



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΤΑΞΗ : Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 30 / 5 / 2014

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ : 2,5 ώρες

Ονοματεπώνυμο μαθητή/τριας:

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 3 σελίδες.
Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο.

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Τα σχήματα να μεταφέρονται στο γραπτό σας.

ΜΕΡΟΣ Α'

- Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1) Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{x+38}{(x-4)(x+3)}$
- 2) Να βρείτε την παράγωγο $\frac{d\psi}{dx}$ των συναρτήσεων:
 - α) $\psi = x^3 \varepsilon \varphi 2x$
 - β) $\psi^4 = 20x$
- 3) Σε αριθμητική πρόοδο ο έκτος όρος της ισούται με 22. Αν η διαφορά του τέταρτου από τον δέκατο όρο ισούται με 18, να σχηματίσετε την πρόοδο.
- 4) Δίνονται τα σημεία $A(7, -5)$ και $B(-1, 13)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB και είναι κάθετη με την ευθεία $3x + 6\psi = 19$.
- 5) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδό παράπλευρης επιφάνειας ίσο με 260 cm^2 και παράπλευρο ύψος ίσο με 13 cm . Να βρείτε:
 - α) το ύψος της πυραμίδας.
 - β) τον όγκο της πυραμίδας.
- 6) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:
 - α) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9}$
 - β) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x+1}{16-x^2}$
- 7) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{2 \eta \mu 7\alpha \sigma \nu \alpha - 2 \eta \mu 6\alpha}{2 \sigma \nu \nu 7\alpha} = \eta \mu \alpha$
- 8) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{1}{\log_{x^2} 10} + \frac{1}{\log_x 10} + \frac{1}{\log_{\sqrt{x}} 10} + \frac{1}{\log_{\sqrt[4]{x}} 10} + \dots = 8$

9) Να βρείτε χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \eta\mu^2 \frac{\pi}{12} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{8}$$

10) Κώνος και κύλινδρος έχουν τον ίδιο όγκο. Η περίμετρος της βάσης του κώνου είναι ίση με 12π cm και το εμβαδό της κυρτής του επιφάνειας ίσο με 60π cm². Αν η ακτίνα του κυλίνδρου είναι ίση με τα $\frac{2}{3}$ της ακτίνας του κώνου, να βρείτε το ύψος του κυλίνδρου.

11) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu 2\chi + 5\eta\mu\chi = -2$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

12) Να λύσετε την εξίσωση $2^{\log x} - 2^{5-\log x} = 4$.

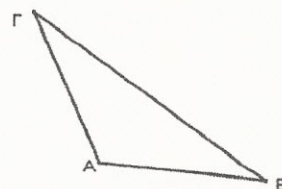
13) Δίνονται οι συναρτήσεις f και g που ορίζονται από τους τύπους $f(x) = x^2 - 8x + 7$, $x \geq 4$ και $g(x) = x^2 - 9$, $x \in \mathbb{R}$. Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη των συναρτήσεων f και g . Στην περίπτωση που ορίζεται η αντίστροφη, να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.

14) Η εφαπτομένη της καμπύλης $\psi = \mu\chi \ln \chi + \frac{\kappa}{\chi} + 10$ στο σημείο της $P(1, 8)$ είναι παράλληλη με την ευθεία που περνά από τα σημεία $\theta(2, -2)$ και $Z(4, 10)$. Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και μ όπου $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$.

15) Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 120^\circ$, $(B\Gamma) = 6\sqrt{3}$ m και $(A\Gamma) = 6$ m.

α) Να δείξετε ότι $(AB) = 6$ m.

β) Με κέντρο το B και ακτίνα την πλευρά BA γράφουμε τόξο εντός του τριγώνου που τέμνει την πλευρά BΓ στο Z. Να βρείτε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου AΓZ.



ΜΕΡΟΣ Β'

➤ Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.

➤ Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) Δίνεται η καμπύλη $\psi = \ln(e^{4x} + 1) - 2x$.

α) Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 = 4$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A της καμπύλης στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη με τον άξονα των χ .

2) Δίνεται τρίγωνο KΛΜ με $K(2, 0)$ και $\Lambda(-2, -5)$. Τα ύψη του KH και ΛΕ τέμνονται στο σημείο $\theta(-11, 13)$.

α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής M είναι $(4, 1)$.

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους KH καθώς και το μήκος της πλευράς ΛM.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου KΛM.

δ) Να υπολογίσετε το μέτρο της οξείας γωνίας HKM, κατά προσέγγιση ακεραίου.

3) Ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$ και πλευρά $B\Gamma = 4 \text{ cm}$. Με πλευρά την ΑΓ και έξω από το τρίγωνο ΑΒΓ, κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ. Το σχήμα ΑΒΓΔ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία ΑΒ. Να υπολογίσετε :

α) τον όγκο του στερεού που παράγεται.

β) το εμβαδό της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

4) α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\sigma\tau\epsilon\mu 2\chi}{\sigma\tau\epsilon\mu 10\chi} - \frac{\tau\epsilon\mu 2\chi}{\tau\epsilon\mu 10\chi} = 4\sigma\upsilon\nu 4\chi$

β) Στηριζόμενοι στην πιο πάνω ταυτότητα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, αλλά χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

i) να αποδείξετε ότι $\frac{\sigma\tau\epsilon\mu 20^\circ}{\sigma\tau\epsilon\mu 100^\circ} - \frac{\tau\epsilon\mu 20^\circ}{\tau\epsilon\mu 100^\circ} + 4 = 8\sigma\upsilon\nu^2 20^\circ$.

ii) να λύσετε την εξίσωση $\frac{\sigma\tau\epsilon\mu 2\chi}{\sigma\tau\epsilon\mu 10\chi} - \frac{\tau\epsilon\mu 2\chi}{\tau\epsilon\mu 10\chi} = 4\sigma\upsilon\nu^2 2\chi - 1$.

5) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 - x - 56}{x^2 - 8x}$ και $g(x) = \frac{x^2 + 4x - 21}{x|x-3|}$.

α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι ίσες, να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f = g$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$,

iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [e^{\frac{1}{x}} \cdot f(x)]$,

iv) $\lim_{x \rightarrow 0} [g(x) \cdot \eta\mu 9x]$

6) Οι αριθμοί $\ln(2\sigma\upsilon\nu x)$, $\ln(\eta\mu 2x)$, $\ln \frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 3x}{2}$ με $0 < x < \frac{\pi}{2}$ είναι οι τρεις πρώτοι όροι μιας ακολουθίας.

α) Να αποδείξετε ότι η πιο πάνω ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος (Α.Π.).

β) Να αποδείξετε ότι για τον γενικό όρο α_n της Α.Π. ισχύει $\alpha_n = \ln(2\sigma\upsilon\nu x \eta\mu^{n-1} x)$.

γ) Να αποδείξετε ότι για το άθροισμα Σ_n των n πρώτων όρων της Α.Π. ισχύει

$$\Sigma_n = n \ln[2\sqrt{\eta\mu^{n-1} x - \eta\mu^{n+1} x}]$$

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Φιλίππου Γεωργία, Β.Δ.

Μουγής Νίκος

Τσίγκη Έλενα

Κοντοβούρκης Μιχάλης

Η ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΡΙΑ

Β. Πιπτάτζη

Φάνου-Πιπτάτζη Βασιλική, Β.Δ.

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

