

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΤΑΞΗ : Β΄

Ημερομηνία: 21/05/2012

Χρόνος : 2,5 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
β) Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

■ Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες. ■

ΜΕΡΟΣ Α΄: α) Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 12 .
β) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 (πέντε) μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{x-24}{(x+4)(x-3)}$
2. Σε αριθμητική πρόοδο ο πρώτος της όρος είναι ίσος με 2 και ο έβδομος όρος της είναι τετραπλάσιος από τον δεύτερο . Να σχηματίσετε την πρόοδο.

3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων :

α) $\psi = 4x^5 - \sqrt{x} + \sin 3x$ (β) $\psi = \frac{e^{4x}}{2 - \sin x}$

4. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{3 - 2x^2}$ (β) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 12x}{x - 4}$

5. Δίνονται τα σημεία A(2,2) , B(4,2) και Γ(2,4).

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το μέσο της AB και είναι παράλληλη με τη BΓ.

6. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \frac{x-4}{x^2-9}$ και $g(x) = \frac{5}{x+3}$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f - g$ και $\frac{g}{f}$.

7. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται: $\alpha = 3\text{cm}$, $\beta = 2\sqrt{3}\text{cm}$, $E = \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$ και $\hat{\Gamma} < 90^\circ$, να επιλύσετε το τρίγωνο.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{4x+3}{x-2}$, $x > 3$ και $g(x) = \ln(2x-1)$.

Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της $g(x)$.

β) Το πεδίο τιμών της $f(x)$.

γ) Τον τύπο και το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.

9. Κύλινδρος και κώνος έχουν την ίδια ακτίνα βάσης και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι ίσο με το διπλάσιο του εμβαδού της κυρτής επιφάνειας του κώνου. Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι $3\alpha\text{cm}$ και ισχύει η σχέση $5R - 4\lambda = 0$, να βρείτε τον όγκο του κώνου, συναρτήσει του α .

10. Δίνεται η καμπύλη: $\psi^2 - 3x + x\psi + 3 = 0$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της με τετμημένη $x = 2$ και $\psi > 0$.

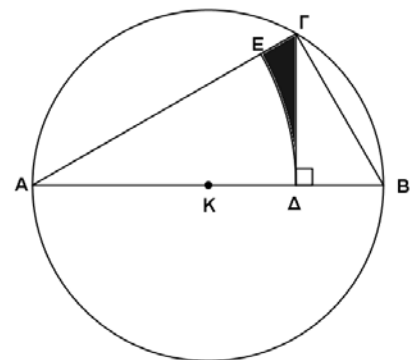
β) Αν η κάθετη τέμνει τον άξονα $x'x$ στο Β και τον άξονα $\psi'\psi$ στο Γ, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΟΓ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

11. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\log(x+10) + \log^3\sqrt{x+10} + \log^9\sqrt{x+10} + \log^{27}\sqrt{x+10} + \dots = 3$$

12. Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 8\alpha - 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu 7\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 6\alpha} = \sigma\phi 3\alpha$

13. Στο σχήμα δίνεται κύκλος (Κ, R) και η χορδή ΒΓ=λ₆ = 4cm. Η ΓΔ είναι κάθετη στην ΑΒ και το τόξο ΕΔ γράφτηκε με κέντρο Α και ακτίνα ΑΕ. Να υπολογίσετε το εμβαδό και την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ΓΔΕ.



14. Αν σε οξυγώνιο τρίγωνο ισχύει η σχέση:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2B}{2}}, \text{ να αποδείξετε ότι οι αριθμοί } \eta\mu A, \sigma\upsilon\nu B, \eta\mu\Gamma,$$

είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^2\alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \alpha\eta\mu 2\alpha x$.

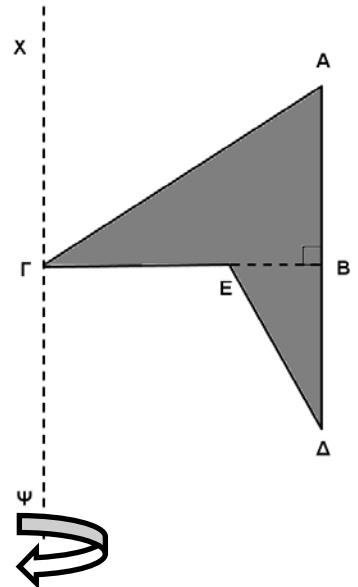
β) Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{\sqrt{x+4}-2} = 2$, να βρείτε την τιμή του α .

ΜΕΡΟΣ Β': α) Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 4.
 β) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 (δέκα) μονάδες.

1. Σε απόλυτα φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της είναι ίσο με $\frac{45}{4}$ και το άθροισμα των άπειρων όρων της είναι ίσο με 12. Αν $\lambda < 0$ τότε :
 α) Να σχηματίσετε τη γεωμετρική πρόοδο.
 β) Να βρείτε το άθροισμα των άπειρων θετικών όρων της προόδου.
2. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι εξισώσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΔ είναι $4x - 3\psi + 9 = 0$ και $\psi = -2x + 3$, αντίστοιχα. Αν δύο κορυφές του έχουν συντεταγμένες $(-3, -1)$ και $(3, -3)$ τότε :
 α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των άλλων κορυφών του.
 β) Να δείξετε ότι η διαγώνιος ΑΓ συμπίπτει με τον άξονα $\psi'\psi$.
 γ) Να βρείτε την απόσταση της κορυφής Β από τη ΔΓ.
 δ) Να βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.
3. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \ln\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu x$, $x \neq 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ και $g(x) = -\eta\mu x$.

Να αποδείξετε ότι : $\frac{g''(x)}{f'(x)} = \varepsilon\varphi^2 x$

4. Στο σχήμα η ΒΓ είναι κάθετη στην ΑΔ και δίνονται : ΑΒ=6cm, ΒΓ=8cm, ΒΕ=3cm και ΕΔ=5cm. Το σκιασμένο τετράπλευρο ΑΔΕΓ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα χψ που περνά από το Γ και είναι παράλληλος με την ΑΔ. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν του στερεού που παράγεται.



5. α) i) Να αποδείξετε ότι : $x^{\log 2} = 2^{\log x}$, $x > 0$.
 ii) Να λύσετε την εξίσωση: $2^{2\log x} = 3x^{\log 2} + 4$.

β) Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{\log_3 x - 1}{\log_3\left(\frac{x}{3}\right)} = 4 \log_9 x - (\log_3 x)^2 + 4$

6. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα :
$$\frac{1 + 3\eta\mu 4x - \sigma\upsilon\nu 4x}{3 + \eta\mu 4x + 3\sigma\upsilon\nu 4x} \cdot \frac{1 - \epsilon\varphi^2 x}{\epsilon\varphi x} = 2 \quad .$$

β) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση :
$$2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\Gamma}{2} + 2\eta\mu \Gamma \sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} = 1 + \frac{\beta + \gamma}{2R} \quad ,$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Ο Διευθυντής

Ανδρέας Ματσικάρης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΤΑΞΗ : Β΄

Ημερομηνία: 21/05/2012

Χρόνος : 2,5 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
β) Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

■ Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες. ■

ΜΕΡΟΣ Α΄: α) Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 12 .
β) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 (πέντε) μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{x-24}{(x+4)(x-3)}$
2. Σε αριθμητική πρόοδο ο πρώτος της όρος είναι ίσος με 2 και ο έβδομος όρος της είναι τετραπλάσιος από τον δεύτερο . Να σχηματίσετε την πρόοδο.

3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων :

α) $\psi = 4x^5 - \sqrt{x} + \sin 3x$

(β) $\psi = \frac{e^{4x}}{2 - \sin x}$

4. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{3 - 2x^2}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 12x}{x - 4}$

5. Δίνονται τα σημεία A(2,2) , B(4,2) και Γ(2,4).

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το μέσο της AB και είναι παράλληλη με τη BΓ.

6. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \frac{x-4}{x^2-9}$ και $g(x) = \frac{5}{x+3}$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f - g$ και $\frac{g}{f}$.

7. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται: $\alpha = 3\text{cm}$, $\beta = 2\sqrt{3}\text{cm}$, $E = \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$ και $\hat{\Gamma} < 90^\circ$, να επιλύσετε το τρίγωνο.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{4x+3}{x-2}$, $x > 3$ και $g(x) = \ln(2x-1)$.

Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της $g(x)$.

β) Το πεδίο τιμών της $f(x)$.

γ) Τον τύπο και το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.

9. Κύλινδρος και κώνος έχουν την ίδια ακτίνα βάσης και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι ίσο με το διπλάσιο του εμβαδού της κυρτής επιφάνειας του κώνου. Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι $3\alpha\text{cm}$ και ισχύει η σχέση $5R - 4\lambda = 0$, να βρείτε τον όγκο του κώνου, συναρτήσει του α .

10. Δίνεται η καμπύλη: $\psi^2 - 3x + x\psi + 3 = 0$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της με τετμημένη $x = 2$ και $\psi > 0$.

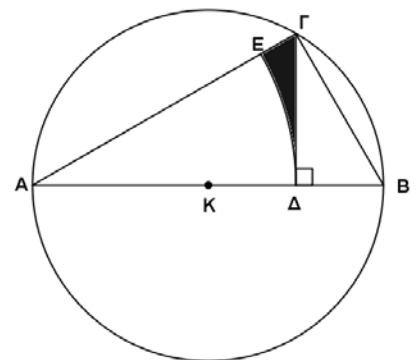
β) Αν η κάθετη τέμνει τον άξονα $x'x$ στο Β και τον άξονα $\psi'\psi$ στο Γ, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΟΓ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

11. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\log(x+10) + \log^3\sqrt{x+10} + \log^9\sqrt{x+10} + \log^{27}\sqrt{x+10} + \dots = 3$$

12. Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 8\alpha - 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu 7\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 6\alpha} = \sigma\phi 3\alpha$

13. Στο σχήμα δίνεται κύκλος (Κ, R) και η χορδή ΒΓ=λ₆ = 4cm. Η ΓΔ είναι κάθετη στην ΑΒ και το τόξο ΕΔ γράφτηκε με κέντρο Α και ακτίνα ΑΕ. Να υπολογίσετε το εμβαδό και την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ΓΔΕ.



14. Αν σε οξυγώνιο τρίγωνο ισχύει η σχέση:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2B}{2}}, \text{ να αποδείξετε ότι οι αριθμοί } \eta\mu A, \sigma\upsilon\nu B, \eta\mu\Gamma,$$

είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^2\alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \alpha\eta\mu 2\alpha x$.

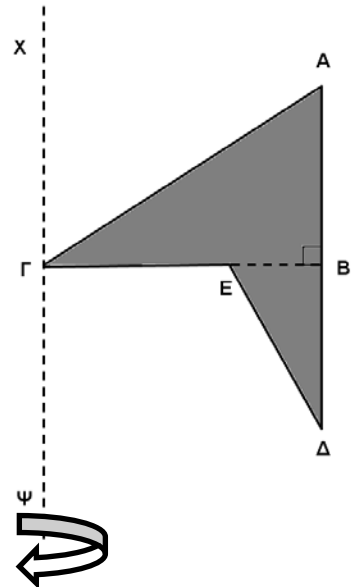
β) Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{\sqrt{x+4}-2} = 2$, να βρείτε την τιμή του α .

ΜΕΡΟΣ Β': α) Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 4.
 β) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 (δέκα) μονάδες.

1. Σε απόλυτα φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της είναι ίσο με $\frac{45}{4}$ και το άθροισμα των άπειρων όρων της είναι ίσο με 12. Αν $\lambda < 0$ τότε :
 α) Να σχηματίσετε τη γεωμετρική πρόοδο.
 β) Να βρείτε το άθροισμα των άπειρων θετικών όρων της προόδου.
2. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι εξισώσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΔ είναι $4x - 3\psi + 9 = 0$ και $\psi = -2x + 3$, αντίστοιχα. Αν δύο κορυφές του έχουν συντεταγμένες $(-3, -1)$ και $(3, -3)$ τότε :
 α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των άλλων κορυφών του.
 β) Να δείξετε ότι η διαγώνιος ΑΓ συμπίπτει με τον άξονα $\psi'\psi$.
 γ) Να βρείτε την απόσταση της κορυφής Β από τη ΔΓ.
 δ) Να βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.
3. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \ln\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu x$, $x \neq 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ και $g(x) = -\eta\mu x$.

Να αποδείξετε ότι : $\frac{g''(x)}{f'(x)} = \varepsilon\varphi^2 x$

4. Στο σχήμα η ΒΓ είναι κάθετη στην ΑΔ και δίνονται : ΑΒ=6cm, ΒΓ=8cm, ΒΕ=3cm και ΕΔ=5cm. Το σκιασμένο τετράπλευρο ΑΔΕΓ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα χψ που περνά από το Γ και είναι παράλληλος με την ΑΔ. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν του στερεού που παράγεται.



5. α) i) Να αποδείξετε ότι : $x^{\log 2} = 2^{\log x}$, $x > 0$.
 ii) Να λύσετε την εξίσωση: $2^{2\log x} = 3x^{\log 2} + 4$.

β) Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{\log_3 x - 1}{\log_3\left(\frac{x}{3}\right)} = 4 \log_9 x - (\log_3 x)^2 + 4$

6. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα :
$$\frac{1 + 3\eta\mu 4x - \sigma\upsilon\nu 4x}{3 + \eta\mu 4x + 3\sigma\upsilon\nu 4x} \cdot \frac{1 - \epsilon\varphi^2 x}{\epsilon\varphi x} = 2 \quad .$$

β) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση :
$$2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\Gamma}{2} + 2\eta\mu \Gamma \sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} = 1 + \frac{\beta + \gamma}{2R} \quad ,$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Ο Διευθυντής

Ανδρέας Ματσικάρης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2012 ΜΑΘΗΜΑ
: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ
ΤΑΞΗ : Β'

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 21 /5/2012

ΧΡΟΝΟΣ: 2½ ώρες

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

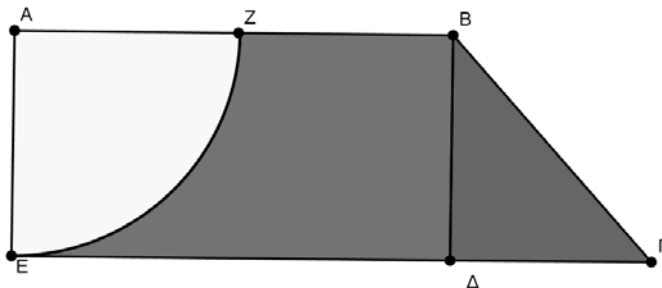
- ΟΔΗΓΙΕΣ:** α) **Επιτρέπεται** η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
β) Να γράφετε **μόνο με πέννα μαύρη ή μπλε** (τα σχήματα με μολύβι).
γ) **Δεν επιτρέπεται** η χρήση διορθωτικού υγρού.
-

ΜΕΡΟΣ Α' : Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε **μόνο τις 12.**
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **5 μονάδες.**

1. Να λύσετε τις εξισώσεις : α) $\log_3 x = 2$ β) $4^x = 2^{x+12}$.
2. Να βρείτε το x ώστε οι αριθμοί $x+2$, $2x+4$, $4x+3$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
3. Δίνεται η ακολουθία $4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$
Να βρείτε :
(α) Το είδος της.
(β) Το άθροισμα των άπειρων όρων της.
4. Να βρείτε το επιτόκιο με το οποίο τοκίστηκαν €8000 για 3 χρόνια και έδωσαν τόκο €960.
5. Να υπολογίσετε την γωνιά $\hat{A}$ ($\hat{A} < 90^\circ$) τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ που έχει εμβαδόν $E = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $\beta = 6 \text{ cm}$ και $\gamma = 8 \text{ cm}$.
6. Να λύσετε την εξίσωση: $\log(\chi - 3) + \log \chi = 2 - 2\log 5$.

7. Να υπολογίσετε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων αριθμητικής προόδου η οποία έχει πρώτον όρο 6 και εντέκατο όρο 46.
8. Ισόπλευρο τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο μήκους 62,8cm .
Να βρείτε την πλευρά του (λ3).
9. Να αποδείξετε ότι : $\frac{3\log 6 - (\log 2 + \log 3)}{\log 4 + \log 9} = 1$.
10. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει η σχέση:
$$2\beta\sigma\upsilon\nu A - 2R\eta\mu\Gamma = \frac{(\beta - a)(\beta + a)}{\gamma}.$$
11. Να λύσετε την εξίσωση $\log x(2\log x + 5) = 3$.
12. Το εμβαδό κυκλικού τομέα με επίκεντρη γωνία 130° είναι $13\pi \text{ cm}^2$.
Να βρείτε:
α) Την ακτίνα του κύκλου.
β) Την περίμετρο του κυκλικού τομέα.
13. Ο τρίτος όρος γεωμετρικής προόδου ($\lambda > 0$) είναι 18 και ο έβδομος όρος 1458. Να σχηματίσετε την πρόοδο.
14. Ένας δημόσιος υπάλληλος παίρνει €2000 το μήνα. Λόγω οικονομικής κρίσης θα του αποκοπεί από τον μισθό του το 10%. Με τον μισθό του θέλει να αγοράσει ένα ηλεκτρονικό υπολογιστή ο οποίος είναι σε προσφορά και πωλείται με έκπτωση 30%. Αν ο υπολογιστής έχει αρχική τιμή €1000 να βρείτε :
α) Πόσα θα αγοράσει τον υπολογιστή ο δημόσιος υπάλληλος αν τον αγοράσει τώρα που βρίσκεται σε προσφορά.
β) Πόσα θα του αποκοπούν από τον μισθό του.
γ) Πόσα χρήματα θα του μείνουν από τον μισθό του.

15. Στο πιο κάτω σχήμα το $AB\Delta E$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με $AB=8\text{cm}$ και $B\Delta=5\text{cm}$. Το τόξο $\widehat{EZ}$ γράφτηκε με κέντρο το A και ακτίνα την AE . Το $B\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με $\widehat{B\Gamma\Delta} = 45^\circ$. Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο του σκιασμένου μέρους του σχήματος.

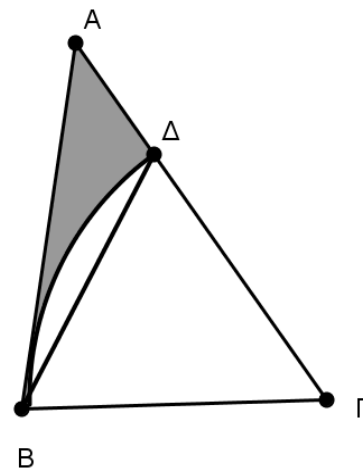


ΜΕΡΟΣ Β' : Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- Σε αριθμητική πρόοδο ο τέταρτος και ο δέκατος όρος έχουν άθροισμα 40 ενώ η διαφορά του τρίτου από τον ένατο είναι 18. Να βρείτε :
α) Τον πρώτο όρο και την διαφορά της αριθμητικής προόδου.
β) Το πλήθος των όρων που έχουν άθροισμα 1365.
- α) Τριγώνου $AB\Gamma$ δίνονται : $\alpha = 2\sqrt{3} \text{ cm}$, $\widehat{A} = 60^\circ$ και $\beta = 4\text{cm}$. Να επιλύσετε το τρίγωνο.
β) Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\frac{2\beta \epsilon}{\gamma \mu \alpha} - 2\beta \gamma \sigma \nu \alpha = \beta^2$ να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
- Να λύσετε τις εξισώσεις :
α) $9^x - 3^{x+1} - 54 = 0$
β) $\log_2[\log_3(3x-6)] = 1$
- Οι αριθμοί $x-2$, $x+4$, $5x+2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ($x > 0$) να βρείτε :
α) Το x .
β) Το άθροισμα των 6 πρώτων όρων (με χρήση τύπου).

5. Ένα κεφάλαιο τοκίστηκε προς 4% για 3 χρόνια και έγινε μαζί με τους τόκους του €33600. Να βρείτε τον τόκο που θα δώσει ένα άλλο κεφάλαιο που είναι τριπλάσιο του πρώτου κεφαλαίου αν θα τοκιστεί προς 6% για ένα χρόνο και δέκα μήνες.

6. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το τόξο $B\Delta$ γράφτηκε με κέντρο το Γ και ακτίνα το $B\Gamma$. Αν η χορδή $B\Delta$ είναι πλευρά εξαγώνου (λ6) να βρείτε:
- α) Την γωνιά Γ .
 - β) Την πλευρά $B\Gamma$ αν το μήκος του τόξου $B\Delta$ είναι ίσο με 6,28cm
 - γ) Το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους αν η $A\Gamma$ είναι 2cm μεγαλύτερη της $\Delta\Gamma$.



Ο Διευθυντής

Ανδρέας Ματσικάρης

Οι εισηγητές:

Χριστίνα Αντωνιάδη

Μερόπη Σάββα

Νίκη Χαραλάμπους

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**Μάθημα:** Μαθηματικά Κατεύθυνσης **ΤΑΞΗ Β΄ Λυκείου****Ημερομηνία:** 25 Μαΐου 2011 **Διάρκεια:** 2:30΄**ΟΔΗΓΙΕΣ:** Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες

Να γράφετε μόνο με μαύρο ή μπλε μελάνι (τα σχήματα μόνο με μολύβι)

Επιτρέπεται η χρήση εγκεκριμένης υπολογιστικής μηχανής

Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού (tipp-ex)

Επισυνάπτεται τυπολόγιο εγκεκριμένο από το Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού

ΜΕΡΟΣ Α: Από τα 15 θέματα να λύσετε **ΜΟΝΟ** τα 12.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1) Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{4x+5}{x^2-x-12}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
- 2) Να υπολογισθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:
(α) $y = x^5 - 3x^3 + 5x - e^3$ (β) $y = \sin 3x$
- 3) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ_1) η οποία περνά από το μέσο Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ με άκρα Α(1,4) και Β(3,-2) και είναι κάθετη με την ευθεία (ϵ_2) .
- 4) Το άθροισμα του πρώτου και του τέταρτου όρου μιας Αριθμητικής Προόδου είναι 17 και ο ένατος όρος είναι τετραπλάσιος του δεύτερου. Να σχηματιστεί η Αριθμητική Πρόοδος.

5) Να υπολογισθούν τα όρια: (α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{18\eta\mu(x-2)}{x^2+2x-8}$ (β) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+4x-5}{9-x^2}$

6) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση —, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της.

8) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κώνου είναι $32\pi \text{ cm}^2$ και η γενέτειρα του λ σχηματίζει γωνία 60° με τη βάση του. Να βρείτε τον όγκο του κώνου.

9) Να λυθεί η εξίσωση: $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$.

10) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με — cm, — cm και —. Να υπολογίσετε:

- (α) τις γωνίες — και — και
(β) το εμβαδόν του τριγώνου.

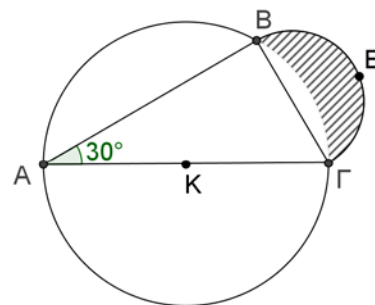
11) Να λυθεί η εξίσωση: —.

12) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ακμή βάσης 12cm και όγκο 384cm^3 . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

13) Να λύσετε την εξίσωση: —

14) Έχουμε δύο Γεωμετρικές Προόδους με ίδιο πρώτο όρο και αντίθετους λόγους. Ονομάζουμε και το άθροισμα των 15 πρώτων όρων των δύο Γ.Π. αντίστοιχα. Αν είναι το άθροισμα των τετραγώνων των 15 πρώτων όρων της πρώτης Γ.Π., να αποδείξετε ότι: .

15) Δίνεται κύκλος (K,R) . Η διάμετρος $ΑΓ$ σχηματίζει γωνία 30° με τη χορδή $ΑΒ$. Με διάμετρο $ΒΓ$ γράφουμε ημικύκλιο $ΒΕΓ$. Να βρείτε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους συναρτήσει του R .



ΜΕΡΟΣ Β: Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 4.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) (α) Αν , να αποδείξετε ότι: .
(β) Αν , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και κάθετης της καμπύλης στο σημείο με τετμημένη .
- 2) Μια απολύτως φθίνουσα Γεωμετρική και μια Αριθμητική Πρόοδος έχουν τον ίδιο πρώτο όρο. Ο τέταρτος όρος της Α.Π. είναι -1. Η διαφορά της Α.Π. είναι διπλάσια του λόγου της Γ.Π και το άθροισμα των απείρων όρων της Γ.Π. είναι ίσο με το δεύτερο όρο της Α.Π. Να σχηματίσετε την Γ.Π.
- 3) Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με κορυφή $Γ(2,7)$. Αν το ύψος $ΑΔ$ έχει εξίσωση και η διάμεσος $ΑΜ$ με εξίσωση , να βρείτε:
 - (α) την εξίσωση της πλευράς $ΒΓ$
 - (β) τις συντεταγμένες των κορυφών $Α$ και $Β$
 - (γ) την απόσταση της κορυφής $Α$ από την πλευρά $ΒΓ$
 - (δ) το μήκος της πλευράς $ΒΓ$
 - (ε) το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$

4) (α) Αν _____, αποδείξτε ότι _____

(β) Με τη βοήθεια του πιο πάνω ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο:

i. Να αποδείξετε χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής ότι _____

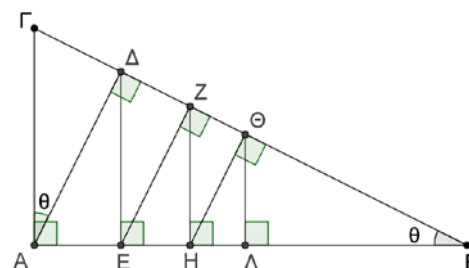
ii. Να λύσετε την εξίσωση: _____

5) Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma=1\text{m}$. Φέρουμε τμήμα $A\Delta$ κάθετο στην υποτείνουσα $B\Gamma$ και από το Δ κάθετο στην AB . Αυτό επαναλαμβάνεται σε άπειρα βήματα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

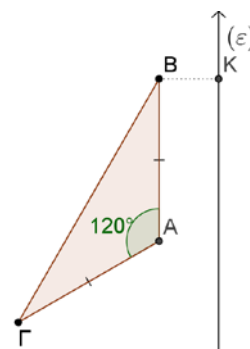
(α) _____, και

(β) τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων που είναι κάθετα στην AB σχηματίζουν φθίνουσα Γ.Π. με

(γ)



6) Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) με _____. Το τρίγωνο περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε) που είναι παράλληλη με την πλευρά AB κι απέχει απόσταση ίση με 2cm . Αν $A\Gamma=$ _____ cm, να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδό της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται



ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Bambang Παναγιώτα

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

$$\begin{aligned} \eta\mu(A+B) &= \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu A \eta\mu B & \eta\mu(A-B) &= \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B - \sigma\upsilon\nu A \eta\mu B \\ \sigma\upsilon\nu(A+B) &= \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B - \eta\mu A \eta\mu B & \sigma\upsilon\nu(A-B) &= \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B + \eta\mu A \eta\mu B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\eta\mu A \eta\mu B &= \sigma\upsilon\nu(A-B) - \sigma\upsilon\nu(A+B) \\ 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B &= \sigma\upsilon\nu(A+B) + \sigma\upsilon\nu(A-B) \\ 2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu B &= \eta\mu(A+B) + \eta\mu(A-B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta\mu 2A &= 2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu A & \eta\mu A &= \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2A}{2} \\ \sigma\upsilon\nu 2A &= \sigma\upsilon\nu^2 A - \eta\mu^2 A & \sigma\upsilon\nu A &= \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2A}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta\mu A + \eta\mu B &= 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} & \eta\mu A - \eta\mu B &= 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \\ \sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B &= 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} & \sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B &= 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \eta\mu \frac{B-A}{2} \end{aligned}$$

	Εμβαδόν Παράπλευρης Επιφάνειας	Εμβαδόν Κυρτής Επιφάνειας	Όγκος
Ορθό πρίσμα	$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot v$		$V = E_{\beta} \cdot v$
Κανονική Πυραμίδα	$E_{\pi} = \frac{\Pi_{\beta} \cdot h}{2}$		$V = \frac{E_{\beta} \cdot v}{3}$
Κύλινδρος		$E_{\kappa} = 2\pi Rv$	$V = \pi R^2 v$
Κώνος		$E_{\kappa} = \pi R\lambda$	$V = \frac{\pi R^2 v}{3}$
Κόλυρος κώνος		$E_{\kappa} = \pi(R+r)\lambda$	$V = \frac{\pi v}{3}(R^2 + Rr + r^2)$
Σφαίρα		$E = 4\pi R^2$	$V = \frac{4\pi R^3}{3}$

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΤΑΞΗ: Β' ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 25/05/12

ΟΔΗΓΙΕΣ: 1. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.2. Να γράφετε μόνο με **μπλε** ή **μαύρο** μελάνι. (Τα σχήματα με μολύβι)

3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

4. Επιτρέπεται η χρήση **μη** προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

5. Τα σχήματα του φυλλαδίου να μεταφέρονται στη θέση που λύεται η άσκηση.

6. Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο που αποτελείται από μια σελίδα.

ΜΕΡΟΣ Α (60 ΜΟΝΑΔΕΣ)Από τις δεκαπέντε (15) ασκήσεις να λύσετε **μόνο** τις δώδεκα (12).

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Το εμβαδόν της βάσης κώνου είναι $16\pi \text{ cm}^2$ και η ολική επιφάνειά του είναι $36\pi \text{ cm}^2$.
Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου.

2. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των συναρτήσεων:

α) $y = 3x^4 + 5x + 2$

β) $y = \frac{x^3}{\eta\mu x}$

3. Να δείξετε ότι: $\frac{\log_2 32 + \log_3 27}{2\log 100 - \log 10} = \frac{8}{3}$

4. Να υπολογίσετε το πιο κάτω όριο: $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 7x}{x^2 - 8x + 7}$

5. Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης: $2\eta\mu 2\chi - \sqrt{3} = 0$
6. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{2x-1}{x^2+5x-6}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
7. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta$, να δείξετε ότι $\hat{\Gamma} = 120^\circ$.
8. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που περνά από το σημείο τομής των ευθειών $x - y + 2 = 0$ και $3x + 2y + 1 = 0$ και είναι παράλληλη με την $x + y + 4 = 0$.
9. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της $y = \frac{x^2+2}{x^2+1}$
10. Να λύσετε την εξίσωση: $\log(x-3) + \log 2 = \log(2x+1) - \log 3$
11. Να δείξετε ότι: $\frac{\sigma\upsilon\nu 2a - \sigma\upsilon\nu 4a}{\sigma\upsilon\nu 2a + \sigma\upsilon\nu 4a} = \epsilon\phi 3a \cdot \epsilon\phi a$
12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2 + \frac{5}{x}$ και $g(x) = \frac{2x+3}{x+2}$.
Να προσδιορίσετε (πεδίο ορισμού και τύπο) τις συναρτήσεις $f - g$ και $\frac{f}{g}$.
13. Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της καμπύλης $x^2 + y^2 + xy - 4 = 0$ στο σημείο της με $x = 2$ και $y < 0$ είναι η $y + x = 0$.
14. Να δείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu^2(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu 2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 2\beta = 1$
15. Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\lambda=3$, $a_n = 972$ και $\Sigma_n = 1456$, να υπολογίσετε το n .

ΜΕΡΟΣ Β' (40 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Από τις έξι (6) ασκήσεις να λύσετε μόνο τις τέσσερις (4).
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. α) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης: $\eta\mu(2\chi + 60^\circ) = \sigma\upsilon\nu(90^\circ + \chi)$, που βρίσκονται στο διάστημα $[0^\circ, 360^\circ)$

β) Αν $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ και ισχύει $5\eta\mu^2\alpha + 3\sigma\upsilon\nu\alpha - 5 = 0$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \eta\mu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha$.

2. Αριθμητική πρόοδος και φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος, έχουν τον ίδιο πρώτο όρο.
Η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι τετραπλάσια του λόγου της γεωμετρικής προόδου και το άθροισμα του έβδομου όρου της αριθμητικής και του δεύτερου όρου της γεωμετρικής προόδου είναι 21. Αν το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου ισούται με 16, να βρείτε τις δυο προόδους.

3. Δίνεται η συνάρτηση: $y = xe^{-x}$
α) Να βρείτε την πρώτη $\left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$ και δεύτερη παράγωγο $\left(y'' = \frac{d^2y}{dx^2}\right)$ της y .

β) Αν ισχύει η σχέση $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5 = e^{x^2} - y$, να δείξετε ότι $x^2 = \ln 5$.

4. α) Να λύσετε την εξίσωση:
$$-7\epsilon\phi 4\chi - 4\epsilon\phi 4\chi - \epsilon\phi 4\chi + 2\epsilon\phi 4\chi + 5\epsilon\phi 4\chi + \dots + 35\epsilon\phi 4\chi = 70\sqrt{3}$$

στο διάστημα $(0^\circ, 180^\circ)$
β) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{8} + \dots$

5. Τρίγωνο ΑΒΓ έχει Α(1, -3), Β(9, 3). Η εξίσωση της ΑΓ είναι $y = 2x - 5$ και της ΒΓ είναι $2y + x = 15$, Μ μέσο της ΑΒ.
Να βρεθούν:
(α) οι συντεταγμένες του σημείου Γ και του σημείου Μ
(β) η εξίσωση της ευθείας που περνά από το Γ και είναι παράλληλη με την ΑΒ.
(γ) η εξίσωση της διαμέσου ΓΜ.
(δ) το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΜ.
(ε) η εξίσωση του ύψους ΓΔ.
(στ) το μήκος του ύψους ΓΔ.

6. Ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, $AB = 8a$ cm, $ΓΔ = 11a$ cm και $AD = 4a$ cm, περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την μικρή βάση ΑΒ. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

ΟΛΥΜΠΙΑ ΙΩΑΝΝΟΥ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

Μάθημα: Μαθηματικά

Ημερομηνία: 22/05/2012

Τάξη : Β΄ Λυκείου Κατεύθυνση

Χρόνος : 2:30΄

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο)
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
4. Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε ή μαύρο (Τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).
5. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.
6. Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

Μέρος Α΄

Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα :

$$\frac{5x+1}{(x+1)(x-1)}$$

2. Κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας η περίμετρος της βάσης είναι 64cm και ο όγκος της είναι 1280cm³. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.
3. Ο πρώτος όρος Αριθμητικής Προόδου είναι 3 και ο δέκατος έκτος όρος είναι τριπλάσιος του πέμπτου όρου. Να σχηματίσετε την πρόοδο.
4. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κυλίνδρου είναι 64π cm² και η ακτίνα της βάσης είναι διπλάσια του ύψους του. Να βρείτε:
- α) Τον όγκο του.
 - β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.
5. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{1-x^2}{3+2x}$

β) $g(x) = \frac{e^{2x}}{x^4}$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}}$. Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$.

β) Το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

7. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται οι συντεταγμένες των κορυφών $A(1,3)$, $B(-2,1)$ και $\Gamma(2,-2)$.
Να βρείτε:

α) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Την απόσταση του σημείου B από την ευθεία $3x+4y-18=0$.

8. Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 2\alpha}{2\sigma\upsilon\nu 3\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 2\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha} = 2\eta\mu\alpha$.

9. Να λύσετε την εξίσωση $\log_{\sqrt{2}}x \cdot \log_2x \cdot \log_{2\sqrt{2}}x \cdot \log_4x = 54$.

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3x - 2$ και $g(x) = \sqrt{4x - x^2}$. Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$ (τύπο και πεδίο ορισμού).

11. α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $f(x) = \ln x - \frac{2x^2}{3}$ στο σημείο της με $x=1$ και την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης $y^2+x=5$ στο σημείο της $A(4,-1)$.
β) Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι πιο πάνω ευθείες.

12. Να λύσετε την εξίσωση: $2\epsilon\phi 3x + 4\epsilon\phi 3x + 8\epsilon\phi 3x + \dots + 256\epsilon\phi 3x = 170\sqrt{3}$, $x \in (0)$.

13. Να δείξετε ότι: $\frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha} = 1 + \epsilon\phi\frac{\alpha}{2}$.

14. Δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο $AB=2\alpha$ και έστω M το μέσο του τόξου AB . Η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο B τέμνει τη προέκταση της χορδής AM στο Γ . Να βρείτε, συναρτήσει του α , το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου $BM\Gamma$.

15. Να λύσετε την εξίσωση $\log_x 27 - 3^{-\log_3 \frac{1}{2}} = \log_3 x + \log_3 \frac{1}{81}$.

Μέρος Β΄

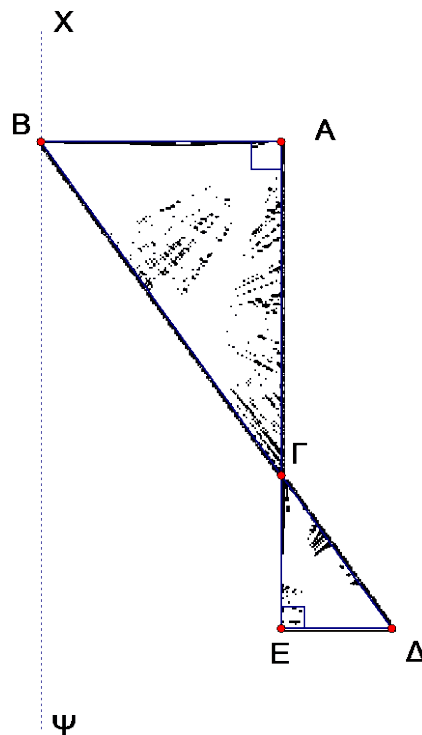
Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε **μόνο** τις 4. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $y = \ln(1 + \eta \mu x)$. Να δείξετε ότι $\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = e^{-y}$.
2. Δίνεται Αριθμητική πρόοδος με όρους $\alpha_1 = \log \sigma \nu \eta \theta$ και $\alpha_3 = \log \frac{\eta \mu^2 \theta}{\sigma \nu \eta \theta}$ όπου $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και διαφορά $\delta = \frac{\log 3}{2}$.
- α) Να δείξετε ότι $\theta = \frac{\pi}{3}$.
- β) Να λύσετε την εξίσωση $\log \frac{3^{x+3} + 9 \cdot 2^x}{22 \cdot 2^{x-1} + 2 \cdot 3^x} = \alpha_5$, όπου α_5 ο πέμπτος όρος της πιο πάνω προόδου.
3. Τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει κορυφή Δ(5, 2) και εξίσωση μιας διαγωνίου $2y - x - 4 = 0$.
- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Β.
- β) Να βρείτε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ.
- γ) Να δείξετε ότι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου είναι $\alpha = \sqrt{10}$ μονάδες.
- δ) Με κέντρο την κορυφή Δ και ακτίνα τη ΔΑ γράφουμε τόξο μέσα στο τετράγωνο. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη διαγώνιο ΑΓ και το τόξο αυτό.
4. Δίνεται η συνάρτηση $y = 1 + \sigma \nu \eta 2x$, $x \in \pi + \frac{\pi}{2} \kappa \in \mathbb{Z}$.
- α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί y , $-\frac{1}{2} \cdot \frac{dy}{dx}$, $2\eta \mu^2 x$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
- β) Να δείξετε ότι ο λόγος της Γ.Π είναι $\lambda = \epsilon \phi x$.
- γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5\lambda}{3x}$, όπου λ ο λόγος της γεωμετρικής προόδου.
- δ) Αν οι πιο πάνω όροι είναι οι τρεις πρώτοι όροι φθίνουσας Γ.Π. με $0 < x < \frac{\pi}{4}$, να δείξετε ότι το άθροισμα των απείρων όρων της είναι $\Sigma_{\infty} = \frac{2\sigma \nu \eta^3 x}{\sigma \nu \eta x - \eta \mu x}$.

5. α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$, αν $\hat{B}-\hat{\Gamma}=90^\circ$ και $\frac{\beta+\gamma}{\alpha}=\sqrt{2}$.

β) Με βάση τον ορισμό της παραγώγου, να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $y=\sqrt{x}$.

6. Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\hat{A}=90^\circ$), η $AB=2\alpha$, η $AE\parallel X\Psi$ και η πλευρά $B\Gamma$ σχηματίζει με τον άξονα $X\Psi$ γωνία 30° . Το τρίγωνο $\Gamma E\Delta$ είναι ορθογώνιο ($\hat{E}=90^\circ$), η $\Gamma E=\alpha\sqrt{3}$ και τα σημεία B, Γ, Δ είναι συνευθειακά. Να βρείτε τον όγκο και την επιφάνεια του στερεού που παράγεται όταν το σκιασμένο σχήμα περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα $X\Psi$.



Οι Εισηγητές

Μαρία Κελίρη
Μάριος Κυριάκου
Στέλλα Αγγελή

Ο Συντονιστής

Αντρέας Στυλιανού Β.Δ.

Η Διευθύντρια

Κωνσταντία Καλογήρου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΤΑΞΗ: Β' ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 25/05/2012
ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ώρες

Βαθμός:
Ολογράφως:
Υπογραφή:

ΟΝΟΜΑ: ΤΜΗΜΑ: ΑΡΙΘΜΟΣ:.....

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 14 σελίδες.

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να γράψετε τις απαντήσεις σας πάνω στο εξεταστικό δοκίμιο.
2. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
3. Να γράψετε με μελάνι μαύρο ή μπλέ (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού.

ΜΕΡΟΣ Α: Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε **μόνο** τις 12.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα : $\frac{3x-7}{(x-3)(x-1)}$.
2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης: $y = \frac{x^2 + e^x}{x-1}$
3. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{x}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x + 4}{6x^2 - 5}$

4. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\eta\mu 2\alpha}{2\sigma\upsilon\nu 3\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha} = 2\eta\mu\alpha$
5. α) Να βρείτε τις τιμές $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι αριθμοί $x - 4$, $x + 4$, $3x - 4$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
 β) Αν ο $x - 4$ είναι ο δεύτερος όρος της αριθμητικής προόδου να βρείτε το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων της προόδου.
6. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης $2\alpha\text{cm}$. Το παράπλευρο ύψος της πυραμίδας σχηματίζει με το ύψος της πυραμίδας γωνία 30° . Να υπολογίσετε συναρτήσει του α :
 α) Τον όγκο της πυραμίδας.
 β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.
7. Να λύσετε την εξίσωση: $\log_3\left(\frac{x}{27}\right) + \log_x 9 = 0$
8. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x - 4y = 12$ και $\varepsilon_2 : -6x + 8y - 4 = 0$.
 α) Να δείξετε ότι οι δύο ευθείες είναι παράλληλες.
 β) Να βρείτε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 .
9. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ και $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+3}$ είναι ίσες. Στην περίπτωση που είναι $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο $f(x) = g(x)$.
10. Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu x} = 9^{1 - 2\eta\mu^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ στο διάστημα $[0^\circ, 180^\circ]$.
11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ με $x \geq 4$. Να βρείτε:
 α) Το πεδίο τιμών της $f(x)$.
 β) Τον τύπο της αντίστροφης $f^{-1}(x)$ αν αυτή ορίζεται.
 γ) Το $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$.

12. Δίνεται κώνος με ακτίνα $p = 5\text{cm}$ και $v = 6\text{cm}$ και κύλινδρος με ακτίνα $R = 10\text{cm}$. Ο κώνος είναι βυθισμένος στον κύλινδρο που είναι γεμάτος με νερό. Να υπολογίσετε πόσο θα κατέβει η στάθμη του νερού στον κύλινδρο αν αφαιρεθεί ο κώνος.

13. Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

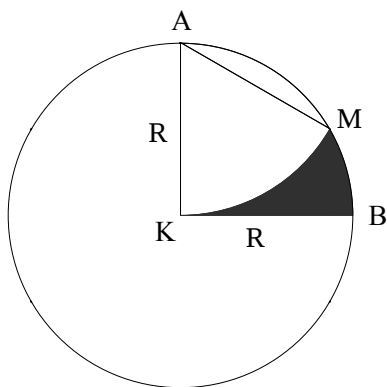
$$\log(x+1) + \log \sqrt[3]{x+1} + \log \sqrt[9]{x+1} + \log \sqrt[27]{x+1} + \dots = 3$$

14. Δίνεται η καμπύλη $y = x \cdot \ln x$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της με τετμημένη $x = e$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της καμπύλης $y = x \cdot \ln x$ στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη προς τον άξονα xx' .

15. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) . Οι ακτίνες KA και KB είναι κάθετες. Με κέντρο το A και ακτίνα R γράφουμε τόξο που τέμνει το τόξο AB στο M . Να βρείτε το **εμβαδόν** και την **περίμετρο** του μεικτόγραμμου τριγώνου MKB , συναρτήσει του R .



ΜΕΡΟΣ Β: Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$. Η πλευρά του AB έχει εξίσωση $x + 5y = 38$, η διαγώνιος του $A\Gamma$ έχει εξίσωση $x + y - 10 = 0$ και οι συντεταγμένες μιας κορυφής του είναι $(4, 2)$. Να βρείτε:

- α) Τις συντεταγμένες της κορυφής A .
- β) Την εξίσωση της διαγωνίου $B\Delta$.
- γ) Τις συντεταγμένες των υπόλοιπων κορυφών.
- δ) Την περίμετρο του ρόμβου.
- ε) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$.
- στ) Την εφαπτομένη της οξείας γωνίας $\hat{A}B\Delta$.

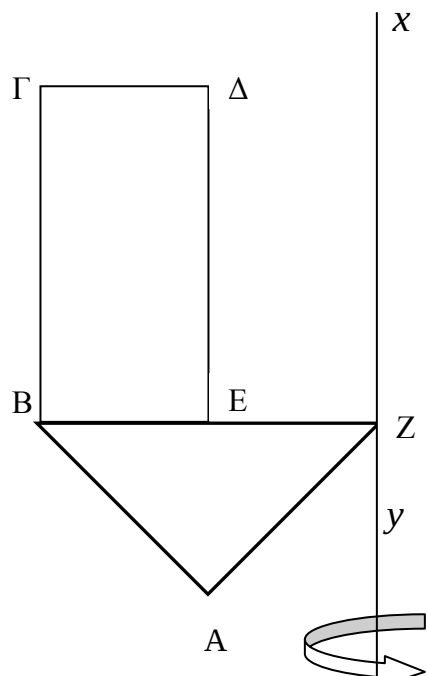
2. Αν $x \cdot e^y - 3 = x$, να δείξετε ότι:

α) $y = \ln\left(\frac{x+3}{x}\right)$

β) $\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{x \cdot (x+3)}$

γ) $x^4 \cdot e^{2y} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + x^2 \cdot e^y \cdot (2x+3) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

3. Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο ABZ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AZ = \sqrt{2} \text{ cm}$. Η πλευρά AZ σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα περιστροφής xy . Το $B\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο με $(B\Gamma) = 2(BE)$. Το E είναι το μέσο της BZ και $BZ \perp xy$. Να βρείτε το εμβαδόν και τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται από την πλήρη περιστροφή του σχήματος $AB\Gamma\Delta EZ$ γύρω από τον άξονα xy .



4. α) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$ και $g(x) = \frac{x+2}{x^2+3x}$. Να ορίσετε την συνάρτηση $\frac{g}{f}$.

β) Δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο την AB . Η χορδή του AG είναι ίση με την πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο και η χορδή του AD είναι ίση με την πλευρά κανονικού τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Να βρείτε το **εμβαδόν** και την **περίμετρο** του μεικτογράμμου τριγώνου AGD .

γ) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2}\right) + \sigma\nu\nu^2\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right) = 1 + \frac{\eta\mu x}{2}$

5. Δίνεται η τριγωνομετρική παράσταση: $\kappa = \frac{\sigma\nu\nu 2x}{\eta\mu 2x + \sigma\nu\nu 2x - 1} \cdot \frac{1}{1 + \sigma\phi x}$ και η λογαριθμική

$$\text{εξίσωση: } \log_2(5^{\rho+1} - 3^{\rho+2}) = 2 + \log_2(4 \cdot 3^{\rho} - 5^{\rho}).$$

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = \frac{1}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\rho = 2$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $\rho^{2x} + 3 \cdot \kappa^{-1} = 5 \cdot \kappa^{-x}$

6. α) Να βρείτε την παράγωγο της πιο κάτω συνάρτησης:

$$y = \sqrt{x} + \eta\mu^3 2x + \log_4(x^3 + 1) + 5^{3x} + e^e$$

β) Αριθμητική πρόοδος και φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος έχουν τον ίδιο πρώτο όρο. Το άθροισμα

των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου ισούται με το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 5} - 2}$. Η διαφορά της

αριθμητικής προόδου και ο λόγος της γεωμετρικής συνδέονται με την πιο κάτω σχέση :

$e^{\ln 2} = 10^{-\log 8}$. Το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου ισούται με τον έκτο όρο της. Να σχηματίσετε τις δύο προόδους.

Ο Διευθυντής

Αντωνίου Ανδρέας

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Β΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22 / 05 / 2012

ΧΡΟΝΟΣ : 2.30΄

ΩΡΑ : 7.45΄ – 10.15΄

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ .

Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο που αποτελείται από μία (1) σελίδα .

ΟΔΗΓΙΕΣ : α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.

β) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

γ) Να γράφεται μόνο με μελάνι μπλε ή μαύρο .

(τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι) .

ΜΕΡΟΣ Α΄: Από τα 15 θέματα να λύσετε ΜΟΝΟ τα 12 .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες .

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{x+9}{(x-3)(x+1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{x+1}{2x-1}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και το πεδίο τιμών της.

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 1}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$$

4. Να βρείτε το άθροισμα $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} \dots$

5. Να λύσετε την εξίσωση $2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$

6. Να παραγωγίσετε τις πιο κάτω συναρτήσεις και τα αποτελέσματα να τα εκφράσετε στη πιο απλή τους μορφή.

(α) $y = \frac{\eta\mu 2x}{e^x}$

(β) $y = \ln(\sin x)$

7. Δίνονται τα σημεία $A(-2, 7)$ και $B(1, -4)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το μέσο M του ευθυγράμμου τμήματος AB και είναι κάθετη στην ευθεία $4x - 2y = 6$

8. Να δείξετε ότι: $\frac{1 + \eta\mu 2\alpha - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \epsilon\phi\alpha$

9. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει τις διαστάσεις του ανάλογες προς τους αριθμούς 1, 2 και 3. Αν το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας είναι 198cm^2 να βρείτε τον όγκο του.

10. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ στο σημείο με τετμημένη $x = -1$ και τεταγμένη $y < 0$.

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $4^{x-1} + 2^{x-1} = 2$

(β) $\log x + \log(2x - 9) = 1 - \log 2$

12. Σε κανονική τετραγωνική πυραμίδα οι παράπλευρες έδρες σχηματίζουν με τη βάση γωνία 30° . Αν το εμβαδόν της βάσης της πυραμίδας είναι 100m^2 , να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής της επιφάνειας και τον όγκο της.

13. Αν $f(x) = 2\eta\mu 2x + 2\sigma\upsilon\nu 2x - x^2$ και $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f''(x) = -2$.

14. Γεωμετρική πρόοδος έχει $a_{21} = 4$. Να δείξετε ότι το γινόμενο των 41 πρώτων όρων της είναι 4^{41} .

15. Σε κώνο η ακτίνα R , το ύψος u και η γενέτειρα λ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Αν ο όγκος του είναι αριθμητικά ίσος με το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας, να βρείτε τον όγκο του.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Από τα 6 θέματα να λύσετε ΜΟΝΟ τα 4 .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες .

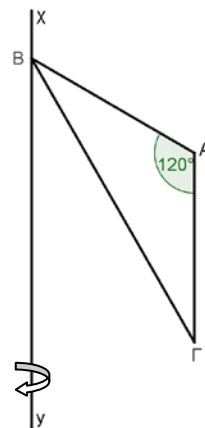
1. α) Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα $f(x) = \frac{3x^2 - 3x + 2}{(x-1)(x^2 + 1)}$.
β) Να βρείτε την $f'(x)$.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο με τετμημένη $x = -1$
2. Τρίγωνο ΑΒΓ έχει κορυφές Α(2, 3) , Β(5, 2) , Γ(3, 6)
α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο στο Α .
β) Να δείξετε ότι η πλευρά ΒΓ έχει εξίσωση $2x + y - 12 = 0$
γ) Να βρείτε το μήκος του ύψους ΑΔ.
δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΕΓ να είναι τετράγωνο.
3. Αριθμητική πρόοδος έχει ίδιο πρώτο όρο με τον πρώτο όρο φθίνουσας γεωμετρικής προόδου και η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι τετραπλάσια του λόγου της γεωμετρικής προόδου. Το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου είναι ίσο με τον δεύτερο όρο της αριθμητικής προόδου και το άθροισμα του πρώτου και του τέταρτου όρου της αριθμητικής προόδου είναι ίσο με 10. Να βρείτε τις δύο προόδους.
4. Αν $\ln(\sigma\upsilon\gamma) = x + \ln x$ να δείξετε ότι:
(α) $-\eta\mu y \frac{dy}{dx} = (x+1)e^x$
(β) $x(x+1)e^{2x} \frac{dy}{dx} - \eta\mu^2 y \frac{d^2 y}{dx^2} = (x+2)e^x \eta\mu y$

5. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές

με $AB = A\Gamma = 8 \text{ cm}$ και $\hat{A} = 120^\circ$. Η ευθεία χBy είναι

παράλληλη προς την πλευρά $A\Gamma$ του τριγώνου.

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ περιστρέφεται πλήρως γύρω από την ευθεία χBy . Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του τριγώνου $AB\Gamma$.



6. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi^2 = 4ax$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ και σημείο αυτής $A(at^2, 2at)$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο A.

(β) Η εφαπτομένη αυτή τέμνει τους άξονες συντεταγμένων στα σημεία B και Γ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $BO\Gamma$.

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$.

(δ) Το σημείο Δ βρίσκεται πάνω στην εφαπτομένη και $B\Gamma = \Gamma\Delta$. Να βρείτε συναρτήσει του t τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Ο ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Παπαβασιλείου Καρολίνα

Κλεάνθους Νεόφυτος

Παύλου Αρέστης

Αναστασίου Παντελίτσα

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΤΑΞΗ : Β΄

Ημερομηνία: 21/05/2012

Χρόνος : 2,5 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
β) Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

■ Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες. ■

ΜΕΡΟΣ Α΄: α) Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 12 .
β) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 (πέντε) μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{x-24}{(x+4)(x-3)}$
2. Σε αριθμητική πρόοδο ο πρώτος της όρος είναι ίσος με 2 και ο έβδομος όρος της είναι τετραπλάσιος από τον δεύτερο . Να σχηματίσετε την πρόοδο.

3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων :

α) $\psi = 4x^5 - \sqrt{x} + \sin 3x$

(β) $\psi = \frac{e^{4x}}{2 - \sin x}$

4. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{3 - 2x^2}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 12x}{x - 4}$

5. Δίνονται τα σημεία A(2,2) , B(4,2) και Γ(2,4).

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το μέσο της AB και είναι παράλληλη με τη BΓ.

6. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \frac{x-4}{x^2-9}$ και $g(x) = \frac{5}{x+3}$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f - g$ και $\frac{g}{f}$.

7. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται: $\alpha = 3\text{cm}$, $\beta = 2\sqrt{3}\text{cm}$, $E = \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$ και $\hat{\Gamma} < 90^\circ$, να επιλύσετε το τρίγωνο.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{4x+3}{x-2}$, $x > 3$ και $g(x) = \ln(2x-1)$.

Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της $g(x)$.

β) Το πεδίο τιμών της $f(x)$.

γ) Τον τύπο και το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.

9. Κύλινδρος και κώνος έχουν την ίδια ακτίνα βάσης και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι ίσο με το διπλάσιο του εμβαδού της κυρτής επιφάνειας του κώνου. Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι $3\alpha\text{cm}$ και ισχύει η σχέση $5R - 4\lambda = 0$, να βρείτε τον όγκο του κώνου, συναρτήσει του α .

10. Δίνεται η καμπύλη: $\psi^2 - 3x + x\psi + 3 = 0$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της με τετμημένη $x = 2$ και $\psi > 0$.

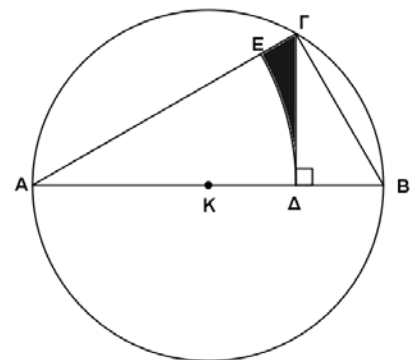
β) Αν η κάθετη τέμνει τον άξονα $x'x$ στο Β και τον άξονα $\psi'\psi$ στο Γ, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΟΓ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

11. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\log(x+10) + \log^3\sqrt{x+10} + \log^9\sqrt{x+10} + \log^{27}\sqrt{x+10} + \dots = 3$$

12. Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 8\alpha - 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu 7\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 6\alpha} = \sigma\phi 3\alpha$

13. Στο σχήμα δίνεται κύκλος (Κ, R) και η χορδή $B\Gamma = \lambda_6 = 4\text{cm}$. Η $\Gamma\Delta$ είναι κάθετη στην ΑΒ και το τόξο ΕΔ γράφτηκε με κέντρο Α και ακτίνα ΑΕ. Να υπολογίσετε το εμβαδό και την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου $\Gamma\Delta\text{E}$.



14. Αν σε οξυγώνιο τρίγωνο ισχύει η σχέση:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2B}{2}}, \text{ να αποδείξετε ότι οι αριθμοί } \eta\mu A, \sigma\upsilon\nu B, \eta\mu\Gamma,$$

είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^2\alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \alpha\eta\mu 2\alpha x$.

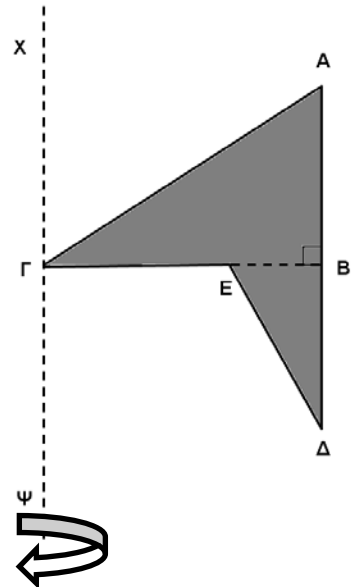
β) Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{\sqrt{x+4}-2} = 2$, να βρείτε την τιμή του α .

ΜΕΡΟΣ Β΄: α) Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 4.
 β) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 (δέκα) μονάδες.

1. Σε απόλυτα φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της είναι ίσο με $\frac{45}{4}$ και το άθροισμα των άπειρων όρων της είναι ίσο με 12. Αν $\lambda < 0$ τότε :
 α) Να σχηματίσετε τη γεωμετρική πρόοδο.
 β) Να βρείτε το άθροισμα των άπειρων θετικών όρων της προόδου.
2. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι εξισώσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΔ είναι $4x - 3\psi + 9 = 0$ και $\psi = -2x + 3$, αντίστοιχα. Αν δύο κορυφές του έχουν συντεταγμένες $(-3, -1)$ και $(3, -3)$ τότε :
 α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των άλλων κορυφών του.
 β) Να δείξετε ότι η διαγώνιος ΑΓ συμπίπτει με τον άξονα $\psi'\psi$.
 γ) Να βρείτε την απόσταση της κορυφής Β από τη ΔΓ.
 δ) Να βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.
3. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \ln\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu x$, $x \neq 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ και $g(x) = -\eta\mu x$.

Να αποδείξετε ότι : $\frac{g''(x)}{f'(x)} = \varepsilon\varphi^2 x$

4. Στο σχήμα η ΒΓ είναι κάθετη στην ΑΔ και δίνονται : ΑΒ=6cm, ΒΓ=8cm, ΒΕ=3cm και ΕΔ=5cm. Το σκιασμένο τετράπλευρο ΑΔΕΓ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα χψ που περνά από το Γ και είναι παράλληλος με την ΑΔ. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν του στερεού που παράγεται.



5. α) i) Να αποδείξετε ότι : $x^{\log 2} = 2^{\log x}$, $x > 0$.
 ii) Να λύσετε την εξίσωση: $2^{2\log x} = 3x^{\log 2} + 4$.

β) Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{\log_3 x - 1}{\log_3\left(\frac{x}{3}\right)} = 4 \log_9 x - (\log_3 x)^2 + 4$

6. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα :
$$\frac{1 + 3\eta\mu 4x - \sigma\upsilon\nu 4x}{3 + \eta\mu 4x + 3\sigma\upsilon\nu 4x} \cdot \frac{1 - \epsilon\varphi^2 x}{\epsilon\varphi x} = 2 \quad .$$

β) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση :
$$2\eta\mu\Lambda\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\Gamma}{2} + 2\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\Lambda}{2} = 1 + \frac{\beta + \gamma}{2R} \quad ,$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Ο Διευθυντής

Ανδρέας Ματσικάρης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΤΑΞΗ : Β΄

Ημερομηνία: 21/05/2012

Χρόνος : 2,5 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
β) Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

■ Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες. ■

ΜΕΡΟΣ Α΄: α) Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 12 .
β) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 (πέντε) μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{x-24}{(x+4)(x-3)}$
2. Σε αριθμητική πρόοδο ο πρώτος της όρος είναι ίσος με 2 και ο έβδομος όρος της είναι τετραπλάσιος από τον δεύτερο . Να σχηματίσετε την πρόοδο.

3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων :

α) $\psi = 4x^5 - \sqrt{x} + \sin 3x$

(β) $\psi = \frac{e^{4x}}{2 - \sin x}$

4. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{3 - 2x^2}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 12x}{x - 4}$

5. Δίνονται τα σημεία A(2,2) , B(4,2) και Γ(2,4).

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το μέσο της AB και είναι παράλληλη με τη BΓ.

6. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \frac{x-4}{x^2-9}$ και $g(x) = \frac{5}{x+3}$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f - g$ και $\frac{g}{f}$.

7. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται: $\alpha = 3\text{cm}$, $\beta = 2\sqrt{3}\text{cm}$, $E = \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$ και $\hat{\Gamma} < 90^\circ$, να επιλύσετε το τρίγωνο.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{4x+3}{x-2}$, $x > 3$ και $g(x) = \ln(2x-1)$.

Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της $g(x)$.

β) Το πεδίο τιμών της $f(x)$.

γ) Τον τύπο και το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.

9. Κύλινδρος και κώνος έχουν την ίδια ακτίνα βάσης και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι ίσο με το διπλάσιο του εμβαδού της κυρτής επιφάνειας του κώνου. Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι $3\alpha\text{cm}$ και ισχύει η σχέση $5R - 4\lambda = 0$, να βρείτε τον όγκο του κώνου, συναρτήσει του α .

10. Δίνεται η καμπύλη: $\psi^2 - 3x + x\psi + 3 = 0$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της με τετμημένη $x = 2$ και $\psi > 0$.

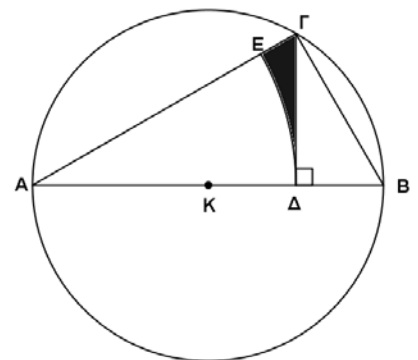
β) Αν η κάθετη τέμνει τον άξονα $x'x$ στο Β και τον άξονα $\psi'\psi$ στο Γ, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΟΓ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

11. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\log(x+10) + \log^3\sqrt{x+10} + \log^9\sqrt{x+10} + \log^{27}\sqrt{x+10} + \dots = 3$$

12. Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 8\alpha - 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu 7\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 6\alpha} = \sigma\phi 3\alpha$

13. Στο σχήμα δίνεται κύκλος (Κ, R) και η χορδή ΒΓ=λ₆ = 4cm. Η ΓΔ είναι κάθετη στην ΑΒ και το τόξο ΕΔ γράφτηκε με κέντρο Α και ακτίνα ΑΕ. Να υπολογίσετε το εμβαδό και την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ΓΔΕ.



14. Αν σε οξυγώνιο τρίγωνο ισχύει η σχέση:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2B}{2}}, \text{ να αποδείξετε ότι οι αριθμοί } \eta\mu A, \sigma\upsilon\nu B, \eta\mu\Gamma,$$

είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^2\alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \alpha\eta\mu 2\alpha x$.

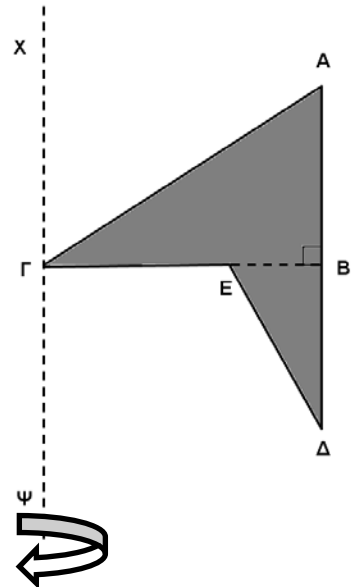
β) Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{\sqrt{x+4}-2} = 2$, να βρείτε την τιμή του α .

ΜΕΡΟΣ Β΄: α) Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 4.
 β) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 (δέκα) μονάδες.

1. Σε απόλυτα φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της είναι ίσο με $\frac{45}{4}$ και το άθροισμα των άπειρων όρων της είναι ίσο με 12. Αν $\lambda < 0$ τότε :
 α) Να σχηματίσετε τη γεωμετρική πρόοδο.
 β) Να βρείτε το άθροισμα των άπειρων θετικών όρων της προόδου.
2. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι εξισώσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΔ είναι $4x - 3\psi + 9 = 0$ και $\psi = -2x + 3$, αντίστοιχα. Αν δύο κορυφές του έχουν συντεταγμένες $(-3, -1)$ και $(3, -3)$ τότε :
 α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των άλλων κορυφών του.
 β) Να δείξετε ότι η διαγώνιος ΑΓ συμπίπτει με τον άξονα $\psi'\psi$.
 γ) Να βρείτε την απόσταση της κορυφής Β από τη ΔΓ.
 δ) Να βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.
3. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \ln\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu x$, $x \neq 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ και $g(x) = -\eta\mu x$.

Να αποδείξετε ότι : $\frac{g''(x)}{f'(x)} = \varepsilon\varphi^2 x$

4. Στο σχήμα η ΒΓ είναι κάθετη στην ΑΔ και δίνονται : ΑΒ=6cm , ΒΓ=8cm , ΒΕ=3cm και ΕΔ=5cm . Το σκιασμένο τετράπλευρο ΑΔΕΓ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα χψ που περνά από το Γ και είναι παράλληλος με την ΑΔ. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν του στερεού που παράγεται.



5. α) i) Να αποδείξετε ότι : $x^{\log 2} = 2^{\log x}$, $x > 0$.
 ii) Να λύσετε την εξίσωση: $2^{2\log x} = 3x^{\log 2} + 4$.

β) Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{\log_3 x - 1}{\log_3\left(\frac{x}{3}\right)} = 4 \log_9 x - (\log_3 x)^2 + 4$

6. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα :
$$\frac{1 + 3\eta\mu 4x - \sigma\upsilon\nu 4x}{3 + \eta\mu 4x + 3\sigma\upsilon\nu 4x} \cdot \frac{1 - \epsilon\varphi^2 x}{\epsilon\varphi x} = 2 \quad .$$

β) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση :
$$2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\Gamma}{2} + 2\eta\mu \Gamma \sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} = 1 + \frac{\beta + \gamma}{2R} \quad ,$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Ο Διευθυντής

Ανδρέας Ματσικάρης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: 21/5/2012

ΤΑΞΗ: Β΄ Κατεύθυνσης

Διάρκεια: 2.30

ΟΔΗΓΙΕΣ: Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
Να γράψετε με μελάνι μπλε ή μαύρο.
Το Εξεταστικό Δοκίμιο αποτελείται από 3 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{5\chi+1}{(\chi-1)(\chi+2)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

A2. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $y = e^{2\chi} \cdot \varepsilon\phi\chi$ β) $y = 4\chi^5 + \eta\mu 5\chi - \ln \chi$

A3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{\chi \rightarrow \infty} \frac{\chi^2 - \chi - 2}{\chi^2 - 2\chi}$ β) $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{7\eta\mu 2\chi}{2\chi^2 + 4\chi}$

A4. Να λύσετε την εξίσωση: $2\log_4 \chi + 2\log_{\chi} 4 = 5$

A5. Σε απόλυτα φθίνουσα Γ.Π. ο πρώτος όρος της είναι το $\frac{1}{2}$ του αθροίσματος των άπειρων όρων της και ο 3^{ος} όρος της είναι μικρότερος του 1^{ου} κατά 5. Να βρείτε την πρόοδο.

A6. α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{\log_3 9 + 6\log_2 \sqrt[3]{2} + \log_a a^6}{\log 1000 + 2\ln \sqrt{e} + \log_{\frac{1}{2}} 4}$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο: $L = \lim_{\chi \rightarrow 4} f(\chi)$ με $f(\chi) = \begin{cases} 3\chi + 1, & \chi \leq 4 \\ \chi^2 - 2, & \chi > 4 \end{cases}$

A7. Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $3\sigma\upsilon\nu 2\chi + 5 = 2\eta\mu\chi$

A8. Αν $f(\chi) = \sqrt{1-\chi}$ και $g(\chi) = \sqrt{\chi}$, να ορίσετε τις συναρτήσεις α) $f \cdot g$ β) $\frac{g}{f}$
(Πεδίο ορισμού και τύπο)

A9. Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha \cdot \eta\mu 6\alpha}{\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 6\alpha} = \varepsilon\phi 5\alpha$

A10. Κύλινδρος και κώνος έχουν την ίδια ακτίνα βάσης και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι διπλάσιο από το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου. Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι 3α cm και η γενέτειρα του κώνου είναι 15α cm, να βρείτε τον όγκο του κώνου συναρτήσει του α .

A11. Δίνονται τα σημεία $A(3,6)$, $B(7,2)$ και $\Gamma(3,-2)$.

- α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές.
β) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου AM.

A12. Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ και $\alpha = 2\beta$. Να δείξετε ότι $4E = 5\beta^2 - \gamma^2$.

A13. Κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας οι παράπλευρες ακμές σχηματίζουν γωνία 60° με το επίπεδο της βάσης της και ο όγκος της είναι $36\sqrt{6}$ cm³.

- α) Να αποδείξετε ότι η ακμή της βάσης της είναι 6 cm.
β) Να βρείτε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

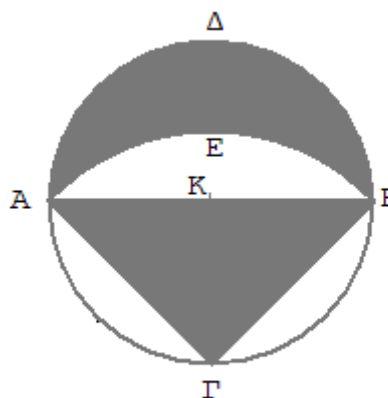
A14. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K,R).

Με κέντρο το Γ και ακτίνα την A Γ

γράφουμε τόξο $\widehat{A\Gamma B}$. Να δείξετε ότι το

εμβαδόν του μηνίσκου ADBEA είναι ίσο με

το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$.



A15. Δίνεται καμπύλη με εξίσωση $y = \frac{\alpha\chi^3 + \beta}{\chi}$ που περνά από το σημείο $A(2,2)$. Η εφαπτομένη της καμπύλης στο A έχει κλίση $\lambda = 3$. Να βρείτε τις τιμές των α και β .

ΜΕΡΟΣ Β΄: Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Δίνεται ρόμβος ABΓΔ με $A(1,3)$, $B(4,-1)$ και $2\chi - y = -1$ η εξίσωση μιας διαγωνίου του.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της άλλης διαγωνίου του ρόμβου είναι $\chi + 2y = 2$
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των διαγωνίων A Γ και BΔ και τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ.
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του ρόμβου.

B2. Αν $y = \left(\frac{1 - \chi^2}{1 + \chi^2} \right)^v$ να δείξετε ότι:

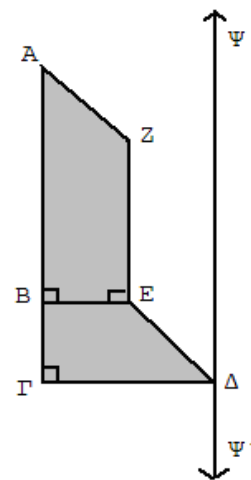
α) $(1 - \chi^4) \frac{dy}{d\chi} + 4v\chi y = 0$

β) η εφαπτομένη της $y = \frac{1 - \chi^2}{1 + \chi^2}$ στο σημείο $\chi = 2$ έχει εξίσωση $8\chi + 25y - 1 = 0$.

B3. α) Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ οι αριθμοί $\sigma\phi A, \sigma\phi B, \sigma\phi \Gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να δείξετε ότι τα $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β) Να λύσετε την εξίσωση $3\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi + 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = 1$ στο διάστημα $(0^\circ, 180^\circ)$

B4. Στο διπλανό σχήμα τα $ABEZ$ και $B\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνια τραπέζια. Το ύψος του κάθε τραπέζιου ισούται με a cm και $ZE = \Gamma\Delta = 2a$ cm. Αν $\hat{A} = 45^\circ$, να βρείτε το εμβαδόν και τον όγκο του στερεού που παράγεται μετά από πλήρη στροφή του σχήματος $AZE\Delta\Gamma B A$ γύρω από τον άξονα $\psi\psi'$.



B5. α) Να λύσετε την εξίσωση $3^{2\chi-1} \cdot 5^{3\chi+2} = \frac{9}{5} \cdot 5^{2\chi} \cdot 3^{3\chi}$

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi) = \sqrt{\chi-1}$ και $g(\chi) = \chi^2$. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

B6. α) Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \log\left(\frac{1-\chi}{1+\chi}\right)$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και

να δείξετε ότι $f(\alpha) + f(\beta) = f\left(\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}\right)$.

β) Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\eta\mu 4A + \eta\mu 4B + \eta\mu 4\Gamma = 0$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

-ΤΕΛΟΣ-

ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΟΥ ΙΩΑΝΝΗ- ΛΕΜΕΣΟΣ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ: 2011-2012

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Β' Κατεύθυνσης

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 21/05/2012

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2:30'

ΩΡΑ: 7:45 – 10:15 π.μ

Οδηγίες:

- α)** Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- β)** Να γράφετε με μελάνι μαύρο ή μπλε. Τα σχήματα με μολύβι.
- γ)** Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- δ)** Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α'

Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ 12. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

A1. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

(α) $y = x^4 - 6x^2 + 1$ (β) $y = \frac{2}{x}$.

A2. Δίνεται αριθμητική πρόοδος: 15, 12, 9, . . .

- (α) Να βρείτε τον 20^ο όρο της.
- (β) Να βρείτε το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της.

A3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 4x - 2)$ (β) $\lim_{x \rightarrow 0^-} 5^{\frac{2}{x}}$

A4. Κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, το εμβαδόν της βάσης της είναι 324cm² και ο όγκος της είναι 1296cm³. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της.

A5. Δίνονται τα σημεία A(3, -1) και B(2, 7).

- (α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.
- (β) Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB.

A6. Να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης: $\sin 2x - \eta \mu 4x = 0$

A7. Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες των καμπύλων, $2y + 32x + y^3 - x^2y = 0$ και

$y = \frac{x+3}{x+4}$ στα σημεία τους με $x = 0$, είναι κάθετες.

A8. Να λύσετε την εξίσωση: $2 \cdot 9^x - 3^{x+1} - 135 = 0$

A9. Το σημείο $M(a, \beta)$ ανήκει στην ευθεία ε με εξίσωση $y = 3x + 1$. Αν $a = \log \lambda$, $\beta = \log \mu$ ($\mu > 0, \lambda > 0$), να δείξετε ότι $\mu = 10 \cdot \lambda^3$.

A10. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-3}$ και $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$.

Να εξετάσετε αν οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν ισούνται, να βρείτε το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού, ώστε οι δύο συναρτήσεις να ισούνται.

A11. (α) Να αποδείξετε ότι: $1 + \eta\mu 2x = (\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)^2$

(β) Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω ταυτότητα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να

αποδείξετε ότι $\frac{1 + \eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}$.

A12. Κυλινδρικό δοχείο με ακτίνα βάσης 7 cm περιέχει νερό. Στο δοχείο ρίχνουμε μεταλλικούς κύβους ακμής 2cm ώστε να καλύπτονται πλήρως από το νερό και έτσι η στάθμη του νερού ανεβαίνει κατά 8cm. Να βρείτε πόσους κύβους ρίξαμε στο δοχείο.

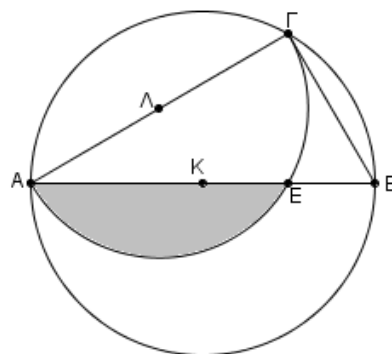
($\pi = \frac{22}{7}$)

A13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + 5 & x \leq 0 \\ \frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4}-2}, & x > 0 \end{cases}$

Να βρείτε την πραγματική τιμή του a , ώστε η $f(x)$ να είναι συνεχής στο $x = 0$.

A14. Σε μια γεωμετρική πρόοδο με $a_{501} = \kappa$, να υπολογίσετε το γινόμενο των 1001 πρώτων όρων της, συναρτήσει του κ .

A15. Στο διπλανό σχήμα δίνονται: AB διάμετρος του κύκλου (K, ρ) , $\widehat{A\Gamma B} = 60^\circ$ και $\widehat{A\Gamma E}$ ημικύκλιο με κέντρο το Λ και διάμετρο την AG . Να υπολογίσετε συναρτήσει του ρ , το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



ΜΕΡΟΣ Β'

Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ 4. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

B1. Αν $εφy = e^x$ να δείξετε ότι:

(α) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$ και (β) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2e^x}{(1 + e^{2x})^2}$

B2. Τα σημεία $A(-4,6)$ και $\Gamma(-1,1)$ είναι απέναντι κορυφές παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Οι πλευρές ΒΓ και ΑΒ βρίσκονται στις ευθείες: $x + 3y - 2 = 0$ και $x + y - 2 = 0$, αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

- (α) τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.
- (β) την απόσταση του Α από την πλευρά ΔΓ.
- (γ) το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

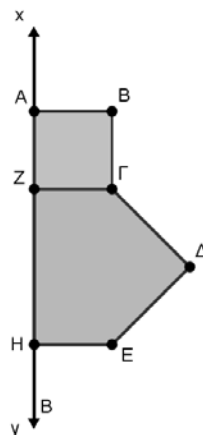
B3. (α) Να δείξετε τη σχέση: $A = \log_2 32 + \log_2 \sqrt{32} + \log_2 \sqrt[4]{32} + \log_2 \sqrt[8]{32} + \dots = 10$

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $(A)^{\log(x^2 - 2x)} = \log 100^x + \log \frac{1}{1000}$

B4. Έστω οι αριθμοί: $a = x$, $\beta = \log \sqrt{5^x \cdot 6}$, $\gamma = \log(1 + 2^x)$

- (α) Αν a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (a_n) , να δείξετε ότι $x = 1$.
- (β) Αν γ είναι ο πέμπτος όρος της προόδου να βρείτε την διαφορά δ και τον πρώτο όρο της.
- (γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $A_1 + A_2 + \dots + A_{15}$

B5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι το ΑΒΓΖ είναι τετράγωνο με πλευρά 3cm, $\Gamma\Delta = \Delta E = 5cm$, $AH = 9cm$ και $HE = 3cm$. Το σχήμα περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα xy και παράγει κάποιο στερεό. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



B6. Ένα ισοσκελές τρίγωνο με γωνία κορυφής θ , είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $R = 1$.

(α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $E = (1 + \sin\theta) \cdot \eta\mu\theta$

(β) Αν $\frac{dE}{d\theta} = 0$, να βρείτε τις τιμές (ή την τιμή) που μπορεί να πάρει η γωνία θ .

Διευθυντής

Δημητριάδης Δ.

Εισηγητές

Συντονιστής

Διευθυντής

Παναγή Κυριακή

Ζαντής Ανδρέας

Ιωάννου Γ.

Δημητριάδης Δ.

Παστού Φωτεινή

Χριστοδουλίδης Λούκας

Ευστρατίου Ανδρέας

Χρυσάνθου Αριάδνη

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Χρόνος : 2:30´

Ημερομηνία : 28/05/2012

ΟΔΗΓΙΕΣ: Να γράφετε μόνο με μπλε πένα (τα σχήματα με μολύβι).
Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
Το γραπτό αποτελείται από 5 σελίδες.
Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
Χορηγείται τυπολόγιο Μαθηματικών.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Από τα 15 θέματα να απαντήσετε ΜΟΝΟ σε 12.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες στις 100.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{x-19}{(x+5)(x-3)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Να βρείτε τα όρια: (α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 4x + 3}{4x^3 + 1}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$

3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων με τύπους:

(α) $y = 5x^3 - 2x^2 + 4x - 3$

(β) $y = \frac{1-2x}{x+3}$

4. Να αποδείξετε την ταυτότητα $\frac{\eta\mu 5x + \eta\mu 3x + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu 5x + \sigma\upsilon\nu 3x + \sigma\upsilon\nu x} = \epsilon\phi 3x$.

5. Να λύσετε την εξίσωση $\log x - 2\log(5-x) = 2\log 2 - 1$.

6. Ο 6^{ος} όρος αριθμητικής προόδου είναι 21 και το άθροισμα του 10^{ου} και 11^{ου} όρου της είναι 87. Να βρείτε το άθροισμα των 11 πρώτων όρων της προόδου.

7. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει παράπλευρο ύψος $h=5\text{cm}$ και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $E_{\pi}=60\text{cm}^2$.

Να υπολογίσετε τον όγκο V και το εμβαδόν ολικής επιφάνειάς $E_{ολ}$ της πυραμίδας.

8. Αν $y = \ln(\sin x)$, με $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -1$.

9. Θεωρούμε τη συνάρτηση φ με τύπο $\varphi(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Να λύσετε την εξίσωση $\varphi'(x) = 2$.

10. Να λύσετε στο διάστημα $[0, \pi]$ την εξίσωση $\frac{\eta\mu 4x}{\eta\mu 2x} - \frac{\sigma\upsilon\nu 4x}{\sigma\upsilon\nu 2x} = 2$.

11. Θεωρούμε τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{u} = |\vec{\alpha}| \vec{\beta} + |\vec{\beta}| \vec{\alpha}$, $\vec{v} = |\vec{\alpha}| \vec{\beta} - |\vec{\beta}| \vec{\alpha}$.

Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα

12. Να λύσετε την εξίσωση $\underbrace{\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x + \dots}_{\text{άπειροι όροι}} = 4$.

13. Η ευθεία που περνά από το σημείο $A(4,4)$ και έχει κλίση $\frac{3}{4}$ τέμνει τον άξονα των y στο σημείο B . Συμβολίζουμε S_1 το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του ευθύγραμμου τμήματος AB γύρω από τον άξονα των x και S_2 το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του ευθύγραμμου τμήματος AB γύρω από τον άξονα των y . Να αποδείξετε ότι $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{4}$.

14. Κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης R_1 και ύψος $υ_1$. Κώνος έχει ακτίνα βάσης R_2 και ύψος $υ_2$.

Αν ο όγκος του κυλίνδρου είναι τριπλάσιος από τον όγκο του κώνου και η κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου είναι διπλάσια της κυρτής επιφάνειας του κώνου, να αποδείξετε ότι η γενέτειρα λ του κώνου είναι ίση με $\lambda = \sqrt{υ_1 \cdot υ_2}$.

15. Σε κύκλο (O, R) παίρνουμε διαδοχικές χορδές $AB = \lambda_6$ και $B\Gamma = \lambda_4$.

Να αποδείξετε ότι: (α) $A\Gamma = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

(β) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $E = \frac{R^2(1 + \sqrt{3})}{4}$.

(Δίνονται: $\sin 105^\circ = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ και $\eta\mu 105^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$)

ΜΕΡΟΣ Β': Από τα 6 θέματα να απαντήσετε ΜΟΝΟ σε 4.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες στις 100.

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 1 + (x - 2)^2$ και πεδίο ορισμού το $A = [2, +\infty)$

(α) Να βρείτε το πεδίο τιμών $f(A)$

(β) Να αποδείξετε ότι η f είναι «ένα προς ένα»

(γ) Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .

2. Δίνεται η καμπύλη $(\kappa) : x^2 - xy = y^2 + 4$ με $x < 0$.

i) Να αποδείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x + 2y}$.

ii) Να βρείτε το σημείο $M(x_0, y_0)$ της (κ) στο οποίο η εφαπτομένη (ϵ) είναι κάθετη στην ευθεία $(\delta) : x + 2y = 1$

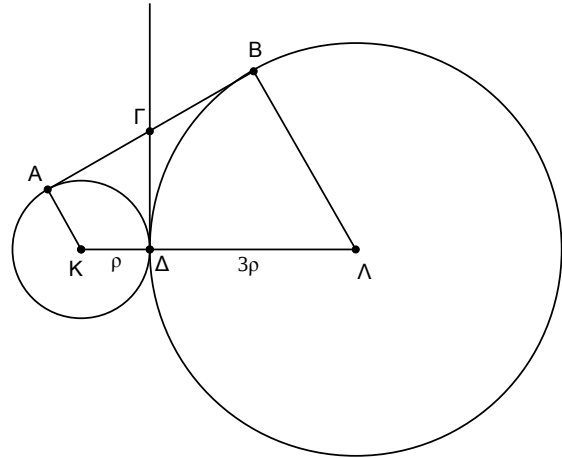
iii) Να βρείτε την εξίσωση της (ϵ) .

3. Δίνονται τα σημεία $M(1,2)$ και $N(4,-1)$. Να προσδιορίσετε σημείο $A(\alpha,\beta)$ της ευθείας $x-y=1$, ώστε το τρίγωνο AMN να έχει εμβαδόν 3 τετραγωνικές μονάδες.

4. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι κύκλοι (K, ρ) και $(\Lambda, 3\rho)$ που εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Δ . Αν AB το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους και η κοινή εφαπτομένη των δυο κύκλων στο Δ τέμνει το AB στο σημείο Γ , να αποδείξετε ότι

$$E_2 = 3 \cdot E_1 - \frac{\pi \rho^2}{2},$$

όπου E_1 το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $A\Gamma\Delta$ και E_2 το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $B\Gamma\Delta$.



5. Ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα

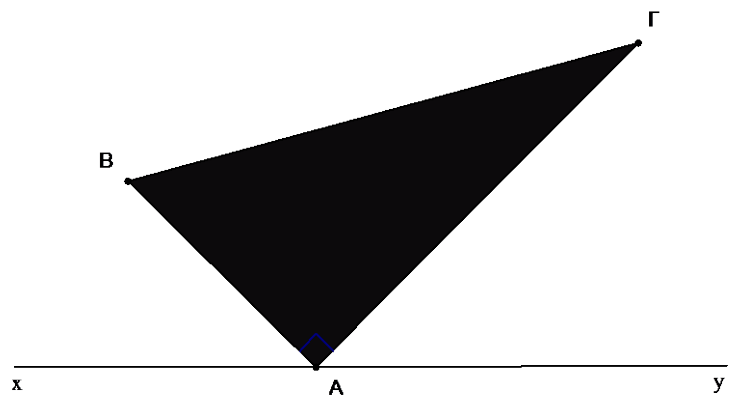
$B\Gamma=2\text{cm}$ και γωνία $\hat{\Gamma}=30^\circ$ περιστρέφεται

πλήρη στροφή περί άξονα xAy , που

σχηματίζει με κάθε μια από τις κάθετες

πλευρές AB και $A\Gamma$ γωνία 45° (σχήμα).

Να υπολογίσετε τον όγκο και την ολική επιφάνεια του στερεού που παράγεται.



6. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\sigma\upsilon\nu(2A + 2\Gamma) + \sigma\upsilon\nu(A - \Gamma) = 2\eta\mu^2\left(\frac{B}{2}\right)$,
να αποδείξετε ότι οι πλευρές του αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

Διευθυντής

Ιωάννου Παντελής

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΤΑΞΗ: Β'

Ημερομηνία: 06 / 06 / 2012
Διάρκεια: 2.30

ΟΔΗΓΙΕΣ: Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού .

Να γράφετε με μελάνι μπλε (μόνο τα σχήματα με μολύβι).

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

Μαζί με το εξεταστικό δοκίμιο δίνεται τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α': Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο 12.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{5x}{(x-4)(x+1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \frac{3x+1}{x+2}$

3. Να λύσετε την εξίσωση : $2^{x+1} + 4^x = 24$

4. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + x^2 - 1}{x^2}$$

5. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας ορθού κώνου είναι $E_k = 80\pi \text{ cm}^2$ και η ακτίνα της βάσης του είναι $R = 8 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε τον όγκο V του κώνου.

6. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = 5x^3 - \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} - 10$$

$$\beta) g(x) = e^{4x} \sin 2x +$$

7. Σε αριθμητική πρόοδο (α_v) δίνεται ότι $\alpha_1 = \ln 3$ και $\alpha_2 = \ln 27$.

Να δείξετε ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων της προόδου είναι $\Sigma_v = n^2 \ln 3$.

8. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα $\frac{\eta\mu x + \eta\mu 3x}{4\sigma\upsilon\nu^3 x} = \epsilon\varphi x$

β) Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ταυτότητα να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x + \eta\mu 3x}{4x\sigma\upsilon\nu^3 x}$

9. Να λύσετε την εξίσωση $\underbrace{\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x + \dots}_{\text{άπειροι όροι}} = \log_2 25$

10. Να βρείτε τη γενική λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu 2x + 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2} = 0$

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ και $g(x) = \log_5 x$

α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των παραπάνω συναρτήσεων.

β) Να δείξετε ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,1)$

είναι κάθετη στην εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(1,0)$

12. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει όλες τις ακμές της ίσες με $2\alpha\sqrt{2}$ cm

Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας $E_{ολ}$ και τον όγκο V της πυραμίδας.

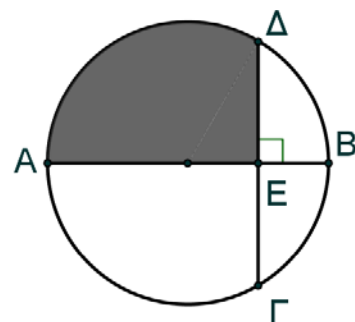
13. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + \sqrt{e}), & x \leq 0 \\ \frac{\eta\mu x}{2x}, & x > 0 \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

14. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με εμβαδόν E και ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου R , στο οποίο ισχύει η σχέση $2E \neq R \cdot \sigma\upsilon\nu A(\Gamma)$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

15. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με διάμετρο $AB = 2R$ και χορδή $\Gamma\Delta \perp AB$. Αν $\Gamma\Delta = R\sqrt{3}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του σκιασμένου χωρίου.



ΜΕΡΟΣ Β': Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο 4.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η καμπύλη $(\kappa): x^2 + y^2 + 2x - 4y = 5$

α) Να δείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y}$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης (κ) στο σημείο της που έχει τεταγμένη $y = 1$ και τετμημένη $x > 0$.

2. Παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ έχει κορυφές τα σημεία $B(-3, -1)$ και $\Delta(3, -3)$.
Η πλευρά $A\Delta$ έχει εξίσωση την $y = -2x + 3$ ενώ η AB έχει εξίσωση την $4x - 3y + 9 = 0$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών A και Γ

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $\Gamma\Delta$

γ) Να βρείτε την απόσταση της κορυφής A από την πλευρά $\Gamma\Delta$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$

3. α) Δίνονται τα σημεία $A(2, 2)$ και $B(4, 0)$. Να προσδιορίσετε σημείο $\Gamma(\alpha, \beta)$ με $\alpha > 0$, $\beta > 0$ που ανήκει στην ευθεία $x - y = 2$ έτσι ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να έχει εμβαδόν $E = 6$ τ.μ.

β) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $x'x$.

Να υπολογίσετε τον όγκο V του στερεού που παράγεται καθώς και το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγει το τμήμα $A\Gamma$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = 25 - x^2$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τιμών των συναρτήσεων f και g

β) Να ορίσετε (πεδίο ορισμού και τύπος) τη συνάρτηση $g \circ f$

γ) Να αποδείξετε με χρήση του ορισμού της παραγώγου ότι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

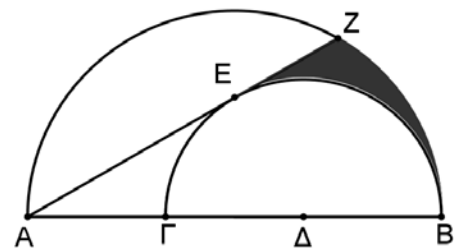
δ) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{g}{f}$ και να βρείτε την παράγωγο $\left(\frac{g}{f}\right)'$

5. α) Αν $\alpha_2 = \frac{1}{2}\eta\mu 2\theta$, $\alpha_3 = \sigma\upsilon\nu \frac{\theta}{2}$, $\alpha_4 = \sigma\phi\theta$ είναι ο δεύτερος, ο τρίτος και τέταρτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου (α_n) να βρείτε το $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

β) Για $\theta = \frac{2\pi}{3}$ να βρείτε το $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\alpha_n = \frac{8}{9}$

6. Στο διπλανό σχήμα AB και ΓB είναι οι διάμετροι των ημικυκλίων $\square AZB$ και $\square FEB$. Η χορδή AZ εφάπτεται του μικρού ημικυκλίου στο σημείο E και $(A\Gamma) = (\Gamma\Delta) = (\Delta B) = 2\alpha$, $(\alpha > 0)$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μικτόγραμμου τριγώνου ZEB συναρτήσει του α .



Οι εισηγητές/τριες

Δ. Παπάμλτιαδης

Τ. Δημητρίου

Μ. Λοΐζου

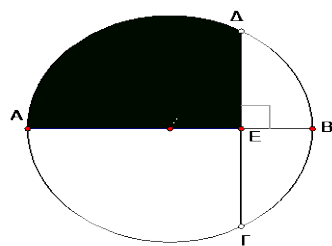
Κ. Δημητριάδης

Α. Αβερκίου

Κ. Μαλάη

Ο Διευθυντής

Γεώργιος Ζερβίδης



Αν $\Gamma\Delta = \lambda_3$ να βρείτε το γραμμικοποιημένο
εμβαδό

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΤΑΞΗ Β΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29 -5 -2012

ΧΡΟΝΟΣ: 2.30΄

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

- ΟΔΗΓΙΕΣ:** α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 β) Να γράφετε μόνο με μελάνι (μόνο τα σχήματα με μολύβι).
 γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
 δ) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.

ΜΕΡΟΣ Α΄

Από τα δεκαπέντε (15) θέματα να λύσετε μόνο τα δώδεκα (12).

Κάθε θέμα βαθμολογείται με μια (1) μονάδα.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{x+7}{x^2-4x-5}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
2. Να λύσετε την εξίσωση $\log_2 x^3 - \log_x 4 + 1 = 0$
3. Δίνονται τα σημεία $A(2, -1)$ και $B(4, 3)$. Να βρείτε σημείο Γ της ευθείας $y = 2x$ τέτοιο ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο στο Γ
4. Να δείξετε ότι το άθροισμα $\frac{2-1}{3} + \frac{2^2-1}{3^2} + \frac{2^3-1}{3^3} + \dots = \frac{3}{2}$
5. Να βρείτε την παράγωγο $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ των συναρτήσεων:

α) $y = \eta\mu^3 x + \sigma\tau\epsilon\mu 4x$

β) $x^2 - 2xy = 5y$
6. Να λύσετε την εξίσωση $(\sqrt{3} - 3\epsilon\phi x) \cdot (1 - 2\eta\mu^2 x) = 0$
7. Να βρείτε πολώνυμο $P(x)$ δευτέρου βαθμού, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$P(x) + P'(x+2) \equiv x^2 - 4x - 2$$
8. Να αποδείξετε $\frac{2\eta\mu x \eta\mu 3x + \sigma\upsilon\nu 4x}{\eta\mu 5x + \eta\mu 3x} = \frac{1}{4} \tau\epsilon\mu x \sigma\tau\epsilon\mu 2x$
9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$. Να εξετάσετε αν ισχύει

$$f \circ g = g \circ f$$

10. Δίνονται τα σημεία $A(-1, 1)$ και $B(0, -2)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που περνά από το σημείο A και η απόσταση του σημείου B από την ευθεία (ε) είναι ίση με $\sqrt{5}$ μονάδες.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3ae^{x+1} + x, & x \leq -1 \\ 2x^2 - ax + 3\beta, & -1 < x < 0 \\ \beta\eta\mu x + \alpha\sigma\upsilon\nu x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

Να υπολογίσετε τα α και β ώστε η $f(x)$ να είναι συνεχής

12. Μεταξύ της ακτίνας R και του ύψους υ κυλίνδρου ισχύει η σχέση $\frac{1}{R} + \frac{1}{\upsilon} = 3$. Αν V είναι ο όγκος του κυλίνδρου και E το εμβαδό της ολικής επιφάνειάς του, να δείξετε ότι ισχύει $E = 6V$

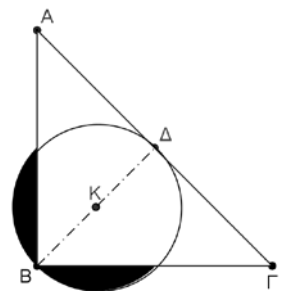
13. Η εφαπτομένη της καμπύλης $f(x) = \frac{ax^2 + \beta}{x + \gamma}$, $a, \beta \in \mathbb{R}$ και $\gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$ στο σημείο της $A(0, 3)$ είναι κάθετη στην ευθεία $3y + x = 19$. Αν επιπλέον $f(2) = 1$, να βρείτε τις τιμές των α , β , και γ

14. Δίνεται κανονική τετραγωνική πυραμίδα με πλευρά βάσης α και παράπλευρες έδρες ισόπλευρα τρίγωνα. Αν η γωνία που σχηματίζει η παράπλευρη ακμή με την βάση είναι φ και η γωνία που σχηματίζει η παράπλευρη έδρα με την βάση είναι θ να δείξετε ότι

$$\sigma\upsilon\nu^2\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\theta$$

15. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει κορυφές τα σημεία $A(0,3)$
 $B(-2,2)$ και $\Gamma(-1,0)$

- Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές
- Να υπολογίσετε το εμβαδό της σκιασμένης περιοχής



ΜΕΡΟΣ Β'

Από τα έξι (6) θέματα να λύσετε μόνο τα τέσσερα (4). Κάθε θέμα βαθμολογείται με δυο (2) μονάδες.

1. α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x$, $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{f(x)}}{x+1} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{1 - \sqrt{x-3}} \quad \text{iii. } \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$

β) Αν $x \geq 2$, να βρείτε τον τύπο, το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της $f^{-1}(x)$

2. Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με κορυφές $B(-2, 2)$ και $\Gamma(4, -2)$.

Το ύψος BH του τριγώνου έχει εξίσωση: $x + 8y = 14$

α) Να βρείτε :

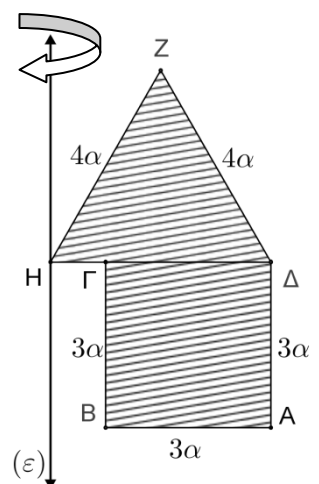
- i. την εξίσωση της πλευράς $A\Gamma$
- ii. τις συντεταγμένες της κορυφής A

β) Αν οι συντεταγμένες της κορυφής είναι $A(5, 6)$, να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Δ έτσι ώστε το τετράπλευρο $BA\Gamma\Delta$ να είναι ρόμβος.

3. Στο διπλανό σχήμα, το $ZH\Delta$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 4α και το $AB\Gamma\Delta$ τετράγωνο πλευράς 3α . Το σκιασμένο χωρίο περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε) . Να υπολογίσετε

- i. Το εμβαδό και
- ii. Τον όγκο του στερεού που δημιουργείται



4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu 2x \sigma\upsilon\nu x}{(1 + \sigma\upsilon\nu 2x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

α) Να δείξετε :

i. $f(x) = \varepsilon\varphi \frac{x}{2}$

ii. $\frac{1 + f^2(x)}{1 + f(x)} = \frac{2}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 1}$

iii. $f''(x) = f'(x) \cdot f(x)$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x)$ στο σημείο της με τετμημένη $x = \frac{\pi}{3}$

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

5. Δίνεται η καμπύλη $y = (x + \sqrt{x^2 + 4})^m$

α) Να δείξετε:

i. $\frac{dy}{dx} = \frac{my}{\sqrt{x^2 + 4}}$

ii. $(x^2 + 4) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - m^2 y = 0$

β) Για $m = 2$, η εφαπτομένη και η κάθετη της καμπύλης στο σημείο της $A(0, 4)$ τέμνουν τον άξονα xx' στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$

6. Δίνεται η ακολουθία α με γενικό όρο $\alpha_\nu = \ln(\sqrt{2^\nu} \cdot e)$, $\nu \in \mathbb{N}$

α) Να δείξετε ότι η ακολουθία α είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε την διαφορά (δ)

β) Αν $\alpha_\kappa = \ln(16\sqrt{e})$ να υπολογίσετε την τιμή του κ

γ) Να δείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων όρων της είναι $\Sigma_\nu = \frac{\nu}{2} + \ln 2^{\frac{(\nu^2 + \nu)}{4}}$

δ) Να υπολογίσετε τα αθροίσματα

i. $\Sigma_1 = e^{-2a_1} + e^{-2a_2} + \dots$

ii. $\Sigma_2 = \alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2012}$

Ο Διευθυντής

Σάββας Γιαλλουρίδης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΤΑΞΗ Β΄

Ημερομηνία: 30/05/2012

Διάρκεια: 2,5 ώρες

Ώρα: 07:30 – 10:00

**Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 5 σελίδες
συμπεριλαμβανομένου του τυπολογίου.**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας τύπου Tippi-Ex.
- Τα σχήματα να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
- Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνεται ο τρόπος επίλυσής τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της επίλυσης δε θα λαμβάνονται υπόψη.

ΜΕΡΟΣ Α΄:

- Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x) = \sin x^3 + e^{\ln 5x} + 7(\quad) + \quad.$$

2. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{x+7}{x^2-x-6}$.

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές $\alpha = \beta = 6\text{m}$ και $\gamma = 6\sqrt{3}\text{m}$.

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με άκρα $A(3, -2)$, $B(-1, 6)$.

Να βρείτε:

(α) το μήκος του ΑΒ,

(β) την εξίσωση της μεσοκάθετης του ΑΒ.

5. Να λύσετε την εξίσωση: $4^x - 6 \cdot 2^x - 16 = 0$.

6. Να υπολογίσετε τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x - 1}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x}$.

7. Δίνονται: $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ και $\sigma\upsilon\nu\beta = -\frac{12}{13}$, $180^\circ < \beta < 270^\circ$.

Να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)$.

8. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $15 + 17 + 19 + \dots + 269$.

9. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$, $\gamma \neq 1$, $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \neq 1$ να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{\log_{\alpha}(\beta\gamma)} + \frac{1}{\log_{\beta}(\alpha\gamma)} + \frac{1}{\log_{\gamma}(\alpha\beta)} = 1.$$

10. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\eta\mu 4\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 5\alpha + \eta\mu\alpha}{\eta\mu 5\alpha} = \sigma\upsilon\nu 4\alpha$.

11. Αν σε κώλουρο κώνο ισχύει η σχέση $V = \frac{E_{\text{ολ}} \cdot u}{6}$, όπου V ο όγκος του, $E_{\text{ολ}}$ το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας και u το ύψος του, να αποδείξετε ότι $\lambda = R + \rho$, όπου λ η γενέτειρά του και R, ρ οι ακτίνες των βάσεων του.

12. Δίνονται οι ευθείες: $(\epsilon_1): 3x + 2y - 12 = 0$ και $(\epsilon_2): x - y + 1 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο τομής των ευθειών $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ και σχηματίζει γωνία 45° με την ευθεία (ϵ_1) .

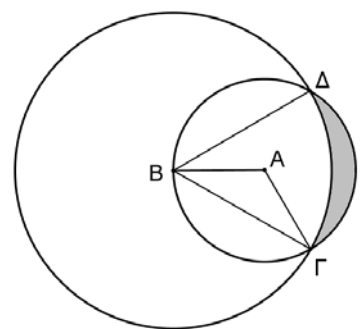
13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5x - 3$ με πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [-2, 5]$ και η συνάρτηση $g(x) = 3x + 2$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $f \circ g$.

14. Να λύσετε την εξίσωση: $\log_3(9 \cdot 4^{\eta\mu^2 x}) - \log_3\left(\frac{1}{8^{\sigma\upsilon\nu x}}\right) = 2$.

15. Δίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $AB = R$ και κύκλος με κέντρο το σημείο B και ακτίνα $B\Gamma$. Η γωνία $BA\Gamma$ είναι ίση με 120° .

(α) Να δείξετε ότι η γωνία $\Gamma B\Delta$ είναι ίση με 60° .

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μηνίσκου του σχήματος συναρτήσει της ακτίνας R .



ΜΕΡΟΣ Β΄:

- Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Αριθμητική πρόοδος και φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος έχουν τον ίδιο πρώτο όρο και η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι τριπλάσια του λόγου της γεωμετρικής προόδου. Το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι ίσο με τον όγδοο όρο της, ενώ ο πέμπτος όρος της είναι διπλάσιος του αθροίσματος των άπειρων όρων της γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε τις προόδους.

2. Δίνεται το τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(4,0), B(0,3) και Γ(8,3).

(α) i) Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ii) Να βρείτε την απόσταση της κορυφής A από την πλευρά ΒΓ (ύψος ΑΔ).

(β) Αν $AB = AG = 5$ μονάδες, $BΓ = 8$ μονάδες και ύψος $AD = 3$ μονάδες, να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του τριγώνου ABΓ γύρω από ευθεία (ε) που δεν τέμνει το τρίγωνο, είναι παράλληλη με την ΒΓ και απέχει από αυτή 2 μονάδες.

3. Δίνεται η καμπύλη: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$.

(α) i) Να δείξετε ότι: $\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{3+y}$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης στο σημείο $\Sigma(3, -2)$ της καμπύλης είναι αντίστοιχα $2x + y - 4 = 0$ και $x - 2y - 7 = 0$.

(β) Η εφαπτομένη και η κάθετη της καμπύλης στο σημείο Σ, τέμνουν τους άξονες xx' , yy' στα σημεία A και B αντίστοιχα.

i) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

ii) Αν $A(2,0)$ και $B\left(0, -\frac{7}{2}\right)$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου OASB, όπου O η αρχή των αξόνων.

4. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{\left[\chi \sigma \upsilon \nu \left(\frac{\pi}{3} \cdot x \right) - \sigma \upsilon \nu \left(\frac{\pi}{3} \cdot x \right) \right]}{1 \sigma \upsilon \nu 2x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(α) Να αποδείξετε ότι: i) $f(x) = \frac{\sqrt{3} \cdot x}{2 \eta \mu x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $f'(x) \cdot f(x) \cdot (1) = \dots$

5. Δίνεται η πρόοδος:

$$\eta\mu B - \eta\mu\Gamma, (\eta\mu B - \eta\mu\Gamma)\sigma\upsilon\nu A, (\eta\mu B - \eta\mu\Gamma)\sigma\upsilon\nu^2 A, \dots$$

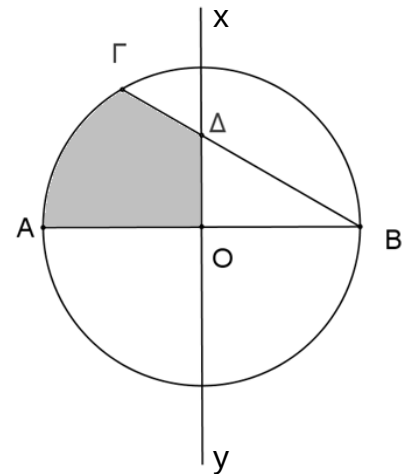
με μη μηδενικούς όρους, όπου A, B, Γ γωνίες τριγώνου. Το άθροισμα των άπειρων όρων της προόδου είναι ίσο με 1. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

6. Δίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο O και ακτίνα 5 cm , με διάμετρο AB και χορδή $B\Gamma = \lambda_3$. Η ευθεία xOy είναι κάθετη στην AB και τέμνει την $B\Gamma$ στο Δ .

(α) Να δείξετε ότι $O\Delta = \Delta\Gamma = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

(β) i) Να βρείτε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τετραπλεύρου $AO\Delta\Gamma$.

ii) Να βρείτε την περίμετρο του πιο πάνω χωρίου.



Ο Διευθυντής

Χαράλαμπος Σοφοκλή

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗ Β΄ ΤΑΞΗ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B \pm \sigma\upsilon\nu A \eta\mu B, \quad \sigma\upsilon\nu(A \pm B) = \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A \eta\mu B$$

$$2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta), \quad 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha, \quad \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad t = \epsilon\phi\alpha$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} \quad \eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} \quad \sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu \frac{B-A}{2} \eta\mu \frac{A+B}{2}$$

$$\alpha = 2R\eta\mu A \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A \quad E = \frac{\alpha\beta\eta\mu\Gamma}{2}$$

2. Στερεομετρία

Ορθό Πρίσμα	$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \upsilon$	$V = \frac{1}{2} E_{\beta} \cdot \upsilon$
Κανονική Πυραμίδα	$E_{\pi} = \frac{1}{2} \Pi_{\beta} \cdot \upsilon$	$V = \frac{E_{\beta} \cdot \upsilon}{3}$
Κύλινδρος	$E_{\kappa} = \Pi R \upsilon$	$V = \Pi R^2 \upsilon$
Κώνος	$E_{\kappa} = \Pi R \lambda$	$V = \frac{\Pi R^2 \upsilon}{3}$
Κόλινδρος Κώνος	$E_{\kappa} = R (\rho + \lambda)$	$V = \frac{\Pi \upsilon}{3} (R^2 + R \rho + \rho^2)$

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 17.5.2012

ΤΑΞΗ: Β΄

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ΩΡΕΣ

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
β) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι).
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α : Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε **ΜΟΝΟ τις 12.**
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1) Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{x-17}{x^2-4x-5}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2) Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5x}{3x - 2x^3}$

3) Αν $\frac{1}{4}$, 2^x , 8^x είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να βρείτε το x .

4) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $\psi = \ln(x^2 + 5x) + e^{\phi 3x}$

β) $\psi = e^{4x} \cdot \sqrt{x^3 + 2x}$.

5) Το άθροισμα των απείρων όρων απολύτως φθίνουσας γεωμετρικής προόδου είναι διπλάσιο του πρώτου όρου της και το άθροισμα των δύο πρώτων όρων της ισούται με 9. Να βρείτε την πρόοδο (πέντε πρώτους όρους).

- 6) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κυλίνδρου ισούται με $40\pi\text{cm}^2$ και ισχύει η σχέση $R + \nu = 9\text{cm}$, με $\nu > R$. Να βρείτε: α) την ακτίνα R και το ύψος ν
β) το εμβαδόν ολικής επιφάνειας και τον όγκο του κυλίνδρου.

7) Να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης $2\sigma\nu\nu\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$.

- 8) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας ίσο με 32cm^2 και το παράπλευρο ύψος της σχηματίζει με τη βάση γωνία 60° . Να βρείτε τον όγκο της.

9) Να δείξετε ότι $\frac{\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha - 1}{\eta\mu\alpha} = 1 - \varepsilon\phi\frac{\alpha}{2}$.

10) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{8x+2}{x^2-x-2}$ και $g(x) = \frac{2x}{x+1}$. Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f+g$ και $\frac{g}{f}$.

11) Να λύσετε την εξίσωση $\ln(\log_3 3x - 3\log_x 9 - 1) = 0$.

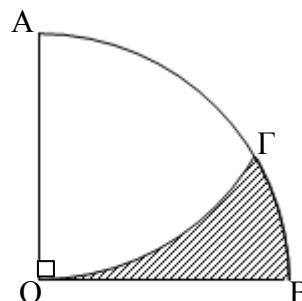
- 12) Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με κορυφές $A(-2, 2)$, $B(-3, -1)$, $\Gamma(4, 0)$.
Να βρείτε: α) την εξίσωση της μεσοκάθετης της διαγωνίου $ΒΔ$.
β) το εμβαδόν του $ΑΒΓΔ$.

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3-2x}{x+1}$, $x \geq 2$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της f^{-1} .
β) Να ορίσετε την συνάρτηση $f \circ f^{-1}$.

14) Αν σε τρίγωνο ισχύει η σχέση $\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2B}{2}} = \eta\mu\left(\Gamma + \frac{B}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2}$, $\hat{B} < 90^\circ$, να δείξετε ότι το $\sigma\upsilon\nu B$ είναι αριθμητικός μέσος των $\eta\mu A$ και $\eta\mu \Gamma$.

- 15) Στο διπλανό σχήμα το $ΑΟΒ$ είναι τεταρτοκύκλιο κύκλου ακτίνας R . Με κέντρο A και ακτίνα R γράφουμε τόξο $ΟΓ$ μέσα στο τεταρτοκύκλιο. Να βρείτε συναρτήσει του R το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου $ΟΒΓ$.



ΜΕΡΟΣ Β: Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε **ΜΟΝΟ τις 4**.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) Σε γηυσίως φθίνουσα αριθμητική πρόοδο ο δεύτερος και ο έκτος όρος διαφέρουν κατά 16 και ο τέταρτος όρος είναι τριπλάσιος του όγδοου όρου.

Να βρείτε: α) την αριθμητική πρόοδο (πέντε πρώτους όρους)

β) πόσους όρους πρέπει να προσθέσουμε για να έχουμε άθροισμα -40

γ) το άθροισμα των θετικών όρων της προόδου.

2) α) Να δείξετε ότι $\frac{\eta\mu\alpha - \eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha} = \epsilon\phi 2\alpha$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{3 \cdot (\eta\mu x - \eta\mu 2x + \eta\mu 3x)}{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu 3x} - 2\sigma\upsilon\nu 2x = 0$ στο διάστημα $[0^\circ, 360^\circ]$.

- 3) α) Αν η ρίζα της εξίσωσης $\ln(x-2) + \ln x = \ln(\log 1000)$ είναι ρίζα πολυωνύμου δευτέρου βαθμού $f(x)$ και ισχύει ότι $f(2x) - f(x) \equiv 6x^2 - 4x$, να βρείτε το πολυώνυμο.

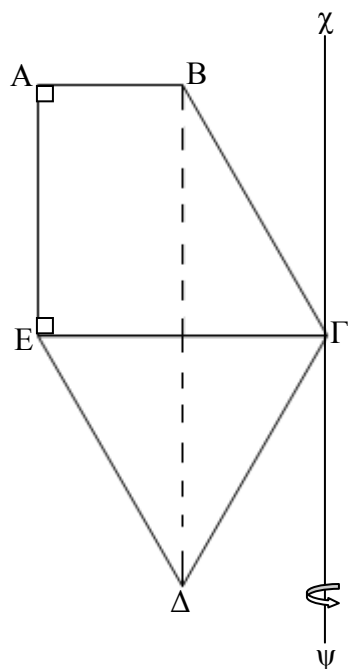
β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2f(x)} - 2x} \right)$.

4) Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \ln \sqrt{1 + \eta\mu 2x}$.

α) Να δείξετε ότι $e^{2\psi} \left(\frac{d\psi}{dx} - \frac{d^2\psi}{dx^2} \right) - \sigma\upsilon\nu 2x = 2$.

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $\frac{d\psi}{dx} = -1$, να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5)



Στο διπλανό σχήμα δίνονται:

$ABΓΕ$ ορθογώνιο τραπέζιο ($\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$)

$AB = 3\alpha$

$BΓ = ΕΓ$

$ΓΔΕ$ ισόπλευρο τρίγωνο

$BΔ \perp ΓΕ$

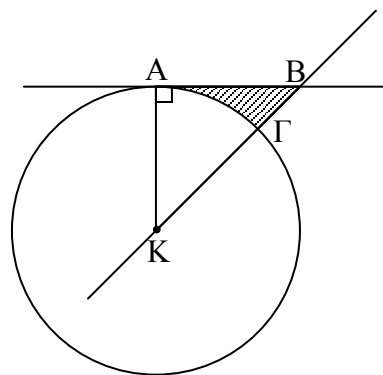
$\chi\Gamma\psi \parallel BΔ$

Να υπολογίσετε συναρτήσει του α , το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του $ABΓΔΕ$ γύρω από την $\chi\Gamma\psi$.

6) α) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $x^2 + \psi^2 - 6x + 4\psi - 3 = 0$. Αν Α είναι σημείο της καμπύλης με τετμημένη $x = -1$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της Α.

β) Η καμπύλη $x^2 + \psi^2 - 6x + 4\psi - 3 = 0$ είναι ο κύκλος του διπλανού σχήματος με κέντρο Κ και ακτίνα R. ΑΒ είναι η εφαπτομένη του κύκλου στο Α $(-1, -2)$. Η ΚΒ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Γ και έχει εξίσωση $x + \psi = 1$.

- να βρείτε:
- τις συντεταγμένες του κέντρου Κ
 - το μήκος της ακτίνας R αν $K(3, -2)$
 - τη γωνία ΑΚΒ
 - το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.



Η Διευθύντρια

Στέλλα Μάρκου



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

Μάθημα: Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Τάξη: Β΄

Χρόνος: 2,5 ώρες

Ημερομηνία: 21 - Μαΐου 2012

Ονοματεπώνυμο:

Τμήμα: Αριθμός:

Το δοκίμιο αυτό αποτελείται από τρεις (3) σελίδες

ΟΔΗΓΙΕΣ:

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη, Α΄ και Β΄.

ΜΕΡΟΣ Α΄ - Αποτελείται από δεκαπέντε (15) ερωτήσεις. Να απαντηθούν μόνο οι δώδεκα (12). Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

ΜΕΡΟΣ Β΄ - Αποτελείται από έξι (6) ερωτήσεις. Να απαντηθούν μόνο οι τέσσερις (4). Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Θα διορθώνονται οι πρώτες ερωτήσεις που ικανοποιούν το ζητούμενο αριθμό από κάθε μέρος. Οι υπόλοιπες θα αγνοούνται.

- Να γράφετε μόνο με πένα μαύρη ή μπλε.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου .
- Τα διαγράμματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.

ΜΕΡΟΣ Α΄:

1)Κύβος έχει όγκο 27 m^3 . Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.

2)Να λύσετε την εξίσωση: $8^x = 4^{x^2-1}$

3) Να λύσετε την εξίσωση: $2\log(x-2) = \log(x+1) + \log(x-4)$.

4) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+4}{2-x}$

β) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+3x-1}{-10x^2+2}$

5) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $R=5\text{cm}$.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μέρους του κύκλου που είναι εκτός του τριγώνου.

6)) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων :

α) $\psi = \sin^7(x^3 - e^x + \eta \mu x)$

β) $\varepsilon \varphi x + x \psi = 5$

7) Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα:

$$\frac{4-X}{(X-1)(X-2)}$$

8) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κολουρου κώνου είναι $120\pi \text{ cm}^2$ και οι ακτίνες των βάσεων του 3cm και 9 cm .Να βρείτε τον όγκο και το ολικό εμβαδόν του κολουρου κώνου.

9) Σε μια αριθμητική πρόοδο το άθροισμα του δεύτερου, του τέταρτου και του έκτου όρου είναι μηδέν ενώ το άθροισμα του τρίτου, του πέμπτου και του έβδομου όρου είναι έξι. Να βρείτε το άθροισμα των τριάντα πρώτων όρων της προόδου.

10) Να δείξετε την ταυτότητα : $\eta \mu^2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right) - \eta \mu^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \eta \mu x$

11) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι κάθετες με την ευθεία

$6x+8y-5=0$ και απέχουν από το σημείο $A(-1,2)$ απόσταση $d=4$.

12) Να λύσετε την εξίσωση : $2 - \sin^2 \chi = 4\eta\mu^2 \frac{\chi}{2}$

13) Αν το άθροισμα απείρων όρων της προόδου :

$(\eta\mu B - \eta\mu \Gamma), (\eta\mu B - \eta\mu \Gamma)\sin A, (\eta\mu B - \eta\mu \Gamma)\sin^2 A, \dots$, όπου A, B, Γ ,
γωνίες τριγώνου $AB\Gamma$ με $B \neq \Gamma$ και $\sin A \neq 0$, ισούται με ένα , να δείξετε ότι το τρίγωνο
 $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

14) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \psi = (2\alpha^2 + \alpha + 1)\chi + \alpha + 4$ και

$\varepsilon_2: \psi = (\alpha^2 - \alpha + 4)\chi + \alpha - 5$. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε οι ευθείες ε_1 , ε_2
να είναι παράλληλες .

15) Να βρείτε τις διαστάσεις α, β, γ ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου αν αυτές
αποτελούν διαδοχικούς όρους αύξουσας γεωμετρικής προόδου , το άθροισμα των
ακμών του είναι 168 cm και ο όγκος του είναι 512 cm^3 .

ΜΕΡΟΣ Β' :

1) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και H το ορθόκεντρο του . Αν $A(2,-1)$, $B(3,4)$ και $H(2,2)$
να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, τις συντεταγμένες της
κορυφής Γ , το μήκος του ύψους AD και το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

2) Να δείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες :

$$\alpha) \frac{\eta\mu 2\chi \sin \chi}{(1 + \sin 2\chi)(1 + \sin \chi)} = \varepsilon\varphi \frac{\chi}{2}$$

$$\beta) \frac{1 + \sin 2\chi + \sin \chi}{\eta\mu 2\chi + \eta\mu \chi} = \sigma\varphi \chi$$

και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση :

$$\frac{\eta\mu 2\chi \sin \chi}{(1 + \sin 2\chi)(1 + \sin \chi)} = \frac{1 + \sin 2\chi + \sin \chi}{\eta\mu 2\chi + \eta\mu \chi}$$

3) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων .

β) Να δείξετε ότι τέμνονται στο σημείο $A(1,0)$

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων των πιο πάνω καμπυλών στο κοινό τους σημείο A .

δ) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι δυο εφαπτόμενες.

4) Αριθμητικής προόδου το άθροισμα των πρώτων 41 όρων της είναι ίσο με 12300. Ο πρώτος , ο πέμπτος και ο έβδομος όρος της , είναι αντίστοιχα ο πρώτος , ο δεύτερος και ο τρίτος όρος φθίνουσας γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε :

α) το άθροισμα των αρνητικών όρων της αριθμητικής προόδου.

β) Το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου.

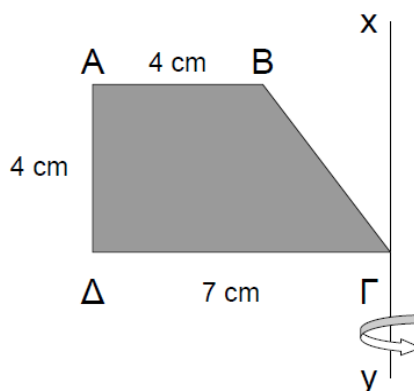
5) Αν το $x = \frac{\pi}{4}$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $a \sin 4x + b \eta \mu^2 x = 0$ να δείξετε ότι $\beta = 2\alpha$.

Αν $\alpha \neq 0$ να λύσετε την πιο πάνω εξίσωση στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

6) Ένα ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$

($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$) με $AB=4\text{cm}$, $A\Delta=4\text{cm}$ και $\Delta\Gamma=7\text{cm}$ κάνει πλήρη στροφή γύρω από άξονα xy που περνά από την κορυφή Γ και είναι κάθετος στη $\Delta\Gamma$.

Να βρείτε συναρτήσει του π , το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



Ο Διευθυντής

Ανδρέας Λοΐζου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά κατεύθυνσης
ΤΑΞΗ: Β΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 30/05/2012
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2,5 ώρες

Οδηγίες: α) Να γράφετε με πένα μπλε ή μαύρη.

β) Επιτρέπεται η χρήση **μη** προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, σφραγισμένης από το σχολείο.

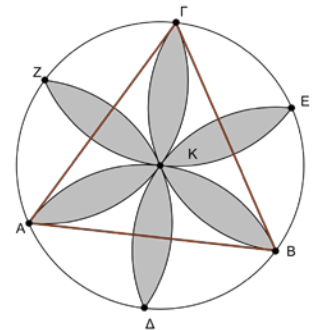
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

δ) Το γραπτό αποτελείται από 4 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α: Από τις 15 ασκήσεις του Α΄ μέρους να λύσετε μόνο τις 12. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

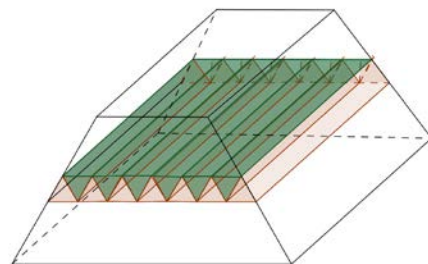
1. Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης $f(x) = \frac{3x-4}{x^2-5x-6}$ σαν άθροισμα δύο κλασμάτων της μορφής $\frac{A}{\alpha x + \beta}$, όπου Α, α, β είναι ακέραιοι αριθμοί.
2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$.
3. Να λύσετε την εξίσωση $1 + \sin(2x) = 0$ στο διάστημα $0 \leq x \leq 2\pi$.
4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών των πιο κάτω συναρτήσεων:
 - i. $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$
 - ii. $g(x) = \ln(x-3)$
5. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $72\alpha^2 \text{ cm}^2$ και οι παράπλευρες έδρες της σχηματίζουν με το επίπεδο της βάσης της γωνία 60° . Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.
6. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων που ορίζονται με τους τύπους:
 - i. $f(x) = \ln(2x+1)$
 - ii. $g(x) = \frac{1}{x^3} + \sin(2x) - 4$
7. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $g(x) = 2x - 5$. Να ορίσετε την συνάρτηση $f \circ g$.

8. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή του α ώστε οι αριθμοί $\ln(3^a - 1)$, $\ln(3^a + 1)$, $3\ln 2$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
9. Με την μέθοδο της τέλει επαγωγής ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να αποδείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει :
- $$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$
10. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και M τυχαίο σημείο του τόξου $A\Gamma$. Να φέρετε ευθύγραμμα τμήματα ME , MD και MZ (με E, D, Z σημεία των ευθειών $A\Gamma$, AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα) έτσι ώστε $ME \perp A\Gamma$, $MD \perp AB$ και $MZ \perp B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Z, E, D είναι συνευθειακά.
11. α) Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi(2\alpha) = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}$
- β) Αν $\frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha} = 2$ με $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ να δείξετε ότι $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
12. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν οι κορυφές του A και Γ σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχουν συντεταγμένες $(-3, 4)$ και $(7, -1)$ αντίστοιχα και οι πλευρές του γ, α έχουν μήκος $2\sqrt{10}$ και $\sqrt{65}$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:
- Το μέτρο της γωνίας A του τριγώνου και
 - το εμβαδόν του.
13. Σε κύκλο (K, R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Με κέντρα τις κορυφές του τριγώνου και ακτίνα R γράφουμε τόξα μέσα στον κύκλο που τέμνουν τον κύκλο στα σημεία D, E και Z . Στην συνέχεια με κέντρα τα σημεία D, E, Z και ακτίνα R γράφουμε τόξα επίσης μέσα στον κύκλο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν των έξι φύλλων που σχηματίζονται.



14. Δίνεται η καμπύλη (κ) με εξίσωση $x^2 + 2xy - y^2 = 8$.
- Αν το σημείο $A(3\rho, -\rho)$ με $\rho > 0$ ανήκει στην καμπύλη να αποδείξετε ότι $\rho = 2$.
 - Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο A .
 - Να προσδιορίσετε τα σημεία της καμπύλης (κ) στα οποία η εφαπτομένη της είναι κάθετη στον άξονα των x .

15. Σε κιβώτιο σχήματος ορθού πρίσματος ύψους 80cm και με βάση ισοσκελές τραπέζιο, τοποθετούνται σκουρόχρωμοι και ανοιχτόχρωμοι συμπαγείς μεταλλικοί ράβδοι σχήματος ορθού τριγωνικού πρίσματος με ακμή βάσης 2cm και ύψους 80cm. Η τοποθέτηση τους γίνεται με τον εξής τρόπο:



- Στην πρώτη σειρά τοποθετούνται 13 ανοιχτόχρωμοι ράβδοι.
- Στην δεύτερη σειρά τοποθετούνται στα κενά που δημιουργούνται σκουρόχρωμοι ράβδοι. (Μια τοποθέτηση δύο διαδοχικών τέτοιων σειρών φαίνεται στο διπλανό σχήμα)
- Στην τρίτη σειρά τοποθετούνται και πάλι ανοιχτόχρωμοι ράβδοι
- Στην τέταρτη σειρά τοποθετούνται σκουρόχρωμοι ράβδοι κ.ο.κ.

Αν όλοι οι ράβδοι που τοποθετήθηκαν μέσα στο κουτί είναι 165 να υπολογίσετε :

- Πόσες σειρές υπάρχουν μέσα στο κιβώτιο.
- Αν στην τελευταία σειρά τοποθετούνται σκουρόχρωμοι ράβδοι να υπολογίσετε πόσες ράβδοι υπάρχουν στην σειρά αυτή.
- Πόσες σκουρόχρωμοι ράβδοι και πόσες ανοιχτόχρωμοι ράβδοι χρησιμοποιήθηκαν.
- Το συνολικό όγκο του μετάλλου που υπάρχει μέσα στο κιβώτιο.

ΜΕΡΟΣ Β: Από τις 6 ασκήσεις του Β' μέρους να λύσετε μόνο τις 4. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x+2}$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της f .
- Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη f^{-1} της f και να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τον τύπο της.
- Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου να αποδείξετε ότι: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$
- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(3x)}{f(x) - \sqrt{2}}$

2. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 4x + 3y = 26$ και $\varepsilon_2: y = 7x - 33$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α και έστω Β να είναι το σημείο τομής της ε_2 με την ευθεία $x=4$.

- Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Α.
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_3 που περνά από το Β και είναι κάθετη στην ε_1 .
- Να βρείτε το σημείο τομής Γ των $\varepsilon_1, \varepsilon_3$.
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.
- Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ έτσι ώστε το τετράπλευρο ΑΓΒΔ να είναι τετράγωνο.

3. α) Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^4\theta + \sigma\upsilon\nu^4\theta = \frac{3 + \sigma\upsilon\nu(4\theta)}{4}$.

β) Αν $f(x) = \eta\mu^4x + \sigma\upsilon\nu^4x$ να αποδείξετε ότι $f'(x) + \frac{1}{4}f''(x) + 4f(x) = 3 - \eta\mu 4x$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{2} \leq \eta\mu^4x + \sigma\upsilon\nu^4x \leq 1$ και να βρείτε το πεδίο τιμών της f .

4. Δίνεται η ακολουθία: $a_n = 4\epsilon\varphi\theta(\sigma\upsilon\nu\theta)^n$ με $\theta \neq \frac{\kappa\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

i. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος.

ii. Να αποδείξετε ότι ο τρίτος όρος της είναι ίσος με $\eta\mu 3\theta + \eta\mu\theta$.

iii. Να υπολογίσετε το άθροισμα των απείρων όρων της.

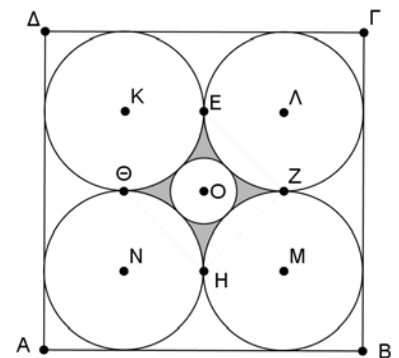
iv. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{4\eta\mu\theta}{1 - \sigma\upsilon\nu\theta} = 4\sqrt{3}$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

5. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $8a$ cm. Στο εσωτερικό του γράφουμε τέσσερις ίσους κύκλους με κέντρα Κ, Λ, Μ, Ν που εφάπτονται στις πλευρές του τετραγώνου. Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν ο κύκλος (Ο, ρ) εφάπτεται εξωτερικά στους τέσσερις ίσους κύκλους,

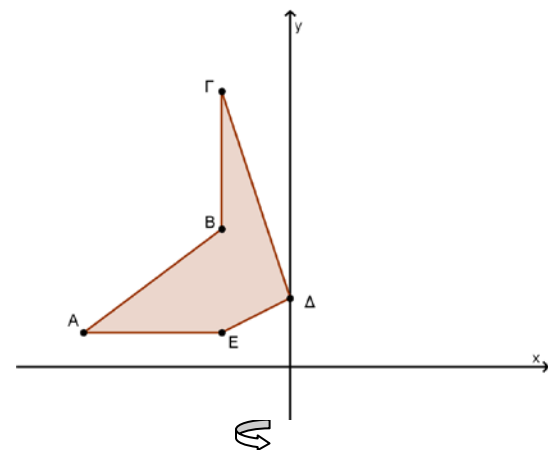
i. να δείξετε ότι η ακτίνα ρ του κύκλου (Ο, ρ) είναι ίση με

$$\rho = (2a\sqrt{2} - 2a) \text{ cm}$$

ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος.



6. Στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα αξόνων δίνονται τα σημεία $A(-6,1)$, $B(-2,4)$, $\Gamma(-2,8)$, $E(-2,1)$ και $\Delta(0,2)$. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σχήματος ΑΒΓΔΕΑ γύρω από τον άξονα των y .



Η Διευθύντρια

Θεοφάνους Μαρία

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ / ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: 30.05.2012

Χρόνος: 2:30΄

Αριθμός σελίδων: 4

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Να γράφετε με μελάνι χρώματος μπλέ ή μαύρου.
- Τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Δίνεται τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α: Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε **μόνο τις 12**.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100 μονάδες.

1. Δίνεται η πρόοδος : 4, 7, 10,

Να βρείτε: α) το είδος της προόδου, β) τον τριακοστόν δεύτερον όρον της (a_{32}).

2. Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $2\sin 3x - 1 = 0$.

3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 5}$.

4. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $\psi = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$

β) $\psi = e^x \sin x$

5. Ο όγκος κώνου είναι $27\pi \text{ cm}^3$ και το ύψος του τριπλάσιο από την ακτίνα της βάσης του.
Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.

6. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{1}{x^3 - 9x}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

7. Να λύσετε την εξίσωση $\log^2(x-3) - 3\log(x-3) = -2$

8. Να λύσετε την εξίσωση $2|x-1| - 3x - 7 = 0$.

9. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης $2a$ και οι παράπλευρες έδρες της σχηματίζουν με τη βάση γωνία 60° . Να βρείτε συναρτήσει της παραμέτρου a το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.

10. Να δείξετε ότι $\frac{\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta} + \frac{\eta\mu(\beta-\gamma)}{\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma} + \frac{\eta\mu(\gamma-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha} = 0$

11. Να λύσετε την εξίσωση $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x = -2$.

12. Το άθροισμα των δύο πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου είναι 8 και το άθροισμα του τέταρτου και του πέμπτου όρου της είναι ίσο με $\frac{8}{27}$.

α) Να βρείτε την πρόοδο. β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των απείρων όρων της.

13. Τα σημεία $A(2,4)$, $B(-4,6)$ και $\Gamma(-2,-8)$ είναι οι κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$.

Να βρείτε: α) το μήκος της πλευράς $A\Gamma$.

β) την εξίσωση της πλευράς AB .

γ) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1) \cdot e^{x+1}$ με πεδίο ορισμού $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x)$ στο σημείο της x_0 , όπου $f''(x_0) = 0$ και να δείξετε ότι η εφαπτομένη αυτή είναι κάθετη με την ευθεία $\psi - x = 0$.

15. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \frac{1}{x-3}$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$.

Να εξετάσετε αν ορίζεται η σύνθεση $f \circ g$. Αν ορίζεται να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τον τύπο της.

ΜΕΡΟΣ Β: Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε **μόνο τις 4**.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100 μονάδες.

1. Αν x είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

να υπολογίσετε το άθροισμα: $x + \log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x + \dots$ (άπειροι όροι) .

2. Οι εξισώσεις των πλευρών AB και AD παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι αντίστοιχα $\chi + \psi - 1 = 0$ και $\chi - \psi + 3 = 0$. Αν η μια κορυφή του έχει συντεταγμένες $(7, 2)$ τότε:

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των άλλων κορυφών του.

β) Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου AG .

γ) Να αποδείξετε ότι το παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο.

δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου τομής των διαγωνίων του από την πλευρά AB .

3. α) Να δείξετε ότι $(\sin^2 \chi + 2\eta\mu\chi\sin\chi - \eta\mu^2\chi)^2 = 1 + \eta\mu 4\chi$.

β) Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω ταυτότητα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης:

$$(\sin^2 \chi + 2\eta\mu\chi\sin\chi - \eta\mu^2\chi)^2 = 3 + 4\eta\mu 4\chi - 2\eta\mu^2 4\chi$$

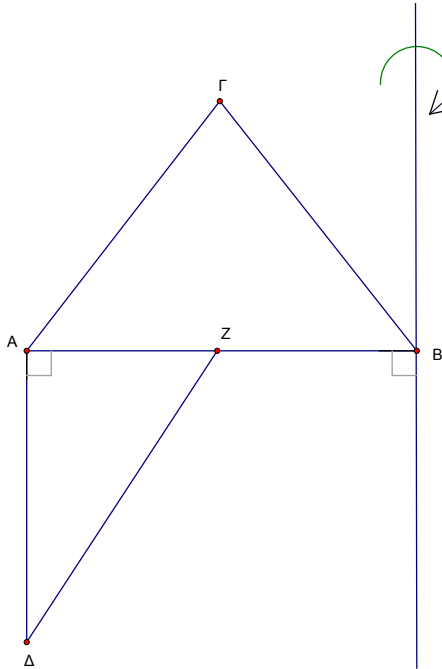
4. α) Έστω $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots, \Sigma_v$ τα αθροίσματα των άπειρων όρων φθινουσών γεωμετρικών προόδων που έχουν ως πρώτο όρο τους αριθμούς $1, 2, 3, \dots, v$ και ως λόγο αντίστοιχα τους αριθμούς $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{v+1}$. Να αποδείξετε ότι $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \dots + \Sigma_v = \frac{v(v+3)}{2}$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3^x$. Αν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δείξετε ότι οι αριθμοί $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

5. α) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{-x^2 + 3x - 2}$

β) Αν $f(x) = 10x - \frac{x^3}{3}$ να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\eta\mu(x-4)}{f'(x) + 6}$.

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 6\text{ cm}$ και $A\Gamma = B\Gamma = 5\text{ cm}$. Στη κορυφή A φέρουμε κάθετη $A\Delta = 6\text{ cm}$ και σχηματίζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta Z$ εκτός του επιπέδου του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Z το μέσο της AB . Το επίπεδο σχήμα $A\Gamma BZ\Delta A$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα που είναι κάθετος στην AB στο σημείο B . Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που παράγεται.



ΛΥΚΕΙΟ ΑΓ. ΝΕΟΦΥΤΟΥ_ΜΑΘ.Α_2012

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Ο ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

.....
Μάριος Ιωακείμ

.....
Μ. Κκέλης (Β.Δ.Α΄.)

.....
Σ. Κόκκινος

.....
Χαράλαμπος Καττιμέρης

.....
Γιώργος Ανδρονίκου

.....
Χατζηχαραλάμπους Γεωργία

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ 2012

ΤΑΞΗ: Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

HMEPOM.: 17/5/2012

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Κατεύθυνσης

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ½ ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής σφραγισμένης από το σχολείο.
2. Να γράφετε με μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Το δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄

Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{2x^2 + 11x - 10}{(x - 2)^2 (x + 3)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο τομής των ευθειών $(\epsilon_1): 4x - y = 7$ και $(\epsilon_2): 3x + 2y = -3$ και είναι κάθετη στην ευθεία $(\epsilon): 5x - y = 2$.
3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων :

$\alpha) \ y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$

$\beta) \ y = e^x \cdot \sin^5 x$
4. Να υπολογίσετε τα όρια των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 6x + 7}{x^2 + 4x - 2}$$

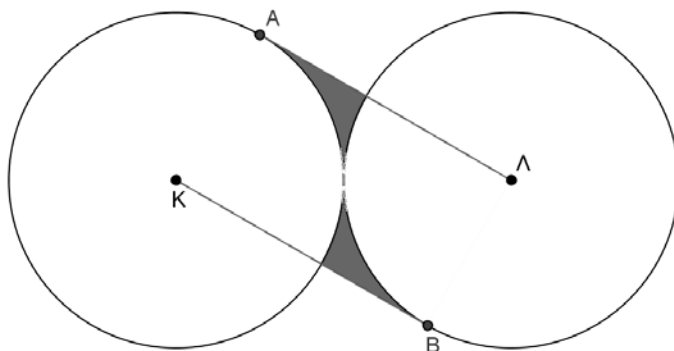
$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})$$

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$, $x \neq 3$ και $g(x) = \frac{2x+1}{x^2-9}$, $x \neq \pm 3$.

Να βρείτε τους τύπους και τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$.

6. Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης: $\sigma\upsilon\nu 2x + 9\sigma\upsilon\nu x - 4 = 0$.

7. Μία κανάτα γεμάτη κρασί σχήματος κολουρου κώνου, έχει γενέτειρα ίση με 10 cm και εμβαδόν ολικής επιφάνειας ίσο με $210\pi \text{ cm}^2$. Αν η ακτίνα της μιας βάσης είναι τριπλάσια από την ακτίνα της άλλης βάσης, να βρείτε τις ακτίνες των βάσεων, το ύψος και τον όγκο του κολουρου κώνου.
Πόσα ποτήρια σε σχήμα κυλίνδρου ακτίνας 2 cm και ύψους 3 cm μπορούμε να γεμίσουμε με το κρασί της κανάτας;
8. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $2\psi^2 + \chi\psi + x^2 - 16 = 0$ στο σημείο της με $\psi_0 = 2$ και $x_0 > 0$.
9. Αν $\log_2(x+3)$, $\frac{1}{2}\log_2(x^2+3)$, 1 , είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να βρείτε τις τιμές του x .
10. Σε κανονική τετραγωνική πυραμίδα η παράπλευρη έδρα σχηματίζει με τη βάση γωνία 60° . Αν το εμβαδόν της βάσης της πυραμίδας είναι 144cm^2 , να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.
11. Να λύσετε την εξίσωση: $25^{x+1} - 4 \cdot 5^{x+2} - 125 = 0$.
12. Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύουν οι σχέσεις $\beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma = \alpha^2$ και $4\eta\mu B \eta\mu\Gamma = 3$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.
13. Δύο ίσοι κύκλοι ακτίνας R, εφάπτονται εξωτερικά. Αν ΛΑ και ΚΒ είναι εφαπτόμενες των κύκλων στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, να βρεθεί το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής, συναρτήσει του R.



14. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\eta\mu 8\alpha - \eta\mu 6\alpha - \eta\mu 2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 8\alpha = 2\eta\mu^2\alpha \cdot \eta\mu 8\alpha$.
15. Σε μια αριθμητική πρόοδο, το άθροισμα των δύο πρώτων όρων της είναι ίσο με x και το άθροισμα των α_n και α_{n-1} όρων της είναι ίσο με ψ .
Να δείξετε ότι: $\Sigma_n = \frac{1}{4}n(x + \psi)$.

ΜΕΡΟΣ Β΄

Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.

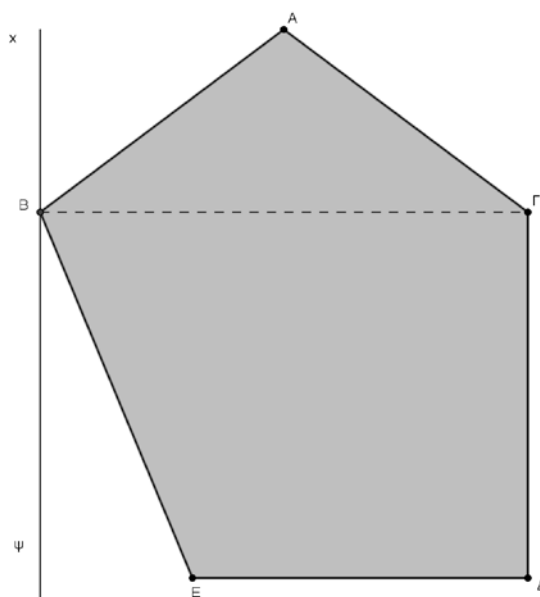
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1. Τραπεζίο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) έχει κορυφές $B(10, 3)$, $\Gamma(5, 4)$, $\Delta(2, 2)$ και η διαγώνιος του $A\Gamma$ έχει εξίσωση $7x - 4y = 19$.
 - α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς AB .
 - β) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής A .
 - γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Γ από την πλευρά AB .
 - δ) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν οι πλευρές $A\Delta$ και $B\Gamma$ του τραπεζίου.
 - ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.

2. α) Το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων μιας φθίνουσας γεωμετρικής προόδου είναι ίσο με 65 και το άθροισμα των άπειρων όρων της είναι ίσο με 81.
Να σχηματίσετε την πρόοδο, αν $\lambda > 0$.

β) Δίνονται τα αθροίσματα με άπειρους όρους :
$$\Sigma_1 = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots$$
$$\Sigma_2 = 1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6 + \dots$$
$$\Sigma_3 = 1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \dots, \quad \text{όπου } -1 < \alpha < 1, \alpha \neq 0$$
 - (i) Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α , τα Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 .
 - (ii) Να δείξετε ότι $(\Sigma_1)^2$, Σ_2 , $(\Sigma_3)^2$, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

3. Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma = 10\text{cm}$ και $B\Gamma = 16\text{cm}$. Το $B\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο τραπεζίο με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Gamma\Delta = 12\text{cm}$ και $\Delta E = 11\text{cm}$. Το πεντάγωνο $A\Gamma\Delta E B$ στρέφεται μια πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $x\psi$ ($x\psi \parallel \Gamma\Delta$). Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή.



4. α) Δίνεται η συνάρτηση $y = \ln(\eta\mu 2x)^3$. Να δείξετε ότι : $3\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 36 = 0$

β) Να αποδείξετε ότι : $\frac{4\eta\mu(x-30^\circ) \cdot \eta\mu(x+30^\circ) + 1}{4\sigma\upsilon\nu(x-30^\circ) \cdot \sigma\upsilon\nu(x+30^\circ) + 1} = \varepsilon\varphi^2 x$

5. α) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x - 5$ και $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

(i) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g .

(ii) Να βρείτε το πεδίο τιμών της συνάρτησης f .

(iii) Να εξετάσετε αν ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\log_{\eta\mu x} \sigma\varphi x + \log_{\sigma\upsilon\nu x} \varepsilon\varphi x = 0$, για $0 \leq x \leq 2\pi$.

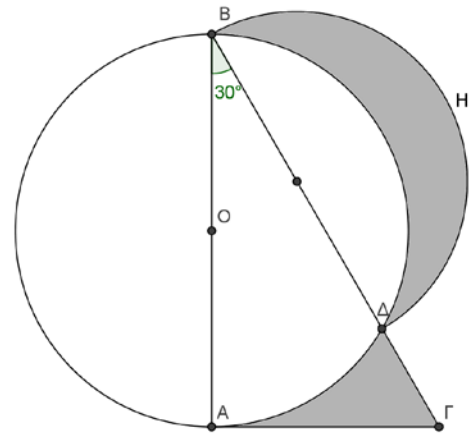
6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο το O ,

ακτίνα R και $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Η $ΑΓ$ είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο A και με διάμετρο τη $B\Delta$ γράφουμε ημικύκλιο $B\Delta\Gamma$.

α) Να δείξετε ότι $B\Delta = R\sqrt{3}$.

β) Να υπολογίσετε, συναρτήσει του R , το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής.



Η Διευθύντρια

Η Συντονίστρια

Διδάσκοντες

Ζερζελίδου Χ.

Κωνσταντίνου Π

Γεωργιάδου Κάτια

Γιώτα Σελιά Χαραλάμπους (Β.Δ)

Μορφή Κ.

Μυλωνά Μ.

Νεοφύτου Θ.

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΤΑΞΗ Β΄

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 25/05/2012

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΩΡΑ: 7:45 – 10:15

ΒΑΘΜΟΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΣ:

ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:

ΥΠΟΓΡΑΦΗ:

ΟΝΟΜΑ: ΤΜΗΜΑ: ΑΡ.:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 17 σελίδες.
- Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Να γράψετε με μελάνι μαύρο ή μπλε (για τα σχήματα επιτρέπεται η χρήση μολυβιού).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Επισυνάπτεται τυπολόγιο μαθηματικών.

ΜΕΡΟΣ Α: Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1) Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{4x+5}{(x-1)(x+2)}$
- 2) Να λύσετε την εξίσωση: $\log x - \log(x-8) = 1 - \log 2$
- 3) Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:
 - α) $y = x^3 + e^x \eta \mu x$
 - β) $y = \ln(\sqrt{x})$
- 4) Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης: $\sin(3x) = \eta \mu x$
- 5) Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές τα σημεία $A(0,4)$, $B(3,2)$ και $\Gamma(2,-2)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ και το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.
- 6) Να βρείτε τις τιμές του x ώστε οι αριθμοί 1 , e^x , $2 - e^x$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
- 7) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης $E_\beta = 4\text{cm}^2$ και εμβαδόν ολικής επιφάνειας $E_{ολ} = 12\text{cm}^2$. Να βρείτε τον όγκο της πυραμίδας και το μέτρο της γωνιάς που σχηματίζει το παράπλευρο ύψος με το επίπεδο της βάσης της.

8) Κόλουρος κώνος και κύλινδρος έχουν ίσους όγκους και τα ύψη τους είναι ίσα με 4cm . Η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου είναι ίση $\sqrt{7}\text{cm}$ και η ακτίνα της μικρής βάσης του κολουρου κώνου είναι ίση με 1cm . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κολουρου κώνου.

9) Να βρείτε την τιμή του x στην παρακάτω εξίσωση:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} + \dots = 2$$

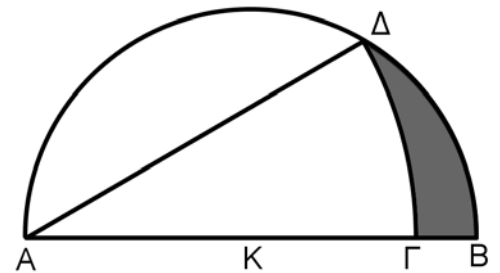
10) Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$ με τύπο $f(x) = x^2 - 2x + 1$ και πεδίο ορισμού $x < 1$. Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης $f^{-1}(x)$.

11) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\alpha\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B = \beta\sigma\upsilon\nu^2 A$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha(1 + \eta\mu(\beta x))$. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,1)$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y = -x$.

13) Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = xe^{ax}$ όπου $a \neq 0$ σταθερά και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x) - 4f'(x)}{f(x)} = -5$. Να βρείτε την τιμή του a .

14) Δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 2R$ και κέντρο το σημείο K . Με κέντρο το A και ακτίνα την AD γράφουμε τόξο $\widehat{AD\Gamma}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$ είναι 30° . Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους συναρτήσει του R .



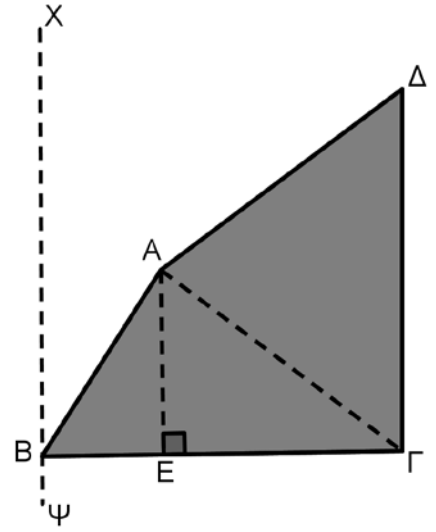
15) Να δείξετε ότι οι: $\epsilon\phi\alpha$, $\frac{\eta\mu 4\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu 4\alpha}{\eta\mu 2\alpha}$, $\sigma\phi\alpha$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ΜΕΡΟΣ Β: Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες

- 1) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η εξίσωση της πλευράς AB είναι $AB: y = -4x - 6$ και η εξίσωση του ύψους AD είναι $AD: y = -x$. Οι συντεταγμένες μιας κορυφής του είναι $(-1, -2)$ και η κλίση της πλευράς $A\Gamma$ είναι $\lambda_{A\Gamma} = -\frac{1}{4}$.
- α) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής A είναι $A(-2, 2)$.
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ .
- γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- δ) Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την AB η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E .
Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου E .
- 2) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 4$ και $g(x) = \sqrt{x}$.
- α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$.
- β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(2x)}{x - 1} \right)$.
- γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x + 1) - g(x)]$.
- 3) α) Να δείξετε ότι $\eta\mu 2\theta \sigma\varphi\theta = \sigma\upsilon\nu 2\theta + 1$.
- β) Να λύσετε την εξίσωση $2^{\sigma\upsilon\nu 2\theta} - 2^{2-\eta\mu 2\theta \sigma\varphi\theta} = 1$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$.
- 4) Φθίνουσα αριθμητική πρόοδος με διαφορά δ και φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ , έχουν τον ίδιο πρώτο όρο. Ο δεύτερος όρος της γεωμετρικής προόδου είναι ίσος με το δεύτερο όρο της αριθμητικής προόδου και το άθροισμα του δεύτερου, του τρίτου και του τέταρτου όρου της αριθμητικής προόδου είναι ίσο με 0.
- α) Να δείξετε ότι $\lambda = \frac{1}{2}$.
- β) Αν επιπλέον $\frac{1}{3\delta} - \frac{\lambda^2}{9\delta} + \frac{\lambda^4}{27\delta} - \frac{\lambda^6}{81\delta} + \dots = -\frac{1}{13}$ να σχηματίσετε τις δύο προόδους.
- 5) Δίνεται η καμπύλη $y = \eta\mu(e^x + \pi) + \sigma\upsilon\nu(e^x + \pi)$.
- α) Να δείξετε ότι $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + e^{2x}y = 0$.
- β) Να δείξετε ότι εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο A με τετμημένη $x_A = \ln \pi$ είναι $y = \pi x - \pi \ln \pi + 1$
- γ) Η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο A τέμνει τους άξονες στα σημεία B και Γ . Να δείξετε ότι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$ είναι $(B\Gamma) = \sqrt{\pi^2 + 1} \left(\frac{\pi \ln \pi - 1}{\pi} \right)$

- 6) Το παρακάτω σχήμα αποτελείται από ένα ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ ($A\Delta = A\Gamma$) και ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $AB = \sqrt{13} \text{ cm}$, $B\Gamma = 6 \text{ cm}$ και ύψος $AE = 3 \text{ cm}$. Η $B\Gamma$ είναι κάθετη στον άξονα $X\Psi$ και στην $\Delta\Gamma$. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ γύρω από τον άξονα $X\Psi$.



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΤΑΞΗ: Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29/05/2012

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΩΡΑ: 07.45΄-10.15΄

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ
ΟΔΗΓΙΕΣ

Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.

Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).

Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.

Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας τύπου Tippo-Ex.

Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνεται ο τρόπος επίλυσής τους.

ΜΕΡΟΣ Α΄

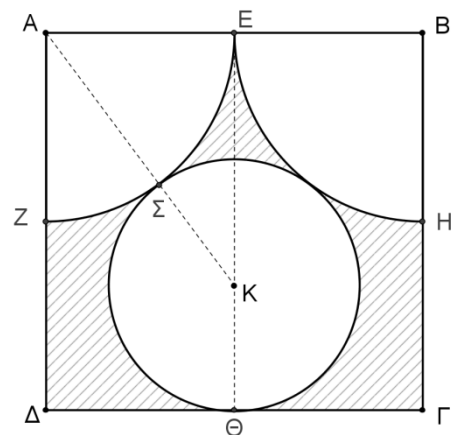
Από τα 15 θέματα να λύσετε μόνο τα 12.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{3x-5}{(x-3)(x+1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
2. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{x^2-49}$, β) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+5}{x-3}$
3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:
 α) $y=(2x^2+5)^4$ β) $y^2+xy=2x$
4. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma = -3+2+7+\dots + 52$.
5. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει παράπλευρο ύψος 10m και ύψος 8m. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδό ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.
6. Να αποδείξετε ότι $\frac{2}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{-}{-} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$
7. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με A(7,5), B(2,3) και C(4,-1). Να βρείτε:
 α) Το μήκος της πλευράς AB.
 β) Την εξίσωση της διαμέσου AM.
 γ) Την εξίσωση του ύψους BD.
 δ) Την απόσταση της κορυφής A από το ύψος BD.
8. Να λύσετε την εξίσωση: $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $[0^\circ, 180^\circ]$.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x^2 + 5$, $x \in [-6, 7)$ και $g(x) = x^2 - 1$, $x \in [-2, 11]$.
Να ορίσετε τις συναρτήσεις $(f+g)(x)$ και $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.
10. Να λύσετε την εξίσωση: $\ln \sqrt{e^{2x} + 7} = \ln 2 + \ln(e^x - 1)$.
11. Δίνεται κώνος με ακτίνα βάσης R και $\varphi = \frac{4}{3}$. Αν αριθμητικά ισχύει η σχέση $V = E_{\text{πλευρ}} + \frac{4}{3} \cdot \omega$, να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου.
12. Το πολυώνυμο $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 4$ έχει ρίζα τον αριθμό 2. Όταν διαιρεθεί με το $x - 1$ αφήνει υπόλοιπο -9 και $f''(0) = 2$
α) Να δείξετε ότι $a = 2$, $b = 1$ και $c = -8$.
β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^3 + x^2 + x - 2}$.
13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$ και $g(x) = x$.
i. Αν $x \geq 3$, να βρείτε το πεδίο τιμών της $f(x)$.
ii. Να εξετάσετε αν ορίζεται η f^{-1} και να βρείτε τον τύπο της $\forall x \in [3, +\infty)$. Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της f^{-1} .
iii. Να δείξετε ότι $f \circ f = g(x)$, $x \in [3, 9]$.
14. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\gamma^2 \eta\mu 2\alpha + \alpha^2 \eta\mu 2\beta = 2\beta\gamma$, να αποδείξετε ότι είναι ορθογώνιο.

15. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά 2α .
Με κέντρα τα A και B και ακτίνα α , φέρουμε τεταρτοκύκλια μέσα στο τετράγωνο.
Ο κύκλος με κέντρο K εφάπτεται των δύο τεταρτοκυκλίων και του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.
Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος συναρτήσει του α .



ΜΕΡΟΣ Β΄

Από τα 6 θέματα να λύσετε μόνο τα 4.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. α) Να υπολογίσετε τα όρια: ι) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}-2}$ ιι) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x^2 - 5x| + 2x - 10}{|5 - x|}$

β) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5, & 2 < x < 3 \\ +4, & 3 \leq x \leq 5 \\ 3x - 10, & 5 < x \leq 8 \end{cases}$

Να βρείτε τα όρια (αν υπάρχουν): $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$.

2. α) Δίνεται το τρίγωνο ABΓ με $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 75^\circ$ και $\hat{m} = 10^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες A, Γ, την πλευρά α και το εμβαδόν του τριγώνου.

β) Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση:

$$(\cot A - \cot B)^2 + (\cot A + \cot B)^2 = 4 \cot^2 \frac{C}{2}$$

3. α) Δίνεται η συνάρτηση $y = e^x \cdot \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Αν οι αριθμοί $y \cdot \sqrt{3}$, y' , $y'' \cdot \sqrt{3}$, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου να βρεθεί η γωνία x .

β) Αν $x^2 \cdot y = \dots$ να δείξετε ότι $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x^2} + 4 \right) y = 0$

4. α) Σε αριθμητική πρόοδο δίνεται: $\frac{\sum \mu}{\sum \nu} = \left(\frac{\mu}{\nu} \right)^2$, $\mu \neq \nu$. Να αποδείξετε ότι

ι) $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{2}{1}$, ιι) $\frac{\sigma_3}{\sigma_4} = \frac{2}{1}$

β) Να λύσετε την εξίσωση :

$$\log_2(32^5 + \sqrt{5} + \sqrt[4]{5} + \log(x^2 - 2x)) = x + \frac{1}{1000}$$

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 - 4x + 8$ και η ευθεία $(\eta): y = 2x$
- α) Αν A, Γ είναι τα σημεία τομής της καμπύλης f και της ευθείας (η) με $OA < O\Gamma$ (όπου O η αρχή των αξόνων) να βρείτε τα σημεία A, Γ
- β) Να βρείτε τις κορυφές B, Δ τετραγώνου με διαγώνιο το ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma$
- γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο Γ είναι η $(\epsilon): y = 4x - 8$
- δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της f στο σημείο A είναι η $(\kappa): x = 2$
- ε) Να βρείτε το σημείο τομής Σ των $(\epsilon), (\kappa)$
- στ) Να βρείτε τον όγκο που σχηματίζεται από την πλήρη περιστροφή του τριγώνου $A\Gamma\Sigma$ γύρω από την πλευρά $A\Sigma$.
6. Δίνεται η καμπύλη $y = \frac{3x}{2x-1}, x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των δύο εφαπτόμενων της καμπύλης, που τέμνουν τον άξονα των x στο σημείο $(2,0)$.
- β) Αν $\frac{1}{2} < x < 1$ είναι η μια από τις δύο εξισώσεις των εφαπτόμενων, να βρείτε τα σημεία K, Λ της (ϵ) που σχηματίζουν με τα σημεία $A(1,-2)$ και $B(2,-3)$ τρίγωνα KAB και ΛAB με εμβαδό $\frac{S_K}{S_\Lambda} = \frac{S}{S} = \frac{3}{2}$ τ.μ.
- γ) Αν K είναι σημείο του άξονα των x , να βρείτε το συμμετρικό του σημείο K , ως προς την ευθεία $\frac{1}{2} < x < 1$.

Οι εισηγητές
 Τοφαλίδου Νίκη (ΒΔ)
 Νίσιος Θεόδωρος
 Τσαγκάρης Ανδρέας
 Χριστοδούλου Χριστόδουλος

Ο Διευθυντής
 Μασούρας Θεοχάρης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 25 / 05 / 2012

ΤΑΞΗ: Β΄
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2. 30΄

- ΟΔΗΓΙΕΣ:** α) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.
β) Να γράψετε μόνο με μελάνι (*τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι*).
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
δ) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που να φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.

ΜΕΡΟΣ Α:

- Από τις **15** ασκήσεις να λύσετε **μόνο** τις **12**.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **1** μονάδα.

1. Σε Αριθμητική Πρόοδο ο πρώτος όρος της είναι 4 και ο πέμπτος όρος της είναι τριπλάσιος του δεύτερου όρου της. Να σχηματίσετε την πρόοδο.

2. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{13-2x}{(x+7)(x-2)}$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{5x-2}{x+2}$.

Να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x)$
- β) τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης $f^{-1}(x)$.

4. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $\frac{d\psi}{dx}$ των συναρτήσεων:

α) $\psi = 5x^3 + \varepsilon\phi 4x - \frac{3}{x^2} + \ln 6$

β) $\psi = (e^{\sqrt{x}} + 7) \cdot \sigma\phi^3 x$

5. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-9}{x^2-2x-3}$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-3x+4}}{x}$

6. Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης: $\varepsilon\phi(2x - \frac{\pi}{6}) = \sigma\phi\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

7. Δίνεται το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με κορυφές $A(3, -1)$, $B(-1, -5)$ και $\Gamma(0, 2)$.
 α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.
 β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς AB .
8. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδό παράπλευρης επιφάνειας ίσο 260 m^2 και εμβαδό βάσης ίσο με 100 m^2 .
 Να βρείτε: α) τον όγκο της πυραμίδας και
 β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

9. Να λύσετε τη λογαριθμική εξίσωση: $\log_x 100 - \frac{2}{\log_5 x} = 2$

10. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \sqrt{x-5}$.

Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $g \circ f$ β) $f \cdot g$ γ) $\frac{f}{g}$.

11. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης

$x^2 + \psi^2 - 8x + 4\psi + 2 = 0$ στο σημείο A με τετμημένη $x = 1$ και $\psi < 0$.

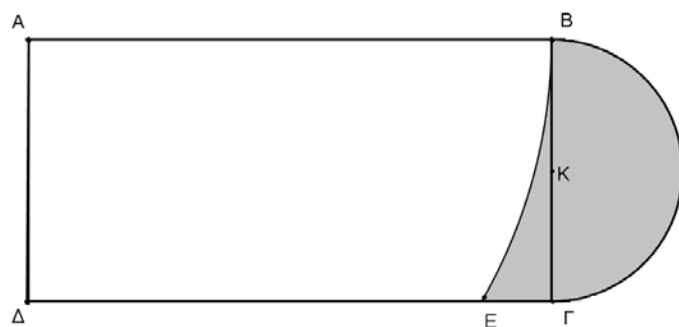
12. Να αποδείξετε την πιο κάτω τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 8x}{\eta\mu 8x} + \frac{\eta\mu 8x}{1 - \sigma\upsilon\nu 8x} = \sigma\phi 2x - \epsilon\phi 2x$$

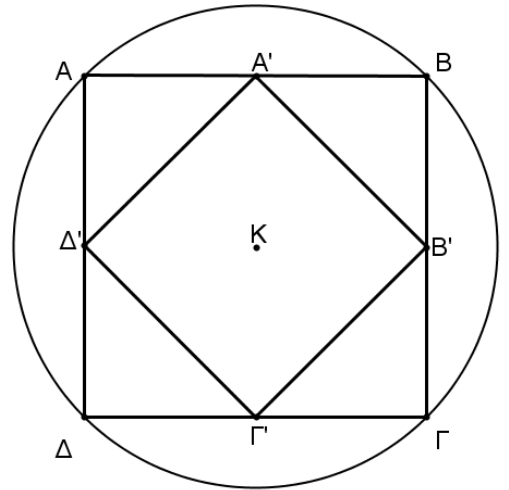
13. Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι ισχύει η πιο κάτω ισότητα:

$$2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + \dots + 2\nu(2\nu + 1) = \frac{\nu(\nu + 1)(4\nu + 5)}{3}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

14. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με μήκος 16cm και πλάτος 8cm . Με κέντρο το K και ακτίνα KB γράφουμε τόξο $\widehat{B\Gamma}$ (K το μέσο της $B\Gamma$) και με κέντρο το A και ακτίνα AB γράφουμε τόξο $\widehat{B\epsilon}$ όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο της σκιασμένης επιφάνειας.



15. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) και εγγεγραμμένο τετράγωνο με κορυφές $AB\Gamma\Delta$. Με κορυφές τα μέσα των πλευρών του τετραγώνου κατασκευάζουμε τετράγωνο με κορυφές $A'B'\Gamma'\Delta'$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε άπειρα τέτοια τετράγωνα. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των άπειρων αυτών τετραγώνων είναι $\Sigma = 4R^2$.



ΜΕΡΟΣ Β:

- Από τις **6** ασκήσεις να λύσετε **μόνο** τις **4**.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **2** μονάδες.

1. α) Να λύσετε την πιο κάτω λογαριθμική εξίσωση:

$$\log_2 (9^{x-1} + 11) = 2 + \log_2 (3^{x-2} + 4).$$

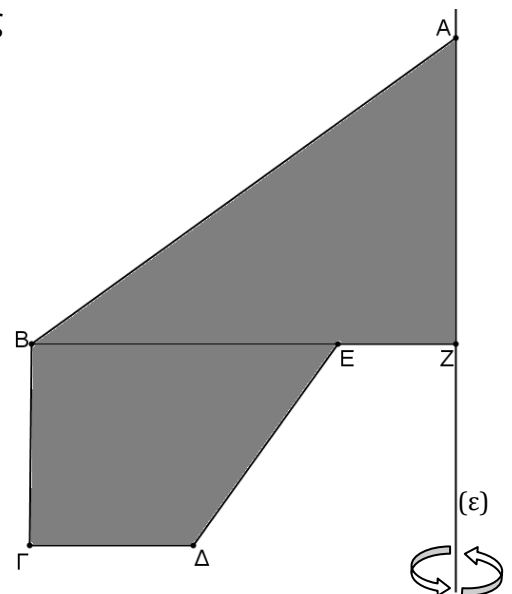
β) Αν $\psi = \ln\left(\frac{7}{x+2}\right)$, να δείξετε ότι $7\frac{d^2\psi}{dx^2} + e^{\psi}\frac{d\psi}{dx} = 0$.

2. Φθίνουσα Γεωμετρική Πρόοδος (Φ.Γ.Π.) και Αριθμητική Πρόοδος (Α.Π.) έχουν τον ίδιο πρώτο όρο και η διαφορά δ της Α.Π. είναι τριπλάσια του λόγου λ της Φ.Γ.Π.. Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της Αριθμητικής Προόδου είναι ίσο με τον όγδοο όρο της και ο πέμπτος όρος της Αριθμητικής Προόδου είναι διπλάσιος του αθροίσματος των απείρων όρων της Γεωμετρικής Προόδου, να βρείτε τις δύο προόδους.

3. Στο διπλανό σχήμα το πολύγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ με πλευρές $AB = 10\text{cm}$, $AZ = 6\text{cm}$, $\Gamma\Delta = 3\text{cm}$, $\Delta E = 5\text{cm}$ και $EZ = 2\text{cm}$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ϵ) η οποία είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$.

Να υπολογίσετε:

- α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και
- β) τον όγκο του στερεού που παράγεται.



4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Η κορυφή Α έχει θετικές συντεταγμένες και βρίσκεται πάνω στην ευθεία $\psi = x$. Αν η κορυφή Β βρίσκεται πάνω στον άξονα $x\chi'$ και οι εξισώσεις της διαγωνίου του ΒΔ : $3x - \psi = 12$ και της πλευράς του ΔΓ : $x + \psi = 8$, να βρείτε:

- α) τις συντεταγμένες των κορυφών του παραλληλογράμμου
- β) την απόσταση των παράλληλων πλευρών του ΑΒ και ΔΓ
- γ) το εμβαδόν του παραλληλογράμμου
- δ) την εφαπτομένη της γωνίας $\hat{A}\Delta\Gamma$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x - \eta\mu 2x$ και

$$h(x) = \frac{\eta\mu 3x(1 + \sigma\upsilon\nu 6x)}{\eta\mu 6x}.$$

α) Να λύσετε την εξίσωση $g'(x) = 0$.

β) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.

γ) Να δείξετε ότι: $h(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$.

δ) Να δείξετε ότι: i) $f(x) \cdot g(x) = h(x)\eta\mu x$

$$\text{ii) } \frac{f(x) \cdot g(x) - h(x)}{1 - g(x)} = -\frac{1}{2f(x)}.$$

6. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = x^2 - 10$ και $g(x) = \ln\sqrt{x+1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $h(x) = (g \circ f)(x)$.

β) Εάν $h(x) = \ln\sqrt{x^2 - 9}$

i) να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $h(x)$ στο σημείο Α με

$$\text{τετμημένη 4 είναι η } 7\psi - 4x = \ln\left(\frac{\sqrt{7^7}}{e^{16}}\right)$$

ii) να δείξετε ότι ισχύει η σχέση: $\frac{-x \cdot h'(x)}{e^{2h(x)}} - \frac{9}{[f(x)+1]^2} = h''(x)$.

Η Διευθύντρια

Δρ. Χριστίνα Βαλανίδου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ : Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Διάρκεια : 2,5 ώρες

ΤΑΞΗ : Β' Ενιαίου Λυκείου

Ημερομηνία: 21/ 05 / 2012

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Να γράψετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι (Τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν και με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής, σφραγισμένης από το σχολείο.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.**ΜΕΡΟΣ Α':** Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1) Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{6-4x}{x(x+3)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2) Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{x+1}{2x-6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.

3) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$ και β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 + 3x + 2}{-2x^2 + 3}$.

4) Να λύσετε την εξίσωση $4^x - 6 \cdot 2^x - 16 = 0$.

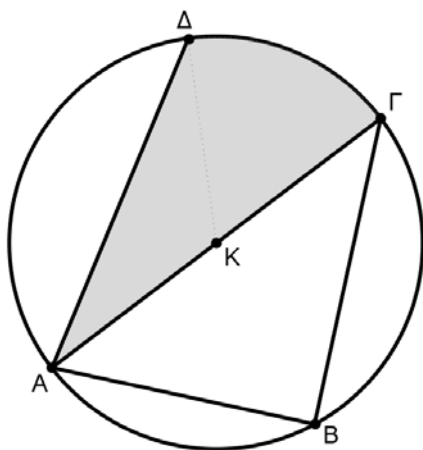
5) Σε αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι τριπλάσιος της διαφοράς της και το άθροισμα του δεύτερου και του πέμπτου όρου της είναι 22.

α) Να σχηματίσετε την πρόοδο.

β) Να βρείτε το άθροισμα των είκοσι πρώτων όρων της.

6) Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $\eta\mu(2x - 15^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- 7) Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:
 α) $y = e^x \cdot \sin x$ β) $y = (x^2 + 3)^3$
- 8) Τρίγωνο ABΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $R = 4 \text{ cm}$ και έχει πλευρές $a = 8 \text{ cm}$ και $\beta = 4 \text{ cm}$.
 α) Να επιλύσετε το τρίγωνο.
 β) Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου.
- 9) Να λύσετε την εξίσωση: $\log_2 x - 3 \log_x 4 = -1$.
- 10) Ο όγκος κυλίνδρου είναι $64\pi \text{ cm}^3$ και το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του είναι διπλάσιο του εμβαδού της βάσης του. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.
- 11) α) Να βρείτε την τιμή του κ ώστε η ευθεία $3x + 2y = 15$ να περνά από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα $A(-1, 0)$ και $B(7, \kappa)$.
 β) Να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ με άκρα $A(-1, 0)$ και $\Gamma(5, 8)$.
- 12) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει παράπλευρο ύψος $4\sqrt{2} \text{ cm}$. Αν το ύψος της σχηματίζει γωνία 45° με το παράπλευρο ύψος, να υπολογίσετε:
 α) τον όγκο της πυραμίδας και
 β) το εμβαδόν ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.
- 13) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\eta\mu 2\omega}{1+\omega\eta\mu 2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\omega\sigma\upsilon\nu 2} = \varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}$.
- 14) Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη της καμπύλης $x^2 + 4xy - y^2 = 1$ στο σημείο της με $x = 1, y > 0$ είναι η ευθεία $9x - 2y = 1$.
- 15) Δίνεται κύκλος (Κ, R) με διάμετρο ΑΓ και χορδές $AB = 6 \text{ cm}$, $B\Gamma = 8 \text{ cm}$ και $\angle A = \lambda_3$.
 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του και την περίμετρο του σκιασμένου μέρους.



ΜΕΡΟΣ Β': Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, 1)$, $B(7, -5)$ και $\Gamma(-3, 3)$. Να βρείτε:
- α) την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$,
 - β) την εξίσωση του ύψους $A\Delta$,
 - γ) το μήκος του ύψους $A\Delta$ και
 - δ) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

- 2) Δίνεται η συνάρτηση $y = \ln \frac{x}{1-3x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να δείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-3x^2}$.

γ) Να δείξετε ότι $\frac{d^2y}{dx^2} - 9e^y \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2} = 0$.

- 3) Σε φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο δίνεται $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{3}{2}$ και $\alpha_1(1-\lambda) = 3$, όπου λ ο λόγος της προόδου.

α) Να γράψετε τους τέσσερεις πρώτους όρους της προόδου.

β) Να βρείτε το άθροισμα των άπειρων όρων της προόδου.

- 4) Αν ο αριθμός x είναι η μεγαλύτερη από τις ρίζες της εξίσωσης $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$,
να αποδείξετε ότι το άθροισμα $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x + \log_{256} x + \dots = 2$.

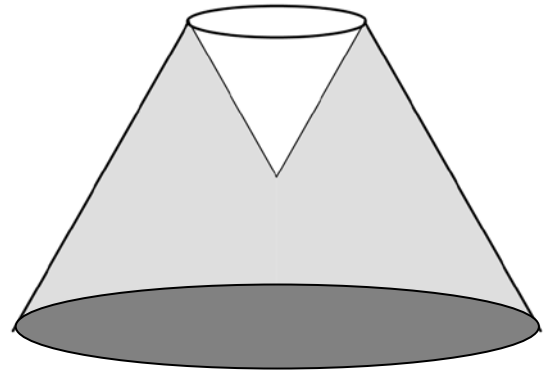
- 5) α) Αν $\epsilon\phi\alpha = 3\epsilon\phi\beta$, να δείξετε ότι: $\epsilon\phi(\alpha - \beta) = \frac{\eta\mu 2\beta}{1 + 2\eta\mu^2\beta}$.

β) Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση: $2\eta\mu A \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \frac{B}{2} + 2\eta\mu B \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} - \eta\mu\Gamma = 1 + \eta\mu B$,
να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

- 6) Στο διπλανό σχήμα, από τον κώλουρο κώνο αποκόπτουμε κώνο (όπως φαίνεται στο σχήμα). Η ακτίνα της μεγάλης βάσης του κώλουρου κώνου ισούται με 6 cm και η γενέτειρα του ισούται με 8 cm. Η γωνία που σχηματίζει η γενέτειρα του κώλουρου κώνου με τη μεγάλη βάση του ισούται με 60° και το ύψος του κώνου ισούται με το μισό του ύψους του κώλουρου κώνου.

Να υπολογίσετε:

- α) τον όγκο του στερεού που απομένει και
- β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που απομένει.



Η Διευθύντρια

Παναγιώτα Χρυσοχού - Αναστασιάδου

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΤΑΞΗ: Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 24/5/2012
ΩΡΑ : 7:45 π.μ

ΧΡΟΝΟΣ : 2:30'

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

β) Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι (στα σχήματα επιτρέπεται το μολύβι).

γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

δ) Μεταφέρετε τα σχήματα στο φύλλο των λύσεων σας.

ε) Το δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α': Από τα 15 θέματα να λύσετε ΜΟΝΟ τα 12.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- Δίνεται η αριθμητική πρόοδος : $1, 4, 7, \dots$
Να βρείτε το άθροισμα των είκοσι πρώτων όρων.
- Να λύσετε την εξίσωση: $\log(x+5) - 3\log 2 = 0$
- Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης : $y = \frac{1-2x}{3x^2+1}$
- Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, αν $\alpha=6$ cm, $\beta=3$ cm και $\gamma=3\sqrt{3}$ cm.
- Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 8 m και παράπλευρο ύψος 5 m. Να υπολογίσετε: (α) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της
(β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της και
(γ) τον όγκο της.
- Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{6x+2}{(x-1)^2(x+3)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
- Να υπολογίσετε τα όρια :
(α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-5}{x^2-5x+6}$ (β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x-2})$
- Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\eta\mu 2x}{1+\sigma\upsilon\nu 2x} \cdot \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2\sigma\upsilon\nu^2 x} = \varepsilon\phi^3 x$
- Να δείξετε με την μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει η πρόταση:
 $1+2+2^2+\dots+2^{n-1}=2^n-1$

10. Να λύσετε την εξίσωση: $1 + 2\log_4 x = \log_x 4$
11. Μιας αριθμητικής προόδου ο πρώτος όρος είναι ίσος με $\log 2$ και ο δεύτερος όρος με $\log 8$.
Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της ισούται με: $\sum_{10} = 100 \cdot \log 2$
12. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \sqrt{x-3}$ και $g(x) = \frac{1}{x-2}$. Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$.
13. Να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης: $\ln(3^{2\sin x + 1} - 3^{\sin x} - 23) = 0$
14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$. Να δείξετε ότι:
(α) $f'(x) = \sec x$ και $\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$
(β) $f''(x) \sin x + f'(x) = 0$
15. Αν η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $\varphi(x) = 5 - \alpha x + \frac{\beta}{\sqrt{x}} - \frac{8}{x^3}$ στο σημείο $A(1, \gamma)$ αυτής είναι η $41x - 2y - 45 = 0$, να βρείτε τα α , β και γ .

ΜΕΡΟΣ Β΄: Από τα 6 θέματα να λύσετε ΜΟΝΟ τα 4.

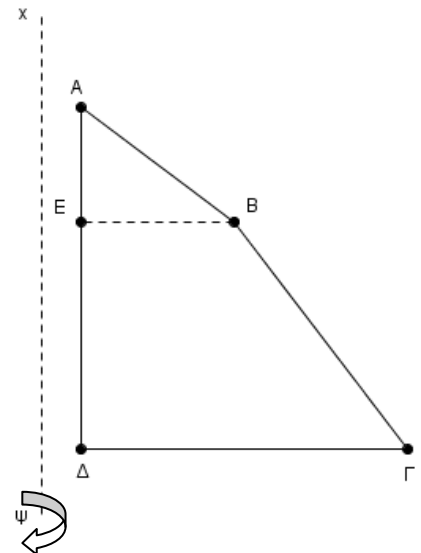
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Αριθμητική πρόοδος και φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος έχουν τον ίδιο πρώτο όρο. Η διαφορά της Α.Π. είναι ίση με τον λόγο της Γ.Π. Το άθροισμα των απείρων όρων της Γ.Π. είναι ίσο με τα $\frac{3}{5}$ του πρώτου όρου της. Το άθροισμα των 16 πρώτων όρων της Α.Π. είναι ίσο με μηδέν. Να βρείτε:
- (α) την Α.Π. και την Γ.Π.
- (β) (i) το άθροισμα όλων των θετικών όρων της Α.Π.
(ii) το άθροισμα των απείρων αρνητικών όρων της Γ.Π.

2. Δίνεται τρίγωνο ΔΕΖ με Δ(2,3) και Ε(-2,-3). Τα ύψη ΔΚ και ΕΜ τέμνονται στο Η $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$.

- (α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής Ζ είναι (6,1).
 (β) Να βρείτε: (i) το μήκος του ύψους ΔΚ.
 (ii) το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ
 (iii) το μέτρο της γωνίας ΚΔΖ κατά προσέγγιση μοίρας.

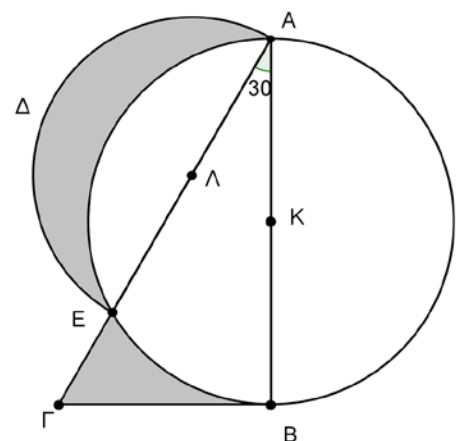
3. Στο σχήμα το ΕΒΓΔ είναι ορθογώνιο τραπέζιο ($EB \parallel \Delta\Gamma$, $\hat{E} = \hat{\Delta} = 90^\circ$) και το ΑΕΒ είναι ορθογώνιο τρίγωνο στο Ε.
 Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ περιστρέφεται πλήρως περί τον άξονα $\chi\psi \parallel \Delta\Delta$ που απέχει από την ΑΔ 2cm. Αν $AE = 6\text{cm}$, $AB = 10\text{cm}$, $B\Gamma = 15\text{cm}$ και $E\Delta = 12\text{cm}$,
 να βρείτε τον όγκο V και το εμβαδό της ολικής επιφάνειας του παραγόμενου στερεού .



4. (α) Να αποδείξετε ότι $\sin^4 \theta = \frac{1}{8} (\sin 4\theta + 4\sin 2\theta + 3)$
 (β) (i) Να αποδείξετε ότι $\sin x + \eta\mu 2x - \sin 3x = \eta\mu 2x \cdot (1 + 2\eta\mu x)$
 (ii) χρησιμοποιώντας το πιο πάνω να λύσετε την εξίσωση $\sin x + \eta\mu 2x = \sin 3x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (Κ, R). Η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου, η ΒΓ εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β και η γωνία $B\hat{A}\Gamma = 30^\circ$. Με διάμετρο την ΑΕ γράφουμε ημικύκλιο ΑΔΕ. Να υπολογίσετε:

- (α) (i) τις γωνίες $A\hat{K}E$ και $E\hat{K}B$
 (ii) το μήκος της ΒΓ
 (iii) το μήκος της ΑΕ
 (β) (i) το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο ΑΕ
 (ii) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ
 (γ) το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν.



6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln \frac{x-2}{x-1}$ και $g(x) = x^2 - 3x + 2$.

Να βρείτε:

(α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της $f(x)$

(β) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της $g(x)$

(γ) τον τύπο, το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της αντίστροφης συνάρτησης $f^{-1}(x)$

(δ) Να αποδείξετε ότι $f'(x) - \frac{1}{g(x)} = 0$

Η Διευθύντρια

Ελένη Σεμελίδου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2012ΜΑΘΗΜΑ : **Μαθηματικά (κατεύθυνσης)**

Διάρκεια : 2:30΄

ΤΑΞΗ : **Β΄ Ενιαίου Λυκείου**

Ημερομηνία : 22/5/2012

Οδηγίες :

1. Να γράφετε μόνο με μελάνι. (Τα σχήματα με μολύβι)
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
3. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
4. Τα σχήματα του φυλλαδίου να μεταφέρονται στη θέση που λύεται η άσκηση.
5. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **4 σελίδες**

Μέρος Α΄ (60 Μονάδες)Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε **μόνο** τις 12.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{x+6}{(x-4)(x+1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
2. Δίνεται η Αριθμητική Πρόοδος $-1, 1, 3, 5, \dots$
Να υπολογίσετε τον 11^ο όρο και το άθροισμα των 11 πρώτων όρων της προόδου.
3. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 1}{x - 2} =$
4. Κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης $R = 6 \text{ cm}$ και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $60\pi \text{ cm}^2$.
Να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου.
5. α) Να βρείτε την τιμή του κ αν το $(4, \kappa)$ είναι σημείο της ευθείας $3x + 5y - 2 = 0$
β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου $(4, -2)$ από την ευθεία $(\epsilon) : 3x - 4y + 5 = 0$.
6. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων :
α) $y = x^5 + \eta \mu x + e^x - e$ β) $y = \frac{1}{x} + \ln x + e^{3x}$
7. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης 144 cm^2 και ύψος 8 cm .
Να υπολογίσετε : α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας και
β) τον όγκο της.
8. α) Να λύσετε την εξίσωση : $9^x + 2 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$

β) **Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων** να αποδείξετε ότι :

$$\frac{\log_2 [\log_3 36 - \log_3 4 \cdot (\log_5 5)^4]^3}{\log 1000 + \ln \frac{1}{e^2}} = 3$$

9. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται $\alpha = 8 \text{ cm}$, $\beta = 4 \text{ cm}$ και $\gamma = 4\sqrt{3} \text{ cm}$. Να επιλύσετε το τρίγωνο.

10. Να βρείτε το πεδίο τιμών της συνάρτησης που ορίζεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{6x}{x+4}, \quad x \in (2, 4].$$

11. Να αποδείξετε την ταυτότητα : $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} - \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = 8 \quad \alpha > \beta$

12. Να λύσετε την εξίσωση: $\log_3 x - \log_x 81 = 3$

13. Αν $f(x) = ax^2 + bx + 4$, να βρείτε τις τιμές των a και b για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει στο σημείο της $A(1, 2)$ εφαπτομένη με κλίση $\lambda_{\text{εφ}} = 7$.

14. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται $A(1, -1)$, $B(3, 1)$ και $\Gamma(-1, -5)$. Να βρείτε :

- α) την εξίσωση της καθέτου ΑΔ
- β) την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ.

15. Οι διαστάσεις α , β , γ ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = 2$. Αν ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι ίσος με 64 cm^3 να βρεθούν :

- α) οι διαστάσεις α , β , γ
- β) το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του.

Μέρος Β' (40 Μονάδες)

Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε **μόνο** τις 4.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος να βρείτε :

α) το πεδίο ορισμού

β) το πεδίο τιμών

γ) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) =$

δ) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) =$

ε) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

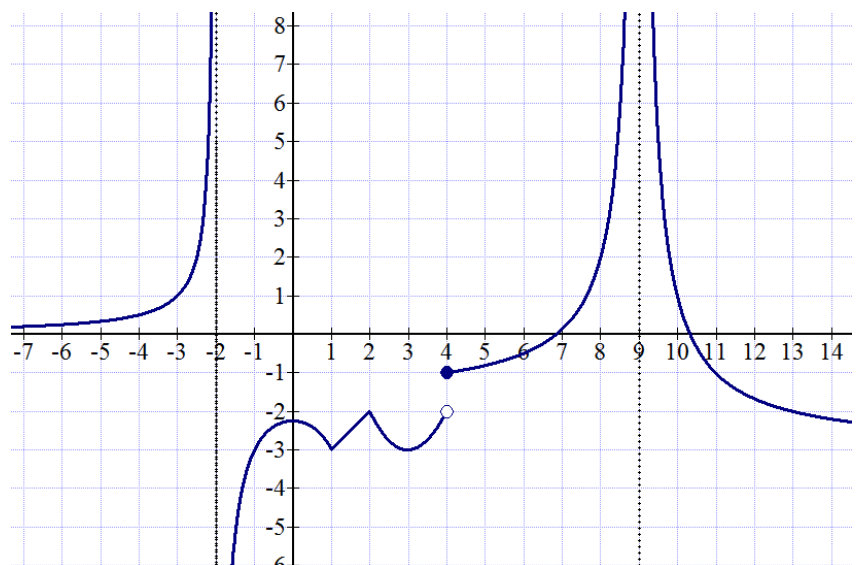
στ) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) =$

ζ) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) =$

η) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) =$

θ) τις τιμές του x στις οποίες δεν ορίζεται η πρώτη παράγωγος

ι) την τιμή της $(f \circ f)(10)$.



2. Δίνεται η συνάρτηση $x^2 + \psi^2 - 6x - 4\psi + 8 = 0$, $\psi < 2$ και σημείο της Α με τετμημένη $x=1$.

α) Να αποδείξετε ότι στο σημείο Α της πιο πάνω συνάρτησης

i) η εξίσωση εφαπτομένης είναι η (ϵ_1) : $2x + \psi - 3 = 0$ και

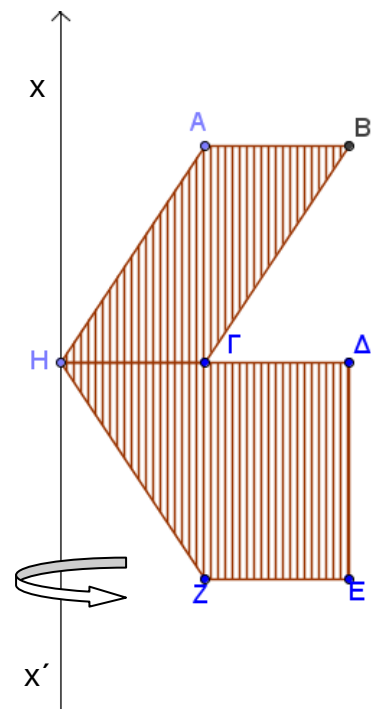
ii) η εξίσωση κάθετης είναι η (ϵ_2) : $x - 2\psi + 1 = 0$

β) Οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) , είναι δύο από τις εξισώσεις των πλευρών ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ. Αν το κέντρο του ορθογωνίου είναι το Κ(4,0) τότε να βρείτε:

i) Όλες τις κορυφές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ

ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

3. Το διπλανό σχήμα ΑΒΓΔΕΖΗ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xx' . Το ΑΒΓΗ είναι παραλληλόγραμμο, το ΗΔΕΖ ορθογώνιο τραπέζιο ($\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$), $H\Delta \perp xx'$ και $(AH) = (ZH)$. Αν επίσης $(AB) = 3\text{cm}$, $(AH) = 5\text{cm}$, $(ZE) = 3\text{cm}$, Γ μέσο της ΗΔ και Β,Δ,Ε συνευθειακά σημεία τότε να υπολογίσετε :
- α) το εμβαδόν της επιφάνειας και
- β) τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σχήματος .
(Οι απαντήσεις να δοθούν συναρτήσει του π).



4. α) Να βρείτε τις τιμές του $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ έτσι ώστε οι όροι :

$$\ln(\epsilon\phi x), -2\ln 2, \ln\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{8}\right) \text{ να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής}$$

προόδου.

β) Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x + \eta\mu 5x + \eta\mu 9x + \dots + \eta\mu kx}{x} \right) = 120$, τότε να βρείτε την τιμή του Κ.

5. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{-\kappa x + 1}$ όπου $0 < \kappa < 1$ και $x \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = g(x) + g'(x) + g''(x) + g'''(x) + g^{(4)}(x) + g^{(5)}(x) + \dots$ όπου $g^{(n)}(x)$ η n -οστή παράγωγος της g .

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{e^{-\kappa x + 1}}{\kappa + 1}$.

β) Αν $f\left(\frac{1}{\kappa}\right) = \frac{1}{2}$ τότε να δείξετε ότι $\kappa = 1$ και στη συνέχεια

για $\kappa = 1$ να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|\ln[2f(x+4)] - x \ln[2f(x)]|}{x-3}$

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(4-x)$ και $g(x) = \ln(x-2)$.

α) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$ και $\frac{f}{g}$,

β) Να δείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της $(f-g)$ είναι η $(f-g)^{-1}(x) = \frac{2e^x + 4}{e^x + 1}$

γ) Να λυθεί η εξίσωση: $\log_2 \sqrt[4]{g(2^x)} = \log_4 \sqrt{f(2^x)} + \log_{16} 2$

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ :

Άγγελος Χατζηαγαθαγγέλου (Β.Δ.Α.)
 Λουκία Ματθαίου
 Ευαγγελία Παπαγιάννη – Γιάλλουρου
 Εύα Τρίαρου – Λοΐζου
 Βάσω Σωτηρίου

Συντονίστρια Μαθηματικών

Δήμητρα Σκαπούλλαρου – Χαρή (Β.Δ.)

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Παντελίτσα Μιχαήλ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΜΑΘΗΜΑ : Μαθηματικά (κατεύθυνσης)

Διάρκεια : 2:30΄

ΤΑΞΗ : Β΄ Ενιαίου Λυκείου

Ημερομηνία : 22/5/2012

Οδηγίες :

1. Να γράφετε μόνο με μελάνι. (Τα σχήματα με μολύβι)
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
3. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
4. Τα σχήματα του φυλλαδίου να μεταφέρονται στη θέση που λύεται η άσκηση.
5. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **4 σελίδες**

Μέρος Α΄ (60 Μονάδες)Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε **μόνο** τις 12.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{x+6}{(x-4)(x+1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
2. Δίνεται η Αριθμητική Πρόοδος $-1, 1, 3, 5, \dots$
Να υπολογίσετε τον 11^ο όρο και το άθροισμα των 11 πρώτων όρων της προόδου .
3. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 1}{x - 2} =$
4. Κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης $R = 6 \text{ cm}$ και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $60\pi \text{ cm}^2$.
Να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου .
5. α) Να βρείτε την τιμή του κ αν το $(4, \kappa)$ είναι σημείο της ευθείας $3x + 5y - 2 = 0$
β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου $(4, -2)$ από την ευθεία $(\epsilon) : 3x - 4y + 5 = 0$.
6. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων :
α) $y = x^5 + \ln x + e^x - e$ β) $y = \frac{1}{x} + \ln x + e^{3x}$
7. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης 144 cm^2 και ύψος 8 cm .
Να υπολογίσετε : α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας και
β) τον όγκο της.
8. α) Να λύσετε την εξίσωση : $9^x + 2 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$

β) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων να αποδείξετε ότι :

$$\frac{\log_2 [\log_3 36 - \log_3 4 \cdot (\log_5 5)^4]^3}{\log_{1000} + \ln \frac{1}{e^2}} = 3$$

9. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται $\alpha = 8 \text{ cm}$, $\beta = 4 \text{ cm}$ και $\gamma = 4\sqrt{3} \text{ cm}$. Να επιλύσετε το τρίγωνο.

10. Να βρείτε το πεδίο τιμών της συνάρτησης που ορίζεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{6x}{x+4}, \quad x \in (2, 4].$$

11. Να αποδείξετε την ταυτότητα : $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} - \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = 8$

12. Να λύσετε την εξίσωση: $\log_3 x - \log_x 81 = 3$

13. Αν $f(x) = ax^2 + bx + 4$, να βρείτε τις τιμές των a και b για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει στο σημείο της $A(1, 2)$ εφαπτομένη με κλίση $\lambda_{\text{εφ}} = 7$.

14. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται $A(1, -1)$, $B(3, 1)$ και $\Gamma(-1, -5)$. Να βρείτε :

- α) την εξίσωση της καθέτου ΑΔ
- β) την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ.

15. Οι διαστάσεις α , β , γ ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = 2$. Αν ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι ίσος με 64 cm^3 να βρεθούν :

- α) οι διαστάσεις α , β , γ
- β) το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του.

Μέρος Β' (40 Μονάδες)

Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε **μόνο** τις 4.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος να βρείτε :

α) το πεδίο ορισμού

β) το πεδίο τιμών

γ) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) =$

δ) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) =$

ε) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

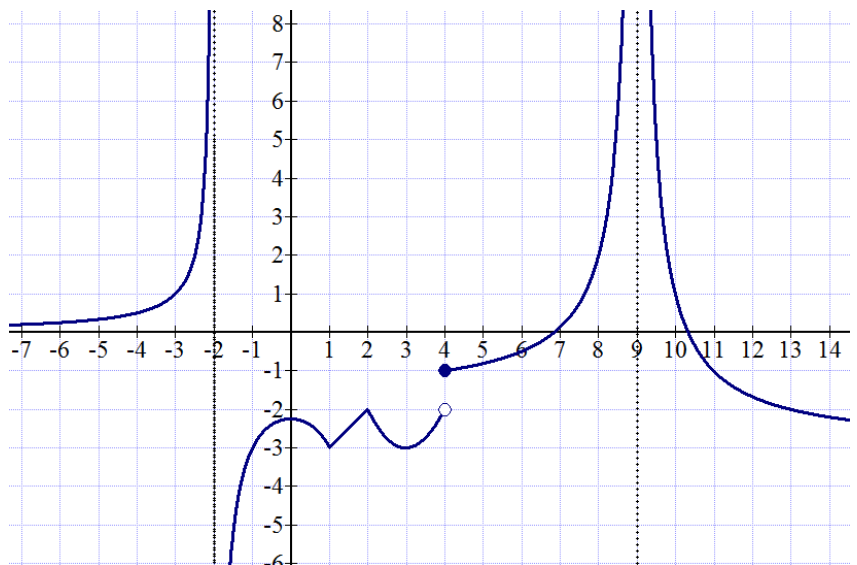
στ) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) =$

ζ) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) =$

η) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) =$

θ) τις τιμές του x στις οποίες δεν ορίζεται η πρώτη παράγωγος

ι) την τιμή της $(f \circ f)(10)$.



2. Δίνεται η συνάρτηση $x^2 + \psi^2 - 6x - 4\psi + 8 = 0$, $\psi < 2$ και σημείο της Α με τετμημένη $x=1$.

α) Να αποδείξετε ότι στο σημείο Α της πιο πάνω συνάρτησης

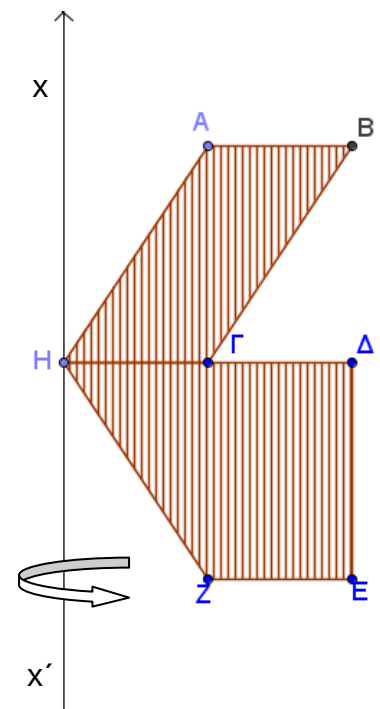
i) η εξίσωση εφαπτομένης είναι η (ϵ_1) : $2x + \psi - 3 = 0$ και

ii) η εξίσωση κάθετης είναι η (ϵ_2) : $x - 2\psi + 1 = 0$

β) Οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) , είναι δύο από τις εξισώσεις των πλευρών ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ. Αν το κέντρο του ορθογωνίου είναι το Κ(4,0) τότε να βρείτε:

- i) Όλες τις κορυφές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ
ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

3. Το διπλανό σχήμα ΑΒΓΔΕΖΗ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xx' . Το ΑΒΓΗ είναι παραλληλόγραμμο, το ΗΔΕΖ ορθογώνιο τραπέζιο ($\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$), $H\Delta \perp xx'$ και $(AH) = (ZH)$. Αν επίσης $(AB) = 3\text{cm}$, $(AH) = 5\text{cm}$, $(ZE) = 3\text{cm}$, Γ μέσο της ΗΔ και Β,Δ,Ε συνευθειακά σημεία τότε να υπολογίσετε :
- α) το εμβαδόν της επιφάνειας και
β) τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σχήματος .
(Οι απαντήσεις να δοθούν συναρτήσει του π).



4. α) Να βρείτε τις τιμές του $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ έτσι ώστε οι όροι :

$\ln(\epsilon\phi x)$, $-2\ln 2$, $\ln\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{8}\right)$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής

προόδου.

β) Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x + \eta\mu 5x + \eta\mu 9x + \dots + \eta\mu kx}{x} \right) = 120$, τότε να βρείτε την τιμή του Κ.

5. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{-\kappa x + 1}$ όπου $0 < \kappa < 1$ και $x \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = g(x) + g'(x) + g''(x) + g'''(x) + g^{(4)}(x) + g^{(5)}(x) + \dots$ όπου $g^{(n)}(x)$ η ν-οστή παράγωγος της g .

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{e^{-\kappa x + 1}}{\kappa + 1}$.

β) Αν $f\left(\frac{1}{\kappa}\right) = \frac{1}{2}$ τότε να δείξετε ότι $\kappa = 1$ και στη συνέχεια

για $\kappa = 1$ να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|\ln[2f(x+4)] - x \ln[2f(x)]|}{x-3}$

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(4-x)$ και $g(x) = \ln(x-2)$.

α) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$ και $\frac{f}{g}$,

β) Να δείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της $(f-g)$ είναι η $(f-g)^{-1}(x) = \frac{2e^x + 4}{e^x + 1}$

γ) Να λυθεί η εξίσωση : $\log_2 \sqrt[4]{g(2^x)} = \log_4 \sqrt{f(2^x)} + \log_{16} 2$

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ :

Άγγελος Χατζηαγαθαγγέλου (Β.Δ.Α΄)
Λουκία Ματθαίου
Ευαγγελία Παπαγιάννη – Γιάλλουρου
Εύα Τρίαρου – Λοΐζου
Βάσω Σωτηρίου

Συντονίστρια Μαθηματικών

Δήμητρα Σκαπούλλου – Χαρή (Β.Δ.)

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Παντελίτσα Μιχαήλ

ΛΥΚΕΙΟ ΚΑΙ ΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΗΣ ΧΡΥΣΟΧΟΥΣ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ : 2011–2012

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΤΑΞΗ Β΄

Ημερομηνία: 17/5/2012

Χρόνος: 2.30΄

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

β) Να γράφετε μόνο με μελάνι (μόνο τα σχήματα με μολύβι).

γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α΄

Από τα δεκαπέντε (15) θέματα να λύσετε μόνο τα δώδεκα (12). Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των συναρτήσεων:

(α) $y = x^2 + e^x + \ln x$

(β) $y = (3x - 2)(x^2 - 1)$

2. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα $\frac{2x+7}{(x+2)(x-1)}$

3. Ένα οξυγώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ έχει εμβαδό $E = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$ και πλευρές $\beta = 4 \text{ cm}$, $\gamma = 2\sqrt{3} \text{ cm}$. Να υπολογίσετε την γωνία Α.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-4}{2x+1}$. Να βρείτε τον τύπο, το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της αντίστροφης της.

5. Μια αριθμητική πρόοδος έχει 7 όρους. Το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της είναι -6 , ενώ το άθροισμα των τριών τελευταίων όρων της είναι 54. Να βρείτε τον 4^ο όρο της προόδου.

6. Να υπολογίσετε τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{x^2-5x+1}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$

7. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $x^3 + xy = y^2 - 1$ στο σημείο της με $x=1, y > 0$.

8. Να λύσετε την εξίσωση: $25^x - 4 \cdot 5^x - 5 = 0$.

9. Να λύσετε στο διάστημα $0 < x < 2\pi$ την εξίσωση

$$1 + \eta\mu x + \eta\mu^2 x + \dots = 2 \quad \alpha\nu \quad x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

10. Αν $\log \frac{25}{2}, \log x, \log 50, y$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να βρείτε το x και το y .

11. Να αποδείξετε την ταυτότητα : $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\theta - 2\sigma\upsilon\nu\theta + 1}{\eta\mu 2\theta - 2\eta\mu\theta} = \sigma\phi\theta$

12. Δίνονται τα σημεία $A(3,2), B(-5,6)$. Να βρείτε:

(α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB.

(β) Την εξίσωση της μεσοκάθετης του ευθύγραμμου τμήματος AB.

13. Ο όγκος ενός κώνου είναι $128\pi \text{ cm}^3$ και ισχύει η σχέση $4\nu = 3R$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου.

14. Κύλινδρος έχει όγκο $100\pi \text{ cm}^3$ και ύψος ίσο με τα $\frac{4}{5}$ της ακτίνας του. Ένας κώνος έχει ακτίνα 8 cm. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι διπλάσιο του εμβαδού της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου. Να βρείτε τον όγκο του κώνου.

15. Αν $y = e^{-2x} \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$ να λύσετε την εξίσωση $-\frac{e^{2x}}{2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ στο διάστημα $[0^\circ, 180^\circ]$

ΜΕΡΟΣ Β΄

Από τα έξι (6) θέματα να λύσετε μόνο τα τέσσερα (4). Κάθε θέμα βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. (α) Να λύσετε την εξίσωση: $\log_2 \sqrt{x} + \log_x \sqrt{2} = 1$
(β) Δίνεται καμπύλη (Κ) με εξίσωση $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \psi^2 = 1$ και σημείο της $A(\alpha \sigma \nu \theta, \eta \mu \theta)$.
Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης (Κ) στο σημείο Α είναι η ευθεία $\varepsilon_1 : \sigma \nu \theta \cdot \chi + \alpha \eta \mu \theta \cdot \psi = \alpha$.
2. (α) Δίνεται η καμπύλη $y = \frac{\alpha x^3 + \beta}{x}$ που περνά από το σημείο $A(2, 2)$. Η εφαπτομένη της καμπύλης στο Α έχει κλίση $\lambda = 3$. Να βρείτε τα α και β.
(β) Το άθροισμα των δύο πρώτων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου είναι 8 και το άθροισμα του τέταρτου και του πέμπτου όρου της είναι $\frac{8}{27}$. Να βρείτε την πρόοδο και το άθροισμα των απείρων όρων της.
3. Τραπεζίο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) έχει συντεταγμένες κορυφών $B(10, 3)$, $\Gamma(5, 4)$, $\Delta(2, 2)$ και εξίσωση μιας διαγωνίου $7x - 4y - 19 = 0$. Να βρείτε:
(α) Την εξίσωση της άλλης διαγωνίου.
(β) Τις συντεταγμένες της κορυφής Α.
(γ) Το εμβαδόν του τραπεζίου.
(δ) Αν οι μη παράλληλες πλευρές προεκταθούν τέμνονται στο σημείο Ε. Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{E}$.
4. (α) Το παράπλευρο ύψος h κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας ΚΑΒΓΔ έχει μήκος 10cm και σχηματίζει γωνία 30° με το ύψος της. Να υπολογίσετε τον όγκο της.
(β) Να λυθεί η εξίσωση: $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x + \dots = \log_2 25$

5. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει διαστάσεις $AB = 8cm$ και $AD = 3cm$. Αν Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ και το σχήμα περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τη ΒΓ, να βρείτε:

(α) Το όγκο του στερεού που παράγει το τρίγωνο $\triangle A\tilde{E}D$.

(β) Αν E_1 είναι το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγει η πλευρά ΑΔ και E_2 το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγει η πλευρά ΕΔ, να δείξετε ότι $E_1 = \frac{4}{5}E_2$.

6. (α) Να αποδείξετε την ταυτότητα $\frac{1+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1-\eta\mu 2\alpha}$

(β) Με τη βοήθεια της πιο πάνω ταυτότητας να υπολογίσετε την τιμή της $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{12}$ στην μορφή $\sqrt{k} - \mu$ όπου κ και μ θετικοί ακέραιοι.

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Κωνσταντίνиду Αστέρω

Κουντούρης Σάββας

Γεωργίου Γεωργία

Η ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΡΙΑ

Χειλέτη Πετρούλα

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Χρυσοστόμου Γιώργος

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

Ημερομηνία: 5/6/2012

Χρόνος: 2,5 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- β) Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε ή μαύρο (τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).
- γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- δ) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).

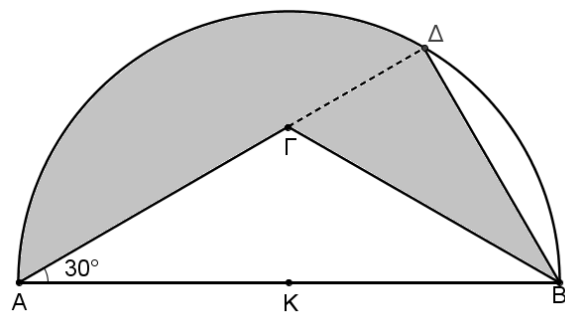
Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α': Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε **ΜΟΝΟ** τις 12.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **5 (πέντε) μονάδες**.

- 1) Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{3x-25}{(x+5)(x-3)}$
- 2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-3}{2x+5}$. Να βρείτε:
 - α) το πεδίο ορισμού (Π.Ο.) της συνάρτησης,
 - β) τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης $f^{-1}(x)$, αν ορίζεται.
- 3) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:
 - α) $\exists \frac{x^5}{5 \ln x + 2} \sqrt{x} e^{-2}$
 - β) $\exists \frac{1}{x^{3x}}$
- 4) Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης: $\sqrt{2} \left(\quad - \quad \right) = \quad$
- 5) Να υπολογίσετε τα όρια των πιο κάτω συναρτήσεων:
 - α) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2}{5x^4 + 2x - 7}$
 - β) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$
- 6) Να λύσετε την εξίσωση: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1} \cdot \left(\frac{9}{4}\right) = \log 20 - \log 2$

- 7) Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ με κορυφές $A(1, -2)$ $B(-3, -1)$. Αν το σημείο $M(3, 0)$ είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να βρείτε:
- τις συντεταγμένες της κορυφής Γ του τριγώνου,
 - την απόσταση της κορυφής A από την ευθεία $B\Gamma$.
- 8) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κώνου είναι 72π και η γενέτειρα λ σχηματίζει γωνιά 60° με την ακτίνα της βάσης του. Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου.
- 9) Αν $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, να αποδείξετε την ταυτότητα:
$$\frac{\sin 4\alpha - 2 \cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = 0$$
- 10) Να λύσετε τη λογαριθμική εξίσωση: $2 \log_2 \sqrt{4x+14} - \log_2 (x-4) = 1 + \log_2 x$
- 11) Δίνεται η καμπύλη $f(x) = e^{x+1} - 1$. Να βρείτε:
- τα σημεία τομής της καμπύλης με τους άξονες OX' και OY' ,
 - την εξίσωση της καθέτου της καμπύλης στο σημείο της με τετμημένη $x = -1$.
- 12) Να βρείτε το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου για την οποία ισχύουν: $a_5 = 5$ και $a_2 = 6$
- 13) Αν οι αριθμοί $\ln\left(\frac{5}{2} + 5 \cdot 2^x\right)$, $\ln\sqrt{21 + 2^{x+1}}$, $\ln 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να υπολογίσετε το x , όπου ορίζεται.
- 14) Αν σε τρίγωνο $\triangle ABC$ ισχύει $\frac{a}{\sin A} = \sqrt{3}$, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου.
- 15) Στο διπλανό σχήμα, δίνεται ημικύκλιο $\odot K$ με κέντρο K και ακτίνα $KA = 6$ cm. Στο εσωτερικό του γράφουμε ισοσκελές τρίγωνο $\triangle ABC$ και $\angle A = 30^\circ$. Αν Δ είναι το σημείο τομής του ημικυκλίου και της προέκτασης της AG , να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



ΜΕΡΟΣ Β΄: Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε **ΜΟΝΟ** τις 4.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **10 (δέκα) μονάδες**.

1) Τα σημεία $A(-2, 1)$, $B(1, 3)$, $C(-1, 0)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου $\triangle ABC$.

α) Να δείξετε ότι $\angle C = 90^\circ$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας του ύψους AD είναι $7x - 3y - 1 = 0$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle ABC$.

2) α) Να λύσετε τη λογαριθμική εξίσωση: $\log_{13}(13x) + \log_x\left(\frac{13}{x}\right) = 2$

β) Έστω η καμπύλη $x \cdot e^x = 3x - 2e$.

i) Να δείξετε ότι: $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x(3x-2e)} \right) = \frac{3-2e}{x^2(3x-2e)^2}$

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της $(e, 0)$.

3) Να σχηματίσετε:

α) την αριθμητική πρόοδο αν $\frac{u_8}{u_6} = 4$, $u_6 = 4$,

β) τη φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο αν το άθροισμα των απείρων όρων της είναι $\frac{25}{4}$ και η διαφορά του 2ου όρου από τον 1ο όρο είναι 4.

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

α) Να δείξετε ότι: $f'(x) = \frac{2}{x(x^2-1)}$

β) Να δείξετε ότι: $f''(x) = \frac{2(1-3x^2)}{x^2(x^2-1)^2}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 2\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$

δ) Για τα x στα οποία ορίζεται η f , να δείξετε ότι ισχύει: $f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + f(\sqrt{2}) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

5) α) Αν σε τρίγωνο $\triangle ABC$ ισχύει $2 \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{BC}$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Να λύσετε στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση:

$$\left(\frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{3\pi}{4}\right) \left(\frac{\pi}{6}\right)$$

6) Στο διπλανό σχήμα δίνονται:

$\triangle ABC$

$\triangle DEF$

$\triangle GHI$

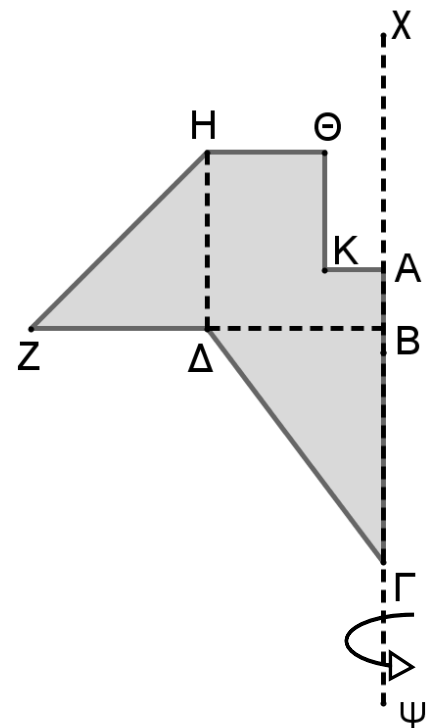
$\triangle JKL$

$\angle A = 90^\circ$

$\angle B = 90^\circ$

$\angle C = 90^\circ$

Να υπολογίσετε τον όγκο και την επιφάνεια του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του πολυγώνου $ABΓΔΖΗΘΚΑ$ γύρω από την ευθεία $\chi\psi$.



Η Διευθύντρια

Ελένη Αντωνίου-Τσιελεπή



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 25 Μαΐου 2012

ΤΑΞΗ: Α΄ Ενιαίου Λυκείου

ΧΡΟΝΟΣ: 2:30΄ ώρες

ΠΕΡΙΟΔΟΣ-ΩΡΑ: 7:45΄ - 10:15΄

- Οδηγίες:**
- α) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 3 σελίδες.
 - β) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 - γ) Να γράφετε με μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι).
 - δ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
 - ε) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.

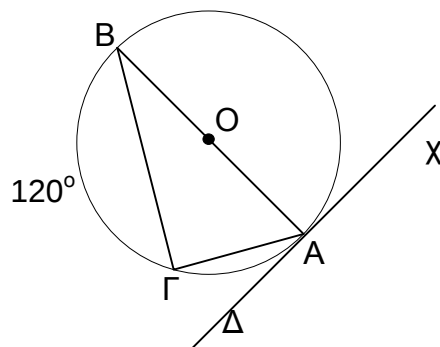
ΜΕΡΟΣ Α΄

Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 + 5x - 3 = 0$.
- 2) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης με τύπο $y = \frac{4x-1}{2-x}$.
- 3) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 2x - 6$.
- 4) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $y = x^2 + 4x - 3$.
- 5) Να λύσετε την ανίσωση $(x - 3)(x + 2) \leq 0$.
- 6) Να απλοποιήσετε το κλάσμα: $\frac{3x^2-8x-3}{x^2-3x}$.
- 7) Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $y = (\kappa + 1)x - 8$ να είναι κάθετη στην ευθεία $x + 3y = 2$.
- 8) Αν $0^\circ < x < 90^\circ$ και $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\eta\mu 2x - \sigma\varphi x$.
- 9) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x + 1 = 0$ με ρίζες x_1, x_2 . Χωρίς να λύσετε την εξίσωση, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
 - α) $A = 3x_1 + 3x_2 - 2(x_1x_2)^2$,
 - β) $B = x_1^2 + x_2^2$.

- 10) Σε κύκλο (O, ρ) δίνεται η διάμετρος AB , $A\chi$ εφαπτομένη και το τόξο $B\Gamma = 120^\circ$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ και τη γωνία $\Gamma A\Delta$. (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



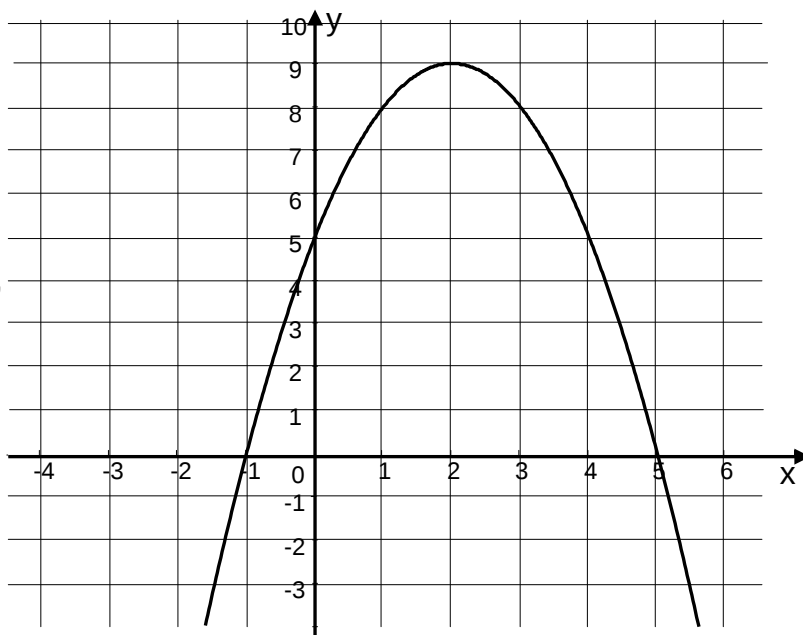
- 11) Να αποδείξετε την ταυτότητα $\frac{\sin \omega}{1 + \epsilon \phi \omega} + \frac{\eta \mu \omega}{1 + \sigma \phi \omega} = \frac{1}{\eta \mu \omega + \sin \omega}$.
- 12) Να λύσετε το σύστημα: $\left. \begin{array}{l} 3x - y = 1 \\ x^2 - 3xy + y^2 = -1 \end{array} \right\}$.
- 13) Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $K\Lambda M$ ($K\Lambda = KM$). Να φέρετε το ύψος $K\Delta$ και την $\Delta E \perp KM$. Να δείξετε ότι $(\Lambda \Delta) \cdot (K\Delta) = (\Delta E) \cdot (K\Lambda)$.
- 14) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\frac{\sin 50^\circ \cdot \tan 140^\circ \cdot \eta \mu 110^\circ}{\epsilon \phi 40^\circ \cdot \sin 340^\circ}$ (χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής).
- 15) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (2\lambda + 1)x - (\lambda + 2) = 0$.
 α) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 3;
 β) Υπάρχουν πραγματικές τιμές του λ , για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες;

ΜΕΡΟΣ Β

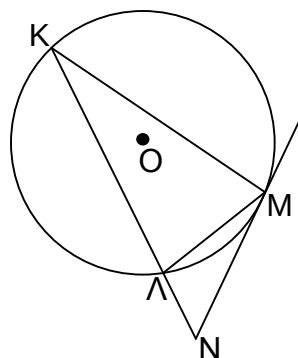
**Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

- 1) α) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου κ έτσι ώστε η εξίσωση $x^2 - (\kappa + 3)x - 4 + \kappa = 0$ να έχει:
 i) ρίζες αντίθετες,
 ii) ρίζες αντίστροφες,
 iii) άθροισμα ριζών ίσο με το τριπλάσιο του γινομένου των ριζών της. (μ. 7,5)
- β) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να λύσετε την παραμετρική εξίσωση: $(\lambda - 2)x = 3$. (μ. 2,5)
- 2) α) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x+2}{x} \leq \frac{x+1}{x-2}$.
- β) Να ελέγξετε αν υπάρχουν πραγματικές τιμές του μ , έτσι ώστε το τριώνυμο $f(x) = 2x^2 - (\mu - 2)x + \mu - 2$ να γίνεται αρνητικό για κάθε πραγματική τιμή του x . Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- 3) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$.
Από το σχήμα να βρείτε:
- το πεδίο τιμών της $f(x)$,
 - τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$,
 - τα πρόσημα των $f(1)$ και $f(-2)$,
 - τις τιμές των a, b, γ ,
 - τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει η σχέση: $a \cdot f(x) \leq 0$.



- 4) Σε κύκλο (O, ρ) η ευθεία NM είναι εφαπτομένη στο σημείο M , η NK είναι τέμνουσα και η KM χορδή, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Να αποδείξετε ότι:
- $$(MN)^2 = (NL) \cdot (NK).$$



- 5) α) Να αποδείξετε ότι
$$\frac{\sigma\phi(180^\circ + \chi) \cdot \eta\mu(360^\circ - \chi) \cdot \sigma\upsilon\nu(360^\circ + \chi)}{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \chi) \cdot \eta\mu(-\chi) \cdot \sigma\phi(360^\circ + \chi)} = -1.$$

- β) Με βάση τη θεμελιώδη ταυτότητα $\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$ να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ υπάρχει γωνία α , έτσι ώστε να ισχύει: $\eta\mu\alpha = \frac{2\lambda}{\lambda-1}$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$.

- 6) Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(-1, 3)$, $B(0, -2)$ και $\Gamma(\alpha, \alpha^2)$ με $\alpha > 0$. Να βρείτε:
- Την τιμή του α , αν η κορυφή Γ ανήκει στην ευθεία $3x = 2y - 2$.
 - Την εξίσωση της πλευράς $ΑΓ$.
 - Την εξίσωση του ύψους BZ .
 - Την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Γ και σχηματίζει κανονική γωνία 150° με τον άξονα $x'x$.

Ο Διευθυντής

Σόλων Χαραλάμπους

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΤΑΞΗ : Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 21 / 5 / 2012
ΧΡΟΝΟΣ : 2,5 ΩΡΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
2. Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε ή μαύρο
(τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α

Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 12.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 1 μονάδα.

- 1) Σε αριθμητική πρόοδο, το άθροισμα του δεύτερου και του πέμπτου όρου της είναι 19 και το άθροισμα του τέταρτου και του έβδομου όρου της είναι 31. Να βρείτε:

(α) την αριθμητική πρόοδο

(β) το άθροισμα των 22 πρώτων όρων της

- 2) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων :

(α) $\psi = 4\sqrt{x} - \ln x^6 - 5x^3 + 7$

(β) $\psi = \frac{\tau \epsilon \mu x}{x^2 - 3x}$

- 3) Να βρείτε το όριο των πιο κάτω συναρτήσεων :

(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 16}{3x^2 - 9x + 20}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 19} \frac{\sqrt{x-10} - 3}{x-19}$

- 4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{35}{x^2 - x - 12}$. Να γραφεί σαν άθροισμα δύο συναρτήσεων

$g(x)$ και $h(x)$ της μορφής $\frac{\lambda}{x + \kappa}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και να βρεθεί το πεδίο ορισμού των $g(x)$ και $h(x)$.

- 5) Να βρείτε το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \frac{6x-5}{2x-15}$, $x \geq 10$.

6) Τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ έχει κορυφές $A(2, 3)$, $B(-2, 1)$ και $\Gamma(0, -1)$.

(α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(β) Να βρείτε το μήκος του ύψους $\Gamma\Delta$.

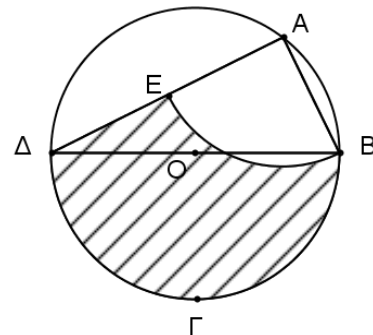
7) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδό βάσης 144 cm^2 . Το παράπλευρο ύψος σχηματίζει με την βάση της γωνία 60° . Το ύψος της πυραμίδας είναι ίσο με την διαγώνιο κύβου. Να βρείτε το εμβαδό της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας και τον όγκο του κύβου.

8) Κύλινδρος και κώνος έχουν την ίδια ακτίνα $R=16 \text{ cm}$. Ο όγκος του κώνου είναι διπλάσιος του όγκου του κυλίνδρου. Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι 5 cm , να υπολογίσετε το ύψος και το εμβαδό της ολικής επιφάνειας του κώνου.

9) Αν σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\frac{\varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi \Gamma}{\eta\mu A} = \frac{1}{\eta\mu B \cdot \eta\mu \Gamma}$, να δείξετε ότι είναι ορθογώνιο.

10) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4^{x+1} - 3 \cdot 2^x$ και $g(x) = 2^{x+2} + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους.

11) Στο διπλανό σχήμα, η $B\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου $(O, O\Delta)$. Το τόξο BE γράφτηκε με κέντρο το A και ακτίνα την AB . Αν οι χορδές $A\Delta$ και AB είναι 24 cm και 10 cm αντίστοιχα, να υπολογίσετε το εμβαδό και την περίμετρο του μικτόγραμμου $B\Gamma\Delta E$.



12) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi^2 = 16x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της A με τεταγμένη 4. Αν η εφαπτομένη και η κάθετη τέμνουν τον άξονα των $x'x$ στα σημεία B και Γ αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου βάρους του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$.

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 + \sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\eta\mu 2x + 2\eta\mu x \cdot \sin 2x}$.

(α) Να δείξετε ότι $f(x) = \sigma\varphi x$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = -\frac{2}{1 + \eta\mu x}$.

- 14) Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): \alpha \cdot x + \psi + \sqrt{12} = 0$ και $(\varepsilon_2): -\sqrt{3} \cdot x + \beta \cdot \psi - 18 = 0$ με $\alpha, \beta \neq 0$.
 Αν A είναι το σημείο τομής της (ε_1) με $x'x$, B το σημείο τομής της (ε_2) με $\psi'\psi$ και $M(1, 3)$ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB , να βρείτε:
 (α) τους αριθμούς α και β
 (β) την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2)
- 15) Αν $\alpha = \varepsilon\phi x + \varepsilon\phi^3 x + \varepsilon\phi^5 x + \dots$ και $\beta = 1 - \varepsilon\phi^2 2x + \varepsilon\phi^4 2x - \varepsilon\phi^6 2x + \dots$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right)$, να δείξετε ότι $4\alpha\beta = \eta\mu 4x$.

ΜΕΡΟΣ Β

Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 4.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 2 μονάδες.

- 1) Παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ έχει κορυφές τα σημεία $A(4, 5)$, $B(10, 5)$ και $\Delta(0, 2)$.
 (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ .
 (β) Να τοποθετήσετε τα σημεία A, B, Γ, Δ σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και βρείτε τα μήκη των πλευρών του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.
 (γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ γύρω από τον άξονα $\psi'\psi$.
- 2) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1-3 \cdot e^x}{1+e^x}$ και $g(x) = x^2 - 3x - 3$, $x \in \mathbb{R}$.
 (α) Αν η f είναι ένα προς ένα, να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f^{-1}(x)$.
 (β) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $(f^{-1} \circ g)(x)$.
- 3) Δίνεται κύκλος με κέντρο $K(-1, -2)$ που εφάπτεται της ευθείας $(\varepsilon): x + \psi = 3$ στο σημείο A .
 (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A και το μήκος της ακτίνας R του κύκλου.
 (β) Αν B σημείο της ευθείας (ε) με θετική τετμημένη, τέτοιο ώστε το εμβαδό του τριγώνου KAB να ισούται με 9 τετραγωνικές μονάδες, να βρείτε τις συντεταγμένες του.
 (γ) Αν Γ το σημείο τομής της KB με τον κύκλο, να βρείτε το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.

- 4) Αριθμητική πρόοδος και απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος έχουν τον ίδιο πρώτο όρο. Ο λόγος (λ) της γεωμετρικής προόδου είναι η τιμή του λ , ώστε το πολυώνυμο $f(x) = x^4 + 2 \cdot 3^{2\lambda} \cdot x^3 - 10 \cdot 2^{2\lambda-1} \cdot x^2 + 2^{2\lambda+1} \cdot x - 1$ να έχει ρίζα τον αριθμό 1. Το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου (Σ_{∞}) ισούται με κ , ώστε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x \cdot \eta\mu 4x \cdot \eta\mu \kappa x}{x^3} = 96$. Η διαφορά της αριθμητικής προόδου (δ) ισούται με x , όπου x η ρίζα της εξίσωσης $\log_2 [\log (\ln e^{97} - x)] = 1$. Να υπολογίσετε το πλήθος των ν πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου, ώστε το άθροισμά τους να ισούται με -150 .

- 5) (α) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της συνάρτησης $f(x) = e^{\frac{1-\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}}$ στο σημείο με τετμημένη $x = \frac{\pi}{4}$ είναι κάθετη με την εφαπτομένη της συνάρτησης $2^x - 2^y = 2^{x+y}$ στο σημείο με τετμημένη $x = 0$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{2+\log(\varepsilon\varphi x)} - 3^{\log(\sigma\varphi x)} - 8 = 0$ για $x \in (\pi, 2\pi)$.

- 6) (α) Αν σε ένα τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ η $\hat{A} = 120^\circ$ και $2\gamma = \beta \cdot (\sqrt{3} - 1)$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

(β) Αν $f(x) = \eta\mu^\nu x \cdot \eta\mu(\nu \cdot x)$, $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 2$, να δείξετε ότι:
 $f'(x) = \nu \cdot \eta\mu^{\nu-1} x \cdot \eta\mu[(\nu+1) \cdot x]$

ΤΕΛΟΣ

ΟΙ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ

Ο ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Β.Δ. Κουρουζίδου Δ.

Πασκοπτή Σ.

Μιχαήλ Δ.

Λοϊζιάς Σ.

Β.Δ. Έλληνας Π.

Σκαλιάς Γεώργιος

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΤΑΞΗ : Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 21 / 5 / 2012
ΧΡΟΝΟΣ : 2,5 ΩΡΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
2. Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε ή μαύρο
(τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α

Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 12.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 1 μονάδα.

- 1) Σε αριθμητική πρόοδο, το άθροισμα του δεύτερου και του πέμπτου όρου της είναι 19 και το άθροισμα του τέταρτου και του έβδομου όρου της είναι 31. Να βρείτε:

(α) την αριθμητική πρόοδο

(β) το άθροισμα των 22 πρώτων όρων της

- 2) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων :

(α) $\psi = 4\sqrt{x} - \ln x^6 - 5x^3 + 7$

(β) $\psi = \frac{\tau \epsilon \mu x}{x^2 - 3x}$

- 3) Να βρείτε το όριο των πιο κάτω συναρτήσεων :

(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 16}{3x^2 - 9x + 20}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 19} \frac{\sqrt{x-10} - 3}{x-19}$

- 4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{35}{x^2 - x - 12}$. Να γραφεί σαν άθροισμα δύο συναρτήσεων

$g(x)$ και $h(x)$ της μορφής $\frac{\lambda}{x + \kappa}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{Q}$ και να βρεθεί το πεδίο ορισμού των $g(x)$ και $h(x)$.

- 5) Να βρείτε το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \frac{6x-5}{2x-15}$, $x \geq 10$.

6) Τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ έχει κορυφές $A(2, 3)$, $B(-2, 1)$ και $\Gamma(0, -1)$.

(α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(β) Να βρείτε το μήκος του ύψους $\Gamma\Delta$.

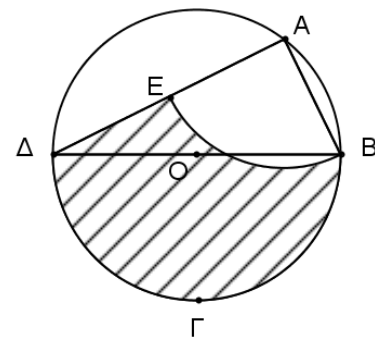
7) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδό βάσης 144 cm^2 . Το παράπλευρο ύψος σχηματίζει με την βάση της γωνία 60° . Το ύψος της πυραμίδας είναι ίσο με την διαγώνιο κύβου. Να βρείτε το εμβαδό της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας και τον όγκο του κύβου.

8) Κύλινδρος και κώνος έχουν την ίδια ακτίνα $R=16 \text{ cm}$. Ο όγκος του κώνου είναι διπλάσιος του όγκου του κυλίνδρου. Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι 5 cm , να υπολογίσετε το ύψος και το εμβαδό της ολικής επιφάνειας του κώνου.

9) Αν σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\frac{\varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi \Gamma}{\eta\mu A} = \frac{1}{\eta\mu B \cdot \eta\mu \Gamma}$, να δείξετε ότι είναι ορθογώνιο.

10) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4^{x+1} - 3 \cdot 2^x$ και $g(x) = 2^{x+2} + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους.

11) Στο διπλανό σχήμα, η $B\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου $(O, O\Delta)$. Το τόξο $\widehat{BE}$ γράφτηκε με κέντρο το A και ακτίνα την AB . Αν οι χορδές $A\Delta$ και AB είναι 24 cm και 10 cm αντίστοιχα, να υπολογίσετε το εμβαδό και την περίμετρο του μικτόγραμμου $B\Gamma\Delta E$.



12) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi^2 = 16x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της A με τεταγμένη 4. Αν η εφαπτομένη και η κάθετη τέμνουν τον άξονα των $x'x$ στα σημεία B και Γ αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου βάρους του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$.

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 + \sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\eta\mu 2x + 2\eta\mu x \cdot \sin 2x}$.

(α) Να δείξετε ότι $f(x) = \sigma\varphi x$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = -\frac{2}{1 + \eta\mu x}$.

- 14) Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): \alpha \cdot x + \psi + \sqrt{12} = 0$ και $(\varepsilon_2): -\sqrt{3} \cdot x + \beta \cdot \psi - 18 = 0$ με $\alpha, \beta \neq 0$.
 Αν A είναι το σημείο τομής της (ε_1) με $x'x$, B το σημείο τομής της (ε_2) με $\psi'\psi$ και $M(1, 3)$ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB , να βρείτε:
 (α) τους αριθμούς α και β
 (β) την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2)
- 15) Αν $\alpha = \varepsilon\phi x + \varepsilon\phi^3 x + \varepsilon\phi^5 x + \dots$ και $\beta = 1 - \varepsilon\phi^2 x - \varepsilon\phi^4 x - \varepsilon\phi^6 x - \dots$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right)$, να δείξετε ότι $4\alpha\beta = \eta\mu 4x$.

ΜΕΡΟΣ Β

Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 4.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 2 μονάδες.

- 1) Παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ έχει κορυφές τα σημεία $A(4, 5)$, $B(10, 5)$ και $\Delta(0, 2)$.
 (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ .
 (β) Να τοποθετήσετε τα σημεία A, B, Γ, Δ σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και βρείτε τα μήκη των πλευρών του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.
 (γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ γύρω από τον άξονα $\psi'\psi$.
- 2) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1-3 \cdot e^x}{1+e^x}$ και $g(x) = x^2 - 3x - 3$, $x \in \mathbb{R}$.
 (α) Αν η f είναι ένα προς ένα, να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f^{-1}(x)$.
 (β) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $(f^{-1} \circ g)(x)$.
- 3) Δίνεται κύκλος με κέντρο $K(-1, -2)$ που εφάπτεται της ευθείας $(\varepsilon): x + \psi = 3$ στο σημείο A .
 (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A και το μήκος της ακτίνας R του κύκλου.
 (β) Αν B σημείο της ευθείας (ε) με θετική τετμημένη, τέτοιο ώστε το εμβαδό του τριγώνου KAB να ισούται με 9 τετραγωνικές μονάδες, να βρείτε τις συντεταγμένες του.
 (γ) Αν Γ το σημείο τομής της KB με τον κύκλο, να βρείτε το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.

- 4) Αριθμητική πρόοδος και απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος έχουν τον ίδιο πρώτο όρο. Ο λόγος (λ) της γεωμετρικής προόδου είναι η τιμή του λ , ώστε το πολυώνυμο $f(x) = x^4 + 2 \cdot 3^{2\lambda} \cdot x^3 - 10 \cdot 2^{2\lambda-1} \cdot x^2 + 2^{2\lambda+1} \cdot x - 1$ να έχει ρίζα τον αριθμό 1. Το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου (Σ_{∞}) ισούται με κ , ώστε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x \cdot \eta\mu 4x \cdot \eta\mu \kappa x}{x^3} = 96$. Η διαφορά της αριθμητικής προόδου (δ) ισούται με x , όπου x η ρίζα της εξίσωσης $\log_2 \left[\log(\ln e^{97} - x) \right] = 1$. Να υπολογίσετε το πλήθος των ν πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου, ώστε το άθροισμά τους να ισούται με -150 .
- 5) (α) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της συνάρτησης $f(x) = e^{\frac{1-\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}}$ στο σημείο με τετμημένη $x = \frac{\pi}{4}$ είναι κάθετη με την εφαπτομένη της συνάρτησης $2^x - 2^y = 2^{x+y}$ στο σημείο με τετμημένη $x = 0$.
- (β) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{2+\log(\varepsilon\varphi x)} - 3^{\log(\sigma\varphi x)} - 8 = 0$ για $x \in (\pi, 2\pi)$.
- 6) (α) Αν σε ένα τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ η $\hat{A} = 120^\circ$ και $2\gamma = \beta \cdot (\sqrt{3} - 1)$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.
- (β) Αν $f(x) = \eta\mu^\nu x \cdot \eta\mu(\nu \cdot x)$, $\nu \in \mathbb{Q}$, $\nu \geq 2$, να δείξετε ότι:
 $f'(x) = \nu \cdot \eta\mu^{\nu-1} x \cdot \eta\mu[(\nu+1) \cdot x]$

ΤΕΛΟΣ

ΟΙ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ

Ο ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Β.Δ. Κουρουζίδου Δ.

Πασκοπτή Σ.

Μιχαήλ Δ.

Λοϊζιάς Σ.

Β.Δ. Έλληνας Π.

Σκαλιάς Γεώργιος

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 05/06/12

ΤΑΞΗ: Β' κατεύθυνση

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά

- ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής σφραγισμένης από το σχολείο .
 β) Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε ή μαύρο. (Τα σχήματα με μολύβι)
 γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 3 σελίδες

ΜΕΡΟΣ Α': Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 1 μονάδα.**

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $A = \frac{3x-1}{x^2-3x+2}$
2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$. Να βρείτε τα πιο κάτω:
 - α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της $f(x)$.
 - β) τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης $f^{-1}(x)$ και το πεδίο ορισμού της.
3. Να λύσετε την εξίσωση: $\log(x+7) - \log(4-x) = 1$
4. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha} \cdot \epsilon\phi\alpha = 1$
5. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:
 - α) $\psi = 2x^3 + 4\sqrt{x} + 3e^{5x}$
 - β) $\psi = \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \ln(4x)$
6. Να υπολογίσετε τα όρια:
 - α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5x + 6}{2x^2 + 8}$
 - β) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2}$
7. Σε αριθμητική πρόοδο ο δεύτερος και ο τέταρτος όρος της έχουν άθροισμα 10 ενώ ο όγδοος όρος της είναι τετραπλάσιος του τρίτου όρου της. Να σχηματίσετε την πρόοδο και να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.
8. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ η πλευρά ΑΒ έχει εξίσωση: $3x-4y+7=0$ και οι συντεταγμένες της κορυφής Δ είναι (-1,2). Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΔ.
9. Κύλινδρος έχει εμβαδόν κυρτής επιφάνειας ίσο με το εμβαδόν της βάσης του. Αν ο όγκος του ισούται με $256\pi \text{ cm}^3$, να υπολογίσετε την ολική του επιφάνεια.
10. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\eta\mu 5x + \eta\mu 3x}{\eta\mu 5x - \eta\mu 3x} = -1$, $x \in (0^\circ, 180^\circ)$

11. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ύψος $u=4\sqrt{3}$ cm και το παράπλευρο ύψος της, σχηματίζει με το επίπεδο της βάσης γωνία 60° . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.
12. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{ax^2 - 3x}{bx^2 - 1}$ και $g(x) = \beta x - \alpha \ln x^2$. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ και $g'(3) = -9$, να βρείτε τα α και β .
13. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $\psi = \ln\left(\frac{5}{1+x}\right)$, με $x > -1$.
- α) Να δείξετε ότι $\frac{5\psi''}{\psi'} = -e^\psi$
- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με $x=0$.
14. Δίνεται η ακολουθία: $\log_x \alpha$, $\log_{x^2} \alpha$, $\log_{x^4} \alpha$, ... με $\alpha > 0$, $x > 0$, $x \neq 1$.
- α) Να δείξετε ότι η ακολουθία είναι απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος.
- β) Αν το άθροισμα των απείρων όρων της ισούται με $3\log_x 4$, να βρείτε την τιμή του α .
15. Δίνεται κύκλος με κέντρο K και ακτίνα α . Σε τυχαίο σημείο A του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη $AB = \alpha\sqrt{3}$. Αν η KB τέμνει την περιφέρεια του κύκλου στο σημείο Γ, να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ABΓ, συναρτήσει του α .

ΜΕΡΟΣ Β: Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 2 μονάδες

1. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(-1,3), B(4,2) και Γ(0,8).
- α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου AM.
- γ) Να υπολογίσετε την γωνία B.
- δ) Να δείξετε ότι: $E_{AB\Gamma}^{\Delta} = 2 \cdot E_{AMB}^{\Delta}$
- ε) Να βρείτε το μήκος του ύψους MΔ του τριγώνου AMB.
2. Αριθμητική πρόοδος και φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος έχουν τον ίδιο πρώτο όρο και η διαφορά δ της αριθμητικής προόδου είναι τριπλάσια του λόγου λ της γεωμετρικής προόδου. Το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι ίσο με τον όγδοο όρο της αριθμητικής προόδου και ο πέμπτος όρος της αριθμητικής προόδου είναι διπλάσιος του αθροίσματος των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου.
- α) Να σχηματίσετε τις δύο προόδους.
- β) Αν Σ_n είναι το άθροισμα των n πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου και ισχύει $\Sigma_n = 11(1 + \Sigma_\infty)$, να βρείτε το n.

3. α) Να λύσετε την εξίσωση: $\log_4 x + \log_x 8 = \frac{11}{4}$

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 2$ και $g(x) = \sqrt{x-3}$.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο των συναρτήσεων $f \circ g$ και $g \circ f$.

4. Αν $e'' = \eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x$, με $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$.

α) Να δείξετε ότι: $\frac{d\psi}{dx} = \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x}{\eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x}$

β) Να δείξετε ότι: $\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{-2}{1 - \eta \mu 2x}$

γ) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης, στο σημείο της με $x = \frac{\pi}{2}$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{d^2\psi}{dx^2} + 4 \frac{d\psi}{dx} = 0$

5. α) Δίνεται τρίγωνο ABΓ με πλευρές $\beta = 6 \text{ cm}$, $\gamma = 4 \text{ cm}$ και $\sin 2A = -\frac{1}{8}$.

Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

β) Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση:

$$\frac{2E}{\eta \mu A} \cdot (\sin 2B + 1) = (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2) \cdot \sin A, \text{ να δείξετε ότι είναι ισοσκελές.}$$

6. Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(8,15)$, $B(8,4)$ και $\Gamma(3,4)$.

α) Να δείξετε ότι τα μήκη των πλευρών OA και OΓ είναι 17 μονάδες και 5 μονάδες αντιστοίχως.

β) Το τετράπλευρο OABΓ περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον ημιάξονα Oχ.
Να υπολογίσετε το εμβαδόν και τον όγκο του στερεού που παράγεται.

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ :

Μαρίτσα Δημητρίου
Νίκος Δημητρίου
Κώστας Σταματόπουλος
Ανδρέας Πετρίδης

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

X. ΚΑΡΑΜΑΝΩΛΗΣ