επίπεδο της βάσης. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.
- A15.** Τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει κορυφές A(-1,-3), B(8,15), Γ(0,19) και Δ(-9,1).
 Να δείξετε ότι το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

ΜΕΡΟΣ Β΄

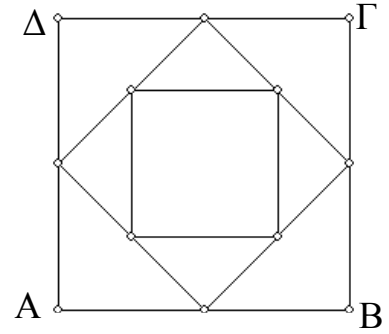
Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 4. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες

- B1.** Αν $y = \ln x \sqrt{x}$, να δείξετε ότι:

α) $2e^{2y} \frac{dy}{dx} =$

β) $2e^{2y} \frac{d^2y}{dx^2} + 4e^{2y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = -$

- B2.** Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς α . Συνδέουμε τα μέσα των πλευρών και δημιουργούμε νέο τετράγωνο. Συνδέουμε τα μέσα των πλευρών του νέου τετραγώνου και δημιουργούμε πιο μικρό τετράγωνο, κ.ο.κ. Να βρείτε, συναρτήσει του α , το άθροισμα των περιμέτρων των άπειρων τετραγώνων που σχηματίζονται.

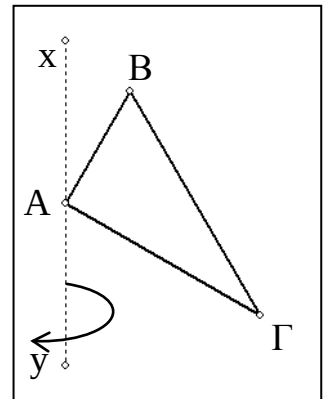


- B3.** Τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ έχει κορυφές $A(1,3)$, $B(8,2)$ και $\Gamma(3,-3)$.
α) Αν E είναι το μέσον της AB , να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που περνά από το E και είναι παράλληλη προς την $B\Gamma$ είναι η $y = x - 2$.
β) Αν η πιο πάνω ευθεία τέμνει την $A\Gamma$ στο Δ , να δείξετε ότι το Δ είναι το ίχνος του ύψους $B\Delta$.
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $A\hat{B}\Delta$.

- B4.** **α)** Αν σε τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ ισχύει $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3\Gamma = 1$ να δείξετε ότι μία του γωνία είναι 120°

β) Να δείξετε ότι $\eta\mu^4 \frac{\pi}{16} + \eta\mu^4 \frac{3\pi}{16} + \eta\mu^4 \frac{5\pi}{16} + \eta\mu^4 \frac{7\pi}{16} = \frac{3}{2}$.

- B5.** Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$, $B\Gamma = 8 \text{ cm}$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Να βρείτε το εμβαδόν και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του τριγώνου $A\hat{B}\Gamma$ γύρω από άξονα xAy που σχηματίζει με την $A\Gamma$ γωνία 60°



- B6.** Σε αύξουσα αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι το $3x$ και ο δεύτερος όρος το $y + x$. Ο πρώτος όρος, ο τέταρτος όρος και ο όγδοος όρος της είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Αν γνωρίζουμε επιπλέον ότι $y - x = 8$, να σχηματίσετε την αριθμητική πρόοδο.

Ο Διευθυντής

Καλότυχος Χρίστος

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - ΤΑΞΗ Β' ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: 02/06/2009

Διάρκεια: 2:30'

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 3 σελίδες.

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- Να γράψετε με μελάνι – Τα σχήματα με μολύβι.

ΜΕΡΟΣ Α

- Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε τις 12 μόνο.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 1 μονάδα.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα $\frac{5x}{(x-2)(x+1)}$.

2. Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού και το Πεδίον Τιμών της συνάρτησης $\psi = \frac{2x+3}{x-4}$.

3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 2}{4x^2 + 4}$.

4. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $\psi = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

5. Τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές $\alpha = 6\sqrt{3}\text{ cm}$ και $\beta = \gamma = 6\text{ cm}$.

Να υπολογίσετε : α) Τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ,
β) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

6. Δίνεται η καμπύλη $\psi^2 = 4x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της, στο σημείο της με τετμημένη $x = 1$ και με $\psi > 0$.
7. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^3 - x^2 + ax + \beta$. Να υπολογίσετε τις τιμές των a και β έτσι ώστε το πολυώνυμο $f(x)$, να έχει ρίζα τον αριθμό 1 και να ισχύει η σχέση $f'(2) = 4$.
8. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κώνου είναι $65\pi m^2$. Αν $R = 5m$ να βρείτε τον όγκο του.
9. Να αποδείξετε ότι : $\frac{2\eta\mu 5\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 3\alpha - \eta\mu 8\alpha}{2\sigma\upsilon\nu 3\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 2\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha} = 2\eta\mu\alpha$.
10. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει περίμετρο βάσης 40 cm και το παράπλευρο ύψος της σχηματίζει με τη βάση της γωνία 60° .
Να υπολογίσετε : α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.
β) Τον όγκο της πυραμίδας.
11. Να λύσετε την εξίσωση : $\log_2^2 x - 3^{\log_3 4} \log x - \log_3 \frac{1}{81}$
12. Σε φθίνουσα Γεωμετρική Πρόοδο το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της είναι 21 και το άθροισμα των απείρων όρων της είναι 24. Να σχηματίσετε την πρόοδο.
13. Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(4,7)$, $\Gamma(-3,3)$.
α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
β) Να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του τριγώνου $AB\Gamma$.
14. Αν $\ln 2, \ln x, \ln 18, \psi$ είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου να βρείτε τα x και ψ .
15. Δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 2R$. Προεκτείνουμε τη AB προς το μέρος του B κατά τμήμα $B\Gamma = R$. Από το Γ φέρουμε την εφαπτομένη ΓH (το H σημείο επαφής) η οποία τέμνει στο Δ την εφαπτομένη που φέρουμε στο A . Να υπολογίσετε το εμβαδό του μεικτόγραμμου χωρίου $A\Delta H$.

ΜΕΡΟΣ Β

- Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε τις 4 μόνο.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 2 μονάδες.

1. Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει κορυφές τα σημεία $A(3,5)$, $B(2,3)$, $\Gamma(5,-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η $A\Gamma$ έχει εξίσωση $3\chi + \psi - 14 = 0$.

β) Αν $B\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ .

2. Δίνεται η καμπύλη $\psi^2 + \chi^2 + 2\chi - 4\psi = 5$.

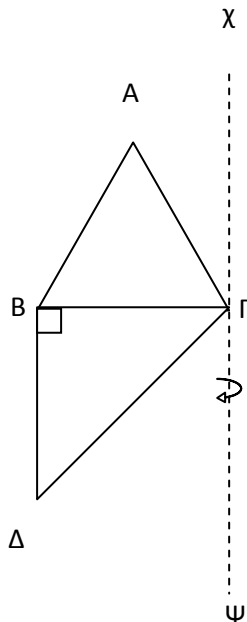
α) Να δείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{\chi+1}{2-\psi}$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης στο σημείο $P(2,1)$ της καμπύλης είναι αντίστοιχα $3\chi - \psi - 5 = 0$ και $\chi + 3\psi - 5 = 0$.

3. Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $\log_2 \chi - \log_\chi 8 + 2 = 0$.

β) $3^{\chi+1} - 2^{\chi+3} = 3^{\chi-1} + 2^\chi$

4. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά $2a$ και εκτός του τριγώνου ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ ($\Gamma\hat{B}\Delta = 90^\circ$). Το σχήμα $AB\Delta\Gamma$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα $\chi\Gamma\psi$ κάθετο στην $B\Gamma$ στο Γ . Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



5. Αριθμητική πρόοδος έχει $a_4 = 55$ και $a_{10} = 45$. Να βρείτε την πρόοδο και το άθροισμα όλων των θετικών όρων της.

6. (α) Να βρείτε το άθροισμα: $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \dots$. Στη συνέχεια να

λύσετε την εξίσωση: $\left[6 \cdot \left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \dots \right) \right]^{2 \log_5 x} = \log 1000^x + 4$.

(β) Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση: $\eta\mu A(\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma) = \frac{\beta + \gamma}{2R}$,
να δείξετε ότι είναι ορθογώνιο.

Ο Διευθυντής,

Γιώργος Παπαδημητρίου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2009

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 9/6/2008

ΩΡΑ: 7:45' πμ

ΤΑΞΗ: Β' ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΧΡΟΝΟΣ: 2:30'

- ΟΔΗΓΙΕΣ:** (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής
 (β) Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα με μολύβι).
 (γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
 (δ) Να μεταφέρετε τα σχήματα στο φύλλο των λύσεων σας

Το δοκίμιο αποτελείται από τρεις (3) σελίδες

ΜΕΡΟΣ Α': Από τα 15 θέματα να λύσετε ΜΟΝΟ τα 12.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 1 μονάδα.

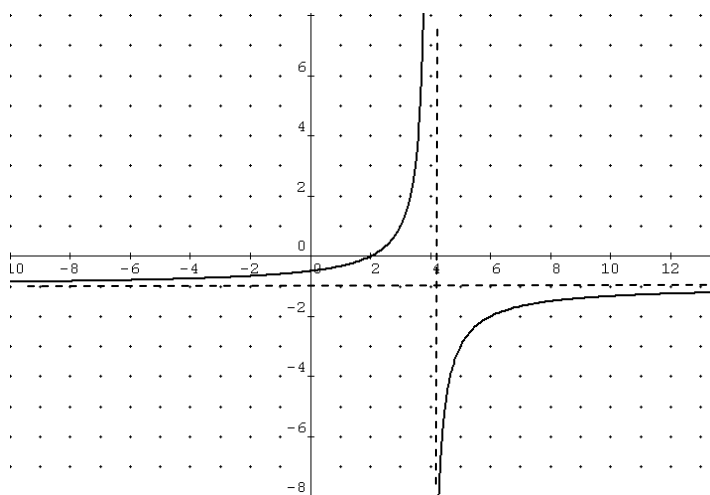
1. Να αναλύσετε το κλάσμα: $\frac{2x+3}{(x-1) \cdot (2-x)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
2. Δίνεται κώνος με ακτίνα βάσης $R = 6\text{cm}$ και γενέτειρα $\lambda = 10\text{cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ολικό και τον όγκο του.
3. Αν $x - 2, x, x + 3$ είναι οι τρεις πρώτοι διαδοχικοί όροι Γεωμετρικής Προόδου, να υπολογίσετε την τιμή του x και τον έκτο όρο της.
4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(\alpha) \log x + \log(x - 2) = \log 8 \quad \text{και} \quad (\beta) 2^{x+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$$

5. Να υπολογίσετε τα όρια: $(\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x}$ $(\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - x)$

6. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $y = f(x)$. Από τα στοιχεία της γραφικής παράστασης να βρείτε:

- i. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- iii. $\lim_{x \rightarrow +4^-} f(x)$
- iv. $\lim_{x \rightarrow +4^+} f(x)$
- v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



7. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x) = 2x^3 - 5x^2 + \eta\mu x \quad \text{και} \quad (\beta) \varphi(x) = \ln \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$$

8. Να βρείτε τα πεδία ορισμού και τιμών των συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x) = \frac{3x}{2x-6} \quad \text{και} \quad (\beta) g(x) = \log(x^2 - 1)$$

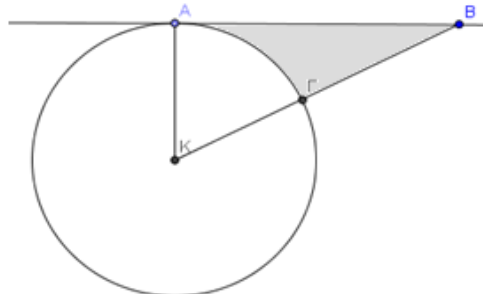
9. Να δείξετε την ταυτότητα:
$$\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha} = 2\varepsilon\varphi 2\alpha$$

10. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές: $A(-2, 8)$, $B(3, 1)$, $\Gamma(5, 3)$

(α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές ($AB=AG$).

(β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους BΔ του τριγώνου.

11. Στο σχήμα δίνεται κύκλος κέντρου K και ακτίνας $R=a$ cm. Αν η AB είναι εφαπτομένη του κύκλου στο A και $K\Gamma = B\Gamma$, να υπολογίσετε συναρτήσει του α:



(α) το εμβαδόν και

(β) την περίμετρο του μικτογράμμου τριγώνου ABΓ.

12. Δίνεται η συνάρτηση: $\varphi(x) = \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$.

(α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της είναι: $\varphi'(x) = \eta\mu 2x \cdot (1 - 4\eta\mu^2 x)$

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $\varphi'(x) = 0$

13. Να δείξετε την ταυτότητα:
$$\frac{2\sigma\upsilon\nu 5\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 4\alpha - \sigma\upsilon\nu 9\alpha}{\eta\mu 3\alpha + \eta\mu\alpha} = \frac{\sigma\tau\epsilon\mu 2\alpha}{2}.$$

14. Αν $\varphi(x) = \frac{2 \cdot \log x + 1}{2 \cdot \log x - 1}$, να λύσετε την εξίσωση: $\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{10}{3}.$

15. Δίνεται η ευθεία (ε): $(e^t - 2) \cdot x - e^t \cdot y + 2e^t - e^{2t} = 0$ με $t \in (-\infty, \ln 2)$. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Oχ και Oψ στα σημεία $A(e^t, 0)$ και $B(0, 2 - e^t)$ αντίστοιχα. Να βρείτε τη τιμή του t ώστε το τρίγωνο OAB (O η αρχή των αξόνων) να έχει εμβαδό $\frac{1}{2}$ τετρ. μονάδες.

ΜΕΡΟΣ Β': Από τα 6 θέματα να λύσετε ΜΟΝΟ τα 4.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 2 μονάδες.

1. Η εξίσωση: $9x^{+1} - 2 \cdot 3x^{+2} - 27 = 0$ έχει μία ρίζα, που είναι ρίζα και του πολωνύμου: $\varphi(x) \equiv x^3 - 7x^2 + \lambda x - 8$.

(α) Να δείξετε ότι: $\lambda = 14$ και ακολούθως ότι $\varphi(2) = 0$ και $\varphi(4) = 0$.

(β) Αν η πρόοδος που σχηματίζεται, με τρεις πρώτους όρους τις πιο πάνω ρίζες του πολωνύμου $\varphi(x)$ έχει άθροισμα n πρώτων όρων ίσο με **63** να υπολογίσετε την τιμή του n .

2. Φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος και αριθμητική πρόοδος έχουν ίσους πρώτους όρους ενώ η διαφορά δ της αριθμητικής ισούται με τον λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. Το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι ίσο με 45 και το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου ίσο με 21.

(α) Να βρείτε τις δύο προόδους (δώστε τους 5 πρώτους όρους για την κάθε μια).

(β) Ποιός όρος της γεωμετρικής προόδου ισούται με $\frac{21}{256}$;

3. (α) Να λύσετε την εξίσωση: $\log_{\eta\mu\chi} 2 + \log_{\sigma\upsilon\nu\chi} 2 + \log_{\eta\mu\chi} 2 \cdot \log_{\sigma\upsilon\nu\chi} 2 = 0$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(β) Δίνεται τρίγωνο ABΓ τέτοιο ώστε να ισχύουν:

i. $\log\left(\eta\mu^2 \frac{A}{2}\right) + \log 2 = 0$, και

ii. Η καμπύλη $\varphi(\chi) = \chi^4 - (\eta\mu B) \cdot \chi^3 + 3(\eta\mu \Gamma) \cdot \chi + \ln \chi$ έχει στο σημείο της με $\chi = 1$ εφαπτομένη με κλίση 5.

Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

4. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = 4\chi - \chi^2$ και το σημείο της Σ με $\chi = 3$. Η εφαπτομένη της καμπύλης στο Σ τέμνει τον $\chi O \chi'$ άξονα στο Α, ενώ η κάθετη της καμπύλης στο Σ τέμνει τον άξονα των $\psi O \psi'$ στο Β. Να βρείτε:

(α) τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

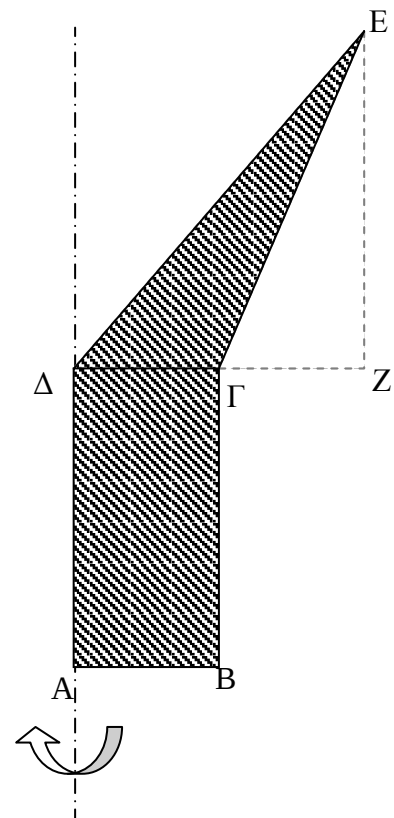
(β) τις συντεταγμένες του σημείου Γ, που είναι τέτοιο ώστε το ΑΣΒΓ να είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

5. (α) Δίνονται οι συναρτήσεις: $\varphi(\chi) = \chi^2 - 6\chi + 8$, με και $g(\chi) = \sqrt{\chi + 1}$. Να ορίσετε τις συνθέσεις $g \circ \varphi$ και $\varphi \circ g$ δίνοντας το πεδίο ορισμού και τον τύπο τους.

(β) Να βρείτε την συνάρτηση g αν $f(\chi) = \sqrt{2\chi + 6}$ και $(f \circ g)(\chi) = 4\chi^2$ για $\chi \in \mathbb{R}$.

6. Στο σχήμα δίνεται ABΓΔ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ΕΖΔ ορθογώνιο τρίγωνο. Δίνονται: AB=4cm, ΒΓ=8 cm, ΓΖ=5 cm και ΕΓ=13 cm. Το γραμμοσκιασμένο σχήμα στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία ΑΔ. Να υπολογίσετε:

(α) τον όγκο και (β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που σχηματίζεται.



Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Κ. Χάμπα

Κ. Χριστοφόρου
Χρ. Συρίμη - Σκίτσα
Ι. Αντωνίου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2009

ΜΑΘΗΜΑ : Μαθηματικά (κατεύθυνσης)

Διάρκεια : 2:30'

ΤΑΞΗ : Β' Ενιαίου Λυκείου

Ημερομηνία : 25/5/2009

Οδηγίες :

1. Να γράφετε μόνο με μελάνι. (Τα σχήματα με μολύβι)
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
3. Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής μη προγραμματιζόμενης.
4. Τα σχήματα του φυλλαδίου να μεταφέρονται στη θέση που λύεται η άσκηση.
5. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **4 σελίδες**.

Μέρος Α΄

Από τα 15 θέματα να λύσετε μόνο τα 12.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες .

- Δίνεται αριθμητική πρόοδος της οποίας ο πρώτος όρος είναι ίσος με 3 και η διαφορά ίση με 2. Να δώσετε τους πέντε πρώτους όρους της προόδου.
- Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς α τριγώνου ΑΒΓ αν δίνεται ότι :
 $A = 60^\circ$, $\beta = 4 \text{ cm}$ και $\gamma = 6 \text{ cm}$.
- Δίνεται ότι το εμβαδόν κυρτής επιφάνειας κυλίνδρου είναι ίσο με $90\pi \text{ cm}^2$. Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι 5cm τότε να υπολογίσετε :
 α) το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου και
 β) τον όγκο του.
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{5x+2}{x-1}$. Να βρείτε:
 α) το πεδίο ορισμού
 β) το πεδίο τιμών της συνάρτησης
 γ) τον τύπο της f^{-1} και το πεδίο ορισμού της (αν ορίζεται).
- Να δείξετε ότι :
 α) $\sin 35^\circ \cdot \sin 10^\circ - \sin 55^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 β) $\sin(x+\psi)\sin(x-\psi) = \sin^2 x + \sin^2 \psi - 1$.
- Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα : $\frac{2x-3}{x^2(x-1)}$
- Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $\frac{d\psi}{dx}$ των συναρτήσεων :
 α) $\psi = 4x^3 - e^{2x} + \sqrt{7}$
 β) $\psi = (x^4 - 5)\sin 3x$

8. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x - 6}{x + 6}$

β) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x - 4}$

9. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\eta\mu 2B + \eta\mu 2\Gamma = \frac{\alpha}{R}$ να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές .

10. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi = 2x + 3$ με $x < 0$

11. Δίνονται τα σημεία $A(1,6)$ και $B(-3,2)$. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος AB .

12. Όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι ίσος με τον όγκο κύβου ακμής 6cm .

Αν η διαγώνιος της βάσης του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι 5 cm και η μια από τις διαστάσεις της βάσης 4 cm τότε να υπολογίσετε :

- α) τις άλλες δύο διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και
β) το ολικό εμβαδόν του .

13. Να λύσετε την εξίσωση :

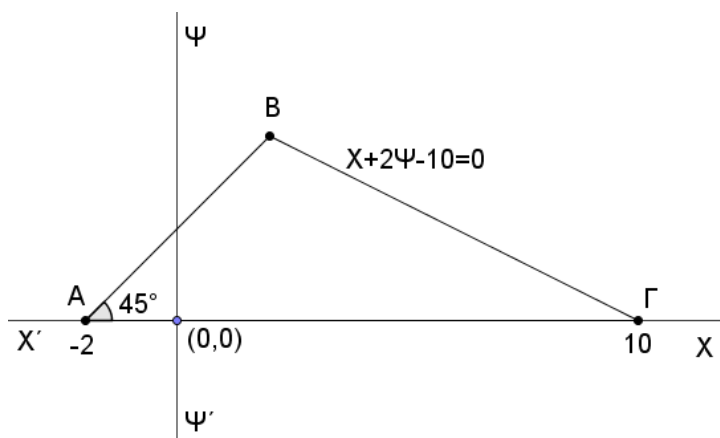
$$\log(3^{2x-1} + 5) - 2\log 2 = \log(3^{x-1} + 1)$$

14. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{3x-6}{x}$ και $g(x) = \sqrt{x}$.

Να εξετάσετε αν ορίζονται οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $\frac{g}{f}$. Στην περίπτωση που ορίζονται τότε να γράψετε τον τύπο τους και το πεδίο ορισμού τους .

15. Με βάση τα δεδομένα του πιο κάτω σχήματος να βρείτε :

- α) την εξίσωση της πλευράς AB του τριγώνου $AB\Gamma$
β) τις συντεταγμένες της κορυφής B
γ) το εμβαδόν του τριγώνου



Μέρος Β΄:

Από τα 6 θέματα να λύσετε **μόνο** τα 4 .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες .

1. Οι δύο πλευρές παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ έχουν εξισώσεις :
 $x+\psi+5=0$ και $2x-\psi+1=0$ και η μια κορυφή του Α(3,1) . Να βρείτε :

- α) τις συντεταγμένες των κορυφών του παραλληλογράμμου
β) και το σημείο τομής των διαγωνίων του
γ) το μήκος της διαγωνίου ΑΓ.

2. Δίνεται η σχέση : $\ln \psi + \eta \mu^2 x = \sin^2 x$

- α) Να βρείτε το ψ συναρτήσει του x
β) Να βρείτε το x αν οι αριθμοί e^{10} , ψ , $e^{8\sin x}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου .
γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\psi = \log_{x-4}(x+3)$

3. α) Δίνεται η συνάρτηση $x\psi+3\psi^2=5$.

Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση : $(x+6\psi) \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} + 2 \frac{d\psi}{dx} + 6 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 = 0$

- β) Να λύσετε την εξίσωση $2 \cdot \log \left[\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right] = \log(\sin 2x)$ όταν $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right)$

4. Δίνεται η συνάρτηση : $\psi = e^{\frac{x}{3}}$.

- α) Να υπολογίσετε τις παραγώγους

$$\frac{d\psi}{dx}, \frac{d^2\psi}{dx^2}, \frac{d^3\psi}{dx^3}, \frac{d^4\psi}{dx^4}$$

- β) Αν $A = \frac{d\psi}{dx} + \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^3\psi}{dx^3} + \frac{d^4\psi}{dx^4} + \dots$, τότε να δείξετε ότι $A = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{3}}$

- γ) Να υπολογίσετε το πιο κάτω όριο:

$$\lim_{x \rightarrow \ln 2} A$$

5. Το διπλανό σχήμα ΑΒΓΔΕΖ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $X'X$.

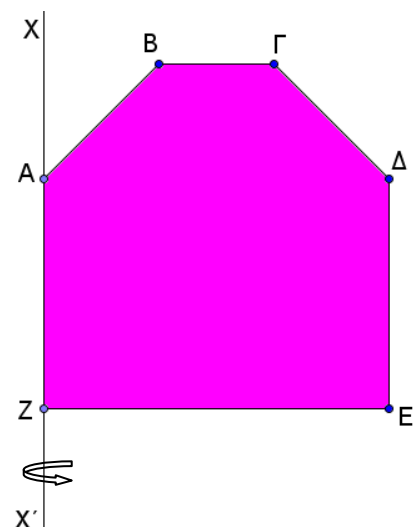
Δίνεται ότι η πλευρά ΑΒ σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $X'X$,

$$(AB) = (\Gamma\Delta) = \sqrt{2} \text{ cm}, (ZE) = 3 \text{ cm},$$

$$(\Delta E) = 2 \text{ cm}, B\Gamma \parallel ZE \text{ και } \Delta E \parallel X'X.$$

Να υπολογίσετε :

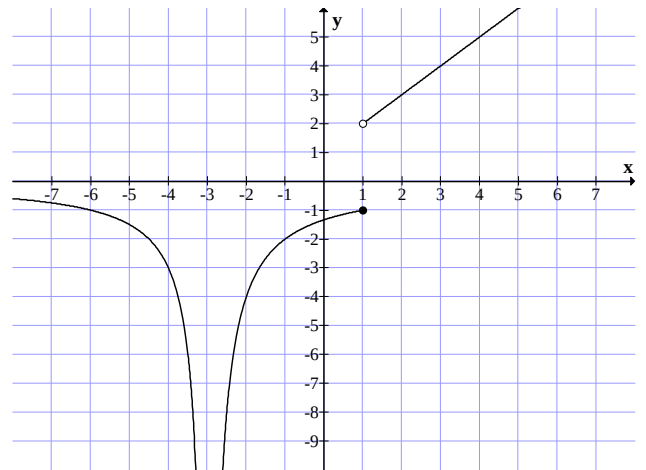
- α) το εμβαδόν ολικής επιφάνειας
β) και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή.



6. Δίνεται η διπλανή γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi=f(x)$.

α) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω:

- i. πεδίο ορισμού
- ii. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
- iii. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$
- iv. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- v. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$



β) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{\varepsilon\phi 2\alpha}{2} - \frac{2\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} \cdot (\sigma\upsilon\nu\alpha + 1)}{\sigma\phi 2\alpha} = \frac{\eta\mu 2\alpha}{2}.$$

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ :

Αθηνά Λάντου

Μυρούλα Κεπερτή– Παλλαρή

Χρίστος Βαλανίδης

Λουκία Πιέρου– Ματθαίου

Μυρούλα Πιττάτζιη –Κύζα

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Πρωτοπρεσβύτερος

Ευέλθων Χαραλάμπους

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2009**ΜΑΘΗΜΑ:** Μαθηματικά κατεύθυνσης**ΤΑΞΗ:** Β' Ενιαίου**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** 26 Μαΐου 2009**ΔΙΑΡΚΕΙΑ:** 2,5 ώρες**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ :** 4**ΑΡ. ΜΑΘΗΤΩΝ:** 125**ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ:** Αρσιώτης Παύλος, Αλεξάνδρου Μάριος,

Ευριπίδου Γιώργος, Χριστοδούλου Άντρη, Χρίστου Χρίστια

Οδηγίες: (α) Να γράφετε με μπλε μελάνι.

(β) Επιτρέπεται η χρήση εγκεκριμένης υπολογιστικής μηχανής.

(γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

Μέρος Α': Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 1 μονάδα.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{x-7}{(x+2)(x-1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων .

2. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης :

$$y = e^{3x} \cdot \mu(2x+1) + 5x$$

3. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{x^2 - 5x}$

4. Να λύσετε την εξίσωση $\log_3(x+2) + \log_3 9 = 3$

5. Ορθό τριγωνικό πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 5 cm και 12 cm. Αν το ύψος του πρίσματος είναι 8 cm, να βρείτε :

(α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και

(β) τον όγκο του.

6. Να λύσετε την εξίσωση $3^{2x+1} - 3^x - 24 = 0$

7. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x-8}{6-x}$

Να βρείτε: (α) το πεδίο ορισμού της,

(β) το πεδίο τιμών της και

(γ) αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} , να βρείτε τον τύπο της.

8. Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots\right)^{\varepsilon\varphi\theta - 1} = 4$, $0^\circ < \theta < 180^\circ$.

9. Στο τρίγωνο ABΓ να δείξετε ότι:

$$\frac{\beta - \gamma}{\alpha} = \frac{\eta\mu \frac{B - \Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2}}$$

10. Να αποδείξετε την ταυτότητα : $\frac{\sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu^2 2x}{\eta\mu 2x + 2\eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sigma\varphi 2x}{2}$

11. Να λύσετε την εξίσωση $8\eta\mu^6(x^3) - 6\eta\mu^3(x^3) + 1 = 0$ στο διάστημα $0^\circ < x < 4^\circ$

12. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με πλευρές
 AB: $3x - 4y + 3 = 0$
 BΓ: $x + y - 3 = 0$
 AΓ: $4x - 3y - 5 = 0$

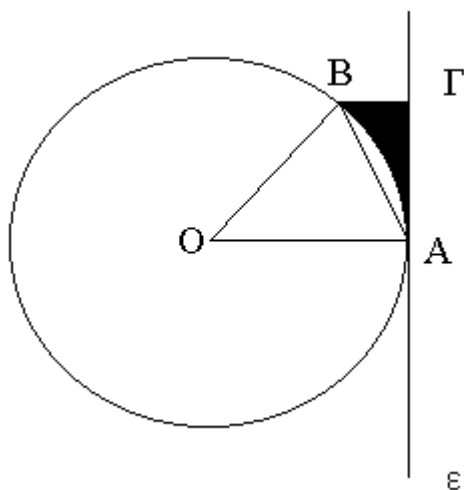
α. να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ

β. να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΓΔ.

13. Ο δεύτερος όρος Αριθμητικής Προόδου είναι -37 και η διαφορά του 4^{ου} από τον 6^ο όρο είναι 6. Να βρείτε το πλήθος των όρων της Προόδου που χρειάζονται για να γίνει το άθροισμα τους θετικό.

14. Με βάση τον ορισμό της παραγώγου να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $y = \frac{1}{x}$

15. Θεωρούμε κύκλο (O,R), χορδή AB = R, την εφαπτομένη ε του κύκλου στο σημείο A και τη BΓ ⊥ ε. Να υπολογιστεί η περίμετρος και το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου ABΓ.



Μέρος Β΄: Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 2 μονάδες.

1. α) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης $xy^3 - 2x^2y^2 + x^4 - 1 = 0$ στο σημείο της $A(1,2)$.

β) Αν $y = e^{\alpha \sin x}$, όπου α σταθερά, να δείξετε ότι $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\alpha \frac{dy}{dx} + (\alpha^2 + 1)y = 0$.

2. α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

(i) $y = \ln(2x - 3)$ (ii) $y = \sqrt{x^2 - 10x + 9}$

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ με $x > 3$.

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f^{-1}(x)$, το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της.

3. Δίνεται η συνάρτηση $y = 1 + \sin 2x$.

α) Να δείξετε ότι οι $y, -\frac{1}{2} \frac{dy}{dx}, x^2$ είναι διαδοχικοί όροι Γεωμετρικής Προόδου με $\lambda = \epsilon \phi x$.

β) Αν y είναι ο 1° όρος και A το άθροισμα των απείρων όρων της πιο πάνω Γ.Π. και ισχύει $\frac{A}{\sin x} = 3$ ($\sin x + \eta \mu x$) με $0^\circ < x < 45^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή του x .

4. Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με κορυφή $B(3,-2)$ και εξίσωση της πλευράς AD : $4x - 3y + 2 = 0$.

Αν το σημείο τομής O των διαγωνίων έχει συντεταγμένες $(2,0)$ να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες των κορυφών A, Γ και Δ

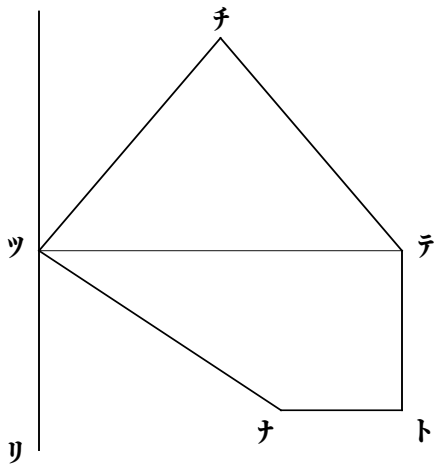
β) το εμβαδόν του ρόμβου

5. α) Αν $\frac{1}{\log x} + \frac{1}{\log x} + \frac{1}{\log x} + \frac{1}{\log x} = 1$, να υπολογίσετε το x .

β) Να δείξετε ότι : $\frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10}}{1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}} = 2^{10}$

6. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma = 5\text{ cm}$ και $B\Gamma = 6\text{ cm}$.

Το $B\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Gamma\Delta = 3\text{ cm}$ και $\Delta E = 2\text{ cm}$. Το πεντάγωνο $A\Gamma\Delta E B$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $\chi\psi // \Gamma\Delta$. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν του στερεού που παράγεται



Οι Εισηγητές

Αλεξάνδρου Μάριος

.....
Αρσιώτης Παύλος

.....
Ευριπίδου Γιώργος

.....
Χριστοδούλου Άντρη

.....
Χρίστου Χρίστια

.....

Η Συντονίστρια

Κυριακίδου Ανδριαννα

.....

Ο Διευθυντής

Κίρλαππος Ανδρέας

.....

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2009

Μάθημα : Μαθηματικά Κατεύθυνσης	Τάξη : Β΄
Χρόνος : 2 ώρες και 30 λεπτά	Ημερομηνία : 25 / 5 / 2009

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **3** σελίδες

ΟΔΗΓΙΕΣ : (α) **Επιτρέπεται** η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής
(β) Να γράφετε μόνο **με πέννα μαύρη ή μπλέ** (τα σχήματα με μολύβι)
(γ) **Δεν επιτρέπεται** η χρήση διορθωτικού υγρού

ΜΕΡΟΣ Α : Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε **μόνο τις 12**.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{16-x}{(x-2) \cdot (x+5)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Να υπολογίσετε τα όρια : (α) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-10}{x^2-25}$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-7}{x^2+5x+4}$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \frac{3x-2}{x+4}$. Να βρείτε :

(α) το πεδίο ορισμού της

(β) τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης της.

4. Αύξουσας γεωμετρικής προόδου ο πρώτος όρος ισούται με 2 και ο όγδοος όρος είναι εννιάπλάσιος του έκτου όρου της. Να σχηματίσετε την πρόοδο.

5. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων : (α) $\psi = 3x^4 \cdot e^{5x} + \ln(x^2 - 2)$

$$(\beta) \psi = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x^2.$$

6. Να λύσετε την εξίσωση $\log 2 + \log 5 + 2 \log x = \frac{2 \ln 8}{\ln 4}$

7. Να λύσετε την εξίσωση $9^x + 2 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2 + \frac{5}{x}$ και $g(x) = \frac{2x+3}{x+2}$. Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f - g$ και $\frac{f}{g}$.
9. Να δείξετε ότι $\frac{\eta\mu 5\alpha}{\eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu 5\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 4 - 8\eta\mu^2\alpha$
10. Δίνονται τα σημεία $E(3, -1)$, $Z(-1, -5)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 3x + y + 5 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος EZ και είναι κάθετη στην (ε) .
11. Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ αν $E = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $\beta = 4 \text{ cm}$, $\gamma = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ και $\hat{A} < 90^\circ$.
12. Σε κύκλο με διάμετρο $AB = 4\alpha$, να φέρετε χορδή $A\Gamma$ έτσι ώστε $\hat{BAG} = 30^\circ$ και από το σημείο Γ κάθετη πάνω στην AB που την τέμνει στο σημείο Δ . Να υπολογίσετε συναρτήσει του α το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $B\Gamma\Delta$.
13. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B} - \frac{\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma} = 0$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές ή ορθογώνιο.
14. Κύλινδρος και κώνος έχουν την ίδια ακτίνα βάσης και η κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου είναι ίση με την ολική επιφάνεια του κώνου. Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι $9\alpha \text{ cm}$ και η γενέτειρα του κώνου $13\alpha \text{ cm}$, να βρείτε τον όγκο του κώνου συναρτήσει του α .
15. Δίνεται η καμπύλη $x^2 - 6x + 2y + 8 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο με τετμημένη $x = 2$ και τεταγμένη $y < 0$.

ΜΕΡΟΣ Β : Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε **μόνο τις 4**.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. (α) Αν $y = \eta\mu(e^x - 1)$, να δείξετε ότι $y'' - y' + y \cdot e^{2x} = 0$
- (β) Η καμπύλη $y = a \ln x + bx$ περνά από το σημείο $A(1, 2)$. Αν η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο A ισούται με 5, να βρείτε την τιμή των a και b .
2. Να λύσετε τις εξισώσεις : (α) $3 + 2\log_3(3^{x-2} + 1) = x + 2\log_3 4$

(β) $25^{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} = \sqrt{5}$

3. Αριθμητική πρόοδος και φθίνουσα γεωμετρική έχουν τον ίδιο πρώτο όρο. Η διαφορά της Α.Π. και ο λόγος της Γ.Π. είναι ίσοι. Το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της Α.Π. είναι 10 και το άθροισμα των άπειρων όρων της Γ.Π. ισούται με τον τέταρτο όρο της Α.Π.. Να σχηματίσετε τις δυο προόδους.

4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται η κορυφή Β(1 , - 3) και οι εξισώσεις του ύψους ΑΔ : $3\chi + \psi = 11$ και της διαμέσου ΑΜ : $4\chi + \psi = 14$.

Να βρείτε : (α) την εξίσωση της ΒΓ

(β) τις συντεταγμένες του σημείου Μ και των κορυφών Α και Γ

(γ) το μήκος της ΒΓ

(δ) το μήκος του ύψους ΑΔ

5. Να λύσετε την εξίσωση $\sin 2\theta - \sin^2 2\theta + \sin^3 2\theta - \sin^4 2\theta + \dots = \frac{1}{3}$, $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$, στο $(0 , \pi)$.

6. Στο διπλανό σχήμα δίνονται :

ΑΒΓΕ ορθογώνιο τραπέζιο με

$\widehat{E\Gamma B} = 60^\circ$

$B\Gamma = 12\text{cm}$

ΓΔΕ ορθογώνιο τρίγωνο ($\widehat{\Gamma} = 90^\circ$)

$\Delta E = 10\text{cm}$

$\Delta Z = 8\text{cm}$

$\Gamma\Delta \parallel (\epsilon)$ (όπου ϵ ο άξονας περιστροφής).

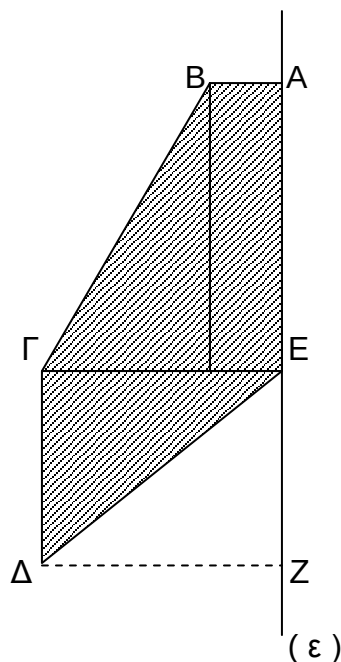
Το γραμμοσκιασμένο σχήμα ΑΒΓΔΕ

περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από

την ευθεία (ϵ) . Να βρείτε :

(α) το εμβαδόν ολικής επιφάνειας και

(β) τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται από την περιστροφή.



Ο Διευθυντής

Σωτήρης Σεργίδης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2009
ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία : Δευτέρα , 25.05.2009

Ώρα : 7.45 π.μ

Διάρκεια : 2,5 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ: Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρη πένα (τα σχήματα με μολύβι) .
 Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού .
 Το γραπτό αποτελείται από 4 σελίδες .
 Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

ΜΕΡΟΣ Α': Από τα 15 θέματα να απαντήσετε ΜΟΝΟ στα 12.
 Κάθε σωστό θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες .

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{x+6}{x(x+3)}$

2. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$. Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού, β) Το πεδίο τιμών, γ) Τον τύπο της $f^{-1}(x)$.

3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{3x-5}{x^2+1}$

β) $f(x) = e^{2x} \cdot \eta\mu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

4. Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+2x}{x^3-4x}$

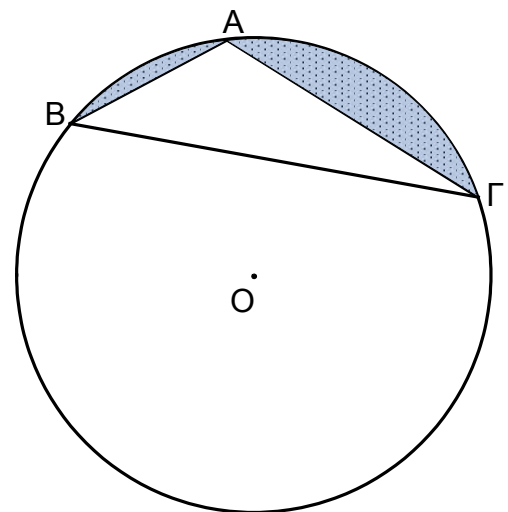
β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x})$

5. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu(3x - 20^\circ) = \sigma\upsilon\nu 50^\circ$ στο διάστημα $(0^\circ, 90^\circ)$

6. Αριθμητικής προόδου ο τρίτος όρος είναι 2 και ο όγδοος όρος είναι -8. Να υπολογίσετε το άθροισμα των 15 πρώτων όρων της.

7. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει παράπλευρη ακμή 5 cm και διαγώνιο βάσης 6 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο της.

8. Να βρείτε την εξίσωση της καθέτου της καμπύλης $x^2 + y^2 = 5$, στο σημείο $A(1, -2)$ αυτής.
9. Η ρίζα της εξίσωσης $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$ είναι ο πρώτος όρος φθίνουσας Γεωμετρικής προόδου της οποίας το άθροισμα των απείρων όρων της ισούται με 3. Να βρείτε τον έβδομο όρο της Γ.Π.
10. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κώνου είναι $32\pi \text{ cm}^2$ και η γενέτειρα του σχηματίζει γωνία 60° με τη βάση του. Να βρείτε τον όγκο του κώνου.
11. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\beta = 2\gamma$ και $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - (a+2b)x^2 + 2ax - 2$. Να βρείτε τα a και b αν $f(1)=0$ και $f'(1)=1$.
13. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο τομής των ευθειών $(\epsilon_1): 2x+3y-7=0$ και $(\epsilon_2): 3x-2y-4=0$ και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση $d=1$.
14. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \log 3x - \log(x-2) - 2\log 2$ και $g(x) = \sqrt{3^x}$. Να υπολογίσετε τις τιμές των α, β, γ και δ ώστε το πολυώνυμο $P(x) \equiv f(\alpha)x^3 + [g(\beta)-81]x^2 - (2^\gamma - 3)x + \ln \delta - 2$ να είναι το μηδενικό.
15. Στο διπλανό σχήμα δίνονται $AB=3 \text{ cm}$, $A\Gamma=5 \text{ cm}$ και $B\Gamma=7 \text{ cm}$.
- Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 120^\circ$
 - Να δείξετε ότι $R = \frac{7\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής.



ΜΕΡΟΣ Β': Από τα 6 θέματα να απαντήσετε ΜΟΝΟ στα 4.
Κάθε σωστό θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Τριγώνου ΑΒΓ δίνονται οι κορυφές Α(0,1), Β(4,-2) καθώς και η εξίσωση της πλευράς ΒΓ: $5x - \psi - 22 = 0$.

(α) Αν η απόσταση της κορυφής Γ από την πλευρά ΑΒ είναι $\frac{23}{5}$ να βρείτε τις

συντεταγμένες της κορυφής Γ με τεταμένη $\psi > 0$.

(β) Αν η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες (5, 3) να υπολογίσετε την εφαπτομένη της γωνίας $\hat{B}$ του τριγώνου.

(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle \Gamma M$, όπου Μ το μέσο της πλευράς ΑΒ.

2. Δίνεται η καμπύλη: $\psi = x^2 \cdot \ln x$, $x > 0$.

α) Να δείξετε ότι: $x \cdot \left(\frac{d^2\psi}{dx^2} + 1 \right) = 3x + \frac{d\psi}{dx}$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της καμπύλης $\psi = x^2 \ln x$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(2 - e^x)$

Α. Έστω οι αριθμοί $\kappa = 2x$, $\lambda = f(x)$, $\mu = \ln 4$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

i. Να αποδείξετε ότι $x = \ln \frac{2}{3}$

ii. Αν ο αριθμός κ είναι ο τρίτος όρος της αριθμητικής προόδου να αποδείξετε ότι $\delta = \ln 3$.

iii. Ποιος όρος της προόδου ισούται με $2\ln 2 + 5\ln 3$.

Β. i. Να δείξετε ότι $\alpha^{\log \beta} = \beta^{\log \alpha}$ με $\alpha, \beta > 0$

ii. Να λύσετε την εξίσωση $3^{\log x} + x^{\log 3} = 54$

4. Οι δύο πρώτοι όροι Αριθμητικής προόδου είναι αντίστοιχα ίσοι με τους δύο πρώτους όρους της Γεωμετρικής προόδου.

- i. Αν ο πρώτος όρος (α_1) είναι διάφορος του μηδέν, το άθροισμα των πέντε πρώτων (Σ_5) της αριθμητικής προόδου ισούται με 0 και το άθροισμα των άπειρων όρων (Σ_∞) γεωμετρικής προόδου είναι ίσο με 4, να βρείτε τις προόδους.
- ii. Να βρείτε το πλήθος των πρώτων όρων της Γεωμετρικής προόδου ώστε το άθροισμα τους να είναι ίσο με $\frac{31}{8}$.

5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται $AE = 4 \text{ cm}$, $BF = 8 \text{ cm}$, $GD = 5 \text{ cm}$,

$AB = 10 \text{ cm}$, $\hat{A}GB = 90^\circ$ και οι ED , AG είναι κάθετες στον άξονα xy .

Το σκιασμένο μέρος του σχήματος περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy . Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.



6. α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{1 + \sin 4x + \sin 2x}{\eta\mu 4x + \eta\mu 2x} = \sigma\phi 2x$, $x \neq \frac{\kappa\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

β) Αν x_0 είναι η λύση της εξίσωσης $1 + \sin 4x + \sin 2x = \eta\mu 4x + \eta\mu 2x$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

να αποδείξετε ότι: $\sin^4 x_0 + \eta\mu^4 3x_0 = \frac{3}{4}$.

Οι Εισηγητές

Γαβριήλ Γαβριήλ

Νικολάου Παναγιώτα

Ο Διευθυντής

Σπανός Αλέξανδρος

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά****ΤΑΞΗ: Β' επιλ.****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 3.06.2009 ΩΡΑ: 7.45' -10.15'**

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 3 σελίδες.

ΟΔΗΓΙΕΣ: (α) Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής .
(β) Να γράφετε μόνο με μελάνι (τα σχήματα με μολύβι).
(γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού .

ΜΕΡΟΣ Α': Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ 12.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες από τα 100.

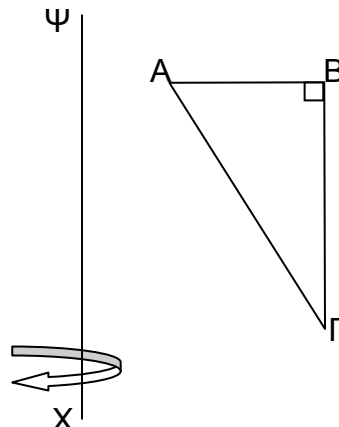
- 1) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $y = \sqrt{3x} + \varepsilon\varphi 2x$.
- 2) Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{x+4}{(x+1)x}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
- 3) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 10}$.
- 4) Να λύσετε την εξίσωση $\log(x+2) - 2\log 2 = \log(2x-3)$.
- 5) Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $\sin 2x = 5\sin x - 3$.
- 6) Αν η περιφέρεια της βάσης κυλίνδρου είναι 10π m και ο όγκος του 200π m³ , να βρείτε το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.
- 7) Σε αριθμητική πρόοδος ο 6^{ος} όρος είναι 14 και το άθροισμα του 2^{ου} και του 8^{ου} όρου είναι 22. Να βρείτε το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων της.
- 8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$, $x \geq 0$. Να βρείτε:
α) το πεδίο τιμών της $f(x)$
β) τον τύπο και το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.
- 9) Να δείξετε ότι $\frac{\eta\mu 5x}{\eta\mu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu 5x}{\sigma\upsilon\nu x} = 8\sigma\upsilon\nu^2 x - 4$

- 10) Αν $f(x) = x^2 \ln x$, να δείξετε ότι $f'(x) - xf''(x) + 2x = 0$.
- 11) Δίνονται τα σημεία $A(6, -3)$, $B(3, -7)$. Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB και την οξεία γωνία που σχηματίζει η AB με την ευθεία $x - 7y = 5$.
- 12) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κώνου είναι $240\pi \text{ cm}^2$.
 Αν $\frac{R}{3} = \frac{v}{4} = \frac{\lambda}{5}$, να βρείτε τον όγκο του.
- 13) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $\hat{B} = 30^\circ$ και $\alpha = 2\beta$.
 α) Να υπολογίσετε τις γωνίες A και Γ .
 β) Να δείξετε ότι $E = \frac{\beta^2 \sqrt{3}}{2}$, όπου E το εμβαδόν του τριγώνου.
- 14) Δίνεται η ακολουθία $36, -24, 16, -\frac{32}{3}, \frac{64}{9}, \dots$. Να υπολογίσετε το άθροισμα όλων των αρνητικών όρων της.
- 15) Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)$ τρίτου βαθμού. Αν ο αριθμός -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου και $f'(x) \equiv 12x^2 - 6x$. Να βρείτε το πολυώνυμο.

ΜΕΡΟΣ Β': Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.
 Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες από τα 100.

- 1) Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(-1, 2)$ και $\Gamma(7, 2)$. Αν η εξίσωση της πλευράς AB είναι η $x - 2y + 5 = 0$ και η εξίσωση της $B\Gamma$ είναι η $x + 2y - 11 = 0$, να βρείτε:
 (α) την εξίσωση της $\Delta\Gamma$
 (β) τις συντεταγμένες της κορυφής Δ
 (γ) το εμβαδό του παραλληλογράμμου
 (δ) το μήκος του ύψους ΓE (E σημείο της AB).

- 2) Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ τρίγωνο είναι ορθογώνιο ($\hat{B} = 90^\circ$), με $\hat{A} = 60^\circ$ και $AB = 3 \text{ cm}$. Το Γ σημείο απέχει από τον $X\Psi$ άξονα 5 cm . Να βρείτε την επιφάνεια και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του τριγώνου $AB\Gamma$ γύρω από τον άξονα XY ($B\Gamma \parallel YX$).



3) Δίνεται η συνάρτηση $\ln y = x \ln 2 + \ln x$

(α) Να δείξετε ότι $y' = \frac{y}{x} + y \ln 2$

Στη συνέχεια

(β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $y' - y \ln 2 + 12 = 4^x$ μετασχηματίζεται στην
 $4^x - 2^x - 12 = 0$ και να βρείτε το x .

4) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης $x^2 + xy = 4$ στο σημείο $x_0 = -1$ και να δείξετε ότι $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8}{x^3}$

5) (α) Να δείξετε ότι $(\sin^2 x + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu^2 x)^2 = 1 + \eta\mu 4x$.

(β) Αν $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \theta)$, $\sigma\upsilon\nu\alpha$, $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \theta)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, Να δείξετε ότι $\theta = 180^0\kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

6) (α) Να λύσετε την εξίσωση $2 \log_3 \sqrt{5^{\log x} - 2 \cdot 3^{\log x}} + 3 = \log_3 71 + \log x$.

(β) Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που σχηματίζουν γωνία 45^0 με τον άξονα Ox και απέχουν 4 μονάδες από την αρχή των αξόνων.

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Νίκη Παπαπέτρου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** 01/06/09**ΤΑΞΗ:** Β' Ενιαίου Λυκείου**ΧΡΟΝΟΣ:** 2,5 ώρες

Το δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

ΟΔΗΓΙΕΣ: Να γράφετε μόνο με μελάνι (τα σχήματα με μολύβι).

Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.

ΜΕΡΟΣ Α': Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{x-4}{(x+2)(x-1)}$
2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 4x + 1}{1 - 3x^2}$
3. Να βρείτε την γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ, που έχει $\alpha = 6\text{cm}$,
 $\beta = 3\sqrt{3}\text{ cm}$ και $\gamma = 3\text{cm}$
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{2x-3}$. Να βρείτε τον τύπο, το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της αντίστροφης συνάρτησης $f^{-1}(x)$
5. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:
(α) $\psi = 2x^3 - e^2 - 3x$ (β) $\psi = \varepsilon\phi 4x \cdot \sqrt{3+2x}$
6. Κόλουρος κώνος έχει γενέτειρα $\lambda = 5\text{cm}$ και εμβαδό κυρτής επιφάνειας $E_k = 45\pi \text{ cm}^2$.
Αν η ακτίνα της μεγάλης βάσης είναι διπλάσια από την ακτίνα της μικρής βάσης, να υπολογίσετε το ύψος του.
7. Να βρείτε τη γενική λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης: $2\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu x = 2$

8. Το άθροισμα του 2ου και του 4ου όρου φθίνουσας γεωμετρικής προόδου είναι 60, ενώ το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της είναι 240. Να υπολογίσετε το άθροισμα των άπειρων όρων της προόδου.
9. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 2\alpha + \eta\mu \alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{\eta\mu \alpha}{2\sigma\upsilon\nu \alpha - 1}$
10. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ύψος $5\sqrt{3}\text{cm}$. Το παράπλευρο ύψος (h) σχηματίζει με τη βάση, γωνία 60° . Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδό της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.
11. Να λύσετε την εξίσωση: $\log 5 + \log(10 \cdot 5^{x-1} + 2^x) = \log 2 + \log(130 \cdot 2^{x-1} + 5^x)$
12. Ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB=ΑΓ) έχει κορυφές A(-2,3) και B(1,2). Το ύψος ΑΔ του τριγώνου έχει εξίσωση $2\chi + \psi + 1 = 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και Γ.
13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi) = 2\chi - 5$, $\chi \in [0, 4]$ και $g(\chi) = \frac{\chi^2 + 3}{\chi}$, $\chi \in \mathbb{R} - \{0\}$.
Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$.
14. Να δείξετε ότι: $\frac{1}{16}(2\sigma\upsilon\nu\chi - \sigma\upsilon\nu 3\chi - \sigma\upsilon\nu 5\chi) = \sigma\upsilon\nu^3\chi \cdot \eta\mu^2\chi$
15. Ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ, α). Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ. Η προέκταση της ΑΚ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ και την εφαπτομένη στο σημείο Ε. Να βρείτε, συναρτήσει του α, το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου ΓΔΕ.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = a\chi^2 + b\chi + \gamma$ με ρίζα τον αριθμό -3. Αν υπάρχει το $\lim_{\chi \rightarrow 1} g(\chi)$ όπου
- $$g(\chi) = \begin{cases} \frac{\chi^2 - 1}{\chi - 1}, & \chi \leq 1 \\ \beta, & \chi > 1 \end{cases}$$
- και οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α, β, γ.

2. (α) Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \ln(\eta\mu 2\chi)$, $\chi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Να λύσετε την εξίσωση $\frac{d^2 y}{d\chi^2} = -8$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

- (β) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση

$$2\eta\mu A \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \frac{B}{2} + 2\eta\mu B \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} - \eta\mu \Gamma = 1 + \eta\mu B$$

να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

3. (α) Να λύσετε την εξίσωση: $\log_3(e^{2x} - 1) - 6\log_{e^{2x}-1} 10 + \frac{1}{\log 3} = \frac{-6}{\log(e^{2x} - 1)}$

- (β) Αριθμητική πρόοδος έχει πρώτο όρο $a_1 = \chi$ και δεύτερο όρο $a_2 = 2\chi + \psi$. Οι όροι $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_{11}$ της αριθμητικής προόδου είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\chi - \psi = 1$ και $\psi > 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα των 10 διαδοχικών όρων της αριθμητικής προόδου, που βρίσκονται μετά τον 22^ο όρο της.

4. Η συνάρτηση $\psi = f(\chi)$ είναι παραγωγίσιμη, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι:

$$\psi - e^{-\psi} = \chi - 1$$

- (α) να δείξετε ότι: (i) $\psi' = \frac{1}{1 + e^{-\psi}}$ (ii) $\psi'' = \frac{e^{2\psi}}{(1 + e^{\psi})^3}$

- (β) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης $f(\chi)$ στο σημείο χ_0 για το οποίο $2f'(\chi_0) = 1$.

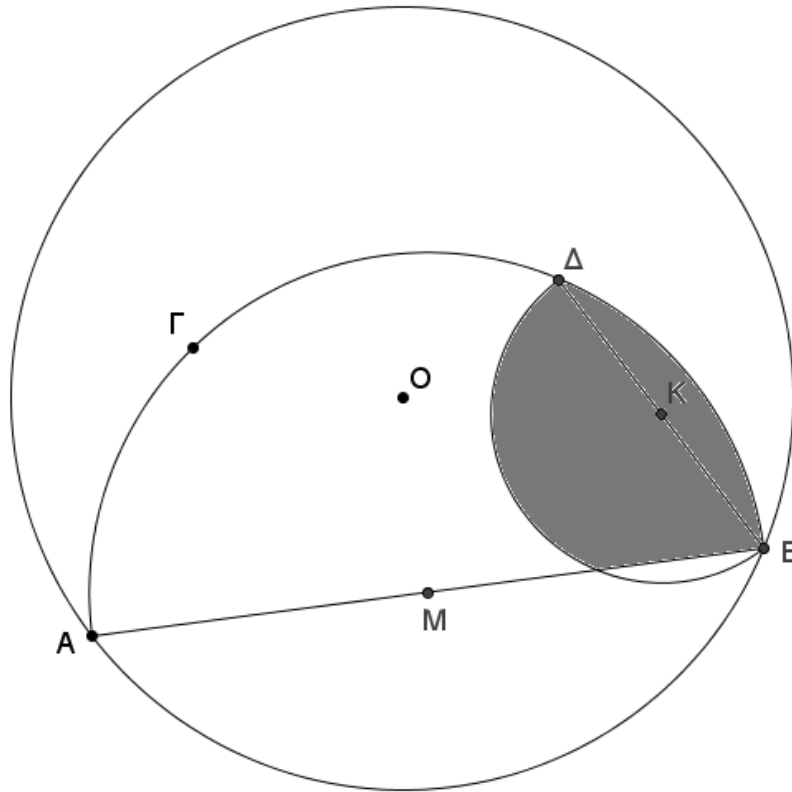
5. Παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) έχει κορυφές Α(-2,2) και Β(4,6). Αν η πλευρά ΔΓ έχει εξίσωση $2\chi - 3\psi = 3$, η γωνία $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 45^\circ$ και η πλευρά ΑΔ έχει **θετική** κλίση λ:

- (α) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΕ, όπου Ε σημείο της ΔΓ.

- (β) Να δείξετε ότι $\lambda = 5$ και να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΔ.

- (γ) Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδό της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ γύρω από την πλευρά ΔΓ.

6. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O,R) και χορδή $AB=\lambda_3$. Με κέντρο το μέσο M της AB και ακτίνα MA , γράφουμε τόξο $\widehat{AGB}$ μέσα στον κύκλο. Στο τόξο $\widehat{AGB}$ φέρουμε χορδή $B\Delta=BM$ και ημικύκλιο με κέντρο το μέσο K της $B\Delta$. Να υπολογίσετε συναρτήσει του R , το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου.



Οι Διδάσκοντες:

Α. Φωτίου
Κ. Σταματόπουλος
Γ. Αδάμου
Ξ. Χριστοδούλου

Ο Διευθυντής

Χ. Καραμανώλης

