

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2015**

**ΜΑΘΗΜΑ:** Μαθηματικά

**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** 29/05/2015

**ΤΑΞΗ:** Α΄

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:** 2,5 ώρες

**Οδηγίες:** α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.  
β) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).  
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τρεις σελίδες.

**ΜΕΡΟΣ Α:** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 2\kappa - 3\mu \\ \kappa + 3\mu \end{pmatrix}$  με  $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε:

- Τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ .
- Το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\alpha}$ .
- Να βρείτε τις τιμές των  $\kappa$  και  $\mu$  έτσι ώστε τα διανύσματα  $\vec{\beta}$  και  $\vec{\gamma}$  να είναι ίσα.

2. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τα χρήματα (σε ευρώ) που ξοδεύουν οι μαθητές ενός σχολείου σε μια μέρα. Τα αποτελέσματα της έρευνας παρουσιάζονται στον πιο κάτω πίνακα:

| Χρήματα         | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
|-----------------|----|----|----|----|----|----|
| Αριθμός παιδιών | 12 | 51 | 48 | 15 | 12 | 12 |

Να βρείτε:

- Τον αριθμό των μαθητών.
- Την επικρατούσα τιμή ( $x_e$ ) των παρατηρήσεων.
- Τη μέση τιμή ( $\bar{x}$ ) των παρατηρήσεων.
- Την τυπική απόκλιση ( $\sigma$ ) των παρατηρήσεων.

3. Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $\sin^2 x \cdot \varepsilon \varphi^2 x + \eta \mu^2 x \cdot \sigma \varphi^2 x = 1$

4. Να λύσετε το σύστημα :

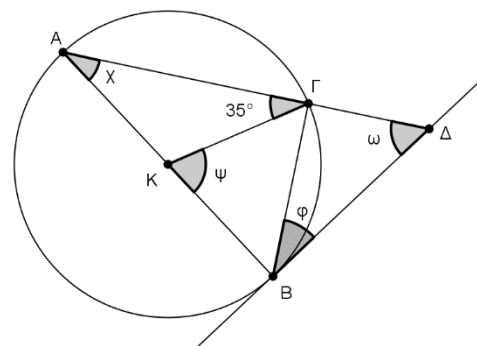
$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + 3\omega = 3 \\ x + 2y = 2 \\ 2y - \omega = 1 \end{array} \right\}$$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

1.  $\sqrt[3]{29 - 3x} = 2$

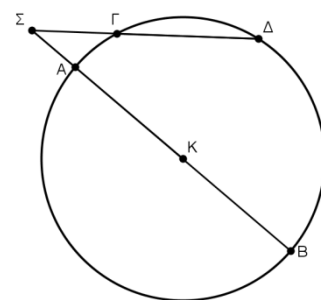
2.  $(3x - 2)^{\frac{5}{4}} = 32$  ,  $x \geq \frac{2}{3}$

6. Δίνεται κύκλος  $(K, R)$  με διάμετρο  $AB$  και  $BD$  εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο  $B$ . Αν η  $\widehat{A\Gamma K} = 35^\circ$ , να υπολογίσετε:
1. Τις γωνίες  $\chi, \psi, \varphi$  και  $\omega$ .
  2. Το μέτρο του τόξου  $A\Gamma$  του μικρότερου του ημικυκλίου.



7. Αν  $\sin \theta = \frac{12}{13}$  και  $270^\circ < \theta < 360^\circ$ , να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της πιο κάτω παράστασης
- $$A = \frac{15\sigma\varphi\theta + 24\tau\epsilon\mu\theta}{26(\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta) - 9}$$

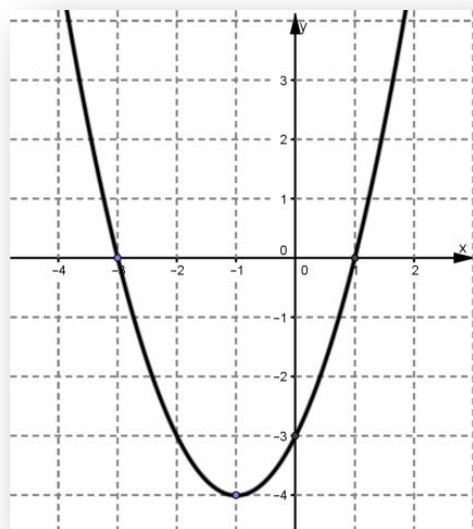
8. Δίνεται κύκλος  $(K, 5\text{cm})$ . Από σημείο  $\Sigma$  εκτός του κύκλου φέρουμε τις τέμνουσες  $\Sigma AKB$  και  $\Sigma\Gamma\Delta$  όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα.
1. Να αποδείξετε ότι:  $(\Sigma A)(\Sigma B) = (\Sigma\Gamma)(\Sigma\Delta)$ .
  2. Αν  $(\Sigma\Gamma) = 3\text{cm}$  και  $(\Delta\Gamma) = 5\text{cm}$  να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $\Sigma A$ .



9. Αν  $a$  είναι η μεγαλύτερη ακέραια λύση της ανίσωσης  $4x^2 + 3x - 27 \leq 0$ , να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης  $K = \frac{a}{4 + \sqrt{a+1}} + \frac{2}{2a - \sqrt{3}}$
10. Δίνεται η παραβολή  $f(x) = -x^2 + 2(\lambda - 2)x + \lambda - 6$ . Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  ώστε :
1. Η εξίσωση  $f(x) = 0$  να έχει ρίζες αντίστροφες.
  2. Η γραφική παράσταση της  $f(x)$  να έχει μέγιστη τιμή 2.

**ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.**  
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

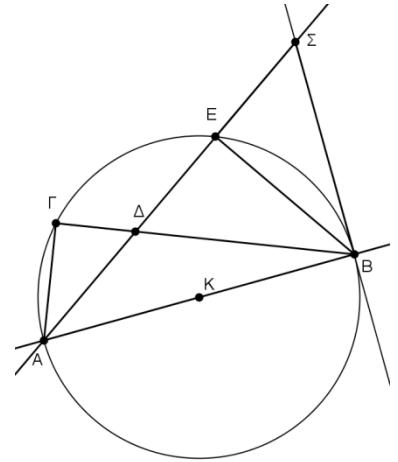
1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ,  $\alpha \neq 0$ . Να βρείτε:
1. Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της  $f(x)$ .
  2. Το πρόσημο του  $\alpha$ .
  3. Το πρόσημο της διακρίνουσας.
  4. Τις συντεταγμένες της κορυφής της.
  5. Τις λύσεις (ρίζες) της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .
  6. Να βρείτε το πρόσημο της  $f(-\frac{2}{3})$ .
  7. Τις τιμές των  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$ .
  8. Τις λύσεις της ανίσωσης  $f(x) \geq 0$ .



2. Για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  το σύστημα 
$$\begin{cases} \lambda x - y = \lambda - 1 \\ \lambda^2 x - 2y = \lambda \end{cases}$$
1. Έχει μοναδική λύση.
  2. Έχει άπειρες λύσεις.
  3. Δεν έχει καμία λύση.

3. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με διάμετρο  $AB$ . Στο σημείο  $B$  φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου. Η διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$  τέμνει την  $B\Gamma$  στο  $\Delta$ , τον κύκλο στο  $E$  και την εφαπτομένη στο  $\Sigma$  όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να δείξετε ότι ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις:

1.  $(A\Delta)(B\Sigma) = (\Gamma\Delta)(A\Sigma)$
2.  $(B\Sigma)(\Gamma\Delta) = (E\Sigma)(A\Delta)$



4. Δίνεται η παράσταση  $A = \frac{\sigma\upsilon\nu(360^\circ - x)}{1 + \sigma\upsilon\nu(90^\circ + x)} + \frac{\eta\mu(270^\circ - x)}{1 + \eta\mu(180^\circ - x)}$

1. Να αποδείξετε ότι :  $A = 2\epsilon\phi x$
2. Αν ισχύει η σχέση  $(\sqrt{27} - \sqrt{12})A = 2$  και  $x \in (0^\circ, 90^\circ)$  να υπολογίσετε την γωνία  $x$ .

5. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - (2\lambda + \mu)x + (5\lambda + \mu) = 0$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

1. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραμέτρων  $\lambda$  και  $\mu$  έτσι ώστε η εξίσωση να έχει το άθροισμα των ριζών ίσο με 5 και το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της ίσο με 3.
2. Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της πιο πάνω εξίσωσης και  $\lambda = 2$ , να υπολογίσετε τις τιμές του  $\mu$  για τις

οποίες ισχύει η σχέση:  $\frac{x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 - 54}{x_1 + x_2} \leq 3$ .



## ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΪΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Α΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 21 / 5 / 2015

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 Ώρες (10:30-13:00)

**ΟΔΗΓΙΕΣ:** α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.  
β) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.  
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

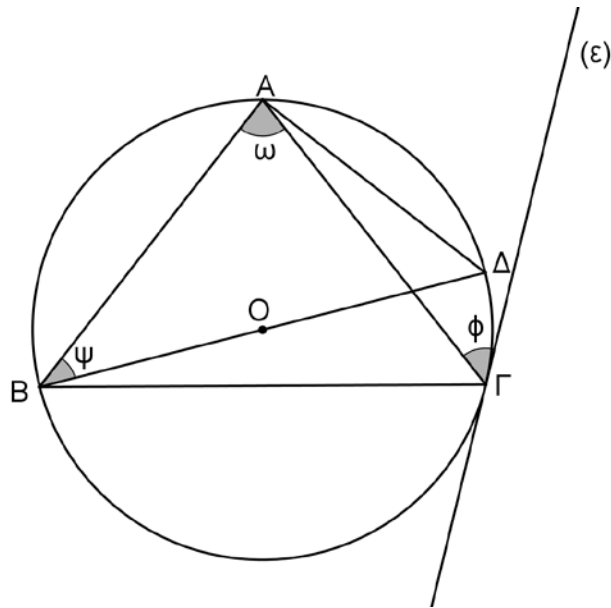
ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΜΕΡΟΣ Α΄:** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$  και το μέτρο του.
- Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων  $\lambda$  και  $\mu$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε η εξίσωση  $\lambda(\chi - 1) + \mu = \chi + 3$  να έχει άπειρες λύσεις.
- Να λύσετε την εξίσωση  $(3\chi - 2)^{\frac{3}{2}} = 8$ ,  $\chi \geq \frac{2}{3}$
- Το κόστος κατασκευής οκτώ προϊόντων είναι: 15, 19, 16, 19, 12, 14, 19, 14 ευρώ. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των πιο πάνω τιμών.
- Ένα αεροπλάνο πετά κατά μήκος της ευθείας  $\epsilon: \chi - \psi = -10$ . Μπροστά του συναντά ένα ηφαιστειακό νέφος που εκφράζεται από τον κύκλο  $\chi^2 + \psi^2 = 52$ . Θα καταφέρει το αεροπλάνο να αποφύγει το ηφαιστειακό νέφος ή θα πρέπει να αλλάξει την πορεία του;
- Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\sin \varphi = -\frac{3}{5}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

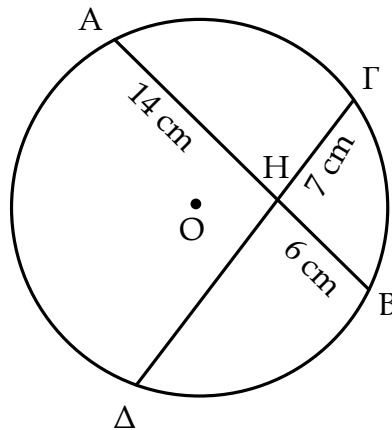
$$A = \frac{8\sigma\varphi(\pi + \varphi) - 20\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{16\sigma\tau\epsilon\mu\varphi}$$

7. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται τα τόξα  $\overset{\frown}{AB} = 2\chi$ ,  $\overset{\frown}{BG} = 4\chi$ ,  $\overset{\frown}{AG} = 3\chi$ , όπου  $(\epsilon)$  είναι η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ. Να υπολογίσετε τις τιμές των αγνώστων  $\chi$ ,  $\psi$ ,  $\omega$  και  $\phi$  και να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



8. Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{\chi^2 - 6\chi - 40}{(1 - \chi)^2} \leq 0$ .

9. Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  και οι διαστάσεις των τμημάτων  $AH = 14\text{cm}$ ,  $HB = 6\text{cm}$  και  $\Gamma H = 7\text{cm}$ . Να δείξετε ότι  $(AH)(HB) = (\Gamma H)(H\Delta)$  και να υπολογίσετε το μήκος του  $H\Delta$ .



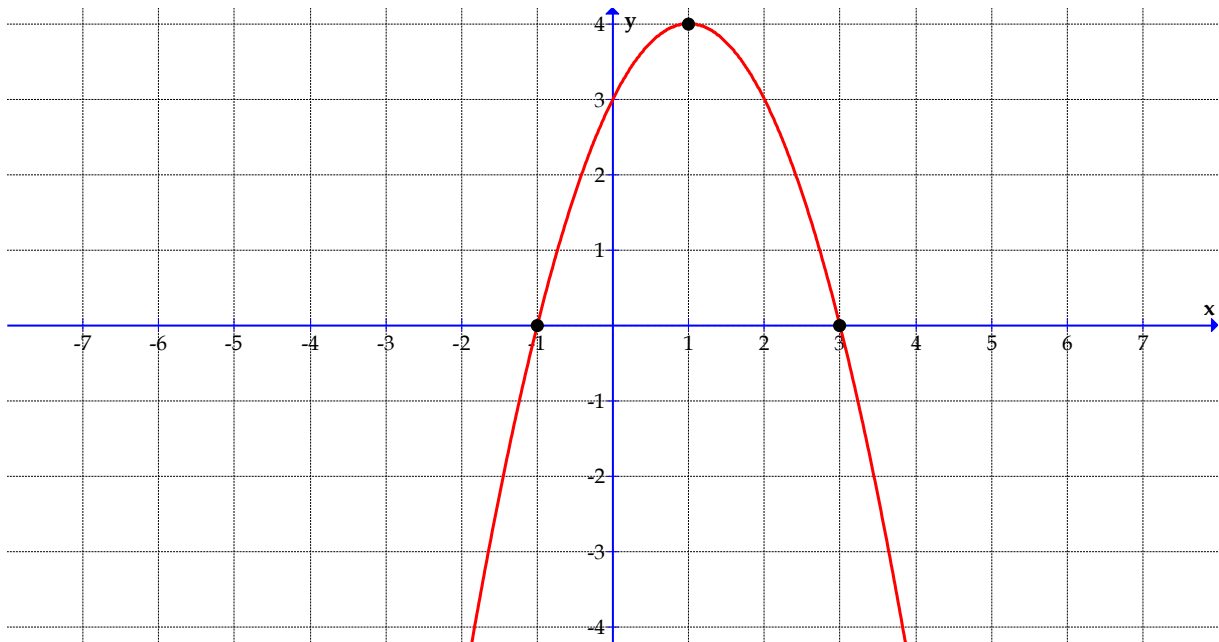
$$3\chi - 2\psi = 7$$

10. Αν το σύστημα  $2\chi + 3\psi = -4$  είναι συμβιβαστό, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $\kappa\chi + \lambda\psi = 10$

$$A = 5\kappa - 10\lambda - 13, \text{ όπου } \kappa, \lambda \in \mathbb{R}.$$

**ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Το πιο κάτω σχήμα δίνει τη γραφική παράσταση της παραβολής  $f(x) = ax^2 + bx + c$   
 $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$ .



Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

- 1) i. Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της  $f(x)$ .  
 ii. Το πρόσημο της διακρίνουσας  $\Delta$ .
- 2) i. την εξίσωση του άξονα συμμετρίας.  
 ii. τις συντεταγμένες της κορυφής και να χαρακτηριστεί.
- 3) i. το πρόσημο του  $a$ .  
 ii. τις τιμές του  $x$  για τις οποίες  $ax^2 + bx + c < 0$
- 4) i. την τιμή του  $c$  και  
 ii. τις τιμές του  $x$  για τις οποίες  $ax^2 + bx + c = 0$

5) την τιμή της παράστασης  $\frac{3c - 2b}{a}$

2. Αν  $A = \frac{\sin(270^\circ + \alpha) \eta\mu(360^\circ + \alpha) \epsilon\phi(90^\circ + \alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha) \sigma\upsilon\nu(\alpha - 180^\circ)}$  και

$$B = (\eta\mu^2 \alpha - \sigma\upsilon\nu^2 \alpha)^2 + 4\eta\mu^2 \alpha \sigma\upsilon\nu^2 \alpha + \eta\mu(90^\circ + \alpha) \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha),$$

να αποδείξετε ότι:  $\frac{A}{B} - 1 = \frac{1}{\epsilon\phi^2 \alpha}$ .

3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (\beta - 2)x^2 - (3\mu + \alpha)x + (\gamma - 2)\mu + 7$  με  $\mu \in \mathbb{R}$  και οι σταθερές  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  αποτελούν τη λύση του συστήματος:

$$\alpha + 2\beta = 7$$

$$3\alpha - 4\gamma = -13$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 8$$

α) Να λύσετε το σύστημα.

β) Αν δίνεται ότι  $\alpha = 1, \beta = 3$  και  $\gamma = 4$  και  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$  να υπολογίσετε τις τιμές του  $\mu, \mu \in \mathbb{R}$  ώστε :

i) η εξίσωση  $f(x) = 0$  να έχει ρίζες αντίθετες,

ii) να ισχύει η σχέση:  $x_1^2 + x_2^2 = x_1 x_2 \cdot (x_1 x_2 - 2)$

4. Για τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  ισχύουν  $2 < \alpha < 5$  και  $-6 < \beta < -2$ . Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

A.  $\beta - \alpha$

B.  $3\alpha + 2\beta$

Γ.  $-\frac{\beta}{\alpha}$

Δ.  $\alpha^2 - \frac{1}{\beta}$

5. Δίνεται κύκλος με κέντρο K και ακτίνα R. Στην προέκταση της διαμέτρου AB (προς το μέρος του B) παίρνουμε σημείο Γ. Από το Γ φέρουμε την εφαπτόμενη ΓΔ (Δ το σημείο επαφής) του κύκλου και την κάθετη ΓΕ στην ΑΓ όπου Ε το σημείο τομής της κάθετης με την προέκταση της ΑΔ.

Να δείξετε ότι:

α)  $(AD)(AE) = (AB)(AG)$

β)  $(GD)^2 = (AG)(GB)$

γ)  $(GA)^2 - (AD)(AE) = (GD)^2$



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2015Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΤάξη: Α΄Χρόνος: 2 ώρες και 30 λεπτάΗμερομηνία: 29/5/2015

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) **Επιτρέπεται** η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.  
 β) Να γράφετε **μόνο με πέννα μπλε** (τα σχήματα με μολύβι).  
 γ) **Δεν επιτρέπεται** η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.

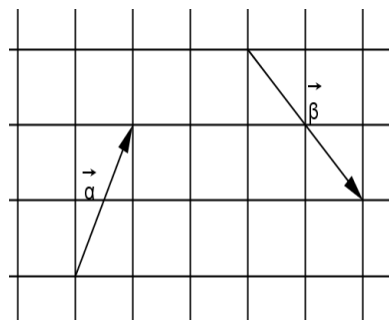
Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.ΜΕΡΟΣ Α΄:

Να λύσετε και τις 10 (δέκα) ασκήσεις του Α΄ Μέρους. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να μετατρέψετε το κλάσμα  $\frac{1}{4+\sqrt{3}}$  σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής.

2. α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  και  $\vec{\gamma}$ , όπου  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ .

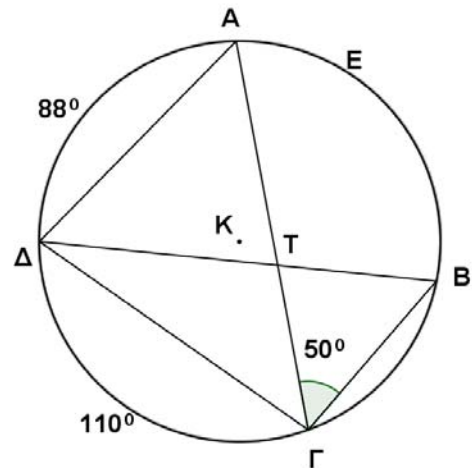
β) Αν  $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ , να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$ .



3. Αν  $\eta\mu\theta = \frac{5}{13}$  και  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{26\sigma\upsilon\upsilon\theta - 12\epsilon\phi\theta + 2}{25\sigma\phi\theta + 10\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$$

4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο Κ.  
Η γωνία ΑΓΒ έχει μέτρο  $50^\circ$  και τα τόξα ΑΔ και ΓΔ έχουν μέτρα  $88^\circ$  και  $110^\circ$  αντίστοιχα.  
Να υπολογίσετε:



- α) Το μέτρο του τόξου ΑΕΒ  
β) Τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΓ

5. Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$ , για τις οποίες η εξίσωση  $x^2 - \lambda x + \lambda + 3 = 0$  έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

6. Ένας μαθητής πήρε στα δύο διαγωνίσματα των Μαθηματικών βαθμούς 12 και 14 αντίστοιχα και βαθμό 18 για την εργασία των Μαθηματικών. Αν το κάθε διαγώνισμα έχει βαρύτητα 40% και η εργασία 20% στη συνολική βαθμολογία, να υπολογίσετε το μέσο όρο της βαθμολογίας του μαθητή.

7. Να βρείτε για ποιες τιμές των παραμέτρων  $\kappa$  και  $\mu$  οι ευθείες  $\epsilon_1: (\mu - 2)x + 3y = \kappa - 1$  και  $\epsilon_2: y = -\mu x + 1$  συμπίπτουν.

8. Να απλοποιήσετε το κλάσμα  $\frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 9}$ .

9. Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση  $\lambda^2 x + 16 = \lambda^2 + 4\lambda x$  για τις διάφορες πραγματικές τιμές του  $\lambda$ .

10. Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{(x^2 - x - 2)(x - 2)(x^2 + 9)}{6x - x^2} \geq 0$ .

### ΜΕΡΟΣ Β΄:

Να λύσετε και τις 5 (πέντε) ασκήσεις του Β΄ Μέρους. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + \kappa x + \kappa + 1 = 0$  με ρίζες  $x_1, x_2$ .

α) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις  $x_1 + x_2$  και  $x_1 \cdot x_2$ .

β) Να δείξετε ότι  $(1 - x_1^2)(1 - x_2^2) = 4(\kappa + 1)$ .

γ) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες  $\rho_1 = \frac{1}{x_1}$  και  $\rho_2 = \frac{1}{x_2}$ .

δ) Να βρείτε την τιμή του  $\kappa$  ώστε το  $-2$  να είναι ρίζα της εξίσωσης  $(\kappa + 1)x^2 + \kappa x + 1 = 0$ .

2. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης της  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$ . Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της  $f(x)$

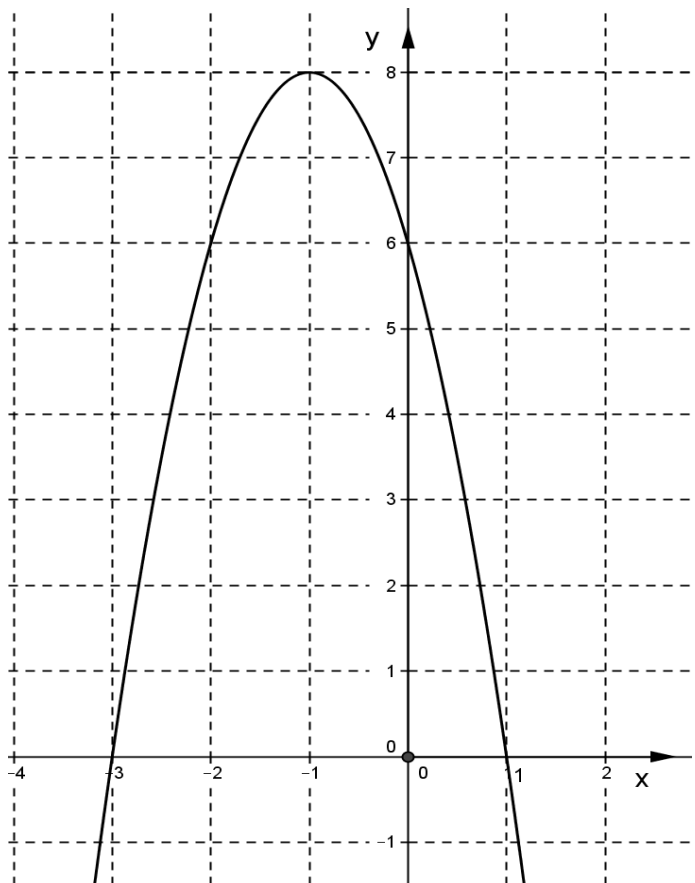
β) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής

γ) Τις ρίζες της εξίσωσης  $ax^2 + bx + \gamma = 0$

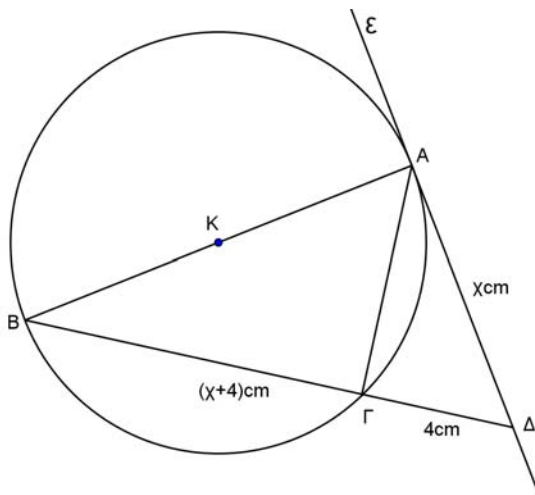
δ) Τις τιμές του  $x$  για τις οποίες  $f(x) \geq 0$

ε) Την τιμή της παράστασης

$$B = -\frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\gamma - 6\beta}{\alpha}$$



3. Δίνεται ο κύκλος (Κ, R) με διάμετρο AB και ε εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A.



α) Να αποδείξετε ότι  $(AD)^2 = (ΓΔ) \cdot (BΔ)$ .

β) Αν  $(AD) = \chi \text{ cm}$ ,  $(ΓΔ) = 4 \text{ cm}$  και  $(BΓ) = (\chi + 4) \text{ cm}$ , να υπολογίσετε το  $\chi$ .

γ) Να αποδείξετε ότι το μήκος της ακτίνας του κύκλου ισούται με  $4\sqrt{3} \text{ cm}$ .

4. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ( $A=90^\circ$ ),  $(AB) = \chi \text{ cm}$  και  $(AΓ) = \psi \text{ cm}$ .

α) Αν  $2 < \chi < 7$ ,  $3 < \psi < 10$  και E είναι το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται το E.

β) Αν η υποτείνουσα του τριγώνου έχει μήκος  $10 \text{ cm}$  και ισχύει  $\chi + \psi = 14 \text{ cm}$  με  $\chi < \psi$ , να βρείτε τα μήκη των πλευρών AB και AΓ.

5. Δίνονται οι παραστάσεις :

$$A = \frac{\eta\mu(\pi-\omega) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2}-\omega\right) \cdot \sigma\upsilon\upsilon\eta(\omega-2\pi)}{\epsilon\varphi(\pi+\omega) \cdot \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right) \cdot \eta\mu(-\omega)} \quad \text{και} \quad B = \frac{2\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\upsilon\eta\omega + (\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\upsilon\eta\omega)^2}{2\tau\epsilon\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\upsilon\eta\omega}$$

α) Να δείξετε ότι  $A = \eta\mu\omega$  και  $B = \frac{1}{2}$ .

β) Να λύσετε την εξίσωση  $A = B$  στο διάστημα  $0 \leq \omega \leq \pi$ .



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α' Ενιαίου Λυκείου**

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29/05/2015

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2½ ώρες

Όνοματεπώνυμο: \_\_\_\_\_ Βαθμός: \_\_\_\_\_

Τμήμα: \_\_\_\_\_ Αριθμός: \_\_\_\_\_ Βαθμός ολογράφως: \_\_\_\_\_

Υπογραφή καθηγητή: \_\_\_\_\_

**ΟΔΗΓΙΕΣ :**

- (α) Να γράψετε μόνο με **μπλε** μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
- (β) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- (γ) Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία διαδικασία.
- (δ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

Το δοκίμιο αποτελείται από 10 σελίδες.

**ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Αν  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ , να υπολογίσετε:

(α) τις συντεταγμένες του διανύσματος  $2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ ,

(β) το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\alpha}$ .

2. (α) Να μετατρέψετε το κλάσμα  $\frac{6}{\sqrt{3}}$  σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή (χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής).

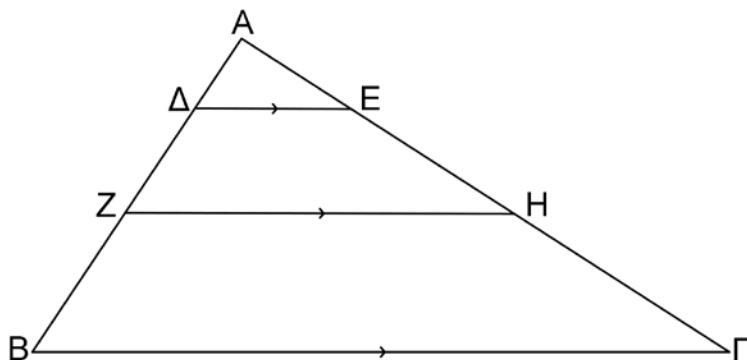
(β) Να λύσετε την εξίσωση:  $\sqrt{x+1} = 4$ .

3. Ένας φοιτητής πήρε σε 3 διαφορετικά μαθήματα τους βαθμούς 8, 9 και 5. Να υπολογίσετε το μέσο όρο της βαθμολογίας του, αν τα μαθήματα έχουν βαρύτητα ανάλογα με τις περιόδους διδασκαλίας του κάθε μαθήματος που είναι 2, 4 και 5 αντίστοιχα.

4. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  ώστε το σύστημα να είναι συμβιβαστό:

$$\begin{aligned}3x + y &= 5 \\ x - 2y &= 4 \\ \lambda x + 3\lambda y &= 16 + 7\lambda\end{aligned}$$

5. Στο τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  τα ευθύγραμμα τμήματα  $\Delta E$  και  $ZH$  είναι παράλληλα προς τη βάση  $B\Gamma$ . Αν  $A\Delta = 4\text{ cm}$ ,  $\Delta Z = 6\text{ cm}$ ,  $EH = 9\text{ cm}$  και  $A\Gamma = 27\text{ cm}$  να υπολογίσετε τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων  $AE$  και  $ZB$ .



6. Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση  $\lambda^2 \cdot (x-1) = (5\lambda-6) \cdot x - 3\lambda$  για τις διάφορες τιμές του  $\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .



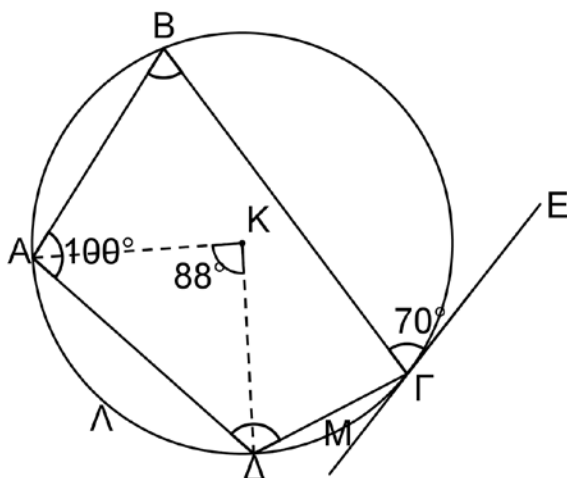
7. Αν ισχύει  $\frac{\sigma\upsilon\nu(180^\circ-\theta).\eta\mu(90^\circ+\theta).\eta\mu(90^\circ-\theta)}{\sigma\upsilon\nu(-\theta).\eta\mu(180^\circ-\theta).\epsilon\varphi(90^\circ+\theta)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , να βρείτε τη γωνία  $\theta$ , αν  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ .

8. Αν  $2 < x < 5$  και  $-7 < -y < -3$  να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

(α)  $x + 2y$

(β)  $\frac{x}{y}$

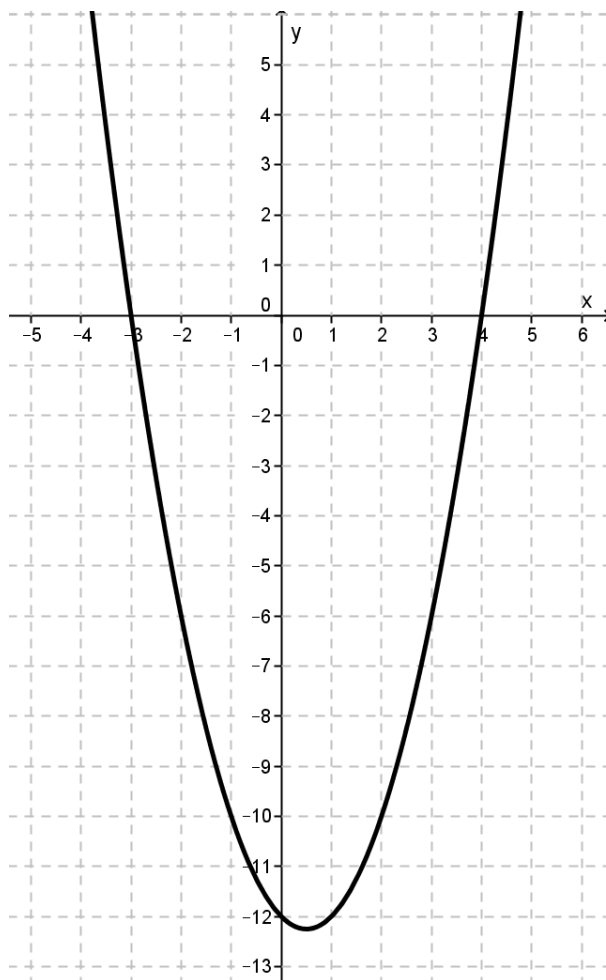
9. Δίνεται κύκλος με κέντρο Κ και ΕΓ εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ. Αν  $\widehat{B\hat{A}\Delta} = 100^\circ$ ,  $\widehat{B\hat{\Gamma}E} = 70^\circ$  και  $\widehat{A\hat{K}\Delta} = 88^\circ$  να υπολογίσετε τα μέτρα των τόξων  $\widehat{A\Lambda\Delta}$ ,  $\widehat{\Delta M\Gamma}$  και τη γωνία  $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$  (δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας).



10. Αν  $x_1$  και  $x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ , να αποδείξετε ότι  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  και  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ .

**ΜΕΡΟΣ Β :** Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ .



(α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης

$$ax^2 + bx + \gamma = 0.$$

(β) Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ .

(γ) Να βρείτε το πρόσημο των τιμών  $f(-1961)$ ,  $f(3)$  και  $f(5)$ .

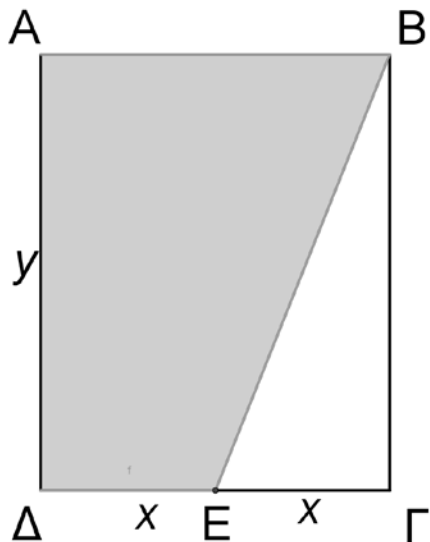
(δ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) > 0$ .

(ε) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης  $f(x)$ .

2. (α) Να γράψετε την παράσταση  $A = \frac{4x^2 - 2x}{2x^2 + x - 1}$  στην πιο απλή μορφή της.

(β) Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{(x+1)^2 \cdot (x+2)}{x^2 - 5x + 6} \geq 0$ .

3. Το παρακάτω σχήμα παρουσιάζει χωράφι σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  με  $A\Delta > \Gamma\Delta$ . Το χωράφι χρειάζεται  $180\text{ m}$  σύρμα για να περιφραχθεί και το  $E$  είναι το μέσον της πλευράς  $\Gamma\Delta$ . Αν το σκιασμένο μέρος του χωραφιού το οποίο θα δέντροφυτευτεί, έχει εμβαδόν  $1500\text{ m}^2$ , να υπολογίσετε τις διαστάσεις του χωραφιού.



4. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + (\sigma\upsilon\nu\alpha + 1)x + \eta\mu^2\alpha = 0$  με  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ .

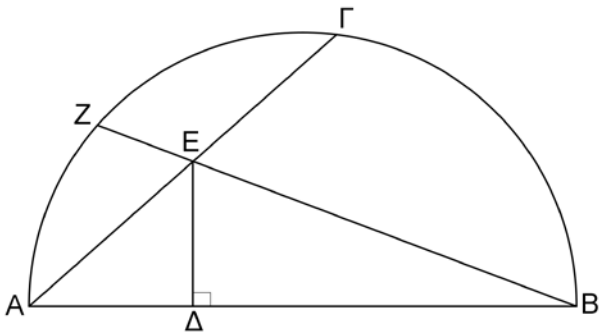
(α) Αν  $x_1$  και  $x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha - 1}.$$

(β) Να βρείτε την τιμή του  $\sigma\upsilon\nu\alpha$  ώστε η πιο πάνω εξίσωση να έχει ρίζες πραγματικές και ίσες.

(γ) Να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\alpha$ .

5. Δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο  $AB$  και χορδές  $AG$  και  $ZB$ . Από το σημείο τομής  $E$  των χορδών  $AG$  και  $ZB$ , φέρνουμε την  $ED$  κάθετη στη διάμετρο  $AB$ . Να δείξετε ότι:
- (α)  $AE \cdot AG = AD \cdot AB$
  - (β) Τα τρίγωνα  $BE\Delta$  και  $ABZ$  είναι όμοια.
  - (γ)  $AE \cdot AG + BE \cdot BZ = (AB)^2$



ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΟΥ ΙΩΑΝΝΗ ΛΕΜΕΣΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2014-2015

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ**

ΤΑΞΗ: Α' Λυκείου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22/05/2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΩΡΑ: 10:30 – 13:00

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ**

1. Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε ή μαύρο. Τα σχήματα με μολύβι.
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
3. Επιτρέπεται η χρήση σφραγισμένης υπολογιστικής μηχανής.
4. Το γραπτό αποτελείται από τρεις σελίδες.

**ΜΕΡΟΣ Α' (50 μονάδες)**

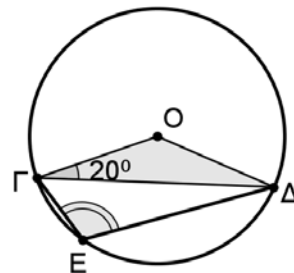
Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

**A1.** Να λύσετε την ανίσωση:  $x^2 - 2x - 15 \leq 0$ **A2.** Να αποδείξετε ότι:  $(\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha)^2 + (\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha)^2 = 2$ **A3.** Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς 2 και -1.**A4.** Αν  $x = \sqrt{2} - 1$  και  $y = \sqrt{2} + 1$  να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$(\alpha) x \cdot y \text{ (μονάδες 2,5) και } (\beta) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \text{ (μονάδες 2,5)}$$

**A5.** Αν  $\varepsilon\varphi\omega = \frac{6}{8}$  και  $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$ , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\eta\mu\omega - 20 \cdot \sigma\upsilon\nu\omega}{6 \cdot \sigma\varphi\omega}$$

**A6.** Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου και $\angle\Gamma\Delta = 20^\circ$ . Να βρείτε το μέτρο της γωνίας  $\angle\Gamma\text{Ε}\Delta$ .



**A7.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{\beta}\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\gamma}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

(α) Να υπολογίσετε το διάνυσμα  $\vec{\delta} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + \vec{\gamma}$ .

(μονάδες 3)

(β) Το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\delta}$ .

(μονάδες 2)

**A8.** Να βρείτε τις τιμές του  $\mu$  ώστε η εξίσωση  $\mu x - \mu^2 = 4x - 16$ , να έχει μοναδική λύση.

**A9.** Οι πλευρές  $x$  και  $y$  ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου βρίσκονται στα διαστήματα  $1 \leq x \leq 8$  και  $2 \leq y \leq 16$ . Να υπολογίσετε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται η περίμετρος και το εμβαδόν του.

**A10.** Η εφαπτομένη ενός κύκλου (Ο, R) σε ένα σημείο του Ε, τέμνει δύο παράλληλες εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία Δ και Γ.

Να δείξετε ότι:

(α)  $\angle \Delta O \Gamma = 90^\circ$  (μονάδες 3)

(β)  $AD + BG = \Delta \Gamma$  (μονάδες 2)

### **ΜΕΡΟΣ Β' (50 μονάδες)**

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

**B1.** Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε τιμή του  $\lambda$ .

(μονάδες 2)

(β) Να βρείτε για ποια τιμή του  $\lambda$  έχει ρίζες ίσες.

(μονάδες 2)

(γ) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε να ισχύει:  $x_1^2 + x_2^2 = 5$

(μονάδες 2)

(δ) Για  $\lambda = 2$  να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$$

(μονάδες 4)

Στο διάγραμμα να φαίνονται άξονας συμμετρίας, κορυφή και σημεία τομής με τους άξονες.

**B2.** Να αποδείξετε ότι: 
$$\frac{\sin(\pi + \vartheta) \cdot \eta\mu(5\pi + \vartheta) \cdot \varepsilon\varphi(8\pi + \vartheta)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \vartheta\right) \cdot \eta\mu\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right)} = 1$$

**B3.** Οι θερμοκρασίες που καταμετρήθηκαν καθημερινά σε μια πόλη για ένα δεκαπενθήμερο ήταν: 5, 6, 7, 5, 4, 5, 6, 3, 4, 6, 7, 8, 7, 8, 9 βαθμοί Κελσίου.

(α) Να βρείτε τη τυπική απόκλιση των μετρήσεων αυτών.

(μονάδες 8)

(β) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας CV.

(μονάδες 2)

**B4.** Η καμπύλη με εξίσωση  $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$  περνά από τα σημεία με συντεταγμένες (4, -1), (2, 2) και (1, 2).

(α) Να υπολογίσετε τις τιμές των  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

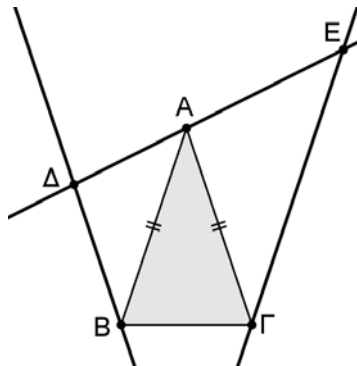
(μονάδες 8)

(β) Να βρείτε τα σημεία τομής της καμπύλης με τον άξονα των  $x$ .

(μονάδες 2)

**B5.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και μια ευθεία  $\varepsilon$  που περνάει από το  $A$  και δεν τέμνει το τρίγωνο σε άλλο σημείο. Από το  $B$  φέρνουμε παράλληλη προς την  $A\Gamma$  που τέμνει την  $\varepsilon$  στο  $\Delta$  και από το  $\Gamma$  παράλληλη προς την  $AB$  που τέμνει την  $\varepsilon$  στο  $E$ .

Να δείξετε ότι:  $(AB)^2 = (B\Delta) \cdot (\Gamma E)$ .



**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2015**

**ΜΑΘΗΜΑ:** Μαθηματικά  
**ΤΑΞΗ:** Α΄ Ενιαίου Λυκείου

**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** 29/05/15  
**ΔΙΑΡΚΕΙΑ:** 2,5 ώρες

**ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ****ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.  
 (β) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (στα σχήματα επιτρέπεται μολύβι).  
 (γ) Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.  
 (δ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

**ΜΕΡΟΣ Α΄:** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

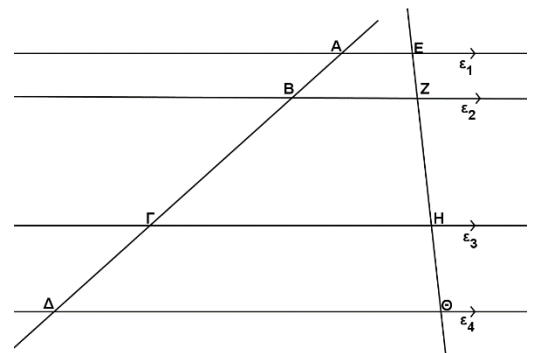
A1. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Να υπολογίσετε:

- (α) τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$   
 (β) το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$

A2. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου  $\kappa$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$  για την οποία η εξίσωση:  
 $(3\kappa - 1)x = 14$  είναι αδύνατη.

A3. Στο σχήμα δίνεται ότι  $E\theta = 6cm$ ,  $EZ = 1cm$ ,  
 $AG = 6cm$ ,  $\Gamma\Delta = 3cm$  και  $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3 // \varepsilon_4$ .

Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων  $AB$  και  $ZH$ .



A4. Να αποδείξετε ότι:  $\frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{2+\sqrt{x}} = \frac{4}{4-x}$  όπου  $x \geq 5$ .

A5. Η βαθμολογία της Αλίκης στα πέντε διαγωνίσματα των Μαθηματικών για το Α΄ τετράμηνο ήταν:

$$15, \alpha, 14, 16, 2\alpha - 6$$

Αν ο μέσος όρος των διαγωνισμάτων της είναι 15 να βρείτε:

- (α) την τιμή του  $\alpha$   
 (β) το νέο μέσο όρο αν ο βαθμός κάθε διαγωνίσματος αυξηθεί κατά 2 μονάδες.

A6. Αν  $\sin \theta = -\frac{4}{5}$  και  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ , να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{20\eta\mu\theta - 6\sigma\varphi\theta}{3 - 12\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$$

A7. Στο σχήμα δίνεται κύκλος  $(K, R)$  όπου:

$AG$  διάμετρος του κύκλου,

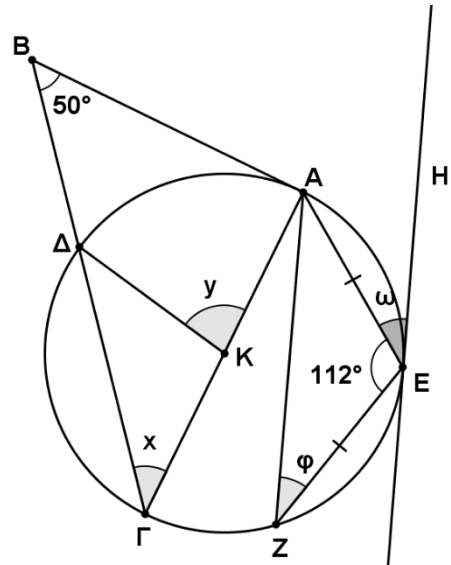
$AB$  και  $HE$  εφαπτόμενες του κύκλου,

$AE = EZ$ ,

$\widehat{AB\Gamma} = 50^\circ$  και  $\widehat{ZEA} = 112^\circ$

Να υπολογίσετε τις γωνίες:  $x, y, \omega, \varphi$ .

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)



A8. Να δείξετε ότι η εξίσωση που έχει άθροισμα ριζών  $S = \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{\kappa^2} \cdot \kappa^{\frac{4}{3}} \cdot \kappa\right)}$

και γινόμενο  $P = \sqrt{3\kappa^2 + (\sqrt{\kappa} \div \sqrt[4]{\kappa})^8}$  με  $\kappa > 0$ , είναι:  $x^2 - \kappa x + 2\kappa = 0$ .

Στη συνέχεια να βρείτε την τιμή της παράστασης:  $3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  συναρτήσει του  $\kappa$ .

A9. Να αποδείξετε ότι:  $\frac{\sigma\varphi\theta - \sigma\eta\nu\theta}{\sigma\varphi\theta \cdot \sigma\eta\nu^2\theta} = \frac{1}{1 + \eta\mu\theta}$

A10. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -(\kappa^2 + 2)x^2 + \kappa^2x + \mu^2 + 3\mu - \frac{2}{3}$ ,  $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$ .

(α) Να βρείτε τις τιμές του  $\kappa$ , αν ο άξονας συμμετρίας είναι  $x = \frac{1}{3}$ .

(β) Αν  $\kappa = 2$ , να βρείτε για ποιες τιμές του  $\mu$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)$  δεν έχει σημεία τομής με τον άξονα των τετμημένων ( $xx'$ ).

**ΜΕΡΟΣ Β':** Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

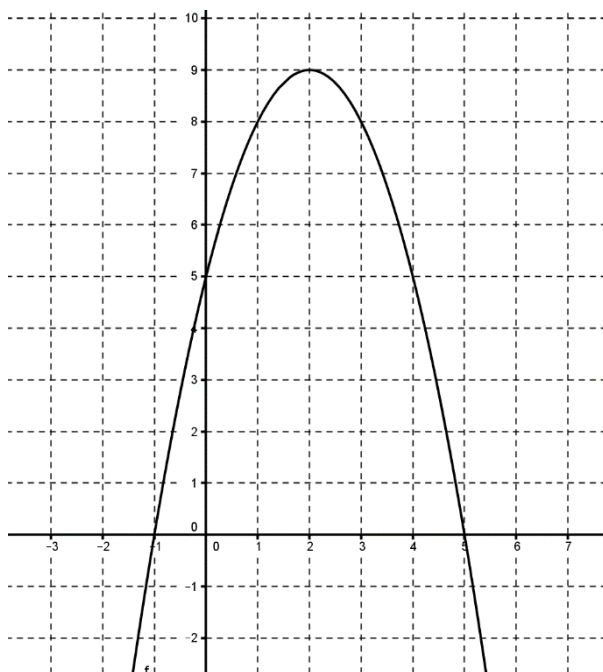
- B1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ .

Να βρείτε:

- I. (α) το πεδίο τιμών και τις συντεταγμένες της κορυφής της  $f(x)$   
(β) τις τιμές των  $\alpha, \beta, \gamma$   
(γ) τις τιμές του  $x$  ώστε  $f(x) = 8$ .

- II. Αν  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 4$  και  $\gamma = 5$ , να βρείτε τις τιμές του  $x$  ώστε:

$$\frac{f(x)(x+1)}{x^2+3x-10} \geq 0$$



- B2. Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς  $x$ .

Αν αυξήσουμε τις πλευρές  $AB$  και  $\Delta\Gamma$  κατά  $6m$  και μειώσουμε τις πλευρές  $A\Delta$  και  $B\Gamma$  κατά  $3m$ , δημιουργείται ένα ορθογώνιο με περίμετρο που κυμαίνεται από  $38m$  μέχρι  $46m$ .

Να βρείτε το διάστημα στο οποίο ανήκει :

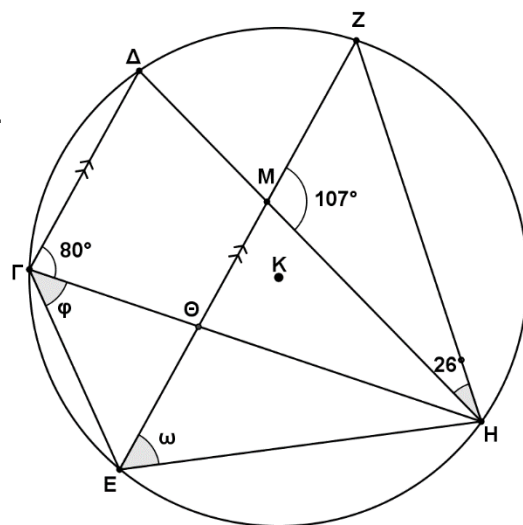
- (α) το μήκος της πλευράς  $x$  του τετραγώνου  
(β) το εμβαδόν του τετραγώνου  
(γ) το εμβαδόν του ορθογωνίου που έχει δημιουργηθεί

- B3. Στο σχήμα δίνεται κύκλος  $(K, R)$ ,

$\Delta\Gamma \parallel ZE$ ,  $\widehat{ZMH} = 107^\circ$ ,  $\widehat{ZHM} = 26^\circ$  και  $\widehat{\Delta\Gamma H} = 80^\circ$ .

Να βρείτε:

- (α) τις γωνίες  $\varphi$  και  $\omega$ .  
(β) την τιμή της παραμέτρου  $\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$   
αν οι εξισώσεις των χορδών  $\Delta\Gamma$  και  $ZE$  είναι:  
 $\Delta\Gamma: y = (\alpha^2 - 5)x + 2$   
 $ZE: y = (1 - \alpha)x + \alpha + 5$



B4. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - (3 + \eta\mu\theta) \cdot x + \varepsilon\varphi\theta = 0$  με ρίζες  $x_1$  και  $x_2$ .

(α) Να δείξετε ότι:  $(S - 3) \cdot \varepsilon\varphi(270^\circ - \theta) + \frac{\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \theta)}{P} \cdot \tau\epsilon\mu(180^\circ - \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta - 1$ ,  
όπου  $S$  και  $P$  το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών αντίστοιχα.

(β) Αν  $x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$  να βρείτε τις τιμές του  $\theta$ , όπου  $0^\circ < \theta < 360^\circ$ .

B5. Από σημείο  $\Sigma$  εκτός κύκλου φέρουμε τέμνουσα  $\Sigma AB$  και την εφαπτομένη  $\Sigma\Gamma$ , όπου  $\Gamma$  το σημείο επαφής στο μεγάλο τόξο  $AB$ . Επίσης,  $M$  είναι το μέσο του μικρού τόξου  $AB$  και  $\Delta$  η τομή της  $\Gamma M$  με την  $AB$ .

(α) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου  $\mu$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$

αν οι εξισώσεις των χορδών  $AM, AB, A\Gamma$  είναι αντίστοιχα:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ x + 4y = 14 \\ (4 - \mu)x + 7y = 3\mu - 1 \end{cases}$$

(β) Να δείξετε ότι:  $(\Gamma B) \cdot (MA) = (\Gamma M) \cdot (B\Delta)$

## ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ:  $2\frac{1}{2}$  ΩΡΕΣ

ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29/05/2015

**ΟΔΗΓΙΕΣ:** Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.  
Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού και διορθωτικής ταινίας.  
Να γράψετε μόνο με μπλε ή μαύρη πένα. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.  
Το γραπτό αποτελείται από 4 σελίδες.

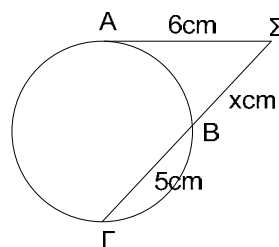
**ΜΕΡΟΣ Α' :** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

**A1.** Δίνονται τα διανύσματα:  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ . Να υπολογίσετε:

- Τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ .
- Το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\alpha}$ .

**A2.** Αν οι τιμές 15, 11 και 13 έχουν συντελεστές βαρύτητας 0,2, 0,3 και 0,5 αντίστοιχα, να υπολογίσετε τη μέση τιμή των πιο πάνω τιμών.

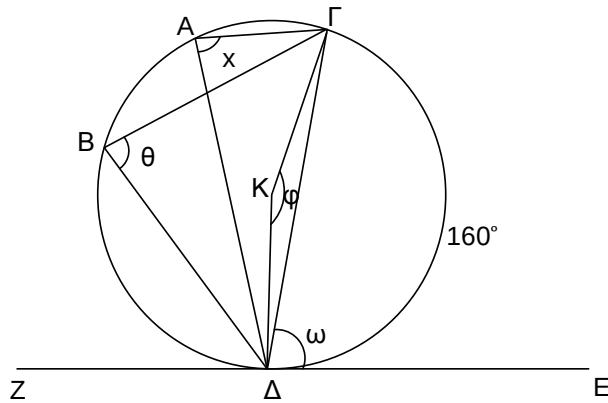
**A3.** Από σημείο Σ εκτός κύκλου φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΣΑ και την τέμνουσα ΣΒΓ, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Αν  $(\Sigma A) = 6\text{cm}$ ,  $(\Sigma B) = x\text{cm}$  και  $(B\Gamma) = 5\text{cm}$ , να υπολογίσετε το μήκος του ΣΒ.



**A4.** Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, αν  $a \geq 0$ .

- $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a^4}$
- $\sqrt[4]{\sqrt[4]{a^8}}$

**A5.** Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{\omega}$ ,  $\hat{\varphi}$ ,  $\hat{x}$  και  $\hat{\theta}$ , αν η ΕΔΖ είναι εφαπτομένη του κύκλου (Κ, R) στο σημείο Δ και το τόξο  $\widehat{\Delta\Gamma} = 160^\circ$ .



**A6.** Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -2 \\ 2\alpha + \beta = 4 \\ \alpha + 3\gamma = 2 \end{cases}$$

**A7.** Να λύσετε την ανίσωση:  $\frac{(x^2 - 4x + 4)(-x^2 + x - 1)}{x^2 - 4x + 3} \leq 0$ .

**A8.** Αν το σύστημα:  $\begin{cases} \lambda x + 2\psi = 2 \\ x + \psi = 1 \end{cases}$  είναι αόριστο,

να δείξετε ότι το σύστημα:  $\begin{cases} x - \lambda\psi = \lambda \\ \lambda x - 4\psi = 3 \end{cases}$  είναι αδύνατο.

**A9.** Να αποδείξετε ότι:  $\frac{\sin^3 x}{\eta \mu x} + \frac{\epsilon \varphi x}{1 + \epsilon \varphi^2 x} = \sigma \varphi x$ , για  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ .

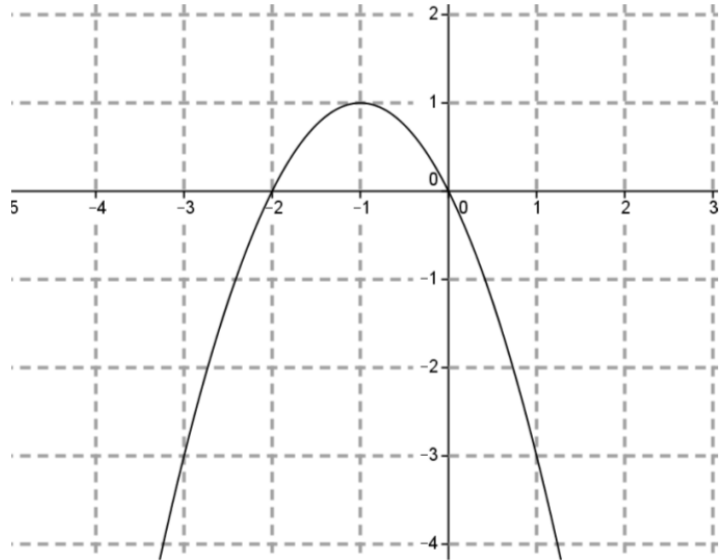
**A10.** Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 - 2\eta \mu \alpha \cdot x + 1 - \sigma \nu \alpha = 0$ , με  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Αν  $x_1$  και  $x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να υπολογίσετε το  $\eta \mu \alpha$ , έτσι ώστε  $x_1^2 + x_2^2 = 2$ .



**ΜΕΡΟΣ Β΄ : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

**B1.** Δίνεται η πιο κάτω γραφική παράσταση της παραβολής με τύπο:  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$  και  $a \neq 0$ . Να βρείτε:

- Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της  $f(x)$ .
- Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής της.
- Τις λύσεις της ανίσωσης  $f(x) > 0$ .
- Τις τιμές των παραστάσεων  $\frac{\gamma}{a}$  και  $\frac{\beta}{a}$ .
- Τις τιμές των  $a, \beta$  και  $\gamma$ .



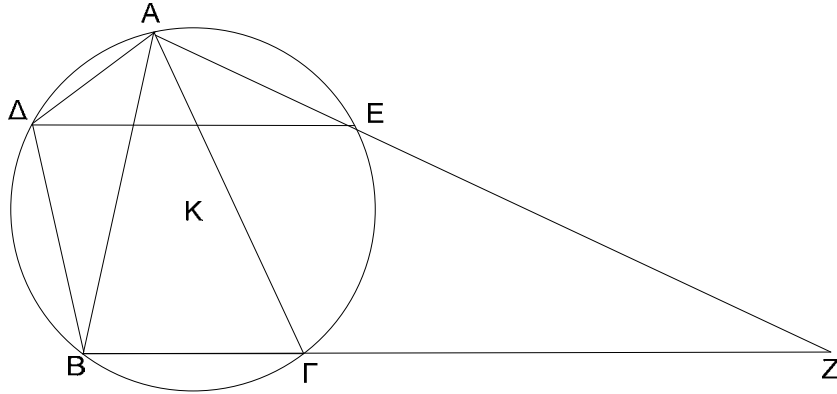
**B2.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2 - (5\lambda - \mu)x - 1$  και  $g(x) = \lambda x^2 + 13x - \lambda\mu + \lambda^2$  με  $\lambda \neq 0$ . Αν οι ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$  είναι αντίθετες και οι ρίζες της εξίσωσης  $g(x) = 0$  είναι αντίστροφες, να υπολογίσετε τις τιμές των πραγματικών παραμέτρων  $\lambda$  και  $\mu$ .

**B3.** Δίνονται οι παραστάσεις: 
$$A = \frac{\eta\mu(\pi - \theta) \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \sigma\upsilon\nu(2\pi - \theta) \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \eta\mu(2\pi - \theta) \sigma\upsilon\nu(\pi + \theta) \epsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)}$$
 και

$$B = \frac{\eta\mu^2\theta}{1 - \sigma\upsilon\nu\theta} \quad \text{με } \theta \in (0, 2\pi).$$

- Να δείξετε ότι  $A = 1$  και  $B = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta$ . (μον. 8)
- Να δείξετε ότι  $0 < B < 2$ . (μον. 2)

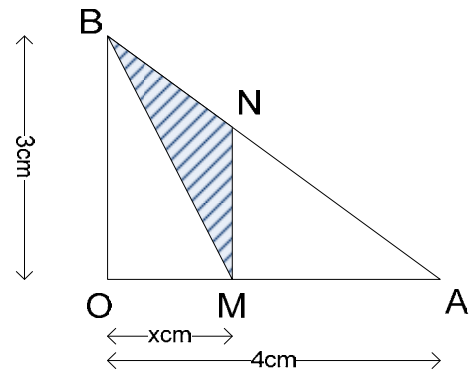
- B4.** Σε κύκλο  $(K, R)$  εγγράφουμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και φέρνουμε χορδή  $\Delta E$  παράλληλη με τη  $B\Gamma$ , όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Αν η ευθεία  $AE$  τέμνει την ευθεία  $B\Gamma$  στο  $Z$ , να αποδείξετε ότι:  
 $(A\Delta) \cdot (AZ) = (AB) \cdot (A\Gamma)$ .



- B5.** Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AOB$  είναι ορθογώνιο,  $(\widehat{O} = 90^\circ)$ , το  $M$  είναι τυχαίο σημείο της  $OA$  και  $MN \parallel OB$ . Αν  $(OA) = 4\text{cm}$ ,  $(OB) = 3\text{cm}$ ,  $(OM) = x\text{cm}$  και  $E(x)$  το εμβαδόν του τριγώνου  $BMN$ :

α) Να δείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα  $MNA$  και  $OBA$  είναι όμοια. (μον. 3)
- $(MN) = \frac{3(4-x)}{4}$ . (μον. 3)
- $E(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$ . (μον. 2)



β) Να βρείτε τη θέση του  $M$  για την οποία το εμβαδόν  $E(x)$  γίνεται μέγιστο.

(Υπόδειξη: Να βρείτε την τιμή του  $x$  στην οποία η παραβολή που σχηματίζει η συνάρτηση  $E(x)$  να έχει μέγιστο). (μον. 2)

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2015****ΤΑΞΗ: Α΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 04 / 06 / 2015****ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ½ ώρες****ΑΡ. ΣΕΛΙΔΩΝ: 4**

- 
- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
  2. Να γράφετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
  3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- 

**ΜΕΡΟΣ Α΄****Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.**

1. Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

(α)  $\frac{20}{\sqrt{5}}$

(β)  $\frac{3}{\sqrt{13}-2}$

2. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -2 \\ 13 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Να υπολογίσετε:

(α) τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

(β) το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$ .

3. Δίνονται οι ανισώσεις  $2 < \chi < 5$  και  $1 < \psi < 3$ . Να αποδείξετε ότι:

(α)  $5 < 2\chi + \psi < 13$

(β)  $-1 < \chi - \psi < 4$

4. Δίνεται η εξίσωση  $\mu^2 \chi - 3 = 9\chi + \mu$ , με  $\mu \in R$ .

Να υπολογίσετε τις τιμές του  $\mu$ :

(α) αν η εξίσωση έχει λύση το -1

(β) αν η εξίσωση είναι αόριστη.

5. Να λύσετε την ανίσωση:  $\frac{(\chi^2 - 16) \cdot (9 - \chi)}{\chi^2 - \chi - 20} \geq 0$

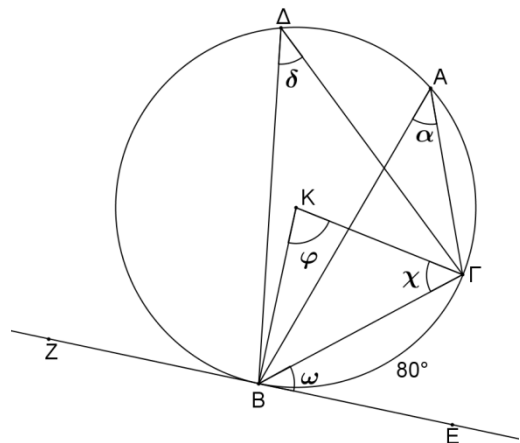
6. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των βιβλίων που έχουν διαβάσει κατά τη διάρκεια των διακοπών τους οι 20 μαθητές ενός τμήματος.

| Αριθμός βιβλίων<br><b><math>\chi_i</math></b> | Αριθμός μαθητών<br><b><math>f_i</math></b> |
|-----------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 0                                             | 2                                          |
| 1                                             | 1                                          |
| 2                                             | 4                                          |
| 3                                             | 6                                          |
| 4                                             | 2                                          |
| 5                                             | 5                                          |

Να υπολογίσετε:

- (α) τη μέση τιμή και  
(β) την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων. (κατά προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων)

7. Στο διπλανό σχήμα δίνονται:  
EBZ εφαπτομένη του κύκλου (K,R) στο σημείο Β  
και τόξο  $\widehat{B\Gamma} = 80^\circ$ .  
Να υπολογίσετε τις γωνίες:  
 $\widehat{\varphi}, \widehat{\chi}, \widehat{\delta}, \widehat{\alpha}, \widehat{\omega}$  και  $\widehat{K B Z}$ .  
(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας).



8. Αν  $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$  και  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ , να υπολογίσετε

την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{10\sigma\nu\eta\theta - 4\sigma\phi\theta + 5}{9\varepsilon\phi\theta + 8\sigma\tau\varepsilon\mu\theta}$$

9. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} \chi^2 + 2\psi = 6 \\ \chi - \psi = 1 \end{cases}$$

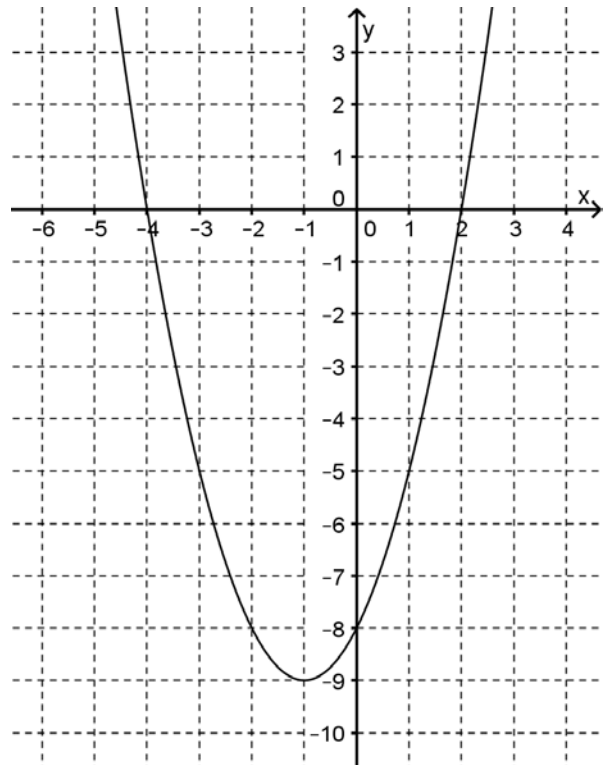
10. Δίνεται τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$ . Από τυχαίο σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $AB$  φέρουμε  $\Delta E \parallel B\Gamma$ , όπου  $E$  σημείο της  $A\Gamma$ . Από το σημείο  $\Delta$  φέρουμε  $\Delta Z \parallel BE$ , όπου  $Z$  σημείο της  $A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι  $\frac{AE}{E\Gamma} = \frac{AZ}{ZE}$ .

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β.**  
**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100 .**

1. Δίνεται η πιο κάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ .

Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

- (α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της  $f(x)$
- (β) τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής  
και να τη χαρακτηρίσετε (μέγιστο ή ελάχιστο)
- (γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της  
παραβολής
- (δ) την τιμή του  $c$
- (ε) το πρόσημο της διακρίνουσας  $\Delta$  της εξίσωσης  
 $f(x) = 0$  (Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας)
- (στ) τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$  και να  
σχηματίσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$
- (ζ) τις τιμές του  $x$  για τις οποίες  $f(x) \leq 0$ .



2. (α) Να υπολογίσετε τις τιμές των  $\kappa$  και  $\lambda$ , με  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ , αν το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 21 \\ \kappa x - 5y = 25 \\ 6x + \lambda y = 9 \end{cases} \quad \text{είναι συμβιβαστό.}$$

(β) Να ερμηνεύσετε γραφικά τη θέση των τεσσάρων ευθειών του πιο πάνω συστήματος.

(γ) Αν  $\kappa=2$  και  $\lambda=7$  να δείξετε ότι το σύστημα

$$\begin{cases} -\kappa^2 x + \lambda y = 3 \\ (\lambda + 1)x - \kappa \lambda y = 8 \end{cases} \quad \text{είναι αδύνατο.}$$

3. Δίνεται η εξίσωση  $2\chi^2 - (\mu + 3)\chi + 3\mu - 7 = 0$  και  $\chi_1, \chi_2$  είναι οι ρίζες της.

Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\mu \in R$ :

(α) η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες

(β) η εξίσωση έχει ρίζες αντίθετες

(γ) ισχύει  $\chi_1^2 \cdot \chi_2 + \chi_1 \cdot \chi_2^2 > 2\chi_1 + 2\chi_2 - 3$ .

4. (α) Αν ισχύει  $\frac{\varepsilon\phi(180^\circ + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega)}{\eta\mu(180^\circ - \omega) \cdot \eta\mu(270^\circ + \omega) \cdot \eta\mu(-\omega)} = -2$ , να βρείτε την τιμή του  $\omega$  στο διάστημα  $0^\circ < \omega < 90^\circ$ .

(β) Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\frac{\sigma\phi\theta}{\sigma\tau\epsilon\mu\theta - 1} - \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \eta\mu\theta} = 2\varepsilon\phi\theta$$

5. Από σημείο  $\Sigma$  το οποίο βρίσκεται έξω από τον κύκλο  $(K,R)$ , φέρουμε την τέμνουσα  $\Sigma AB$  και την εφαπτομένη  $\Sigma\Gamma$  του κύκλου. Το σημείο επαφής  $\Gamma$  βρίσκεται στο μεγάλο τόξο  $AB$ . Αν  $M$  είναι το μέσο του μικρού τόξου  $AB$  και  $\Delta$  το σημείο τομής της  $\Gamma M$  με την  $AB$ , να δείξετε ότι:

(α) τα τρίγωνα  $\overset{\Delta}{\Sigma}\Gamma A$  και  $\overset{\Delta}{\Sigma}B\Gamma$  είναι όμοια και  $(\Sigma\Gamma)^2 = (\Sigma A) \cdot (\Sigma B)$

(β)  $(\Gamma B) \cdot (MA) = (\Gamma M) \cdot (BA)$

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2015**

Ημερομηνία: 26/5/2015

Χρόνος: 2,5 ώρες

**ΟΔΗΓΙΕΣ:** α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

β) Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).

γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

δ) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.

**Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.****ΜΕΡΟΣ Α΄:** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Να υπολογίσετε: (i) το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\alpha}$ (ii) τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ 

2. Να βρείτε τη θέση των κύκλων (Κ, 4cm) και (Λ, 3cm) αν το μήκος της διακέντρου ΚΛ ισούται με 8cm.

3. Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει τον αριθμό των υπαλλήλων που έχουν οι βιοτεχνίες σε μια περιοχή της Λευκωσίας.

| Αριθμός υπαλλήλων<br>$x_i$ | Βιοτεχνίες<br>$f_i$ |
|----------------------------|---------------------|
| 5                          | 2                   |
| 6                          | 2                   |
| 7                          | 2                   |
| 8                          | 3                   |
| 10                         | 1                   |

Να υπολογίσετε: (i) τη μέση τιμή και

(ii) την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

4. Δίνεται ότι  $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$  και  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ .

Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A = 10\sigma\upsilon\nu\theta + 8\epsilon\phi\theta$ .

5. Να εξετάσετε αν το σύστημα:

$$\begin{cases} x + \psi = 3 \\ x - \psi = 1 \\ 2x + 3\psi = 7 \end{cases} \quad \text{είναι συμβιβαστό.}$$

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{2x^2 - x - 1}$ .

7. Στο διπλανό σχήμα, Κ είναι το κέντρο του κύκλου και ΑΒ, ΓΔ είναι διάμετροι. Η γωνία Α ισούται με  $60^\circ$ .

(α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω ισούται με  $120^\circ$  και γιατί η γωνία ψ ισούται με  $60^\circ$ .

(β) Να βρείτε τα μέτρα των γωνιών χ και θ.

8. (α) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + 6x + 10$ . Να γράψετε την f στη μορφή  $(x+k)^2 + \mu$ .

(β) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που δημιουργείται όταν η παραβολή  $\psi = x^2$  μετατοπιστεί 3 μονάδες αριστερά και 1 μονάδα προς τα πάνω.

Στη συνέχεια, να βρείτε, της παραβολής  $f(x) = (x+3)^2 + 1$ .

(i) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της

(ii) την ελάχιστη τιμή που λαμβάνει και

(iii) το γινόμενο των ριζών της.

9. (α) Να αποδείξετε ότι: 
$$\frac{\eta\mu(180^\circ - \theta)\sigma\phi(180^\circ + \theta)\eta\mu(-\theta)}{\sigma\phi(90^\circ + \theta)\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \theta)} = -\sigma\upsilon\nu\theta$$

(β) Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε τη

γωνία θ αν  $270^\circ < \theta < 360^\circ$  και 
$$\frac{\eta\mu(180^\circ - \theta)\sigma\phi(180^\circ + \theta)\eta\mu(-\theta)}{\sigma\phi(90^\circ + \theta)\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \theta)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

10. (α) Δύο χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου τέμνονται στο σημείο Σ.

Να αποδείξετε ότι:  $(\Sigma\text{Α})(\Sigma\text{Β}) = (\Sigma\Gamma)(\Sigma\Delta)$

(β) Στηριζόμενοι στο πιο πάνω αποτέλεσμα, να βρείτε την τιμή του χ στο σχήμα που ακολουθεί (Κ είναι το κέντρο του κύκλου του οποίου η ακτίνα είναι ίση με 5cm).



**ΜΕΡΟΣ Β΄:** Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄  
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της  $f(x)=ax^2+bx+c$ .

Να βρείτε:

α) το πρόσημο του  $a$

β) τις ρίζες της εξίσωσης  $ax^2+bx+c=0$

γ) τις τιμές των  $a$ ,  $b$  και  $c$

δ) τις τιμές του  $x$  για τις οποίες  $f(x)<0$

ε) το πεδίο ορισμού της  $f(x)$

στ) το πεδίο τιμών της  $f(x)$

ζ) το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης  $[f(x)]^3 = 125$

2. Δίνεται η εξίσωση  $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$ ,  $\lambda \neq 0$  με ρίζες  $x_1$  και  $x_2$ .

(α) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  η εξίσωση έχει:

(i) ρίζα τον αριθμό 2.

(ii) ρίζες αντίθετες.

(iii) ρίζες πραγματικές και άνισες.

(β) Να δείξετε ότι: (i)  $x_1 + x_2 + x_1x_2 - \lambda = \frac{2 + \lambda - \lambda^2}{\lambda}$

(ii) να λύσετε την ανίσωση:  $x_1 + x_2 + x_1x_2 - \lambda \leq 0$

3. (α) Να δείξετε ότι:  $\frac{(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)^2 - 1}{\sigma\phi\chi - \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi} = 2\varepsilon\phi^2\chi$

(β) (i) Να μετατρέψετε το κλάσμα  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή

(ii) Να βρείτε τις τιμές του  $\theta$ ,  $0^\circ < \theta < 360^\circ$ , για τις οποίες οι ευθείες

( $\varepsilon_1$ ):  $\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \chi + \sqrt{2} \cdot \psi = 4$  και ( $\varepsilon_2$ ):  $\chi + 2\psi = 1$  να είναι παράλληλες.

4. Δίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο Κ και μήκος ακτίνας  $\sqrt{5}$  cm. Φέρουμε τη διάμετρο ΑΒ και τη χορδή ΒΔ. Από το σημείο Ζ που βρίσκεται πάνω στη χορδή ΑΔ, φέρουμε τη ΖΕ κάθετη στη διάμετρο ΑΒ. Η προέκταση της ΕΖ προς το Ε συναντά τον κύκλο στο Ν ενώ προς το Ζ τον συναντά στο Η και την προέκταση της ΒΔ στο Γ όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα:

(α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ορθογώνιο ( $\Delta=90^\circ$ ).

(β) Να αποδείξετε ότι:  $(ΑΒ)(ΓΕ)=(ΑΔ)(ΒΓ)$ .

(γ) Αν  $ΓΔ=\sqrt{12}$  cm,  $ΒΓ=\sqrt{27}$  cm και  $ΓΗ=3$ cm να δείξετε ότι:

(i) το μήκος της ΒΔ ισούται με  $\sqrt{3}$  cm.

(ii) το μήκος της ΑΔ ισούται με  $\sqrt{17}$  cm.

(υπόδειξη: εφαρμόστε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΒ)

(iii) το μήκος της ΗΝ ισούται με 3cm.

(iv) ένα σημείο που απέχει  $\sqrt[3]{31}$  cm από το κέντρο του κύκλου βρίσκεται έξω από τον κύκλο

(υπόδειξη: συγκρίνετε την απόσταση του σημείου από το κέντρο του κύκλου με την ακτίνα του).

5. (α) Να δείξετε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση που σχηματίζεται με ρίζες  $\rho_1=\epsilon\phi\theta$  και  $\rho_2=\sigma\phi\theta$ ,  $0^\circ<\theta<90^\circ$ , είναι η:  $\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\chi^2-\chi+\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta=0$

(β) Για τους πραγματικούς αριθμούς  $\chi$  και  $\psi$  είναι γνωστό ότι  $1<\chi<3$  και  $4<\psi<6$ .

Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις: (i)  $\chi + \psi$  και (ii)  $\frac{\chi}{\psi}$

και στη συνέχεια (iii) να συγκρίνετε τους αριθμούς  $A = \chi^2 + 5$  και  $B = \psi^2 + 5$

.....  
ΤΕΛΟΣ

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2015**

**Μάθημα:** Μαθηματικά  
**Τάξη:** Α΄ Ενιαίου Λυκείου  
**Ημερομηνία:** 20 Μαΐου 2015

**Ώρα έναρξης:** 7.45 π.μ.  
**Διάρκεια:** 2. 30΄

- Οδηγίες:**
- (α) Να γράφετε με μελάνι μπλε ή μαύρο. Τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν με μολύβι.
  - (β) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
  - (γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
  - (δ) Τα σχήματα να μεταφέρονται στις κόλλες.
  - (ε) Το γραπτό αποτελείται από πέντε (5) σελίδες.

**ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Να μετατρέψετε, **χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής**, τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητό παρονομαστή:

α)  $\frac{3}{\sqrt{5}}$

β)  $\frac{7}{\sqrt{6}-2}$

2. Στο μάθημα των Φυσιογνωστικών ένας μαθητής της Α΄ Λυκείου πήρε τους πιο κάτω βαθμούς στις τελικές εξετάσεις με την αντίστοιχη βαρύτητα:

| Φυσιογνωστικά      |        |        |          |
|--------------------|--------|--------|----------|
| Μάθημα             | Φυσική | Χημεία | Βιολογία |
| Βαθμός (από το 20) | 16     | 18     | 20       |
| Βαρύτητα           | 50%    | 25%    | 25%      |

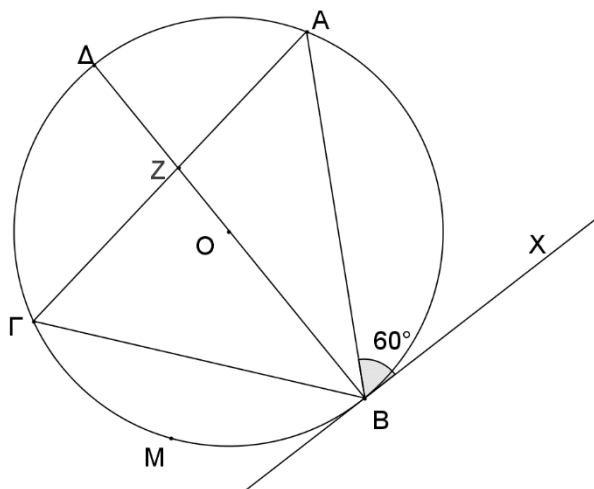
Να υπολογίσετε τον τελικό βαθμό του μαθητή στο μάθημα των Φυσιογνωστικών.

3. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων  $\mu$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε το πιο κάτω σύστημα να έχει άπειρες λύσεις:

$$\left. \begin{array}{l} \mu\chi + 3\psi = \lambda - 1 \\ (\mu - 2)\chi + 2\psi = -4 \end{array} \right\}$$

4. Αν  $3 < x < 4$  και  $-8 < \psi < -2$ , να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:  
 α)  $x + \psi$   
 β)  $x \cdot \psi$

5. Στο πιο κάτω σχήμα η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Ο, R) και η ΒΧ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Β. Αν η γωνία  $\hat{XBA} = 60^\circ$  και το τόξο  $\widehat{BM\Gamma} = 104^\circ$ , να βρείτε τις γωνίες των τριγώνων ΑΒΓ και ΒΓΖ.



6. Αν  $\sigmaτεμ\theta = -\frac{5}{4}$  και  $180^\circ < \theta < 270^\circ$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{12\sigma\phi\theta + 10\sigma\upsilon\nu\theta}{3\epsilon\phi\theta}$$

7. Αν το σύστημα: 
$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 12 \\ 7x - 5y = -1 \\ (\lambda - 3)x + (\lambda^2 - \lambda)y = -4 \end{array} \right\}$$
 είναι συμβιβαστό, να βρείτε την αριθμητική τιμή του  $\lambda$ .

8. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

α) Να υπολογίσετε το μέτρο των διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $2\vec{\beta} + 3\vec{a}$

β) Αν το διάνυσμα  $\vec{\delta} = \begin{pmatrix} \chi - 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  είναι παράλληλο με το διάνυσμα  $\vec{\gamma}$ , να υπολογίσετε την τιμή του  $\chi$ .

9. Από σημείο  $\Sigma$  εκτός του κύκλου (K,3cm) φέρουμε την εφαπτομένη  $\Sigma A$  του κύκλου (A είναι το σημείο επαφής) και την τέμνουσα  $\Sigma B\Gamma$  (B,Γ σημεία του κύκλου), που περνά από το κέντρο K του κύκλου.

α) Να δείξετε ότι  $(\Sigma A)^2 = (\Sigma B)(\Sigma \Gamma)$

β) Αν  $\Sigma A = 2\sqrt{10}cm$ , να υπολογίσετε το μήκος του  $\Sigma K$ .

10. Δίνεται η δευτεροβάθμια εξίσωση  $x^2 + 2\eta\mu\theta \cdot x - \sigma\nu\nu^2\theta = 0$ ,  $\theta \in (0,90^\circ)$ .

α) Να δείξετε ότι έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Να δείξετε ότι  $x_1^2 + x_2^2 = 2(1 + \eta\mu^2\theta)$ , όπου  $x_1$  και  $x_2$  οι ρίζες της εξίσωσης.

**ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.**  
**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{\chi(2\chi^2 - 3\chi + 1) \cdot (\chi - 3)^2}{(\chi^2 - 1) \cdot (-\chi + 4)} \leq 0$

2. Δίνεται η εξίσωση  $\chi^2 + (2\lambda + 1)\chi + \lambda^2 - 3 = 0$  με ρίζες  $\chi_1, \chi_2$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε η εξίσωση να έχει:

α) ρίζες πραγματικές και ίσες

β) ρίζες αντίθετες.

γ) ρίζες αντίστροφες.

δ) ρίζα τον αριθμό  $-1$

ε) ρίζες  $\chi_1, \chi_2$  που ικανοποιούν τη σχέση  $3\chi_1\chi_2^2 + 3\chi_1^2\chi_2 < 0$

3. Αν  $A = \frac{\sigma\upsilon\nu(270^\circ + \alpha) \cdot \eta\mu(360^\circ + \alpha) \cdot \epsilon\phi(90^\circ + \alpha)}{\tau\epsilon\mu(\alpha - 360^\circ) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \alpha)}$  και

$$B = (\eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha)^2 + 4\eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha, \quad \text{να αποδείξετε ότι: } \frac{A^2}{B} = \sigma\tau\epsilon\mu^2\alpha - 1$$

4. Δίνεται η γραφική παράσταση της  $f(x) = ax^2 + bx + c$

Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

α) το πεδίο τιμών της  $f(x)$

β) το πεδίο ορισμού της  $f(x)$

γ) το πρόσημο του  $a$  και της διακρίνουσας

δ) τις λύσεις της εξίσωσης  $f(x) = 0$

ε) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και την τιμή του  $\gamma$

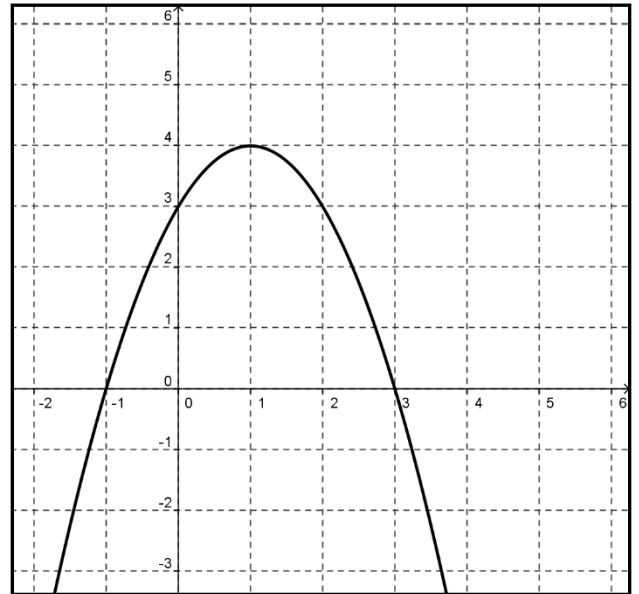
στ) το είδος του ακρότατου (μέγιστο ή ελάχιστο) και τις συντεταγμένες του.

ζ) τις τιμές των  $a, b$  και  $\gamma$ .

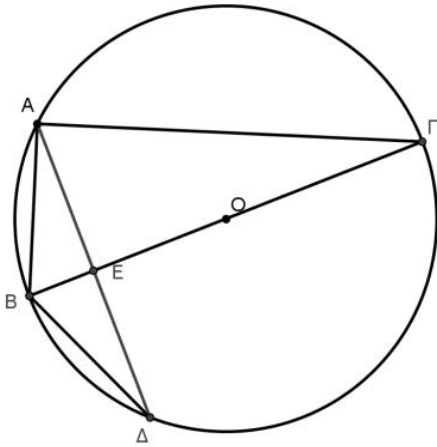
η) τις λύσεις της ανίσωσης  $f(x) \geq 0$

θ) την τιμή  $f(2)$  και το πρόσημο  $f(-50)$

ι) την εξίσωση της παραβολής στη μορφή  $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda$



5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος  $(O, \rho)$  με  $B\Gamma$  διάμετρο και  $A\Delta \perp B\Gamma$ . Να δείξετε ότι:
- α) τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $BE\Delta$  είναι όμοια
  - β) η  $B\Gamma$  είναι διχοτόμος της  $A\hat{B}\Delta$ ,
  - γ)  $(\Delta B)^2 = 2\rho \cdot (BE)$



**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2015**

**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** ΠΕΜΠΤΗ, 21/05/2015

**ΧΡΟΝΟΣ:** 2 ΩΡΕΣ ΚΑΙ 30 ΛΕΠΤΑ

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.
- Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.
- Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

**ΜΕΡΟΣ Α΄:**

- Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να κάνετε τις πράξεις χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

α)  $\sqrt{7 - \sqrt{32 + \sqrt{19 - \sqrt{9}}}}$

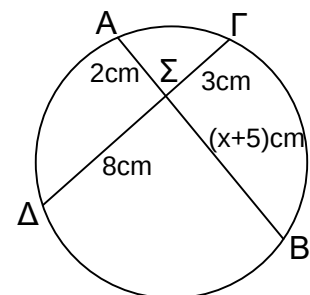
β)  $(\sqrt{5} - 3) \cdot (\sqrt{5} + 3)$

2. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -9 \\ -10 \end{pmatrix}$ . Να υπολογίσετε:

α) τις συντεταγμένες του διανύσματος  $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

β) το μέτρο του διανύσματος  $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ .

3. Να υπολογίσετε την τιμή του  $x$  στο διπλανό σχήμα



4. Να λύσετε την ανίσωση  $2x^2 + 5x - 3 < 0$



5. Αν  $\varepsilon\phi\theta = \frac{4}{3}$  και  $180^\circ < \theta < 270^\circ$ , να υπολογίσετε

α) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:  $\sigma\phi\theta$ ,  $\eta\mu\theta$  και  $\sigma\upsilon\nu\theta$

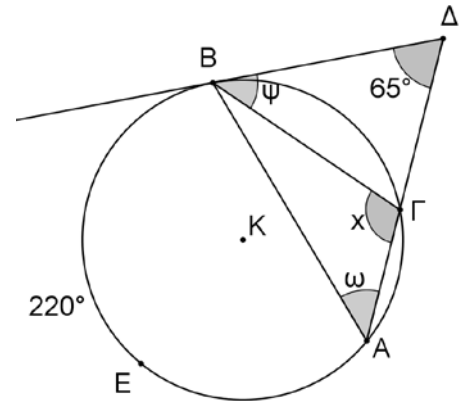
β) την τιμή της παράστασης  $A = 25 \cdot \eta\mu(180^\circ + \theta) \cdot \eta\mu(90^\circ - \theta)$

6. Στο διπλανό σχήμα η  $\Delta B$  είναι εφαπτομένη του

κύκλου στο σημείο B. Αν  $\widehat{B\Delta\Gamma} = 65^\circ$  και

$\widehat{BEA} = 220^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες  $\chi$ ,  $\psi$  και  $\omega$ .

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



7. Την περασμένη βδομάδα οι ψηλότερες θερμοκρασίες που καταμετρήθηκαν στη Λευκωσία ήταν οι ακόλουθες: 28, 27, 28, 30, 29, 29, 32

α) Να βρείτε τη μέση τιμή ( $\bar{x}$ ) των θερμοκρασιών

β) Να δείξετε ότι η τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών, με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων είναι  $s = 1,51$

γ) Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβλητότητας CV με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

8. Να αποδείξετε την ταυτότητα  $\frac{\sigma\tau\epsilon\mu\chi - \eta\mu\chi}{\tau\epsilon\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi} = \sigma\phi^3\chi$

9. Δίνεται η παραβολή  $f(x) = x^2 - (\kappa - \lambda + 2)x + \kappa^2 + 2\lambda + 2$ ,  $\kappa > 0$ ,  $\lambda > 0$ . Να βρείτε τις τιμές των  $\kappa$  και  $\lambda$  αν η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία  $x = 0$  και ελάχιστη τιμή 9.

10. Αν το σύστημα  $\begin{cases} 5x - 2y = -15 \\ 2x + 3y = 13 \\ \alpha x + \beta y = 5 \end{cases}$  είναι συμβιβαστό, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της

παράστασης  $A = \alpha^2 + 25\beta^2 - 10\alpha\beta - 25$ .

---

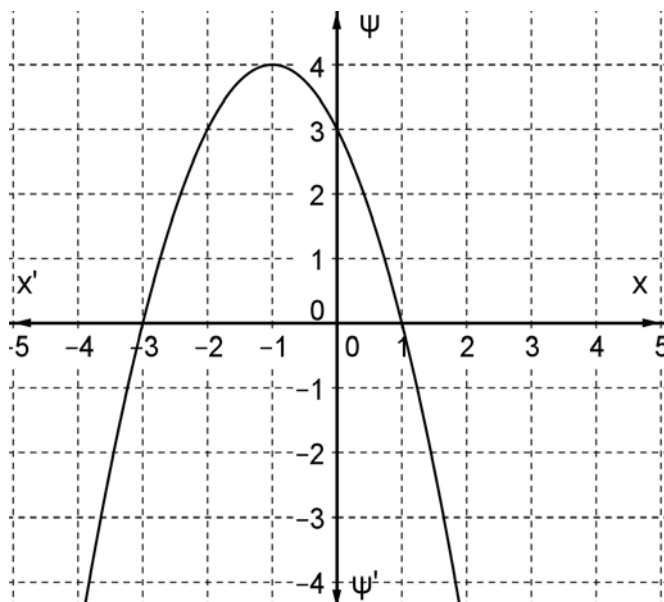
**ΜΕΡΟΣ Β΄:**

- Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.
  - Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.
- 

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$ .

Να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού της  $f(x)$
- β) το πεδίο τιμών της  $f(x)$
- γ) το πρόσημο του  $a$
- δ) την τιμή του  $\gamma$
- ε) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας
- στ) τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής
- ζ) τις ρίζες της εξίσωσης  $ax^2 + bx + \gamma = 0$
- η) τις λύσεις της ανίσωσης  $f(x) \leq 0$
- θ) το πρόσημο του  $f(2015)$
- ι) την τιμή του  $\frac{\beta + \gamma}{\alpha}$



2. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{(x^2 + 4x + 3) \cdot (x^2 - 1)}{(2x - x^2) \cdot (x^2 + 3x + 10)} \geq 0$$

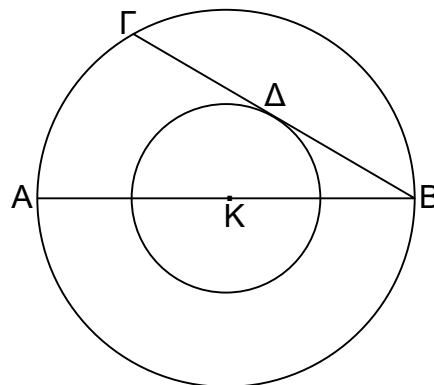
3. Δίνεται η εξίσωση  $(1 + \varepsilon\varphi^2\theta) \cdot x^2 - \varepsilon\varphi\theta \cdot x - 1 = 0$ ,  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ , με ρίζες  $x_1, x_2$ .

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες

β) Να δείξετε ότι  $x_1 + x_2 = \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

γ) Αν το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με  $-\frac{1}{4}$ , να βρείτε την τιμή της γωνίας  $\theta$ .

4. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι  $(K, R)$  και  $(K, 2R)$ . Η χορδή  $B\Gamma$  του κύκλου  $(K, 2R)$  εφάπτεται του κύκλου  $(K, R)$  στο σημείο  $\Delta$ . Αν η  $AB$  είναι διάμετρος του κύκλου  $(K, 2R)$ , α) να δείξετε ότι:
- $(BK)(A\Gamma) = (AB)(\Delta K)$
  - $A\Gamma = 2R$
- β) αν επιπλέον το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι  $100 \text{ cm}^2$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $B\Delta K$ .



5. Αν  $A = 2x - 1$  και  $B = 3\psi + 2$ ,
- να λύσετε την εξίσωση  $A^{\frac{3}{2}} + 3 = 30$ ,  $x \geq \frac{1}{2}$
  - Αν  $1 < A < 13$  και  $8 < B < 17$ ,
    - να αποδείξετε ότι  $1 < x < 7$  και  $2 < \psi < 5$
    - να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:  
 $x \cdot \psi$ ,  $x - 2\psi$  και  $\frac{x}{\psi}$
-

## ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 26/05/ 2015ΤΑΞΗ: Α΄ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 Ώρες

- ΟΔΗΓΙΕΣ: (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.  
(β) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας .  
(γ) Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Να υπολογίσετε:

(α) τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ (β) το μέτρο του διανύσματος  $2\vec{\alpha}$ .

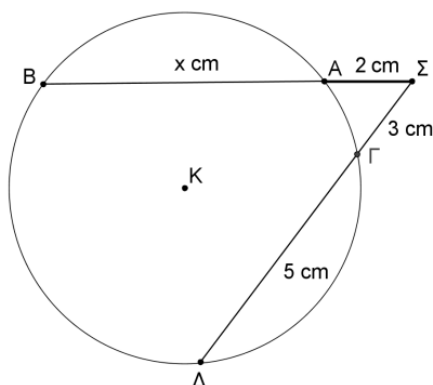
2. Να απλοποιήσετε την παράσταση:  $A = \sqrt{36 - x + \sqrt{x^2 + y - \sqrt{y^2}}}$ , αν  $x, y > 0$ .

3. Να λύσετε την ανίσωση:  $x^2 - 7x + 12 \leq 0$

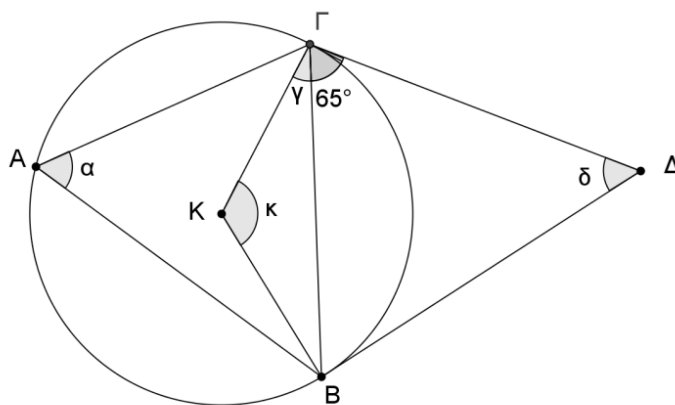
4. Για τον τελικό βαθμό, στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας, ένας φοιτητής βαθμολογείται με 20% για ένα σύνολο εβδομαδιαίων εργασιών, με 30% για την ενδιάμεση εξέταση και με 50% για την τελική εξέταση. Να βρείτε τον τελικό βαθμό ενός φοιτητή που βαθμολογήθηκε με 7 στις εβδομαδιαίες εργασίες, με 8 στην ενδιάμεση εξέταση και με 5 στην τελική εξέταση.

5. Δίνονται οι ευθείες  $\begin{cases} \lambda x + 2y = 8 \\ y = 8x + 3 - \kappa \end{cases}$ . Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών  $\kappa$  και  $\lambda$  οι ευθείες συμπίπτουν.

6. Από σημείο  $\Sigma$  εκτός κύκλου με κέντρο  $K$  και ακτίνα  $R$  φέρουμε τις τέμνουσες  $\Sigma AB$  και  $\Sigma \Gamma \Delta$ . Αν  $AB = x \text{ cm}$ ,  $\Sigma A = 2 \text{ cm}$ ,  $\Sigma \Gamma = 3 \text{ cm}$  και  $\Gamma \Delta = 5 \text{ cm}$ , να υπολογίσετε το μήκος του  $AB$ .



7. Να βρείτε τις πιθανές τιμές του πραγματικού αριθμού  $\kappa$ , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = (\kappa^2 - 4)x^2$  να είναι παραβολή που να:
- (α) περνά από το σημείο  $(-1, 12)$
- (β) παρουσιάζει ελάχιστο.
8. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος  $(K, R)$ . Τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι εγγεγραμμένο σε αυτόν, τα ευθύγραμμα τμήματα  $\Delta\Gamma$  και  $\Delta B$  είναι εφαπτόμενα τμήματά του στα σημεία  $\Gamma$  και  $B$  αντίστοιχα και η γωνία  $\hat{\Delta\Gamma B} = 65^\circ$ . Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\alpha, \kappa, \gamma$  και  $\delta$ .



9. Αν  $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$  και  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ , να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{5\sigma\upsilon\nu\theta - 10\eta\mu(180^\circ - \theta)}{3\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$$

10. Να δείξετε ότι το σύστημα

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \\ \frac{x}{\sin^2 \theta} + (2\epsilon \phi^2 \theta) y = 2 \end{cases}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

είναι συμβιβαστό.

---

**ΜΕΡΟΣ Β΄**

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

---

1. (α) Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda^2 - 3 = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  με ρίζες  $x_1, x_2$ .

Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$ :

(i) η πιο πάνω εξίσωση έχει ρίζες αντίθετες

(ii) ισχύει η σχέση:  $(3x_1 + 2)(3x_2 + 2) = 9\lambda^2 - 5$

(β) Να λύσετε την ανίσωση:  $\frac{(x+2)^2(1-x)}{x-3} \geq 0$

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$ . Χρησιμοποιώντας το σχήμα, να βρείτε:

(α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της  $f(x)$

(β) το πρόσημο του  $a$

(γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας

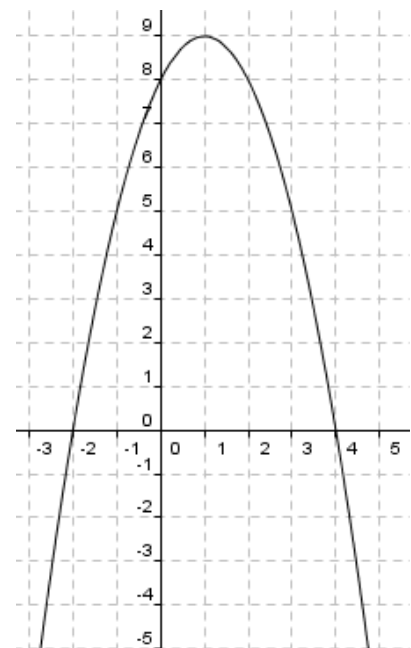
(δ) τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής

(ε) την αριθμητική τιμή της παράστασης:  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ ,

όπου  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  οι ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

(στ) τις λύσεις της ανίσωσης:  $f(x) \leq 0$

(ζ) τις τιμές των  $a, b$  και  $\gamma$



3. (α) Να δείξετε ότι:  $\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} - \sigma\varphi x = \sigma\tau\epsilon\mu x$

(β) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\theta$ , αν  $270^\circ < \theta < 360^\circ$  και  $\frac{\eta\mu(180^\circ - \theta)\varepsilon\varphi(90^\circ - \theta)\eta\mu(-\theta)}{\varepsilon\varphi(180^\circ - \theta)\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \theta)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

4. Σε κύκλο  $(K, R)$  φέρουμε τη διάμετρο  $AB$ , τη χορδή  $B\Gamma$ , την εφαπτομένη του στο σημείο  $A$  και τη διάμεσο  $KM$  του τριγώνου  $KB\Gamma$ . Αν η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο  $A$  και η προέκταση της  $KM$  τέμνονται στο σημείο  $T$ , να αποδείξετε ότι:

(α) τα τρίγωνα  $KBM$  και  $AB\Gamma$  είναι όμοια

(β)  $(KM)(AT) = (KA)(BM)$

5. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος  $x\text{ cm}$  και πλάτος  $y\text{ cm}$ , αντίστοιχα.

(α) Αν ισχύει ότι  $3 \leq x \leq 7$  και  $1 \leq y \leq 5$ :

(i) να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου

(ii) αν το μήκος  $x$  μειωθεί κατά  $1\text{ cm}$  και το πλάτος  $y$  τριπλασιαστεί, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών θα βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου

(β) Αν η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με μήκος  $x\text{ cm}$  και πλάτος  $y\text{ cm}$  είναι ίση με  $16\text{ cm}$ , να αποδείξετε ότι:

(i) το εμβαδόν  $E(x)$  του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση:  $E(x) = 8x - x^2$

(ii) από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερή περίμετρο  $16\text{ cm}$ , εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς  $4\text{ cm}$ .

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ–ΙΟΥΝΙΟΥ 2015****ΜΑΘΗΜΑ:** Μαθηματικά**ΤΑΞΗ:** Α΄ Λυκείου**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** 03 / 06 / 2015**ΧΡΟΝΟΣ:** 2 ώρες και 30 λεπτά**ΩΡΑ:** 7:45 – 10:15**ΒΑΘΜΟΣ**

Αριθμητικώς: .....

Ολογράφως: .....

Υπογραφή: .....

Ονοματεπώνυμο: ..... Τμήμα: ..... Αρ.: ....

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Να γράψετε τις απαντήσεις σας στο εξεταστικό δοκίμιο.
2. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
3. Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

**ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 9 ΣΕΛΙΔΕΣ****ΜΕΡΟΣ Α΄:** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1) Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητό παρονομαστή, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

α)  $\frac{5}{\sqrt{2}}$

β)  $\frac{3}{\sqrt{5}-1}$

- 2) Να λύσετε την ανίσωση:  $2x^2 + 5x - 3 < 0$



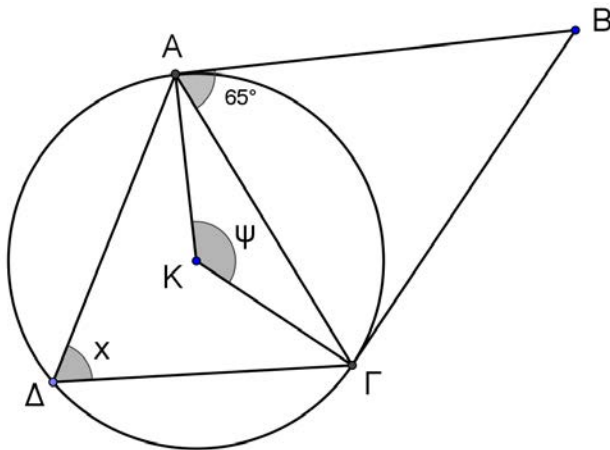
3) Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Να υπολογίσετε:

α) τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

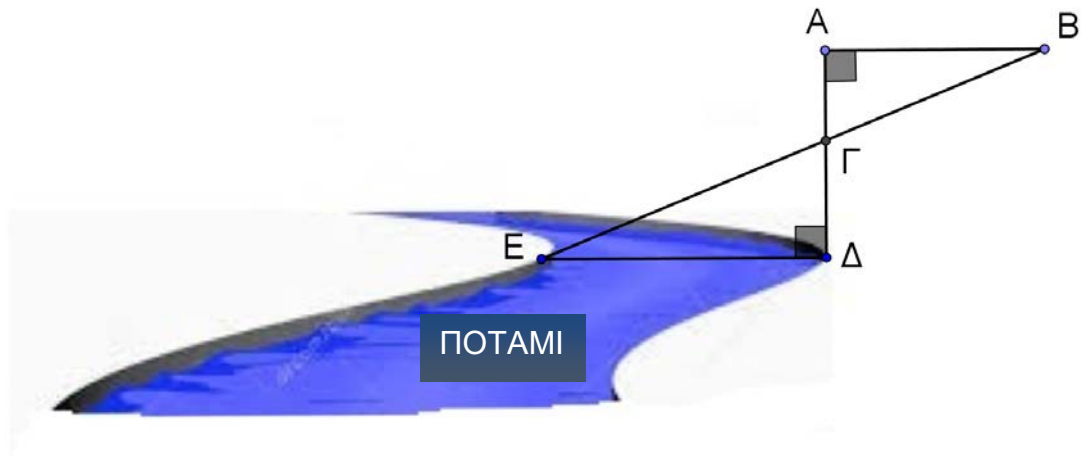
β) το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\beta}$ .

4) Ένας φοιτητής παρακολούθησε τέσσερα μαθήματα σε ένα εξάμηνο. Οι βαθμοί του στα τέσσερα μαθήματα ήταν 7, 8, 5 και 10 αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την τελική βαθμολογία του εξαμήνου, αν τα μαθήματα έχουν βαρύτητα ανάλογη με τις περιόδους διδασκαλίας του κάθε μαθήματος, που ήταν 4, 4, 2 και 5 αντίστοιχα.

5) Δίνεται κύκλος (K, R). Από εξωτερικό σημείο B του κύκλου φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα BA και BΓ. Αν η γωνία  $\angle B\hat{A}\Gamma = 65^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες  $x$ ,  $\psi$  και  $\angle AB\Gamma$ . Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



- 6) Για να υπολογίσουμε το πλάτος ενός ποταμού, για το κτίσιμο μιας γέφυρας, μετρήσαμε τις αποστάσεις  $ΑΓ=12$  m,  $ΑΔ=28$  m και  $ΑΒ=26$  m. Να υπολογίσετε το πλάτος του ποταμού  $ΕΔ$ , με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.



- 7) Αν  $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{12}{13}$  και  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
- $$Α = \frac{10\sigma\tau\epsilon\mu\alpha - 26\sigma\upsilon\eta\alpha + 13\eta\mu\alpha}{24\epsilon\varphi\alpha}$$

8) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει κλίση  $\lambda = \frac{1}{3}$  και περνά από το κοινό σημείο των ευθειών  $2x - y = 0$  και  $x + 2y = 5$ .

9) Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + \lambda x + \lambda + 1 = 0$ , με ρίζες  $x_1$  και  $x_2$ . Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις:

α)  $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$ , όπου  $S$  και  $P$  συμβολίζουν αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της παραπάνω εξίσωσης

β)  $(1 - x_1^2)(1 - x_2^2) = 4(\lambda + 1)$

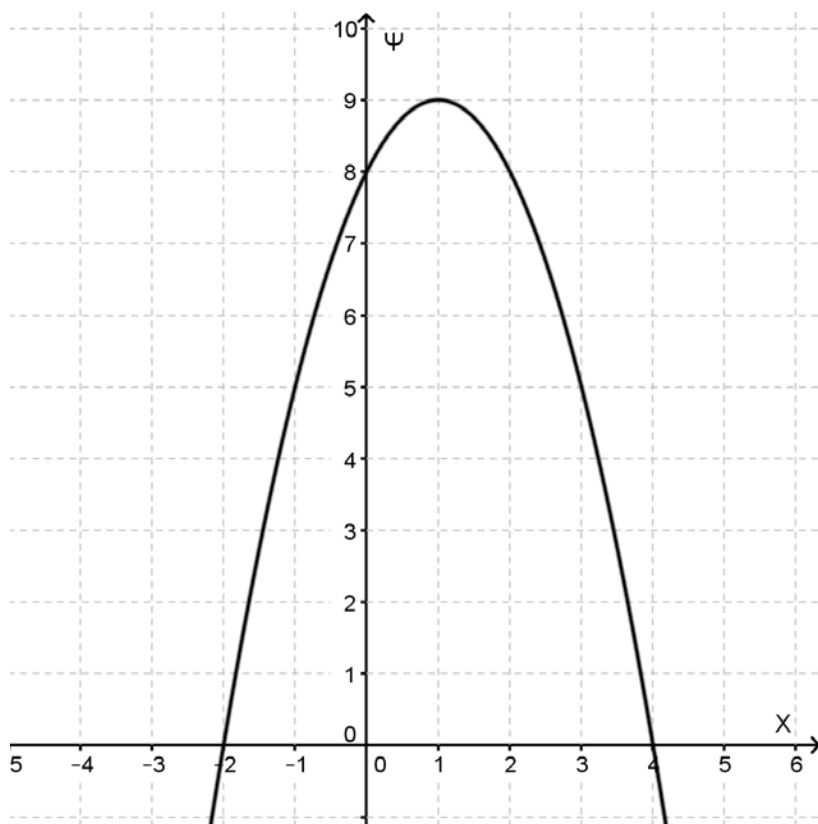
10) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{\varepsilon\phi x - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\eta\mu^3 x} = \frac{\tau\epsilon\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$$

**ΜΕΡΟΣ Β':** Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$ .  
Να βρείτε τα πιο κάτω:



- α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της  
β) το πρόσημο του  $a$  και της διακρίνουσας  $\Delta$   
γ) τις ρίζες της εξίσωσης  $ax^2 + bx + \gamma = 0$   
δ) το πρόσημο των:  $f\left(-\frac{13}{4}\right)$ ,  $f(0)$ ,  $f(3)$  και  $f(2015)$   
ε) την τιμή της παράστασης  $B = 2\frac{\gamma}{a} - \frac{\beta}{a}$

2) α) Να λύσετε την ανίσωση:  $\frac{(9-x^2)(x^2-5x+6)(x^2+4)}{x^2+2x} \geq 0$  (μον. 7)

β) Αν  $1 < \alpha < 2$  και  $3 < \beta < 4$  να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση  $\alpha - 2\beta$ . (μον. 3)

3) α) Αν ισχύει η σχέση:  $\frac{\varepsilon\phi(180^\circ + \omega)\sigma\upsilon\nu(90^\circ + \omega)\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega)\sigma\upsilon\nu(\omega - 270^\circ)}{\eta\mu(180^\circ - \omega)\eta\mu(270^\circ + \omega)\eta\mu(-\omega)} = -1,$   
με  $180^\circ < \omega < 270^\circ$ , να υπολογίσετε τη γωνία  $\omega$ . (μον. 7)

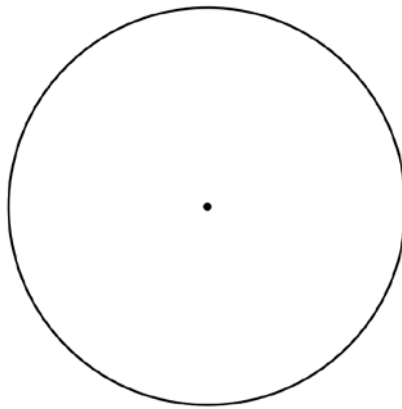
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση:  $x^2 - 2\varepsilon\phi\theta \cdot x + \tau\epsilon\mu^2\theta = 0$  δεν έχει πραγματικές ρίζες. (μον. 3)

4) Δίνεται κύκλος  $(K, R)$ . Να φέρετε διάμετρο  $B\Gamma$  και χορδή  $BA$ . Στο σημείο  $\Gamma$  η εφαπτομένη του κύκλου τέμνει την προέκταση της  $BA$  στο σημείο  $P$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $(A\Gamma)^2 = (AB)(AP)$  (μον. 5)

β) i) τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $B\Gamma P$  είναι όμοια (μον. 2)

ii)  $(AB)(BP) = 4R^2$  (μον. 3)



- 5) α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο  $\Pi=34 \text{ cm}$  και διαγώνιο  $\delta=13 \text{ cm}$ .
- i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι  $E=60 \text{ cm}^2$ . (μον. 5)
- ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (μον. 2)
- β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν  $26 \text{ cm}^2$  και περίμετρο  $20 \text{ cm}$ . (μον. 3)



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ : Α΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 28 / 05 / 2015

ΧΡΟΝΟΣ : 2,5 ώρες

ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ :

1. Να γράψετε μόνο με **μπλε** μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
3. Επιτρέπεται η χρήση **μη** προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
4. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **4 σελίδες**.
5. Πρέπει να λύσετε **όλες** τις ασκήσεις.

Μέρος Α΄

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

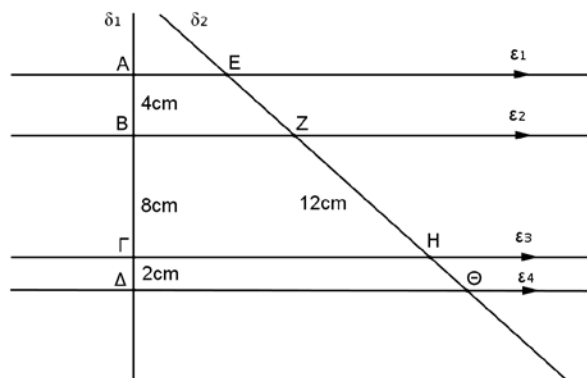
1. Να γράψετε την εξίσωση  $\mu x - 3 = \mu + 2x$  στη μορφή  $\alpha x = \beta$  και στη συνέχεια να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παραμέτρου  $\mu \in \mathbb{R}$ , ώστε η εξίσωση να είναι αδύνατη.

2. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Να υπολογίσετε:

(α) τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

(β) το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$ .

3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι  $AB = 4\text{ cm}$ ,  $B\Gamma = 8\text{ cm}$ ,  $\Gamma\Delta = 2\text{ cm}$ ,  $ZH = 12\text{ cm}$  και  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \parallel \varepsilon_4$ . Να υπολογίσετε τα μήκη των  $EZ$  και  $Z\Theta$ .



4. Να βρείτε την τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε το σύστημα 
$$\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 2x - y = -1 \\ 4x + \alpha y = -5 \end{cases}$$
 να είναι συμβιβαστό.

5. Ο πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των δέντρων που φύτεψαν κάποια παιδιά του σχολείου μας.

| Αριθμός δέντρων<br>$x_i$ | Αριθμός παιδιών<br>$f_i$ |
|--------------------------|--------------------------|
| 0                        | 8                        |
| 1                        | 6                        |
| 2                        | 20                       |
| 3                        | 10                       |
| 4                        | 6                        |

Να υπολογίσετε:

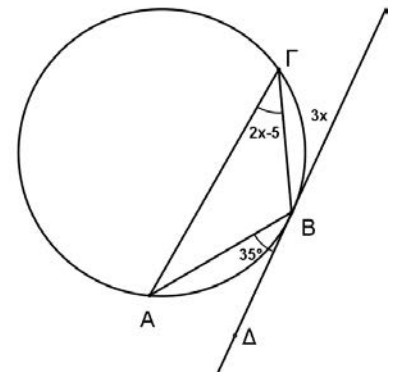
(α) τη μέση τιμή

(β) την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

6. Αν  $\eta\mu x = \frac{3}{5}$  και  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$B = \frac{5\sigma\upsilon\nu x + 3\sigma\phi x}{\frac{6}{5}\sigma\tau\epsilon\mu x}.$$

7. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο και  $B\Delta$  εφαπτομένη του κύκλου στο  $B$ . Αν  $\widehat{A\hat{B}\Delta} = 35^\circ$ ,  $\widehat{B\hat{\Gamma}} = (3x)^\circ$  και  $\widehat{A\hat{\Gamma}B} = (2x - 5)^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ , δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



8. Αν  $x_1$  και  $x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 - \sqrt{5}x + 2 + \sqrt{5} = 0$ , χωρίς να τη λύσετε:

(α) Να δείξετε ότι:  $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{1 - 2\sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}.$

(β) Να μετατρέψετε το κλάσμα του μέρους (α) σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή, δίνοντας την απάντησή σας στην πιο απλή μορφή.

9. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + (\kappa - 1)x + 5 - 2\lambda$ ,  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ .

(α) Για ποιες τιμές των  $\kappa$  και  $\lambda$  η συνάρτηση  $f(x)$  έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία  $x = -1$  και ελάχιστη τιμή το  $-4$ ;

(β) Αν  $\kappa = 3$  και  $\lambda = 4$  να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f(x)$ . Στο γράφημα να δίνονται με ευκρίνεια τα σημεία τομής της παραβολής με τους άξονες καθώς και η κορυφή της.

10. (α) Να λύσετε την ανίσωση  $3x^2 - 4x + 1 \leq 0$ .

(β) Αν  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$  είναι δύο λύσεις της πιο πάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $\frac{\mu + 2\nu}{3}$  είναι επίσης λύση της ανίσωσης.

---

### Μέρος Β'

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η παραβολή με τύπο  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ .

Να βρείτε:

(α) Το πεδίο τιμών της  $f(x)$ .

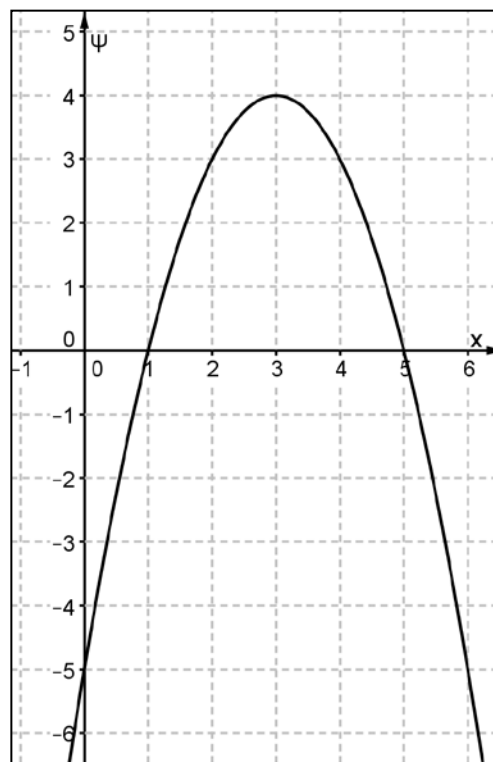
(β) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας.

(γ) Τις ρίζες της εξίσωσης  $ax^2 + bx + c = 0$ .

(δ) Τις λύσεις της ανίσωσης  $f(x) \leq 0$ .

(ε) Το πρόσημο της παράστασης  $a \cdot \Delta \cdot f(6)$ , όπου  $\Delta$  η διακρίνουσα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .  
(Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας).

(στ) Τις τιμές των  $a$ ,  $b$  και  $c$ .



2. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - 3x + 1 - \lambda^2 = 0$  (1) με παράμετρο  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

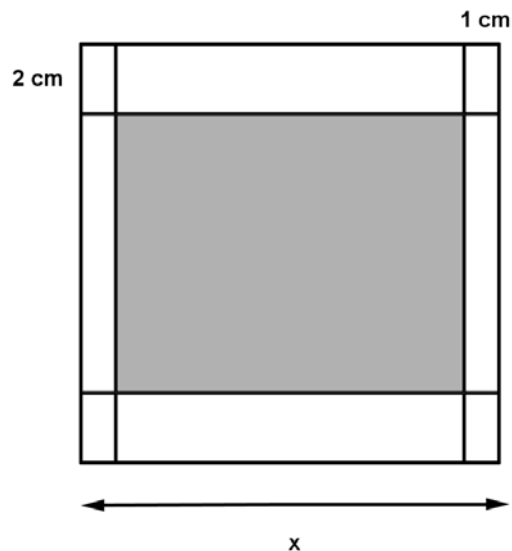
(α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του  $\lambda$ , η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

(β) Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε:

(i) Για ποια τιμή του  $\lambda$  η εξίσωση έχει αντίστροφες ρίζες.

(ii) Για ποιες τιμές του  $\lambda$  ισχύει η ανίσωση:  $\frac{\lambda + 2}{x_1 \cdot x_2} \leq 2$ .

3. Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς  $x\text{ cm}$ , στο οποίο η σκιασμένη περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια  $2\text{ cm}$  στο πάνω και στο κάτω μέρος της και  $1\text{ cm}$  δεξιά και αριστερά (όπως στο διπλανό σχήμα).



- (α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης εκφράζεται από τη σχέση:  $E = x^2 - 6x + 8$ .
- (β) Για την πλευρά  $x$  του χαρτονιού ισχύει ότι  $5 \leq x \leq 10$ .  
Αν το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης είναι το πολύ  $35\text{ cm}^2$ , να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά  $x$  του τετράγωνου χαρτονιού.

4. (α) Να αποδείξετε ότι:  $\frac{\sigma\phi\theta - \epsilon\phi\theta}{\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta} = \sigma\tau\epsilon\mu\theta - \tau\epsilon\mu\theta$ .

- (β) Να δείξετε ότι:  $\frac{2\eta\mu(180^\circ + \omega) + \sigma\phi(\omega - 270^\circ) \cdot \sigma\upsilon\nu(-\omega)}{3\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) \cdot \sigma\phi(360^\circ - \omega)} = \epsilon\phi\omega$ .

- (γ) Αν  $\epsilon\phi x = 1$ , να βρείτε το μέτρο της γωνίας  $x$  στο διάστημα  $180^\circ < x < 360^\circ$ .

- (δ) Αν  $\epsilon\phi\phi = \kappa - \sqrt{3}$  και  $\sigma\phi\phi = \kappa + \sqrt{3}$ , να βρείτε τις τιμές του  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

5. Δίνεται κύκλος με κέντρο  $K$  και διάμετρο  $B\Gamma$ . Από τυχαίο σημείο  $A$  του κύκλου φέρουμε το ύψος  $A\Delta$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Η προέκταση του ύψους τέμνει ξανά τον κύκλο στο σημείο  $E$ .

- (α) Να δείξετε ότι:  $(AB)^2 = (B\Gamma) \cdot (B\Delta)$ .

- (β) Να δείξετε ότι:

(i) το τρίγωνο  $ABE$  είναι ισοσκελές,

(ii) η  $B\Delta$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $ABE$ .

- (γ) Να υπολογίσετε το μήκος της  $B\Delta$ , αν  $A\Delta = 4\text{ cm}$  και  $\Gamma\Delta = 2,5\text{ cm}$ .

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2015**

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΤΑΞΗ: Α' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29/05/2015

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
1. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **4** σελίδες.
  2. Να γράφετε μόνο με **μπλε** μελάνι. (Τα σχήματα με μολύβι)
  3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
  4. Επιτρέπεται η χρήση **μη** προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
  5. Τα σχήματα του φυλλαδίου να μεταφέρονται στη θέση που λύεται η άσκηση.

**ΜΕΡΟΣ Α'**      **Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.**  
**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε 5 μονάδες.**

**A1.** Να σχηματίσετε εξίσωση δεύτερου βαθμού που να έχει ρίζες  $x_1 = 5$  και  $x_2 = -7$ .

**A2.** Να λύσετε την ανίσωση:  $x^2 - 4x + 4 \geq 0$

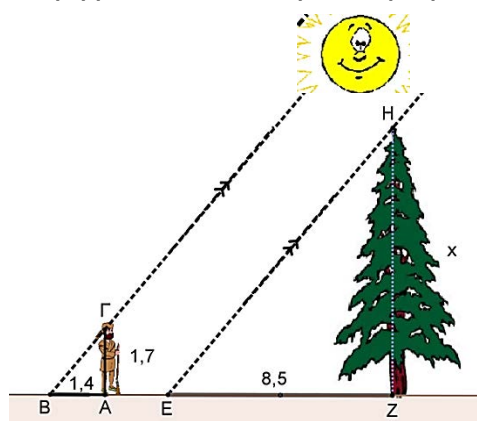
**A3.** Αν  $x_1$  και  $x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $2x^2 - 6x + 5 = 0$ , χωρίς να την λύσετε, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

**(α)**  $x_1 + x_2$

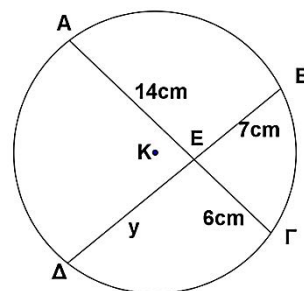
**(β)**  $x_1 \cdot x_2$

**(γ)**  $3x_1 + 3x_2 - 4x_1 \cdot x_2$

**A4.** Στο πιο κάτω σχήμα ένας κυνηγός, με ύψος 1,7 m, βρίσκεται κοντά σε ένα δέντρο. Η ώρα 10 το πρωί οι παράλληλες ακτίνες του ήλιου σχηματίζουν σκιά για τον άνθρωπο μήκους 1,4 m και για το δέντρο 8,5 m. Να υπολογίσετε το ύψος ZH του δέντρου, με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων, δικαιολογώντας την απάντησή σας.



- A5.** Δίνεται κύκλος με κέντρο το Κ. Αν  $AE = 14 \text{ cm}$ ,  $ΕΓ = 6 \text{ cm}$ ,  $BE = 7 \text{ cm}$  και  $ΕΔ = y \text{ cm}$  να βρείτε την τιμή του  $y$ .



- A6.** Σε μια βάρκα υπάρχουν 6 άτομα με μέση τιμή βάρους 85 κιλά. Ένα από τα άτομα αυτά πηδά στη θάλασσα και τότε η μέση τιμή του βάρους των υπολοίπων αυξάνεται κατά 3 κιλά. Να βρείτε το βάρος του ατόμου που πήδηξε στη θάλασσα.

- A7.** Δίνονται οι παραστάσεις:  $A = \sqrt[3]{5 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{5 + \sqrt{17}} - \sqrt{3}$  και  $B = 2 + \sqrt{3}$ .

Να δείξετε ότι:

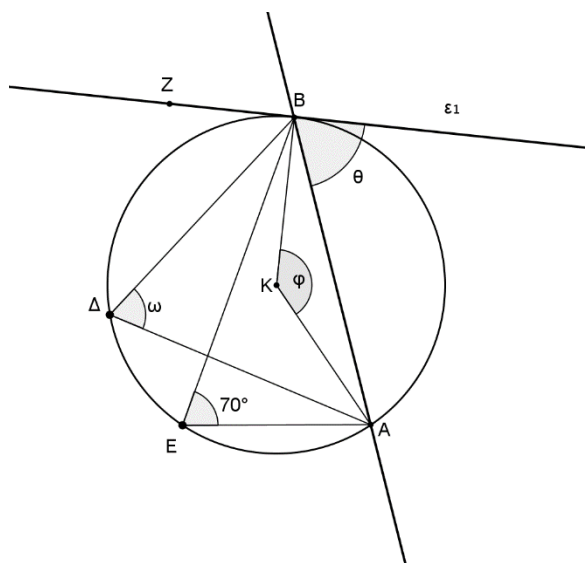
**(α)**  $A = 2 - \sqrt{3}$

**(β)**  $\frac{A}{B} = 7 - 4\sqrt{3}$

- A8.** Στο σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο Κ. Η ευθεία  $\epsilon_1$  είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β και  $\hat{BEA} = 70^\circ$ .

Να υπολογίσετε τις γωνίες:  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\angle KBZ$  και το τόξο ΒΔΑ.

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας)



- A9.** Να αποδείξετε ότι:  $\frac{\sigma\tau\epsilon\mu\chi - \eta\mu\chi}{\tau\epsilon\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi} = \sigma\varphi^3\chi$

- A10.** Να βρείτε τις τιμές των  $\kappa$  και  $\lambda$  ώστε το σύστημα: 
$$\begin{cases} y = (\kappa + 2\lambda)x + 13 \\ y = 5x + \kappa^2 + 3\lambda^2 \end{cases}$$
 να έχει άπειρες λύσεις.

**ΜΕΡΟΣ Β΄**

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.  
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

**B1.** Το σύστημα 
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 2y = 7 \\ \sin\theta \cdot x - 2y = -12 \end{cases}$$
 είναι συμβιβαστό.

(α) Να υπολογίσετε την τιμή του  $\sin\theta$ .

(β) Αν  $\sin\theta = -\frac{4}{5}$  και  $180^\circ < \theta < 270^\circ$ , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{10\eta\mu\theta + 8\tau\epsilon\mu\theta + 2031}{3\sigma\phi\theta - 4\epsilon\phi\theta}.$$

**B2.** Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$ .

Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε:

(α) το πεδίο ορισμού της  $f$

(β) το πεδίο τιμών της  $f$

(γ) το πρόσημο του  $a$

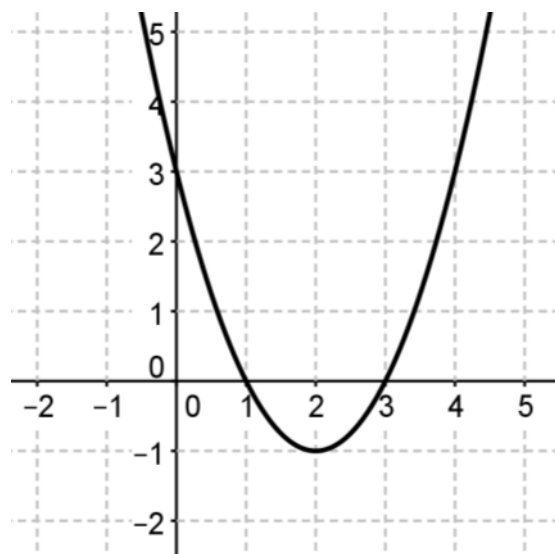
(δ) το πρόσημο της διακρίνουσας  $\Delta$

(ε) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας

(στ) τις ρίζες  $x_1$  και  $x_2$  της εξίσωσης  $f(x) = 0$

(ζ) τις τιμές των  $a$ ,  $\beta$  και  $\gamma$

(η) τη λύση της ανίσωσης  $f(x) \leq 0$ .



**B3. (α)** Δίνεται το τριώνυμο  $f(x) = x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda + 3$ . Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  το  $f(x)$  έχει:

(i) Ρίζες αντίστροφες

(ii) Σταθερό πρόσημο για κάθε τιμή του  $x \in \mathbb{R}$ .

(β) Να λύσετε την ανίσωση: 
$$\frac{(3x^2 + 5x - 2)(x^2 + x)}{(3 - x)(5 - x)^2(x^2 - 5x + 7)} \geq 0$$

**B4. (α)** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \eta\mu(180^\circ - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(270^\circ - \omega) + \epsilon\phi(270^\circ - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(-\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ + \omega)$$

**(β)** Αν  $A = -1$  και ισχύει η σχέση:  $\frac{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) \cdot \eta\mu(90^\circ + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(360^\circ - \omega)}{\sigma\upsilon\nu(-\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) \cdot \epsilon\phi(270^\circ + \omega)} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + A$

να υπολογίσετε τη γωνία  $\omega$  αν  $0^\circ < \omega < 90^\circ$ .

**B5.** Η AB είναι διάμετρος κύκλου και η ΑΓ χορδή του. Από τυχαίο σημείο Δ της ΑΓ φέρουμε την ΔΕ κάθετη στην AB (Ε σημείο της AB). Αν η εφαπτομένη του κύκλου στο Α τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο σημείο Ζ, να δείξετε ότι:

**(α)** τα  $\hat{A}Z\Gamma$ ,  $\hat{B}A\Gamma$  είναι όμοια.

**(β)**  $(AE)(BZ) = (AD)(AZ)$

**Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ**

.....  
**ΟΛΥΜΠΙΑ ΙΩΑΝΝΟΥ**



**B4. (α)** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \eta\mu(180^\circ - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(270^\circ - \omega) + \epsilon\phi(270^\circ - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(-\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ + \omega)$$

**(β)** Αν  $A = -1$  και ισχύει η σχέση: 
$$\frac{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) \cdot \eta\mu(90^\circ + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(360^\circ - \omega)}{\sigma\upsilon\nu(-\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) \cdot \epsilon\phi(270^\circ + \omega)} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + A$$

να υπολογίσετε τη γωνία  $\omega$  αν  $0^\circ < \omega < 90^\circ$ .

**B5.** Η  $AB$  είναι διάμετρος κύκλου και η  $A\Gamma$  χορδή του. Από τυχαίο σημείο  $\Delta$  της  $A\Gamma$  φέρουμε την  $\Delta E$  κάθετη στην  $AB$  ( $E$  σημείο της  $AB$ ). Αν η εφαπτομένη του κύκλου στο  $A$  τέμνει την προέκταση της  $B\Gamma$  στο σημείο  $Z$ , να δείξετε ότι:

**(α)** τα  $\hat{A}Z\Gamma$ ,  $\hat{B}A\Gamma$  είναι όμοια.

**(β)**  $(AE)(BZ) = (AD)(AZ)$

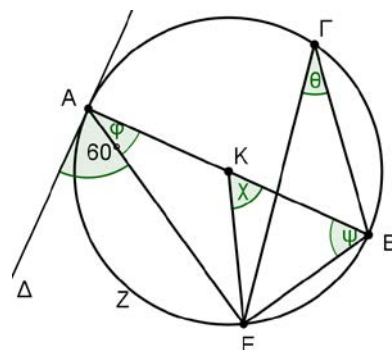
**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2015****ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****ΤΑΞΗ : Α΄****Ημερομηνία: 21 / 5 / 2015****Χρόνος : 2,5 ώρες****ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- Επιτρέπεται η χρήση ΜΗ προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

**ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**1. Να λύσετε την ανίσωση:  $(x-3)(2x+1) < 0$ .2. Να λύσετε το σύστημα: 
$$\begin{cases} x+y=-1 \\ y+z=3 \\ z+x=4 \end{cases}$$
.3. Δίνονται τα διανύσματα:  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ .α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ .4. Αν  $\alpha > \beta > 0$  να αποδείξετε την ισότητα: 
$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$$
.

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο K και διάμετρο AB. Η ΑΔ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Α και  $\angle A\hat{E} = 60^\circ$ . Να υπολογίσετε το τόξο  $\widehat{AZE}$  και τις γωνίες  $\chi$ ,  $\psi$ ,  $\phi$  και  $\theta$ .

(να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)



6. Ο πιο κάτω πίνακας δίνει τις τιμές πώλησης ενός προϊόντος σε 10 διαφορετικά καταστήματα. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής των δεδομένων του πίνακα.

| $X_i$<br>(τιμές πώλησης) | $f_i$ |
|--------------------------|-------|
| 8                        | 3     |
| 10                       | 2     |
| 12                       | 3     |
| 15                       | 2     |

7. Για ποια τιμή του  $\kappa$  το σύστημα  $\begin{cases} y = (\kappa^2 - 3\kappa)x + \kappa^2 \\ -36x + 2y - 18 = 0 \end{cases}$  έχει άπειρες λύσεις.
8. Αν  $-2 < \alpha < -1$ ,  $2 < \beta < 3$ , να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

i)  $2\alpha - 3\beta$       ii)  $\beta^2 - 1$       iii)  $\frac{\alpha}{\beta}$ .

9. Να υπολογίσετε τη γωνιά  $\theta$ , όπου  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ , αν ισχύει η ισότητα:

$$\frac{\eta\mu(180^\circ + \theta) \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \theta) \epsilon\phi^2(360^\circ + \theta)}{\sigma\phi(180^\circ - \theta) \epsilon\phi(-\theta) \eta\mu(\theta - 180^\circ)} + \sigma\tau\epsilon\mu(90^\circ + \theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από σημείο Μ της ΒΓ φέρνουμε παράλληλη προς τη διάμεσο ΑΔ που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Ν, Ρ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α)  $(MN)(B\Delta) = (A\Delta)(MB)$

β)  $(MP)(\Gamma\Delta) = (A\Delta)(M\Gamma)$

γ) Αν  $A\Delta = 7\text{cm}$ , να δείξετε ότι  $MN + MP = 14\text{cm}$ .

**ΜΕΡΟΣ Β':** Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Το διπλανό σχήμα παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  ( $\alpha \neq 0$ ). Να βρείτε:

α) το Π.Ο και Π.Τ. της συνάρτησης  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

β) τον άξονα συμμετρίας της

γ) τις ρίζες της εξίσωσης  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

δ) το πρόσημο της παράστασης  $\beta^2 - 4\alpha\gamma$

ε) τις τιμές του  $x$  για τις οποίες  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$

στ) τις τιμές των  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ .

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)



2. α) Αν  $x_1$  και  $x_2$  είναι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 - 2\lambda x + 2\lambda^2 - 1 = 0$

i) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές.

ii) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες  $\rho_1 = \frac{1}{2x_1}$  και  $\rho_2 = \frac{1}{2x_2}$ .

β) Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά και το μήκος της διακέντρου τους είναι 6cm. Αν το άθροισμα των τετραγώνων των ακτίνων των δύο κύκλων είναι 20cm, να βρείτε τα μήκη τους.

3. α) Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση  $\lambda^2 x - 3 = 3x - 2\lambda x + \lambda$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

β) Να λύσετε την ανίσωση:  $\frac{3x^2 - 3x + 4}{(x+1)^2} \leq 1$ .

4. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $\frac{1 - \sigma\phi x}{1 + \sigma\phi^2 x} + \frac{1 + \epsilon\phi x}{1 + \epsilon\phi^2 x} = 1$ .

β) Δίνεται  $A = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{1 - \sin(3\pi - x)}$  και  $B = \frac{1 - \sin(x - 2\pi)}{\eta\mu(\pi + x)}$ , να υπολογίσετε τις τιμές των  $A - B$  και  $\frac{A}{B}$ .

5. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο με διάμετρο  $AB$ . Στο σημείο  $A$  φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου. Η διχοτόμος της γωνιάς  $B$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ , τον κύκλο στο  $\Sigma$  και την εφαπτομένη στο  $E$ . Να δείξετε ότι:
- α) Η  $AS$  είναι διχοτόμος της  $\angle E\Delta\Delta$
  - β)  $(EA)^2 = (E\Sigma)(EB)$
  - γ)  $(\Gamma B)(\Sigma E) = (\Gamma\Delta)(\Sigma A)$  .

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΜΑΪΟΥ/ΙΟΥΝΙΟΥ 2015**

Τάξη: Α΄ Λυκείου  
Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: 29 / 05 / 15  
Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες

Ονοματεπώνυμο: .....

Τμήμα: .....

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- (α) Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι.
- (β) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- (γ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- (δ) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **4** σελίδες.

**ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Να λύσετε την ανίσωση  $2x^2 + 7x - 4 \geq 0$ .
2. Ο πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των ασκήσεων που έλυσαν οι μαθητές ενός τμήματος σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών. Για τις παρατηρήσεις αυτές, να υπολογίσετε:

| Αριθμός<br>Ασκήσεων ( $x_i$ ) | Αριθμός<br>Μαθητών( $f_i$ ) |
|-------------------------------|-----------------------------|
| 0                             | 4                           |
| 1                             | 8                           |
| 2                             | 9                           |
| 3                             | 5                           |
| 4                             | 2                           |
| 5                             | 1                           |
| 6                             | 1                           |

- α) τη μέση τιμή
- β) την τυπική απόκλιση

3. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Να υπολογίσετε:

- α) τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ , και
- β) το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$ .

4. Να γίνουν οι πράξεις  $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} - \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$

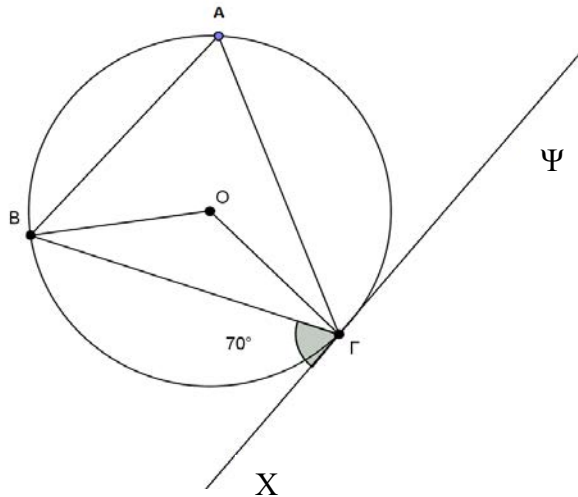
5. Αν  $1 < x < 3$  και  $4 < \psi < 7$  να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι παραστάσεις:

α)  $2x + 3\psi$

β)  $\frac{x}{\psi}$

γ)  $x - \psi^2$

6. Στο πιο κάτω σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου, η ευθεία ΧΨ είναι εφαπτομένη στο σημείο Γ και  $\widehat{B\Gamma X} = 70^\circ$ . Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ ,  $\widehat{B\hat{O}\Gamma}$ ,  $\widehat{O\hat{B}\Gamma}$ ,  $\widehat{O\hat{\Gamma}\Psi}$  και το μήκος του τόξου  $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ , δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



7. Να απλοποιήσετε το κλάσμα  $\frac{3x^3 - 9x^2 + 6x}{2x^2 - 3x + 1}$ .

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ όπου η γωνία Β είναι οξεία και διπλάσια της Γ. Το Δ είναι τυχαίο σημείο της ΒΓ και στην προέκταση της ΑΒ παίρνουμε σημείο Θ, τέτοιο ώστε  $\Theta B = B\Delta$ . Αν η ΘΔ τέμνει την ΑΓ στο Ε, να δείξετε ότι  $(AB)(A\Theta) = (A\Gamma)(AE)$

9. Να διερευνήσετε και να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\lambda x - 3\lambda\psi = 2\lambda + 3$$

$$x + \lambda\psi = 1$$

10. Αν  $\frac{\eta\mu^2(180^\circ - x) + \sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(360^\circ - x) + 2\eta\mu(90^\circ + x) \cdot \sigma\upsilon\nu(-x)}{\eta\mu(180^\circ + x) \cdot \sigma\phi(180^\circ + x)} = -2$ , να υπολογίσετε την

τιμή της γωνίας  $x$  δεδομένου ότι  $0^\circ < x < 90^\circ$ .

**ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Να βρεθεί το  $\lambda$ ,  $\lambda \in R$  έτσι ώστε η εξίσωση  $x^2 - (\lambda - 3)x + 2 - \lambda = 0$

α) να έχει ρίζες πραγματικές και άνισες

β) το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της να ισούται με 10

2. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ .

**Να βρείτε :**

1) Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της  $f(x)$ .

2) Το πρόσημο του  $a$  και της διακρίνουσας της  $f(x)$ , δικαιολογώντας την απάντησή σας.

3) Τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$

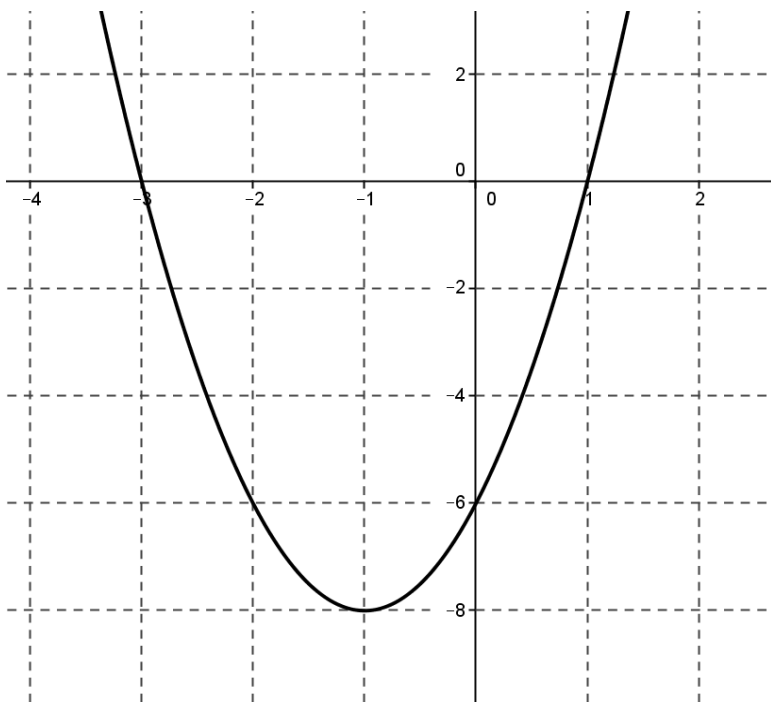
4) Την τιμή του  $\gamma$

5) Τον άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής της καμπύλης

6) Την τιμή του  $a$  και του  $b$

7) Το πρόσημο των  $f(4)$  και  $f(-2)$

8) Για ποιες τιμές του  $x$  ισχύει  $f(x) < 0$



3. α) Να αποδειχθεί ότι :  $\frac{\epsilon\phi\theta}{\tau\epsilon\mu\theta - 1} - \frac{\eta\mu\theta}{1 + \sigma\upsilon\eta\theta} = 2\sigma\phi\theta$

β) Αν  $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$  και  $90^\circ < \omega < 180^\circ$  να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{26\sigma\upsilon\eta\omega + 36\epsilon\phi\omega}{10\sigma\tau\epsilon\mu\omega}.$$



4. α) Να λύσετε την ανίσωση 
$$\frac{(4-x)(x^2-2x-8)}{(x^2+6x+5)(x^2+3x+5)} \geq 0$$

β) Αν  $x_1, x_2$  οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 - 3x + 5 = 0$ , να σχηματίσετε εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού με

$$\text{ρίζες } \rho_1 = \frac{x_1 + 1}{x_1} \text{ και } \rho_2 = \frac{x_2 + 1}{x_2}.$$

5. Από σημείο Σ εκτός κύκλου, φέρουμε τυχαία τέμνουσα ΣΑΒ και την εφαπτομένη ΣΓ του κύκλου (όπου Γ το σημείο επαφής στο μεγάλο τόξο ΑΒ). Αν Μ είναι το μέσον του μικρού τόξου ΑΒ και Δ το σημείο τομής του ευθυγράμμου τμήματος ΓΜ με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, να δείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΑΓΜ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία των πλευρών τους

β)  $(\Gamma B)(MB) = (\Gamma M)(B\Delta)$

γ)  $(\Sigma \Gamma)^2 = (\Sigma A)(\Sigma B)$

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2015**

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΤΑΞΗ: Α΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 9/6/2015  
ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ώρες

Βαθμός: .....

Ολογράφως: .....

Υπογραφή: .....

ΌΝΟΜΑ: .....ΤΜΗΜΑ: .....ΑΡ.: .....

**Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 11 σελίδες.**

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Να γράψετε τις απαντήσεις σας πάνω στο εξεταστικό δοκίμιο.
2. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
3. Να γράψετε με μελάνι μαύρο ή μπλε (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού.

**ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.  
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Δίνονται τα διανύσματα:

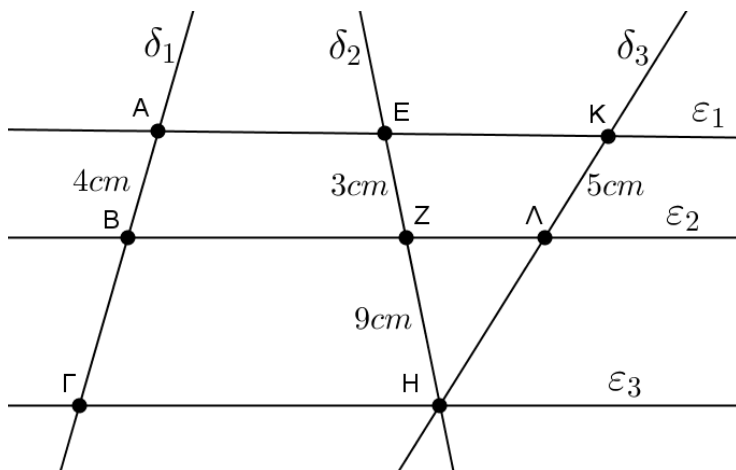
$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Να υπολογίσετε:

- α) τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ , και  
β) το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\alpha}$ .

2. Να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες τις  $\chi_1 = 2$  και  $\chi_2 = -4$ .

3. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται  $AB = 4\text{cm}$ ,  $EZ = 3\text{cm}$ ,  $ZH = 9\text{cm}$ ,  $KL = 5\text{cm}$  και  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ . Να υπολογίσετε τα μήκη  $B\Gamma$  και  $\Lambda\text{H}$ .



4. Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

$$\alpha) \frac{2}{\sqrt{6}} =$$

$$\beta) \frac{8}{5-\sqrt{3}} =$$

5. Αν  $\eta\mu\theta = -\frac{3}{5}$  και  $180^\circ < \theta < 270^\circ$ , να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\theta$ .

6. Στο παιχνίδι που παίζει ο Στέφανος στο κινητό, πέτυχε στα πρώτα 15 στάδια τις εξής βαθμολογίες:  
0, 5, 8, 6, 5, 4, 0, 6, 0, 6, 1, 6, 6, 7, 0.  
Να υπολογίσετε: α) Τη μέση βαθμολογία των πιο πάνω σταδίων και  
β) την τυπική απόκλιση .

7. Δίνεται η εξίσωση  $(\kappa^2 - 1) \cdot x = \kappa + 1$ . Να βρείτε:  
α) την τιμή του  $\kappa \in \mathbb{R}$  ώστε η εξίσωση να είναι αδύνατη και  
β) τη λύση της εξίσωσης για  $\kappa = 2$ .

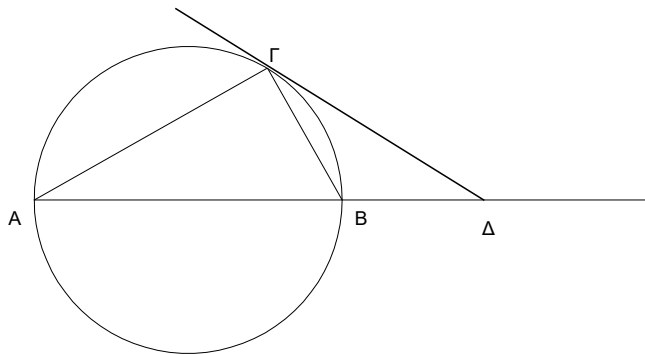
8. Να λύσετε την ανίσωση :  $\frac{x^2 - 4}{-x^2 + 5x - 6} \geq 0$

9. Να αποδείξετε ότι:  $\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu^3\alpha}{\eta\mu\alpha} = \sigma\varphi\alpha$

10. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο διαμέτρου  $AB$ .

Η εφαπτομένη του κύκλου στο  $\Gamma$  τέμνει την προέκταση τις  $AB$  στο σημείο  $\Delta$ .

Αν η  $AB$  είναι διπλάσια τις  $B\Gamma$ , να δείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές.



**ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.**  
**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - (\mu + 2)x + 2\mu + 1 = 0$ . Να βρείτε τις τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$  ώστε η εξίσωση να έχει:
- α) δυο ρίζες αντίστροφες,
  - β) ρίζα το -2,
  - γ) άθροισμα τετραγώνων των ριζών ίσο με 3 και
  - δ) δυο ρίζες πραγματικές και ίσες (μια διπλή ρίζα).



2. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$ .

Από τη γραφική παράσταση, να βρείτε :

α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης

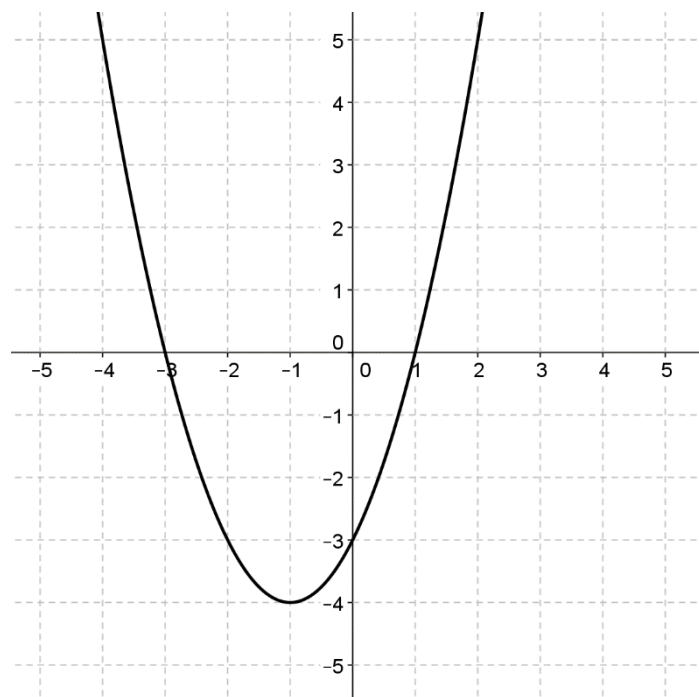
β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας

γ) τις συντεταγμένες της κορυφής

ε) τις τιμές του  $x$  για τις οποίες  $f(x) \geq 0$

δ) το πρόσημο της διακρίνουσας  $\Delta$  και του  $f(10)$

ζ) την αριθμητική τιμή της παράστασης  $A = \frac{2\beta + 3\gamma}{a}$ .



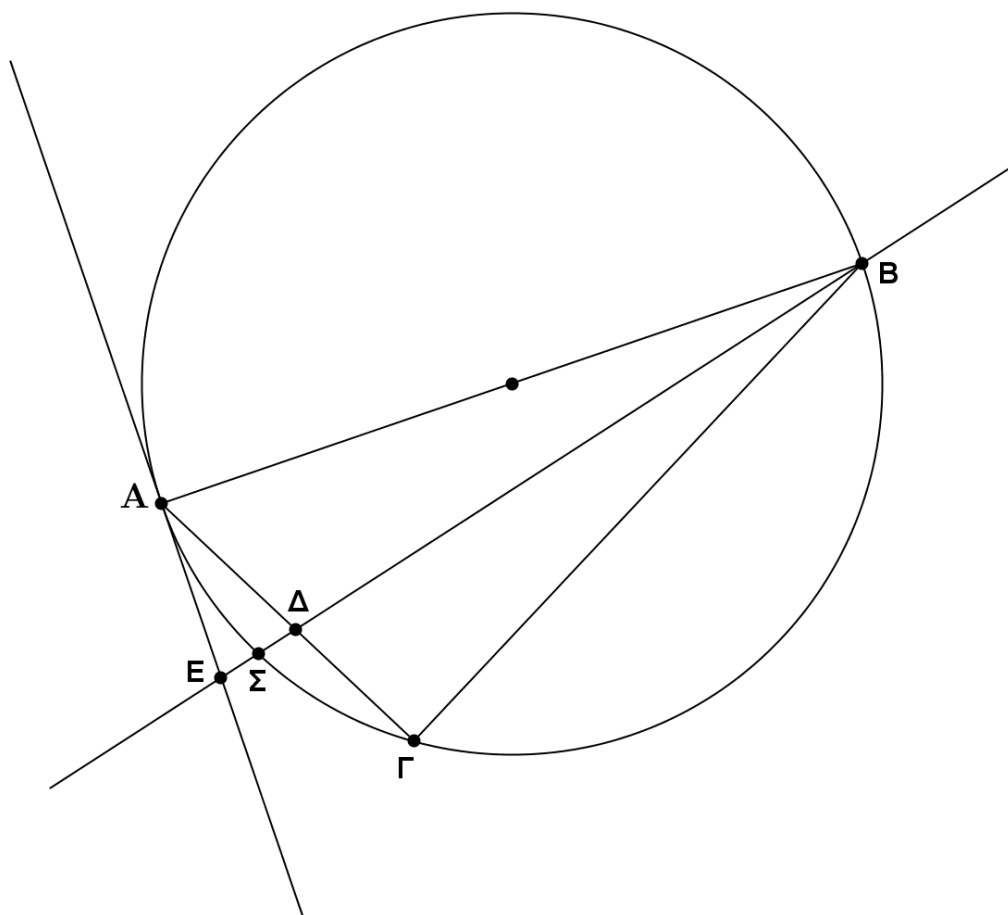
3. α) Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση  $\lambda x + 4 = \lambda^2 + 2x$  για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

β) Αν  $x \geq 0$ , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $A = \sqrt{8x^4 + \sqrt{10x^8 - \sqrt{81x^{16}}}}$  συναρτήσει του  $x$ .

4. α) Να αποδείξετε ότι :  $\frac{\sigma\upsilon\nu(270^{\circ}-x)\cdot\eta\mu(180^{\circ}+x)\cdot\sigma\upsilon\nu(270^{\circ}+x)}{\eta\mu(180^{\circ}-x)} = \eta\mu^2 x$

β) Αν  $\frac{\sigma\upsilon\nu(270^{\circ}-x)\cdot\eta\mu(180^{\circ}+x)\cdot\sigma\upsilon\nu(270^{\circ}+x)}{\eta\mu(180^{\circ}-x)} = \frac{1}{2}$  με  $-90^{\circ} < x < 90^{\circ}$ , να βρείτε τη γωνία  $x$ .

5. Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται τρίγωνο  $\hat{A}B\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο με διάμετρο  $AB$ . Στο σημείο  $A$  φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου. Η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $\Delta$ , τον κύκλο στο  $\Sigma$  και την εφαπτομένη στο  $E$ . Να δείξετε ότι: α) Η  $A\Sigma$  είναι διχοτόμος της  $\hat{E}A\Delta$  και β)  $(\Gamma B) \cdot (\Sigma E) = (\Gamma \Delta) \cdot (A\Sigma)$



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Α' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ΩΡΕΣ

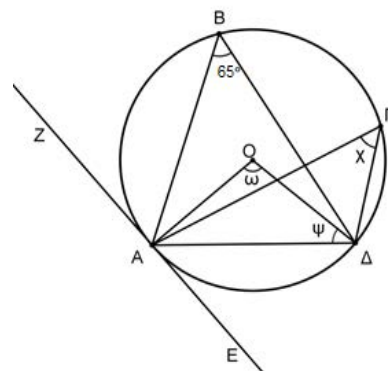
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29 ΜΑΪΟΥ 2015

- Οδηγίες: α) Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα με μολύβι).  
 β) Επιτρέπεται η χρήση εγκεκριμένης υπολογιστικής μηχανής.  
 γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

**ΜΕΡΟΣ Α'**

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

1. Στο πιο κάτω σχήμα η EZ είναι εφαπτομένη του κύκλου (O, ρ) στο σημείο A και  $\widehat{AB\Delta} = 65^\circ$ .  
 Να υπολογίσετε τις γωνίες:  $\chi$ ,  $\omega$ ,  $\psi$ ,  $\Delta AE$  και  $\angle OAZ$ , δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



2. Αν  $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$  και  $90^\circ < \hat{\theta} < 180^\circ$ , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $A = \frac{10\sigma\upsilon\nu\theta}{9\sigma\phi\theta + 6\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$ .

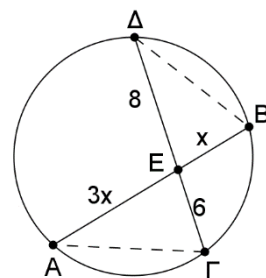
3. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

- α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\alpha}$ .  
 β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ .

4. Να λύσετε το σύστημα: 
$$\begin{cases} \psi - \chi = 5 \\ \chi^2 + \chi\psi = -2 \end{cases}$$

5. Στο διπλανό σχήμα τα A, B, Γ, Δ είναι σημεία του κύκλου:

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια.  
 β) Να υπολογίσετε το μήκος του ΒΕ.



6. Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $2x^2 - 4\sqrt{2}x + 3 - \sqrt{2} = 0$ , χωρίς να τη λύσετε,
- α) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:  $x_1 + x_2$  και  $x_1^2 + x_2^2$ .
- β) Να υπολογίσετε την παράσταση  $A = \frac{7}{x_1} + \frac{7}{x_2}$  και να τη μετατρέψετε στη μορφή  $\alpha\sqrt{2} + \beta$ .
7. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση β' βαθμού που έχει ρίζες  $x_1 = \tan\theta - \varepsilon\varphi\theta$  και  $x_2 = \tan\theta + \varepsilon\varphi\theta$ , είναι η  $\sigma\upsilon\nu\theta \cdot x^2 - 2x + \sigma\upsilon\nu\theta = 0$ ,  $\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$ .
- β) Να δείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.
8. Ένας υποψήφιος για τις στρατιωτικές σχολές εξετάζεται σε τρεις διαφορετικούς τομείς: 1<sup>ο</sup> γραπτή εξέταση με βαρύτητα 50%, 2<sup>ο</sup> αθλητική δοκιμασία 30% και 3<sup>ο</sup> τεστ νοημοσύνης με βαρύτητα 20%. Αν έγραψε στη γραπτή εξέταση 18 και στην αθλητική δοκιμασία πήρε 15, Πόσα πρέπει να γράψει στο τεστ νοημοσύνης για να βγάλει γενικό βαθμό 16;
9. Αφού βρείτε τον άξονα συμμετρίας την κορυφή και τα σημεία τομής με τους άξονες, να κάνετε τη γραφική παράσταση της παραβολής:  $f(x) = (x + 2)^2 + 1$ .
10. Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση:  $(\lambda^2 - 4)x = \lambda - 2 \quad \forall \lambda \in R$ .

## **ΜΕΡΟΣ Β'**

**Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.**

1. Δίδεται η εξίσωση:  $(\lambda - 1)x^2 - 4\lambda x + 5\lambda = 0$ .
- α) Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του  $\lambda$ , ώστε η εξίσωση να έχει:
- i) ρίζες αντίθετες.
  - ii) μία ρίζα ίση με -2.
  - iii) ρίζες ετερόσημες.
- β) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  το τριώνυμο  $(\lambda - 1)x^2 - 4\lambda x + 5\lambda$  διατηρεί αρνητικό πρόσημο για κάθε  $x \in R$ .

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = ax^2 + bx + 5$  και η ευθεία (ε).

i) Να βρείτε το πρόσημο των  $\alpha, \Delta$  της εξίσωσης  $ax^2 + bx + 5 = 0$  αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Αν  $A(-5, 0)$  και  $B(-1, 0)$  είναι τα σημεία που τέμνει η παραβολή τον άξονα  $\chi\chi'$ .

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής  $K$  της παραβολής και του σημείου  $\Gamma$ .

iii) Να βρείτε το πεδίο τιμών της συνάρτησης.

iv) Για ποιες τιμές του  $\chi$  ισχύει  $f(\chi) > 0$ .

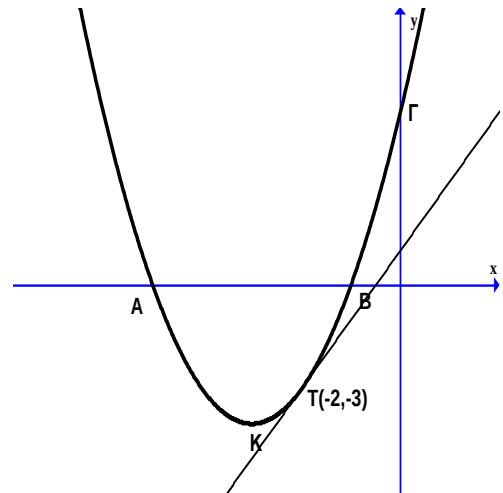
v) Η ευθεία (ε) είναι εφαπτόμενη της καμπύλης στο σημείο  $T(-2, -3)$  και έχει εξίσωση  $y = 2x + 1$ .

Να βρείτε το πρόσημο της διακρίνουσας ( $\Delta$ ) του συστήματος :

$$y = x^2 + 6x + 5$$

$$y = 2x + 1$$

αιτιολογώντας την απάντησή σας.



3. α) Να λύσετε την ανίσωση:  $\frac{(\chi^2 - 4\chi + 4)(\chi^2 + 5)}{(\chi - 1)(\chi - 3)} \leq 0$ .

β) Αν  $1 < \chi < 3$  και  $-2 < y < -1$  να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

i)  $A = 3\chi + y$

ii)  $B = \chi y$

4. Αν  $A = \frac{\eta\mu(\pi - \vartheta) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi - \vartheta)}{\sigma\phi(\pi + \vartheta)} + \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \vartheta\right) \cdot \eta\mu(-\vartheta)}{\sigma\tau\epsilon\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \vartheta\right)}$  και  $B = \frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta}{1 + \eta\mu\vartheta} + \varepsilon\varphi\vartheta$  με  $\frac{3\pi}{2} < \hat{\vartheta} < 2\pi$

α) Να δείξετε ότι:

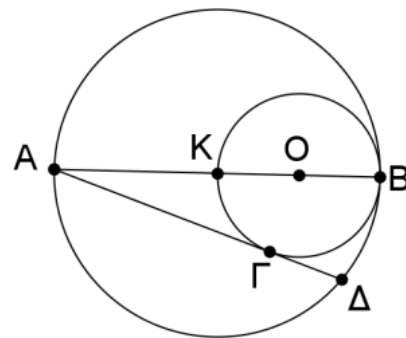
i) η παράσταση  $A$  είναι ανεξάρτητη του  $\vartheta$ .

ii)  $B = \tau\epsilon\mu\vartheta$ .

β) i) Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $A$  και  $B$  αιτιολογώντας την απάντησή σας.

ii) Αν  $B = 2$ , να βρείτε τη γωνία  $\vartheta$ .

5. α) Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται δυο κύκλοι,  $(K, R)$  και  $\left(O, \frac{R}{2}\right)$ , που εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο B. Αν η AΔ είναι εφαπτομένη του κύκλου  $\left(O, \frac{R}{2}\right)$  στο σημείο Γ, να δείξετε τα πιο κάτω:



i) τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $AO\Gamma$  είναι όμοια.

ii) ισχύει η σχέση  $B\Delta = \frac{2R}{3}$ .

β) Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{\chi+10} = 2-\chi$ .



**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2015****ΤΑΞΗ : Α΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 26 / 5 / 2015****ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****ΔΙΑΡΚΕΙΑ : 2,5 ώρες**

Ονοματεπώνυμο μαθητή/τριας: .....

Τμήμα: .....

Βαθμός: .....

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Να γράφετε μόνο με **μπλε** μελάνι (μόνο τα σχήματα με μολύβι).
2. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
3. Επιτρέπεται η χρήση ΜΗ προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
4. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **10** σελίδες.

**ΜΕΡΟΣ Α΄ (50 μονάδες):**Να λύσετε **όλες** τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να λύσετε την ανίσωση  $x^2 + 4x + 3 < 0$ .

2. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Να υπολογίσετε:

- 1) Τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\gamma} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$ .
- 2) Το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\alpha}$ .

(3 μονάδες)

(2 μονάδες)

3. Να βρείτε για ποιες τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  η εξίσωση  $(\alpha - 1)x = \beta - 4$  είναι αόριστη.

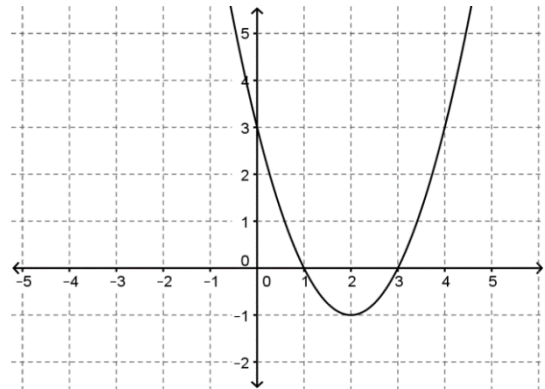
4. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ . Να βρείτε:

1) Τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής. (2 μονάδες)

2) Το πρόσημο του  $\alpha$ . (1 μονάδα)

3) Την τιμή του  $\gamma$ . (1 μονάδα)

4) Τις λύσεις της εξίσωσης  $f(x) = 0$ . (1 μονάδα)

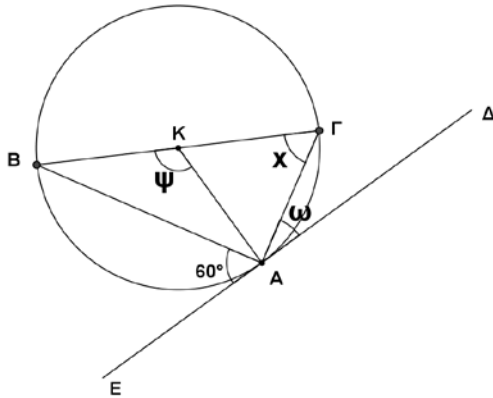


5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

α)  $\frac{2}{\sqrt{6}}$  (2 μονάδες)

β)  $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[6]{\alpha}$ , όπου  $\alpha > 0$  (3 μονάδες)

6. Δίνεται κύκλος με κέντρο  $K$ ,  $B\Gamma$  διάμετρος του και  $ΕΔ$  εφαπτομένη σε σημείο  $A$  του κύκλου. Αν η γωνία  $B\hat{A}E = 60^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες  $x$ ,  $\psi$ ,  $B\hat{A}\Gamma$  και  $\omega$ . Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



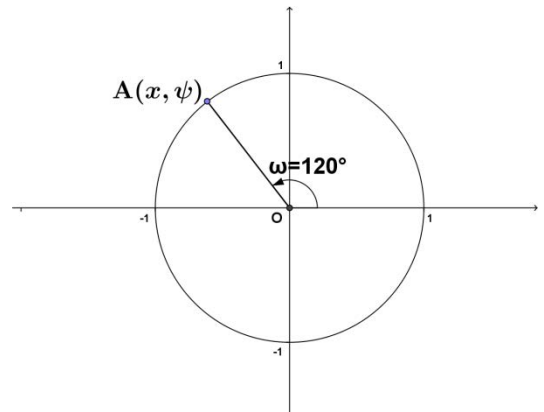
7. Για τον βαθμό τετραμήνου σε κάποιο μάθημα δίνεται βαρύτητα 40% στο προειδοποιημένο διαγώνισμα, 20% σε απρόοπτη άσκηση, 30% στις εργασίες και 10% στη συμμετοχή στην τάξη. Να υπολογίσετε το βαθμό τετραμήνου κάποιου μαθητή ο οποίος πήρε 18 στο προειδοποιημένο διαγώνισμα, 13 στην απρόοπτη άσκηση, 19 στις εργασίες και 15 για τη συμμετοχή του στην τάξη.

8. Δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και γωνία  $\omega = 120^\circ$  σε κανονική θέση με τελική πλευρά OA, όπου O η αρχή των αξόνων και το σημείο  $A(x, \psi)$  σημείο του κύκλου.

1) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A.  
(2 μονάδες)

2) Να βρείτε την κλίση της ευθείας OA.  
(2 μονάδες)

3) Να βρείτε μία γωνία  $\theta \neq 120^\circ$  τέτοια ώστε  $\eta\mu\theta = \eta\mu 120^\circ$ .  
(1 μονάδα)



9. Να λύσετε την ανίσωση:  $\frac{x^2 \cdot (x^2 + 5x + 6)}{(1 - x) \cdot (x^2 + 1)} \geq 0$

10. Αν  $\sin\theta = \frac{5}{13}$  και  $270^\circ < \theta < 360^\circ$ , να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{5\epsilon\mu(-\theta) + 13\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \theta)}{13\eta\mu(\theta - 270^\circ) + 5\sigma\varphi(90^\circ - \theta)}$$

**Μέρος Β΄: (50 Μονάδες)**

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η παραβολή  $\psi = x^2 - 2x - 4$ .

1) Να εξετάσετε αν έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή και να την υπολογίσετε.

(4 μονάδες)

2) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων της παραβολής και της ευθείας  $x + \psi = 2$ .

(6 μονάδες)

2. Δίνονται οι εξισώσεις των ευθειών 
$$\begin{cases} \varepsilon_1: \kappa x + \lambda \psi = -1 \\ \varepsilon_2: \lambda x + \mu \psi = 4 \\ \varepsilon_3: \kappa x + \mu \psi = 1 \end{cases}, \kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- 1) Να εξετάσετε αν το σύστημα είναι συμβιβαστό για  $\kappa = 1$ ,  $\lambda = 0$  και  $\mu = 2$ .  
(2 μονάδες)
- 2) Αν  $\lambda = 1$ , να βρείτε τα  $\kappa$  και  $\mu$  ώστε οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  να συμπίπτουν.  
(3 μονάδες)
- 3) Να βρείτε τα  $\kappa, \lambda$  και  $\mu$  ώστε το σύστημα των τριών εξισώσεων των ευθειών να έχει λύση το σημείο  $A(1, 1)$ .  
(5 μονάδες)

3. Δίνεται η παράσταση  $A = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\eta\mu\theta} - \tau\epsilon\mu\theta$ .

1) Να δείξετε ότι  $A = \epsilon\varphi\theta$ .

(6 μονάδες)

2) Αν  $(A + 3)^{\frac{3}{2}} = 8$  και  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ , να βρείτε τη γωνία  $\theta$ .

(4 μονάδες)



4. Από σημείο  $\Delta$  εκτός κύκλου ( $K, R$ ) φέρουμε την εφαπτομένη  $\Delta\Gamma$  ( $\Gamma$  σημείο του κύκλου) και την τέμνουσα  $\Delta\text{ΒΑ}$ , ώστε  $\text{ΑΒ}$  διάμετρος του κύκλου.

1) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $\text{ΑΓΔ}$  και  $\text{ΓΒΔ}$  είναι όμοια.

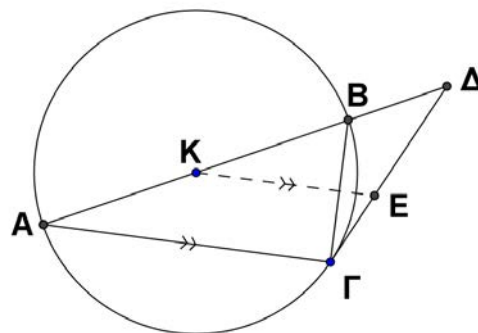
(3 μονάδες)

2) Αν  $\text{ΒΔ} = 2 \text{ cm}$  και  $\text{ΓΔ} = 4 \text{ cm}$ , να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου.

(4 μονάδες)

3) Από το κέντρο  $K$  φέρουμε παράλληλη ευθεία στην  $\text{ΑΓ}$  η οποία τέμνει τη  $\text{ΓΔ}$  στο  $\text{Ε}$ . Αν η ακτίνα του κύκλου  $R = 3 \text{ cm}$ , να υπολογίσετε το μήκος του  $\text{ΓΕ}$ .

(3 μονάδες)



5. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - \kappa x + \kappa - 1 = 0$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

1) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις για κάθε  $\kappa \in \mathbb{R}$ . (3 μονάδες)

2) Αν  $x_1, x_2$  είναι οι λύσεις της εξίσωσης, να βρείτε για ποια τιμή του  $\kappa$  το γινόμενο των ριζών είναι διπλάσιο του αθροίσματος τους. (3 μονάδες)

3) Αν  $2 < \kappa < 4$ , να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

(i)  $2x_1 + 2x_2 + 3x_1x_2$  (ii)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ . (4 μονάδες)

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΕΙΡΑ: Α΄

ΤΑΞΗ: Α΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 21/05/2015

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2.30΄ ώρες

**Οδηγίες:**

- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο (2) μέρη.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.
- Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (με μολύβι μόνο τα σχήματα).
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής σφραγισμένης από το σχολείο.
- Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
- Όλες οι απαντήσεις να δοθούν σε σφραγισμένες κόλλες.

**ΜΕΡΟΣ Α΄: (Μονάδες 50) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες (5/100).**

1. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των πιο κάτω διανυσμάτων:

α)  $\vec{\beta} + \vec{\gamma}$  και β)  $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

2. Δίνεται η εξίσωση  $3x^2 - 4x + 1 = 0$  με ρίζες  $x_1, x_2$ . Χωρίς να τη λύσετε, να υπολογίσετε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της.

3. Να λύσετε την ανίσωση:  $x^2 - 5x + 4 \geq 0$

4. Δίνονται τα  $x, y, \omega \in \mathbb{R}$ , όπου  $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ ,  $y = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$  και  $\omega = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ .

Να δείξετε ότι  $x \cdot y \cdot \omega = 1$

5. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των ημερών απουσίας λόγω ασθένειας των υπαλλήλων ενός εργοστασίου :

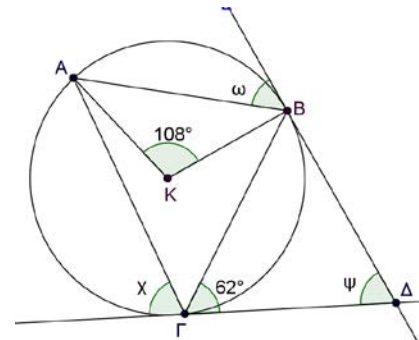
|                    |   |   |    |    |    |    |    |
|--------------------|---|---|----|----|----|----|----|
| Ημέρες<br>Απουσίας | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| Αριθμός<br>Εργατών | 9 | 9 | 20 | 17 | 15 | 10 | 10 |

Να βρείτε:

- α) τη μέση τιμή  
β) την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων

6. Δίνεται  $\sin \omega = -\frac{4}{5}$ ,  $90^\circ < \omega < 180^\circ$ . Να δείξετε ότι:  $\frac{4\epsilon\varphi\omega + 9\sigma\tau\epsilon\mu(180^\circ - \omega)}{\eta\mu(90^\circ - \omega)} = -15$

7. Στο διπλανό σχήμα οι  $\Gamma\Delta$ ,  $B\Delta$  είναι οι εφαπτόμενες του κύκλου  $(K,R)$ . Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\alpha$ ,  $\psi$ ,  $\omega$ , δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



8. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  η εξίσωση:
- $$\lambda^2(x-1) - 1 = \lambda x - 3 + \lambda, \text{ είναι αόριστη.}$$

9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $\hat{A}B\Gamma$ , ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με ύψος  $AD$ .

- α) να δείξετε ότι:  $(A\Delta)(B\Gamma) = (AB)(A\Gamma)$
- β) να βρείτε το μήκος των  $AB$  και  $A\Delta$ , αν  $A\Gamma = 6 \text{ cm}$  και  $B\Gamma = 10 \text{ cm}$

10. Δίνεται η εξίσωση  $(\lambda+1)x^2 - 2(\lambda-2)x + 3\lambda = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq -1$ , με ρίζες  $x_1, x_2$ .

Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  ισχύει:  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq 1$

**ΜΕΡΟΣ Β΄: (Μονάδες 50) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες (10/100).**

1. Δίνεται η παραβολή με τύπο:  $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$

α) Να βρείτε:

i) τα σημεία τομής της με τους άξονες

ii) τον άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής της (μον.4)

β) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της παραβολής. (μον.3)

γ) Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες ισχύει:  $-2x^2 + 8x - 6 \leq 0$  (μον.3)

2. Οι ευθείες: 
$$\begin{cases} \varepsilon_1 : (\alpha + 1)x + y = 2\gamma \\ \varepsilon_2 : 2x - (\gamma + \beta)y = -3\gamma + \beta \\ \varepsilon_3 : 7x + 3\beta y = -4\alpha \end{cases}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

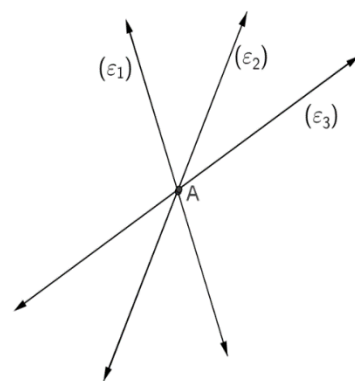
περνούν από το σημείο  $A(1,5)$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ . (μον.7)

β) Έστω η ευθεία  $\varepsilon_4$  με εξίσωση  $(3\kappa - 1)x + \kappa y = 6\kappa + 5$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

Να βρείτε τη τιμή του  $\kappa$  ώστε οι εξισώσεις των ευθειών  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  και  $\varepsilon_4$

να αποτελούν συμβιβαστό σύστημα. (μον.3)



3. α) Δίνεται η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$  και  $x_1, x_2$  οι ρίζες της.

Να δείξετε ότι  $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$ ,

όπου  $S$  είναι το άθροισμα και  $P$  είναι το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης. (μον.2)

β) Δίνεται η εξίσωση:  $(\tan \theta)x^2 + 2(1 + \varepsilon \varphi \theta)x + 2\eta \mu \theta + \tan \theta = 0$ ,  $\theta \neq (2\kappa + 1)\frac{\pi}{2}$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$ .

i. Να δείξετε ότι έχει ρίζες πραγματικές και ίσες. (μον.4)

ii. Να δείξετε ότι  $S = -2(\eta \mu \theta + \sigma \nu \theta)$  και  $P = 2\eta \mu \theta \sigma \nu \theta + 1$ , (μον.2)

iii. Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να δείξετε ότι:  $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 12\eta \mu \theta \sigma \nu \theta = 6$  (μον.2)

4. Δίνονται οι κύκλοι  $(K, R)$  και  $(\Lambda, \rho)$ , με  $\rho > R$ .

Ο κύκλος  $(\Lambda, \rho)$  περνά από το κέντρο  $K$ .

Η εφαπτομένη του κύκλου  $(K, R)$  στο σημείο  $M$ ,  
τέμνει τον κύκλο  $(\Lambda, \rho)$  στα σημεία  $A$  και  $B$ ,  
όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $\triangle MKB$  και  $\triangle KAZ$  είναι όμοια. (μον.6)

β) Με τη βοήθεια του (α) να δείξετε ότι  $(KA)(KB) = 2R\rho$ . (μον.4)

5. Ο κύριος Λουκά βρίσκεται σε ένα από τα σαλόνια ενός ξενοδοχείου. Στην ορθογώνια αίθουσα  
βρίσκεται ένα τετράγωνο ενυδρείο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω  $EB = B\Theta = \Theta Z = ZE = x$ ,  
 $AB = \Gamma\Delta = y$  και  $A\Delta = B\Gamma = \omega$ . Υπολογίζει ότι  $2 < x < 4$  και  $10 < y < 15$ .

α) Να δείξετε ότι:

i.  $6 < AE < 13$

ii.  $\frac{2}{15} < \frac{EB}{\Delta\Gamma} < \frac{2}{5}$

(μον.5)

- β) Το εμβαδόν της αίθουσας είναι  $96 \text{ m}^2$  και η περίμετρος της  $40 \text{ m}$ . Με τη χρήση εξισώσεων να  
υπολογίσετε τις διαστάσεις  $\omega$  και  $y$  της αίθουσας. (μον.5)

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2015  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΤΑΞΗ Α΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 26 -05 -2015

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 02:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- β) Να γράψετε με μπλε ξηρό μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
- γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- δ) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.

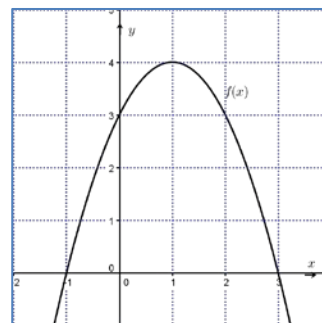
**ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ****ΜΕΡΟΣ Α΄:** Να λύσετε και τις δέκα ασκήσεις του Μέρους Α΄.**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Δίνεται το δείγμα  $A = 6, 1, 5, 6, 8, 1, 6, 7$ . Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ .

Να βρείτε:

- (α) το πρόσημο του  $a$
- (β) το πρόσημο της διακρίνουσας ( $\Delta$ )
- (γ) τις λύσεις της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .



3. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $2\vec{\alpha}$  και  $-\vec{\beta}$ .

(β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ .

4. Αν  $x = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$  και  $\psi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ , χωρίς τη χρήση της υπολογιστικής μηχανής να

δείξετε ότι  $\frac{x + \psi}{x \cdot \psi - 1} = -1$ .

5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 3 - 4x - x^2, x \in \mathbb{R}$ . Με τη μέθοδο συμπλήρωσης τέλειου τετραγώνου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι η  $f$  μπορεί να γραφεί στη μορφή  $f(x) = \alpha(x + \kappa)^2 + \lambda, \alpha \neq 0$  και να υπολογίσετε:

(α) την ακρότατη τιμή της  $f$  και να τη χαρακτηρίσετε

(β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της.

6. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\sin(2\pi - \theta) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \cdot \eta\mu(\pi + \theta) \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sigma\varphi(-\theta) \cdot \eta\mu(\pi - \theta) \cdot \sin(-\theta)} = -\eta\mu\theta.$$

7. Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση  $(\lambda + 3)(\lambda - 2) \cdot x = \lambda + 3$  για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

8. Αν ισχύουν οι ανισότητες  $-5 < x < -3$  και  $1 < \psi < 7$ , να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

(α)  $x + \psi$

(β)  $x - \psi$

(γ)  $x \cdot \psi$

9. Αν το σύστημα  $\begin{cases} x + 4y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \\ \lambda x - \mu y + 5 = 0 \end{cases}$  είναι συμβιβαστό, να υπολογίσετε την τιμή της

παράστασης  $A = \lambda^2 + \mu^2 + 2015 + 2\lambda\mu$ .

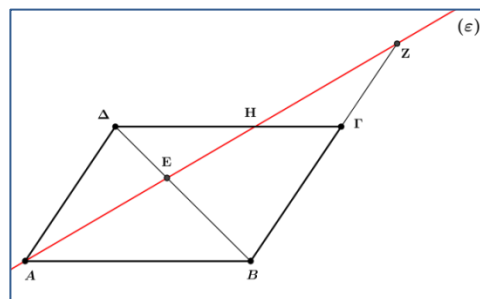
10. Από την κορυφή  $A$  παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ ,

όπως αυτό φαίνεται στο διπλανό σχήμα,

φέρνουμε ευθεία  $(\varepsilon)$ , η οποία τέμνει τις  $B\Delta$ ,  $B\Gamma$

και  $\Delta\Gamma$  στα σημεία  $E$ ,  $Z$  και  $H$  αντίστοιχα. Να

αποδείξετε ότι :



(α)  $\frac{ZH}{ZA} = \frac{Z\Gamma}{ZB}$

(β)  $(AH)(BZ) = (ZA)(\Delta A)$ .



**ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.**

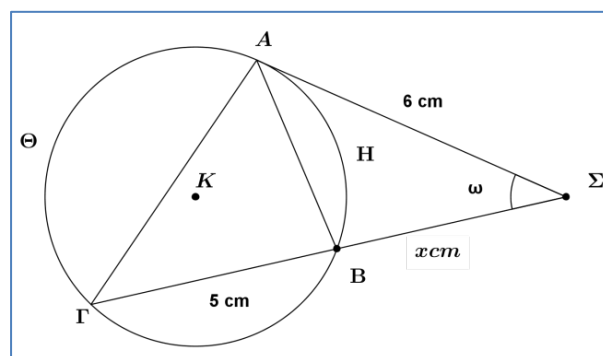
**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{(1-x)^3 \cdot (2x+3) \cdot (x^2-9)}{(x^2-2x-3) \cdot (4x^2+1)} \geq 0$ .
2. Για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  η εξίσωση  $x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda + 4 = 0$  θα:
  - (α) έχει ρίζες αντίστροφες
  - (β) έχει ρίζες αντίθετες
  - (γ) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες
  - (δ) ισχύει  $\frac{S}{P} \geq 2$ .

3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος  $(K, \rho)$ .

Από σημείο  $\Sigma$  εκτός του κύκλου φέρνουμε την εφαπτομένη  $A\Sigma$  και την τέμνουσα  $\Sigma B\Gamma$ .

- (α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Sigma$  και  $A\Sigma\Gamma$  είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία των πλευρών τους.



- (β) Να δείξετε ότι  $\widehat{A\theta\Gamma} - \widehat{AHB} = 2\omega$ .

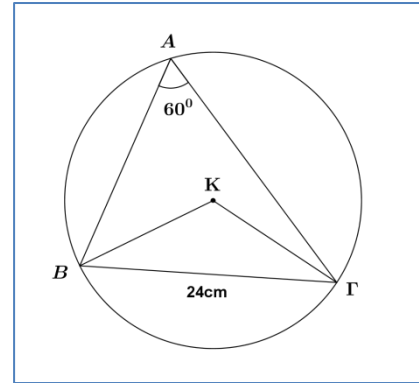
- (γ) Να υπολογίσετε το μήκος του  $\Sigma\Gamma$ , αν  $A\Sigma = 6\text{ cm}$ ,  $B\Gamma = 5\text{ cm}$ .

4. Δίνεται η παραβολή  $f(x) = -x^2 + (2\kappa + 1)x - \kappa^2 + 1$ . Να υπολογίσετε για ποιες τιμές του  $\kappa \in \mathbb{R}$  η παραβολή:
  - (α) έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία  $x = 3$
  - (β) τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο  $-3$
  - (γ) εφάπτεται του άξονα  $xx'$
  - (δ) διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

5. (α) Να αποδείξετε την ταυτότητα :

$$\frac{1 - 2\eta\mu x}{1 - \eta\mu^2 x} - \frac{1 - 3\eta\mu x}{1 - \eta\mu x} = 3\varepsilon\varphi^2 x.$$

(β) Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο  $K$  και ακτίνα  $\rho$ . Αν η γωνία  $A = 60^\circ$  και η  $B\Gamma = 24\text{cm}$ , να υπολογίσετε την ακτίνα  $\rho$  του κύκλου.



**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ**ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**ΤΑΞΗ: **Α΄**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: **21/05/2015**ΧΡΟΝΟΣ: **2,5 ΩΡΕΣ**

ΟΝΟΜΑ: ..... ΤΜΗΜΑ: ..... ΑΡ.: .....

**Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.****ΟΔΗΓΙΕΣ**

- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας τύπου Tippi-Ex.
- Τα σχήματα να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
- Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνεται ο τρόπος επίλυσής τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της επίλυσης δεν θα λαμβάνονται υπόψη.

**ΜΕΡΟΣ Α΄****Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.****A1.** Να λύσετε την ανίσωση:  $x^2 + 3x - 4 \leq 0$ **A2.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

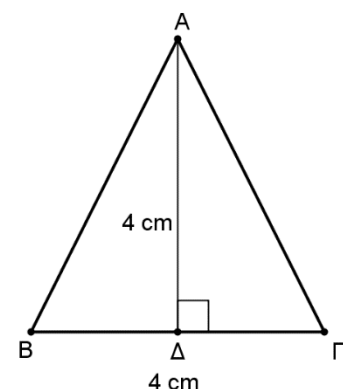
Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των πιο κάτω διανυσμάτων:

(α)  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$

(β)  $2\vec{\alpha} - \vec{\gamma}$

**A3.** Στο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ( $AB = AG$ ), το ύψος  $AD = 4$  cm και η πλευρά  $BΓ = 4$  cm. Να υπολογίσετε την πλευρά AG και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ABΓ είναι  $4(1 + \sqrt{5})$  cm.

Να δώσετε τις απαντήσεις σας με πράξεις, **χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής.**



**A4.** Αν  $\eta\mu\theta = -\frac{12}{13}$  και  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{5\tau\epsilon\mu\theta - 12\sigma\phi\theta}{12\sigma\tau\epsilon\mu\theta - 26\sigma\upsilon\eta\theta}$$

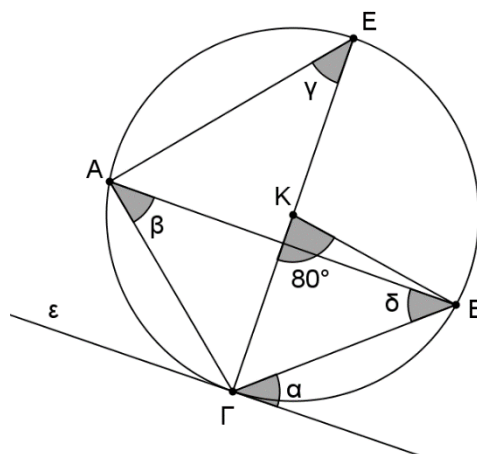
- A5.** Ο αριθμός των βιβλίων που έχει διαβάσει μία ομάδα παιδιών κατά τη διάρκεια του περασμένου καλοκαιριού δίνεται στον πιο κάτω πίνακα. Να βρείτε:
- (α) τη μέση τιμή και
- (β) την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

| Αριθμός<br>Βιβλίων<br>$x_i$ | Αριθμός<br>μαθητών<br>$f_i$ |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 0                           | 1                           |
| 1                           | 7                           |
| 2                           | 11                          |
| 3                           | 4                           |
| 4                           | 1                           |
| 5                           | 1                           |

- A6.** Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $\epsilon\phi^2\theta - \eta\mu^2\theta = \epsilon\phi^2\theta \cdot \eta\mu^2\theta$

- A7.** Δίνεται κύκλος (K, R). Η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ,  $\hat{B}\hat{K}\hat{\Gamma} = 80^\circ$  και το τόξο AEB είναι τριπλάσιο από το τόξο ΑΓ.

Να βρείτε τις γωνίες α, β, γ και δ **αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.**



- A8.** Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ. Από σημείο Α της ΜΝ φέρουμε κάθετη ΑΒ πάνω στη διαγώνιο ΝΛ (Β σημείο της ΝΛ), η οποία τέμνει την προέκταση της ΛΜ στο σημείο Γ. Να δείξετε ότι:
- (α) τα τρίγωνα ΓΜΑ και ΓΛΒ είναι όμοια
- (β)  $(AB)(MG) = (AM)(BN)$

- A9.** Να λύσετε την ανίσωση: 
$$\frac{(2-x)(x^2-3x+2)(x^2+4x+21)}{(6-x)} \geq 0$$

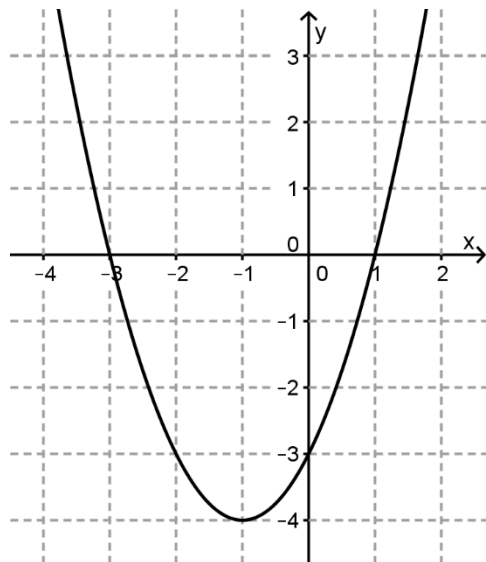
- A10.** Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση  $\lambda^2 x - 6x + 4 = \lambda^2 + \lambda x$ , για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

## ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

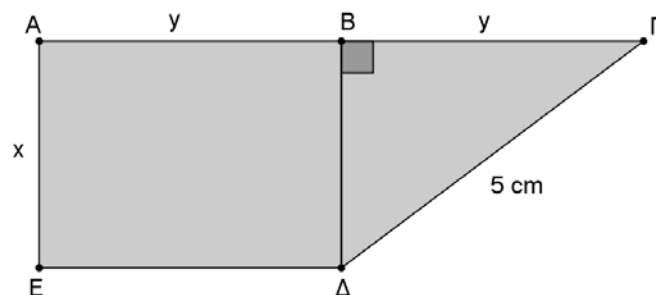
**B1.** Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με τύπο  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ .



Να βρείτε:

- (α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της  $f(x)$  (μον. 1)
- (β) τις συντεταγμένες και το είδος του ακρότατου (μον. 1)
- (γ) το πρόσημο του  $a$  και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας (μον. 1)
- (δ) τα πρόσημα των τιμών  $f(-100)$ ,  $f(-2)$ ,  $f(2015)$  (μον. 1)
- (ε) τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$  (μον. 1)
- (ζ) τα  $S$  και  $P$  (μον. 1)
- (η) τις τιμές των συντελεστών  $a$ ,  $b$  και  $\gamma$  (μον. 3)
- (θ) τις λύσεις της ανίσωσης  $f(x) > 0$  (μον. 1)

**B2.** Το τετράπλευρο ΑΓΔΕ αποτελείται από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο κι ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Η μεγάλη κάθετος του τριγώνου ισούται με τη μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου και η πλευρά  $\Gamma\Delta = 5 \text{ cm}$ .



(α) Να δείξετε ότι:

(i) η περίμετρος  $\Pi_{ΑΓΔΕ}$  του τετραπλεύρου ΑΓΔΕ δίνεται από τη σχέση  $\Pi_{ΑΓΔΕ} = x + 3y + 5$  (μον. 1)

(ii) το εμβαδόν  $E_{ΑΓΔΕ}$  του τετραπλεύρου ΑΓΔΕ δίνεται από τη σχέση  $E_{ΑΓΔΕ} = \frac{3xy}{2}$  (μον. 1)

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι  $2 < x < 4$  και  $3 < y < 5$ , να αποδείξετε ότι:

(i)  $16 < \Pi_{ΑΓΔΕ} < 24$  (μον. 2)

(ii)  $9 < E_{ΑΓΔΕ} < 30$  (μον. 2)

(γ) Αν η μικρή πλευρά του ορθογωνίου ΑΒΔΕ είναι κατά 1 μικρότερη από τη μεγάλη του πλευρά και το ολικό εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΓΔΕ είναι ίσο με  $18 \text{ cm}^2$ , να υπολογίσετε τις τιμές των  $x$  και  $y$  και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή της περιμέτρου του τετραπλεύρου ΑΓΔΕ. (μον. 4)

**B3.** Δίνεται η εξίσωση  $(\kappa - 1)x^2 - (\kappa + 2)x + 2\kappa = 0$ ,  $\kappa \neq 1$ , με ρίζες  $x_1$  και  $x_2$ .

(α) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\kappa$  ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) η εξίσωση έχει ρίζες αντίθετες (μον. 1,5)
- (ii) η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες (μον. 1,5)
- (iii) οι ρίζες της εξίσωσης ικανοποιούν τη σχέση  $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 \geq 2$  (μον. 3)

(β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες  $\rho_1 = 2 + x_1$  και  $\rho_2 = 2 + x_2$ . (μον. 4)

**B4.** (α) Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\sin(270^\circ + \theta) \cdot \eta\mu(-\theta) - \sin(-\theta) \cdot \eta\mu(90^\circ - \theta)}{\eta\mu(180^\circ - \theta) - \sigma\phi(360^\circ - \theta) + \sin(270^\circ - \theta)} \quad \text{και} \quad B = \frac{\eta\mu^3\theta}{\sin\theta} + \frac{\sigma\phi\theta}{1 + \sigma\phi^2\theta}$$

(i) να δείξετε ότι  $B = -A = \varepsilon\phi\theta$  (μον. 6)

(ii) αν  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$  και  $B = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ , να βρείτε την τιμή της γωνίας  $\theta$  (μον. 1)

(β) Να δείξετε ότι η παράσταση  $\Gamma = (\eta\mu^2\theta)x^2 - (2\varepsilon\phi\theta)x + \sigma\tau\epsilon\mu^2\theta \cdot \tau\epsilon\mu^2\theta$ ,  $\theta \neq \frac{\kappa\pi}{2}$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$ , είναι θετική για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . (μον. 3)

**B5.** Δίνεται ο κύκλος  $(K, R)$  με διάμετρο την  $AB$ . Στο σημείο  $A$  του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη  $(\varepsilon)$  και από το  $A$  τη χορδή  $AG$ . Από το  $G$  φέρουμε την  $\Gamma\Delta$  κάθετη στην  $(\varepsilon)$ . Η  $\Gamma\Delta$  τέμνει τον κύκλο στο  $E$ . Να δείξετε ότι:

(α)  $(AG)^2 = (AB)(\Delta\Gamma)$  (μον. 4)

(β)  $(\Delta A)^2 = (\Delta E)(\Delta\Gamma)$  (μον. 3)

(γ)  $(\Delta A)^2 = \frac{(\Delta E)(AG)^2}{2R}$  (μον. 3)

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- Να γράφετε με μελάνι χρώματος μπλε (τα σχήματα μπορούν να γίνονται με μολύβι).
- Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.

**ΜΕΡΟΣ Α:** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητό παρονομαστή, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής.

α)  $\frac{8}{\sqrt{2}}$

β)  $\frac{2}{\sqrt{x}-2}$ , με  $x \geq 0$  και  $x \neq 4$

2. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\alpha}$

β) τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$

3. Δίνεται η εξίσωση :  $2x^2 - 3x - 4 = 0$ , με ρίζες  $x_1, x_2$ . Να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων, χωρίς να λύσετε την εξίσωση:

1)  $x_1 + x_2$

2)  $x_1 \cdot x_2$

3)  $x_1 \cdot x_2^2 + x_2 \cdot x_1^2$

4)  $\frac{4}{x_1} + \frac{4}{x_2}$

4. Αν  $\eta\mu\theta = \frac{5}{13}$  και  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, τη τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{12\epsilon\phi\theta + 26\sigma\upsilon\nu\theta + 3}{24\tau\epsilon\mu\theta - 5\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$$

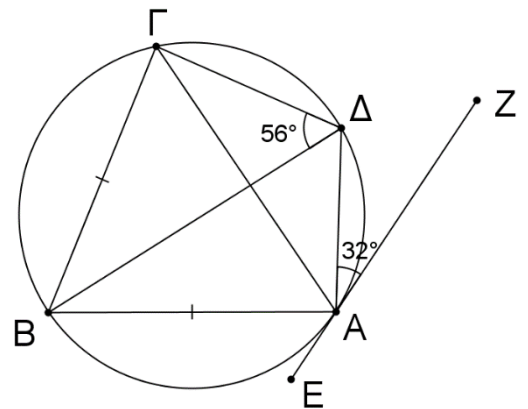
5. Να βρείτε για ποιες τιμές των παραμέτρων  $\alpha$  και  $\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ), το πιο κάτω σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

$$\begin{cases} \alpha\chi + 5\psi = 10 \\ 3\chi + \psi = \beta + 1 \end{cases}$$

6. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu(180^\circ + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(270^\circ - \theta) - \eta\mu(\theta - 90^\circ) \cdot \tau\epsilon\mu(360^\circ + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\epsilon\phi(180^\circ - \theta) \cdot \epsilon\phi(90^\circ + \theta)} = 1$$

7. Στο διπλανό σχήμα η EZ είναι εφαπτομένη του κύκλου,  $B\Gamma = BA$ ,  $\hat{\Gamma\Delta B} = 56^\circ$  και  $\hat{\Delta\hat{A}Z} = 32^\circ$ .  
Να βρείτε τις γωνίες : α)  $\hat{B\Gamma A}$ , β)  $\hat{\Gamma\hat{B}\Delta}$   
(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. )



8. Να αποδείξετε την ταυτότητα  $\frac{1 - \epsilon\phi^2\chi}{1 + \epsilon\phi^2\chi} = 1 - 2\eta\mu^2\chi$

9. Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{\chi^2 + 6\chi - 7}{\chi^2 - 1} \leq -2$



10. Η βαθμολογία 15 μαθητών σε ένα διαγώνισμα μαθηματικών παρουσιάζεται στον πιο κάτω πίνακα.

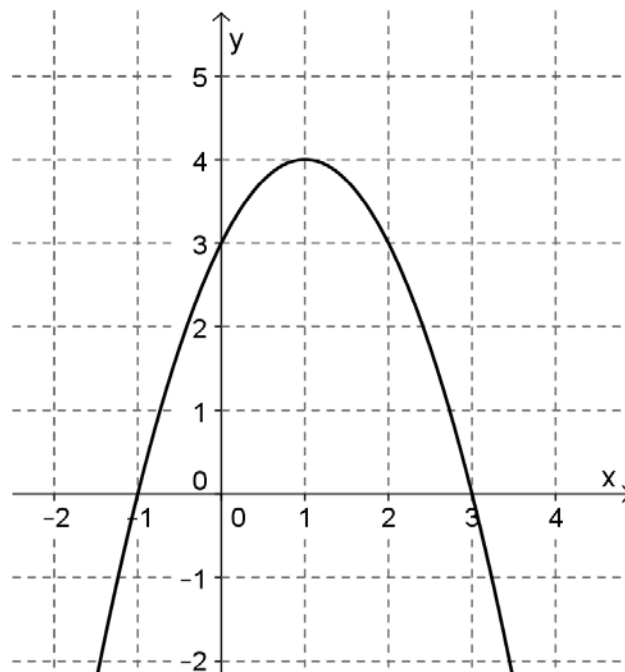
| Βαθμός $\chi_i$ | Μαθητές $f_i$ |
|-----------------|---------------|
| 12              | 1             |
| 15              | 7             |
| 17              | 5             |
| 19              | 2             |

Να υπολογίσετε :

- α) τη μέση τιμή και
- β) την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων

**ΜΕΡΟΣ Β:** Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$  είναι η πιο κάτω παραβολή. Από το διάγραμμά της, να βρείτε :



- α) το πρόσημο του  $a$  και της διακρίνουσας  $\Delta$
- β) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της  $f$
- γ) τον άξονα συμμετρίας και την κορυφή της παραβολής
- δ) τις λύσεις της ανίσωσης  $f(x) < 0$
- ε) τις τιμές των  $a, b$  και  $\gamma$

2. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - (\lambda + 1)x + (\lambda + 4)^2 = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε:

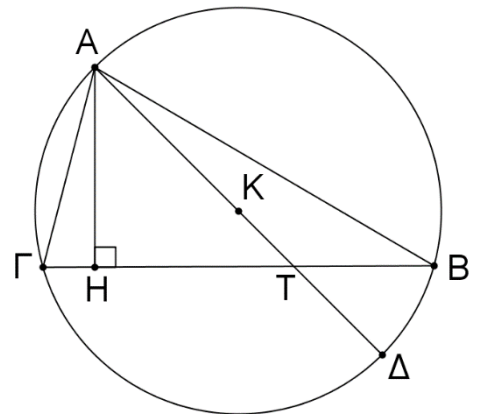
- 1) η εξίσωση να έχει ρίζα τον αριθμό -1
- 2) η εξίσωση να έχει ρίζες αντίθετες
- 3) να ισχύει η σχέση  $P + 4S = 0$ , όπου  $P$  το γινόμενο των ριζών και  $S$  το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης
- 4) η εξίσωση να έχει ρίζες πραγματικές

3. Στο διπλανό σχήμα, το  $AD$  είναι διάμετρος του κύκλου  $(K, R)$  και το  $AH$  είναι ύψος του εγγεγραμμένου τριγώνου  $AB\Gamma$ .

α) Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$(AB) \cdot (A\Gamma) = (AH) \cdot (AD)$$

β) Οι χορδές  $AD$  και  $B\Gamma$  του κύκλου τέμνονται στο σημείο  $T$ . Αν  $TB = 3\text{cm}$ ,  $B\Gamma = 11\text{cm}$  και  $T\Delta = 4\text{cm}$ , να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $AT$ .



4. Δίνεται η εξίσωση  $(\eta\mu^2\theta)x^2 - (\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta)x + 3 = 0$ , με ρίζες  $x_1, x_2$ .

α) Να αποδείξετε ότι:  $(x_1 - x_2)^2 + 11 \cdot \sigma\tau\epsilon\mu^2\theta = -1$

β) Αν  $x_1 \cdot x_2 = 12$  και  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , να υπολογίσετε την τιμή της γωνίας  $\theta$ .

5. Αν  $3 < \chi < 5$  και  $-2 < \psi < -1$ , να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι πιο κάτω παραστάσεις:

α)  $\chi + \psi$

β)  $2\chi - \psi$

γ)  $\chi \cdot \psi$

δ)  $\frac{\chi}{\psi}$

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 8/6/2015

ΤΑΞΗ: Α'

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: .....

ΤΜΗΜΑ:..... ΑΡ.: .....

**ΟΔΗΓΙΕΣ**

1. Οι απαντήσεις δίνονται μόνο με **μπλε μελάνι**.
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού (υγρού ή ταινίας/Tipp Ex).
3. Τα σχήματα μπορούν να σχεδιαστούν με μολύβι.
4. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής με σφραγίδα του Σχολείου.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (03) ΣΕΛΙΔΕΣ.  
ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ.

**ΜΕΡΟΣ Α'** Περιλαμβάνει 10 θέματα.  
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  και  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- 1) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\gamma} = 2\vec{a} + \vec{b}$ .
- 2) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$ .

2. Να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες  $x_1 = 2 + \sqrt{3}$  και  $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ .

$$x + y = 2$$

3. Αν το σύστημα  $2x - y = 1$  είναι συμβιβαστό, να υπολογίσετε την τιμή του  $\lambda$ .  
 $x + (\lambda + 1)y = 5$

4. Για τον τελικό βαθμό στο μάθημα της Φυσικής, ένας φοιτητής βαθμολογείται με 30% στην ενδιάμεση εξέταση, με 45% στην τελική εξέταση και με 25% στην παρουσίαση μελέτης.  
Ο Άρης βαθμολογήθηκε με 70 από τα 100 στην ενδιάμεση εξέταση, με 80 από τα 100 στην τελική εξέταση και με 90 από τα 100 στη μελέτη. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της βαθμολογίας του Άρη.

5. Να υπολογίσετε τα  $\chi$  και  $\psi$ , χρησιμοποιώντας τα σχήματα και τα δεδομένα στο καθένα από αυτά.

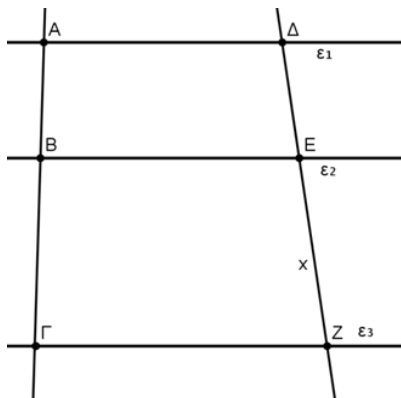
1)  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$

$AB = 3\text{cm}$

$AG = 9\text{cm}$

$\Delta E = 4\text{cm}$

$EZ = \chi$

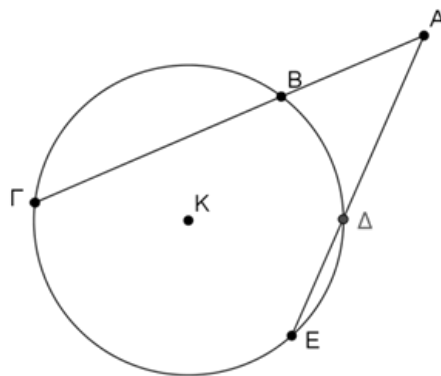


2)  $AB = 2\text{cm}$

$AD = 3\text{cm}$

$\Delta E = 1\text{cm}$

$B\Gamma = \psi$



6. Χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής,

1) Να κάνετε τις πράξεις  $3\sqrt{3} - 4\sqrt{27} + 2\sqrt{48}$ ,

2) Να μετατρέψετε την παράσταση  $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$  σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή,

3) Αν  $\alpha, \beta$  είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, με  $\alpha < \beta$ , να συγκρίνετε τους αριθμούς

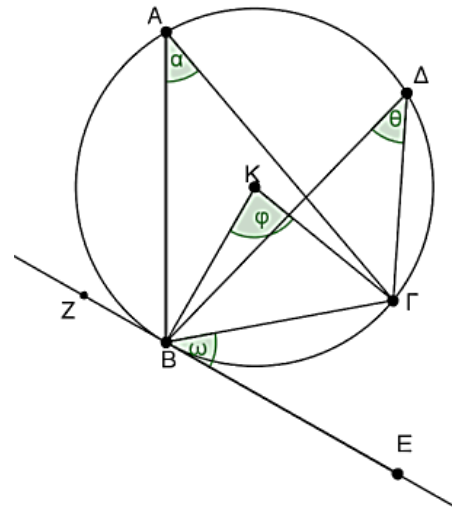
$$A = \frac{4}{\alpha} - 2 \text{ και } B = \frac{4}{\beta} - 2.$$

7. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο κύκλος (Κ,Ρ). Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Ε, Β και Ζ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Β και το τόξο ΒΓ είναι ίσο με  $80^\circ$ .

Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\theta}$ ,  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\omega}$ ,  $\hat{K}\hat{\Gamma}B$  και  $\hat{K}\hat{B}Z$ .

Να μεταφέρετε το σχήμα στις κόλλες απαντήσεών σας.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



8. Αν  $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$  και  $90^\circ < \omega < 180^\circ$ , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 10 \times \eta\mu(90^\circ + \omega) + 4 \times \epsilon\varphi(180^\circ - \omega) + 8 \times \tau\epsilon\mu(-\omega) - \frac{\eta\mu(360^\circ - \omega)}{\sigma\upsilon\nu(270^\circ + \omega)}.$$

9. Να αποδείξετε την ταυτότητα  $\frac{\sigma\upsilon\nu^3\omega}{\eta\mu\omega} + \frac{\epsilon\varphi\omega}{\epsilon\varphi^2\omega + 1} = \sigma\varphi\omega$ .

10. Για τους αριθμούς  $\kappa$  και  $\lambda$  ισχύουν οι σχέσεις  $1 < \kappa < 3$  και  $-3 < \lambda < -1$ .

1) Να δείξετε ότι

$$(i) \quad 3 < \kappa - 2\lambda < 9 \text{ και } (ii) \quad -3 < \frac{\kappa}{\lambda} < -\frac{1}{3}$$

2) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω, να δείξετε ότι για την παράσταση

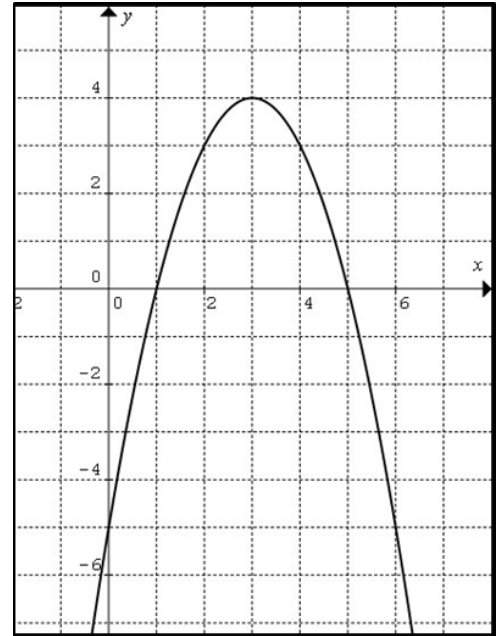
$$A = \kappa^2 + 9 + 4\lambda^2 - 4\kappa\lambda, \text{ ισχύει η σχέση } 18 < A < 90.$$

## **ΜΕΡΟΣ Β' Περιλαμβάνει 5 θέματα.**

**Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{(x^2 - 6x + 5)(x^2 - 1)(2x^2 + 5x + 7)}{(3x - x^2)(x^2 - x - 6)} \geq 0$ .

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ . Από το σχήμα να βρείτε:



- 1) Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της  $f(x)$ ,
- 2) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής  $\Gamma$  της παραβολής,
- 3) Τις τιμές των συντελεστών  $a$ ,  $b$  και  $\gamma$ ,
- 4) Την τιμή του  $f(4)$ , το πρόσημο του  $f(\sqrt{2015})$  και τη λύση της ανίσωσης  $f(x) \geq 0$ ,
- 5) Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ , αν  $A(x_1, 0)$ ,  $B(x_2, 0)$ , όπου  $x_1, x_2$  οι ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

3. Από σημείο  $\Sigma$  εκτός κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη  $\Sigma A$  και την τέμνουσα  $\Sigma B\Gamma$  του κύκλου. Αν  $M$  είναι το μέσο του μικρού τόξου  $B\Gamma$  και  $\Delta$  το σημείο τομής της  $B\Gamma$  με την  $AM$ , να αποδείξετε ότι

- 1)  $(\Sigma A)^2 = (\Sigma B)(\Sigma \Gamma)$
- 2)  $(\Delta A)(M\Gamma) = (A\Gamma)(\Delta B)$

4. 1) Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση  $4\lambda^2 x - 1 = 4x + \lambda^2 + 2\lambda$  για  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$(a + b)x + \gamma x = 6$$

- 2) Αν το σύστημα  $(a - 5)x + (b - \gamma)x = -5$  έχει λύση το σημείο  $(1, 1)$ ,  
 $ax + 2(b + \gamma)x = 10$

να υπολογίσετε τις τιμές των  $a$ ,  $b$  και  $\gamma$ .

5. Δίνεται η εξίσωση  $(1 - \sin^2 \omega)x^2 - \eta \mu \omega \times \sigma \upsilon \nu \omega x - 1 = 0$  με ρίζες  $x_1$  και  $x_2$ , όπου  $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ .

- 1) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για όλες τις τιμές του  $\omega$ .
- 2) Να δείξετε ότι

$$(i) \quad x_1 + x_2 = \sigma \phi \omega, \text{ και } (ii) \quad x_1 \times x_2 = -\sigma \tau \epsilon \mu^2 \omega$$

- 3) Δίνεται η παράσταση  $A = x_1^2 + x_2^2$ . Να δείξετε ότι  $A = 3\sigma \phi^2 \omega + 2$ .

- 4) Να λύσετε την εξίσωση  $A = 5$ .

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2015****ΜΑΘΗΜΑ:** Μαθηματικά**ΤΑΞΗ:** Α΄**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** 26 / 5 / 2015**ΧΡΟΝΟΣ:** 2,5 Ώρες

- ΟΔΗΓΙΕΣ:** α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.  
β) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).  
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

**ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ**

**ΜΕΡΟΣ Α΄** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.  
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να λύσετε την ανίσωση:  $3x^2 - 17x + 10 > 0$
2. Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητό παρονομαστή, **χωρίς την χρήση υπολογιστικής μηχανής**.  
α)  $\frac{2}{\sqrt{6}}$                       β)  $\frac{10}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}$
3. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τους βαθμούς που πήραν 24 μαθητές μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών.

| Βαθμός<br>$\chi_i$ | Αριθμός μαθητών<br>$f_i$ |
|--------------------|--------------------------|
| 8                  | 2                        |
| 9                  | 3                        |
| 10                 | 5                        |
| 12                 | 7                        |
| 15                 | 4                        |
| 16                 | 2                        |
| 19                 | 1                        |

Να υπολογίσετε:

- α) τη μέση τιμή των βαθμών του διαγώνισματος
- β) την τυπική απόκλιση.

4. Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 - x - 3 = 0$  να βρείτε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων:

α)  $x_1 + x_2$

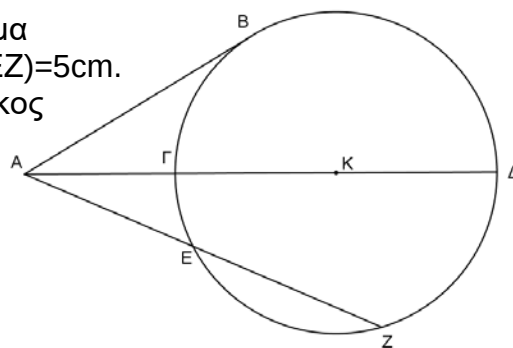
β)  $x_1 \cdot x_2$

γ)  $2x_1 + 5x_1x_2 + 2x_2$

δ)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

ε)  $x_1^3x_2 + x_1x_2^3$

5. Στο διπλανό σχήμα το AB είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (K,R), το (AG)=2cm, (AE)=4cm και (EZ)=5cm. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου και το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος AB.



6. Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \frac{\tan x}{1 + \sin^2 x} = \tan x$ .

7. Να λύσετε την ανίσωση:  $\frac{x^2(x^2 - x - 2)}{(1 - x)(x^2 + 1)} \leq 0$ .

8. Αν  $2 < x < 3$  και  $-2 < \psi < -1$ , να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι

παραστάσεις  $A = 3x - \psi$  και  $B = -\frac{x}{3\psi}$ .

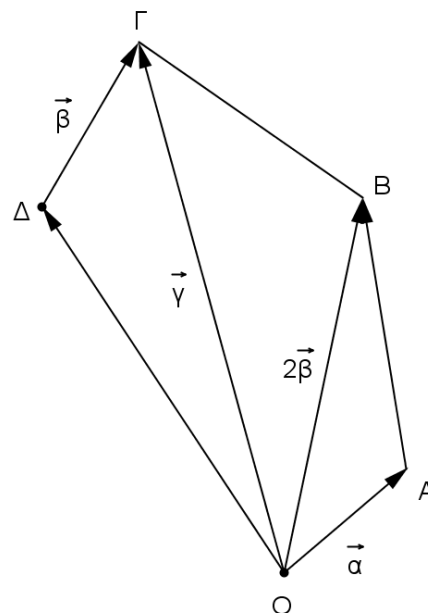
9. Στο διπλανό σχήμα  $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ ,  $\vec{OD} = \vec{\beta}$ ,  $\vec{OB} = 2\vec{\beta}$  και  $\vec{OG} = \vec{\gamma}$ .

Σημείο N βρίσκεται πάνω στην OG, έτσι ώστε  $\frac{(ON)}{(NG)} = \frac{2}{1}$ .

α) Να εκφράσετε συναρτήσει των  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  τα

διανύσματα  $\vec{AB}$ ,  $\vec{OD}$ ,  $\vec{ON}$  και  $\vec{DN}$ .

β) Να δείξετε ότι  $\vec{DB} = 3\vec{DN}$ .



10. Στο διπλανό σχήμα δίνονται: ΓΕ εφαπτομένη του

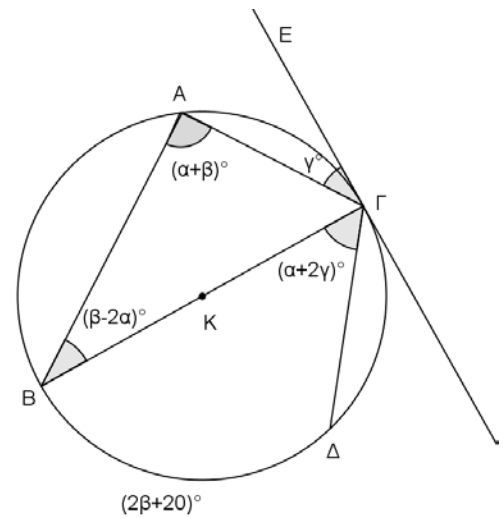
κύκλου (Κ, R),  $\hat{A}\Gamma E = \gamma^\circ$ ,  $\hat{\Gamma A B} = (\alpha + \beta)^\circ$ ,

$\hat{A B \Gamma} = (\beta - 2\alpha)^\circ$ ,  $\hat{B \Gamma \Delta} = (\alpha + 2\gamma)^\circ$ ,

$\square \Delta = (2\beta + 20)^\circ$ .

Να υπολογίσετε τα  $\alpha$ ,  $\beta$ , και  $\gamma$ ,

δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



**ΜΕΡΟΣ Β΄** Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.  
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με τύπο  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ .

Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της  $f(x)$

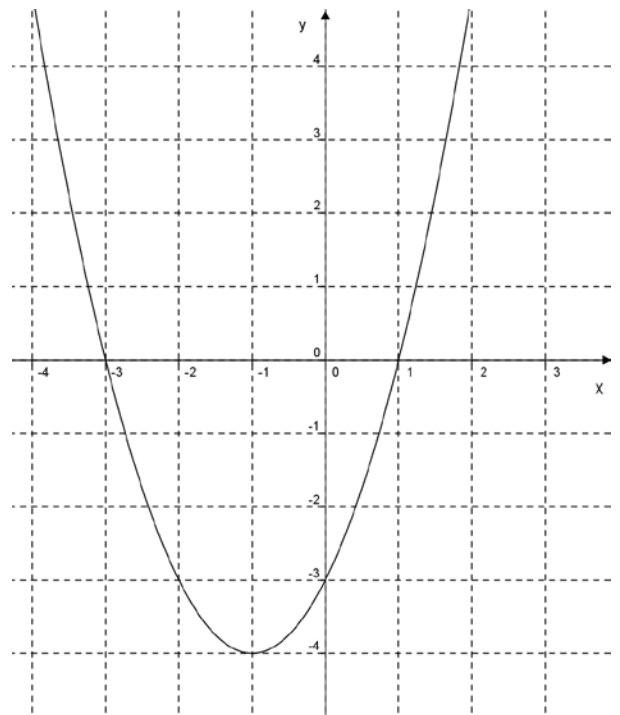
β) το πρόσημο του  $\alpha$  και της διακρίνουσας  $\Delta$

γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής

δ) τις λύσεις της εξίσωσης  $f(x) = 0$

ε) τις λύσεις της ανίσωσης  $f(x) \leq 0$

στ) τις τιμές των παραμέτρων  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ .



2. Δίνεται η εξίσωση  $8x^2 - (\mu - 1)x + \mu - 7 = 0$ . Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$  η εξίσωση έχει:

α) Ρίζα τον αριθμό -2

β) ρίζες αντίθετες

γ) ρίζες αντίστροφες

δ) δύο ρίζες πραγματικές και ίσες

ε) δύο ρίζες ομόσημες θετικές.



3. Τρίγωνο ABΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Η διχοτόμος ΑΕ του τριγώνου ABΓ περνά από το κέντρο του κύκλου και τέμνει τον κύκλο στο Δ. Στο σημείο Γ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου και από το σημείο Δ φέρουμε κάθετη ΔΗ στην εφαπτομένη αυτή (Η είναι σημείο της εφαπτόμενης). Να δείξετε ότι:

α) Η γωνία  $\widehat{HGE}$  διχοτομείται από την ΓΔ

β)  $(\Gamma\Delta)^2 = (\Delta\text{H})(\Delta\text{A})$

4. α) Αν  $\eta\mu\theta = -\frac{8}{17}$  και  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$  να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\frac{34}{5}\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{15}{2}\epsilon\phi\theta}{\frac{16}{17}\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$$

β) Αν ισχύει  $\frac{\eta\mu(180^\circ - \omega) \cdot \epsilon\phi(270^\circ + \omega) \cdot \eta\mu(-\omega)}{\sigma\phi(\omega - 90^\circ) \cdot \sigma\upsilon\nu(360^\circ - \omega)} = -\frac{1}{2}$ , με  $0^\circ < \omega < 90^\circ$  να

υπολογίσετε την γωνία  $\omega$ .

γ) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες  $x_1 = A$  και  $x_2 = \sqrt{3} \cdot \epsilon\phi\omega$ .

5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^2 - (\kappa + \beta)x + (\gamma - 1)\kappa + 1$ , με  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

α) Για ποία τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$  οι ευθείες  $\epsilon_1: \psi = (\alpha + 4)x + \alpha + 3$  και

$\epsilon_2: \psi = \left( \frac{\alpha^2 + 3\alpha + 6}{2} \right)x + 1$  είναι παράλληλες;

β) Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{\beta(6 - \beta)} = 3$ .

γ) Να υπολογίσετε η τιμή της παράστασης  $\gamma = 32^{-\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{32}} \cdot 4^{\frac{3}{2}}$ .

δ) Αν  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3$  και  $\gamma = 4$  να υπολογίσετε τις τιμές του  $\kappa \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε η  $f(x)$  να διατηρεί σταθερό πρόσημο  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

## ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Α΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 03 / 06 / 2015

ΧΡΟΝΟΣ: 2.30΄

ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΚΑΘΗΓΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ: .....

ΒΑΘΜΟΣ ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ: .....

|     |    |
|-----|----|
|     |    |
| 100 | 20 |

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ..... ΤΜΗΜΑ: .... ΑΡ.: ...

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Να γράψετε τις απαντήσεις σας πάνω στο εξεταστικό δοκίμιο.
2. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
3. Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.

**Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δέκα ( 10 ) σελίδες.****ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

α)  $\frac{3}{\sqrt{2}}$

β)  $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

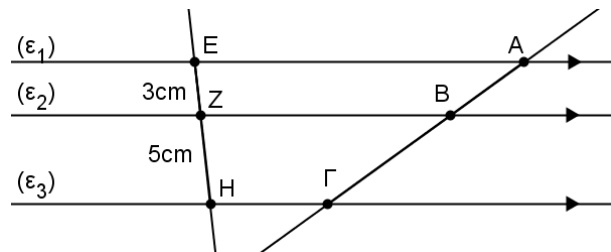
2. Να λύσετε την ανίσωση:  $x^2 - 5x + 4 < 0$

3. Να λύσετε το σύστημα: 
$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x - 3y = 3 \\ 7x - 3y = -5 \end{cases}$$

4. Στα λύκεια ο βαθμός σε ένα εξεταζόμενο μάθημα, συνυπολογίζεται από τους βαθμούς των δύο τετραμήνων με βαρύτητα 35% στο κάθε τετράμηνο και της τελικής εξέτασης με βαρύτητα 30%. Ένας μαθητής πήρε στα Νέα Ελληνικά το Α' τετράμηνο 16, το Β' τετράμηνο 18 και στην τελική εξέταση 17. Ποιος θα είναι ο τελικός του βαθμός στα Νέα Ελληνικά;

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι  $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$ .

Αν  $(EZ) = 3 \text{ cm}$ ,  $(ZH) = 5 \text{ cm}$  και  $(A\Gamma) = 16 \text{ cm}$ ,  
να υπολογίσετε το μήκος του  $AB$ .



6. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  και  $\vec{c} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ .

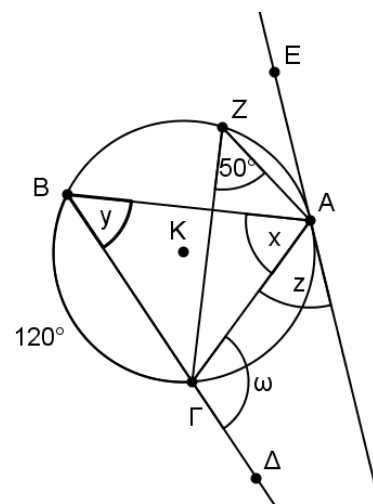
Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο του διανύσματος  $\vec{c}$ .

β) τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{a} - \vec{b}$ .

γ) τις τιμές των  $x$  και  $y$  αν  $\vec{c} = \vec{a}$ .

7. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος  $(K,R)$ . Η  $AE$  είναι εφαπτομένη του κύκλου στο  $A$  και η  $B\Gamma\Delta$  είναι ευθεία. Αν η  $\angle A = 50^\circ$  και το τόξο  $\widehat{AB} = 120^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{\omega}$ .



8. Αν  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  και  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:  $\frac{5 \cos \theta}{4 \sin \theta}$

9. Αν  $2 < x < 7$  και  $-4 < y < -1$  να δείξετε ότι :

α)  $-6 < x+2y < 5$

β)  $-28 < x \cdot y < -2$

10. Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $\frac{(1+\sqrt{x})^2}{x} - \frac{1}{x} = 2 \frac{1}{x}$

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.**

**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Στο σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της παραβολής  $f(x) = \frac{5}{x} + 2$ .  
Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της  $f(x)$ .

β) Το πεδίο τιμών της  $f(x)$ .

γ) Την κορυφή της  $f(x)$ .

δ) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της  $f(x)$ .

ε) i) Το πρόσημο του  $\alpha$ .

ii) Το πρόσημο της διακρίνουσας  $\Delta$  της εξίσωσης  $f(x)=0$ .

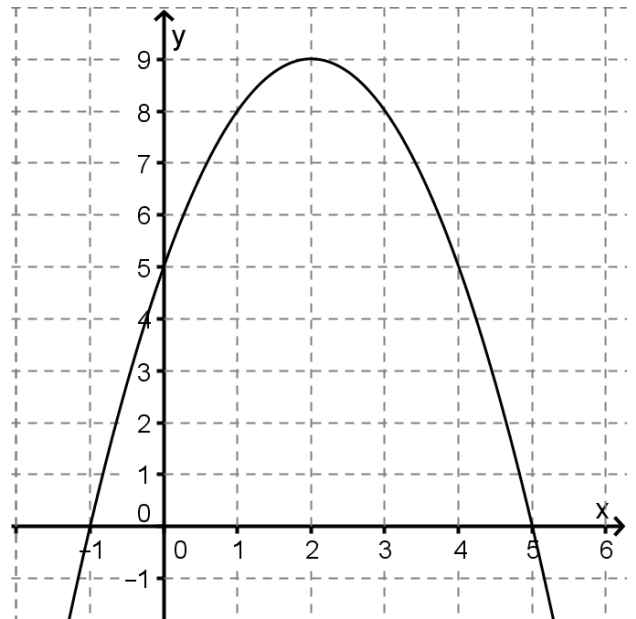
στ) Τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x)=0$ .

ζ) Τις τιμές του  $x$  για τις οποίες ισχύει  $f(x) \geq 0$ .

η) Την τιμή του  $\gamma$ .

θ) Την τιμή του  $\alpha$ .

ι) Την τιμή του  $\beta$ .



2. Δίνεται η εξίσωση  $\left(\frac{\kappa}{-3}x\right)^2 + \dots$  με  $\kappa \neq 3$  και ρίζες  $x_1$  και  $x_2$ .

α) Να βρείτε την τιμή του  $\kappa$  ( $\kappa \in \mathbb{R}$ ), ώστε η εξίσωση να έχει:

i. Ρίζες αντίθετες

ii. Ρίζες αντίστροφες

β) Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του  $\kappa$  ώστε να ισχύει η σχέση:  $x_1 + x_1x_2 + x_2 \geq 2$

γ) Αν  $\kappa=6$ , να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες:  $\frac{x_1}{x_2}$  και  $\frac{x_2}{x_1}$ .



3. α) Δίνεται το σύστημα  $\begin{cases} x + y = k \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{k} = 0 \end{cases}$ ,  $k \neq 0$ .

Για ποια πραγματική τιμή του  $k$ , το σύστημα έχει άπειρες λύσεις;

β) Αν το σύστημα  $\begin{cases} x - y = -1 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$  είναι συμβιβαστό,

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $A = 4\alpha + 6\beta - 39$ .

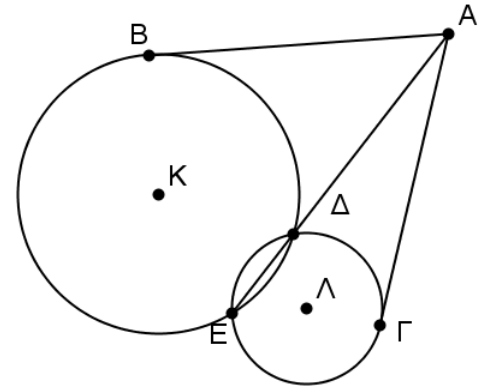
4. Δίνονται δύο κύκλοι  $(K,R)$  και  $(\Lambda,\rho)$  με  $R > \rho$ , οι οποίοι τέμνονται στα σημεία  $\Delta$  και  $E$ . Από σημείο  $A$  πάνω στην προέκταση της κοινής χορδής  $\Delta E$ , φέρουμε τις εφαπτομένες  $AB$  και  $A\Gamma$  στους κύκλους  $(K,R)$  και  $(\Lambda,\rho)$  αντίστοιχα.

α) i) Να δείξετε ότι:  $(AB) = (A\Gamma)$ .

ii) Αν  $(A\Delta) = (6 - \sqrt{20})$  cm,  $(AE) = (6 + \sqrt{20})$  cm

και  $(A\Lambda) = 5$  cm, να δείξετε ότι  $\rho = 3$  cm.

β) Να δείξετε ότι:  $(AB) \cdot (BE) = (AE) \cdot (B\Delta)$ .



5. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ και}$$

$$B = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

α) Να βρείτε τις τιμές των A και B.

β) Αν  $A = 1$  και  $B = 2$ , να λύσετε την εξίσωση  $A \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{\frac{5}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , αν  $x > -\frac{1}{3}$ .

## ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

Μάθημα: **Μαθηματικά Α' Λυκείου**Διάρκεια: **2,5 ώρες**Ημερομηνία: **21.05.2015****Οδηγίες:**

1. Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε ή μαύρο (για τα σχήματα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι).
2. Τα σχήματα των ασκήσεων να αντιγράφονται στη θέση που λύνεται η άσκηση.
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
5. Το δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

**ΜΕΡΟΣ Α' :** Να λύσετε **ΟΛΕΣ** τις ασκήσεις.Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **πέντε** μονάδες από τις **εκατό**.

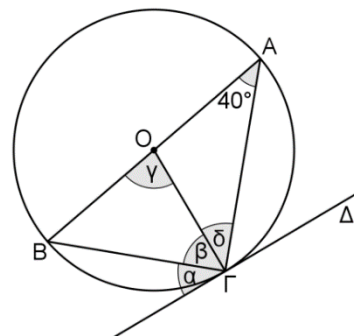
1. Αν η τιμή 16 έχει βαρύτητα 0,4, η τιμή 10 έχει βαρύτητα 0,2 και η τιμή 15 έχει βαρύτητα 0,3 να υπολογίσετε τη μέση τιμή των πιο πάνω τιμών.

2. Αν  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ , να υπολογίσετε:

1) το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

2) το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$

3. Στο διπλανό σχήμα δίνονται  $\widehat{B\hat{A}G} = 40^\circ$ , AB διάμετρος και ΔΓ εφαπτομένη του κύκλου (O,R) στο σημείο Γ. Να υπολογίσετε, **δικαιολογώντας** τις απαντήσεις σας, τις γωνίες α, β, γ και δ.



4. Δίνεται η εξίσωση  $3x^2 - 5x + 6 = 0$ . Αν  $x_1, x_2$  οι ρίζες της εξίσωσης να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

1)  $x_1 + x_2 =$  , β)  $x_1 \cdot x_2 =$  , γ)  $\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2} =$

5. α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\sqrt[5]{a^4} \cdot \sqrt[5]{a^8} \div \sqrt[5]{a^2} =$$

β) Να μετατρέψετε το πιο κάτω κλάσμα σε ισοδύναμο με ρητό παρανομαστή (**χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής**).

$$\frac{6}{3-\sqrt{7}} =$$

6. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$ . Αν  $\alpha < \beta$  να συγκρίνετε τους πιο κάτω αριθμούς:

1)  $A=3\alpha - 5$  ,  $B=3\beta - 5$

2)  $\Gamma=7 - 2\alpha$  ,  $\Delta= 7 - 2\beta$

7. Αν  $\eta\omega = \frac{4}{5}$  και  $90^\circ < \omega < 180^\circ$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{10\sigma\eta\omega - 12\sigma\phi\omega}{\sigma\tau\epsilon\mu\omega}.$$

8. Δίνεται η εξίσωση:  $(\kappa^2 - 1)\chi = 2\kappa + 2$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε:

1) τις τιμές του  $\kappa$  ώστε η εξίσωση να έχει λύση το  $\chi = 1$ ,

2) την τιμή του  $\kappa$  ώστε η εξίσωση να είναι αδύνατη.

9. Να λύσετε το σύστημα: 
$$\begin{cases} \chi - 2\psi = 5 \\ \chi^2 + \psi^2 = 10 \end{cases}$$

10. Να λύσετε την ανίσωση: 
$$\frac{(3\chi - 1) \cdot (\chi + 2) \cdot (\chi^2 - \chi + 1)}{(\chi - \chi^2) \cdot (\chi - 3)^2} \leq 0$$

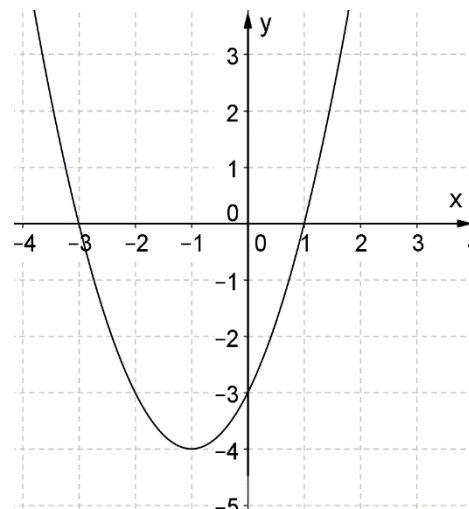
**ΜΕΡΟΣ Β' :** Να λύσετε **ΟΛΕΣ** τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **δέκα** μονάδες από τις **εκατό**.

**1.** Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$ .

Από το σχήμα να βρείτε:

- 1) το πρόσημο του  $a$ ,
- 2) το πρόσημο της διακρίνουσας  $\Delta$ , της εξίσωσης  $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$ ,
- 3) τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής,
- 4) τις ρίζες της εξίσωσης:  $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$ ,
- 5) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας,
- 6) το πεδίο τιμών της συνάρτησης,
- 7) τις τιμές του  $x$  για τις οποίες  $f(x) > 0$ ,
- 8) την τιμή του  $\gamma$ ,
- 9) τις τιμές των  $a$ , και  $\beta$ .



**2.** Οι ευθείες  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_3$  τέμνονται στο σημείο  $A(1,3)$ . Αν οι εξισώσεις των ευθειών είναι :

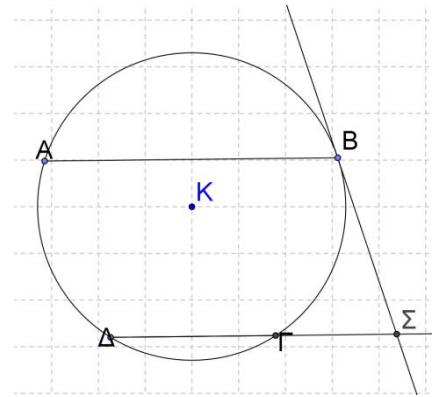
$$\begin{cases} \varepsilon_1 : \alpha x - \beta y = -2 \\ \varepsilon_2 : \beta x - 2\alpha y = -5 \\ \varepsilon_3 : (\kappa + 1)x + \mu y = 9 \end{cases}$$

- 1) Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$
- 2) Να δείξετε ότι  $\kappa^2 + 9\mu^2 = 2(32 - 3\kappa\mu)$

**3.** Δίνονται οι συναρτήσεις:  $f(x) = 3\kappa x^2 - 5(\kappa + 1)x + \kappa(\kappa + 2)$ ,  $\kappa \neq 0$   
 $g(x) = \mu x^2 + (\mu - 2)x - 9\mu$ ,  $\mu \neq 0$

- 1) Να υπολογίσετε το  $\kappa$  ώστε η εξίσωση  $3\kappa x^2 - 5(\kappa + 1)x + \kappa(\kappa + 2) = 0$ ,  $\kappa \neq 0$  να έχει ρίζες αντίστροφες.
- 2) Να υπολογίσετε το  $\mu$  ώστε η εξίσωση  $\mu x^2 + (\mu - 2)x - 9\mu = 0$ ,  $\mu \neq 0$  να έχει ρίζες αντίθετες.
- 3) Αν  $\kappa = 1$  και  $\mu = 2$  να απλοποιήσετε την παράσταση  $\frac{f(x)}{g(x)}$
- 4) Να βρείτε την τιμή του  $\mu$  έτσι ώστε:  $\sqrt{g(4)} = 5$

4. Δίνονται δύο παράλληλες χορδές AB και ΔΓ ενός κύκλου (K, ρ). Στο σημείο B φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου που τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο σημείο Σ.



- 1) Αν  $SB=6\text{cm}$  και  $SD=12\text{cm}$  να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΔΓ.  
2) Να αποδείξετε ότι :  $(BD)^2 = (BA)(SD)$ .

5. Δίνονται οι παραστάσεις:  $A = \frac{\sin(270^\circ - \omega) \cdot \epsilon\phi(180^\circ + \omega) \cdot \eta\mu(360^\circ - \omega)}{\sigma\phi(90^\circ - \omega) \cdot \eta\mu(-\omega)}$

$$B = \frac{\eta\mu\omega}{1 - \sigma\upsilon\nu\omega} - \sigma\phi\omega$$

- 1) Να δείξετε ότι  $A = -\eta\mu\omega$  και  $B = \sigma\tau\epsilon\mu\omega$   
2) Αν ισχύει ότι  $A^2 \cdot B = \frac{1}{2}$  να βρείτε την τιμή του  $\omega$  στο διάστημα  $0^\circ < \omega < 90^\circ$ .

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

Τάξη: Α΄

Μάθημα: Μαθηματικά

Βαθμός: .....

Χρόνος: 2 ώρες

Ημερομηνία: 10/6/2014

Υπογραφή: .....

Όνομα μαθητή/τριας: ..... Τμήμα: ..... Αρ.: .....

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
1. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.
  2. Να γράφετε με στυλό μπλε ή μαύρο. (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
  3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από εννιά (9) σελίδες.

**Μέρος Α΄** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄ .  
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α)  $(-7) + (+2) =$

(β)  $-8 - 7 =$

(γ)  $(-3) \cdot (-4) =$

(δ)  $(-20) \div (+5) =$

2. (α) Να μετατρέψετε τον αριθμό  $101101_{(2)}$  από το δυαδικό στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

(β) Να γράψετε τους πιο κάτω αριθμούς σε μορφή δύναμης, με εκθέτη μεγαλύτερο του ένα.

(i) 27

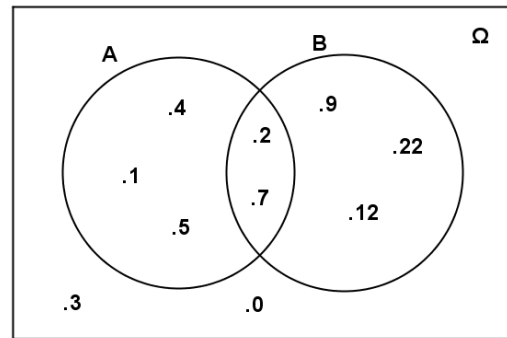
(ii) 64



3. Με τη βοήθεια του διπλανού διαγράμματος:

(α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο  $A$ .

(β) Να βρείτε τον **πληθικό** αριθμό  $n(A \cup B)$ .



4. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

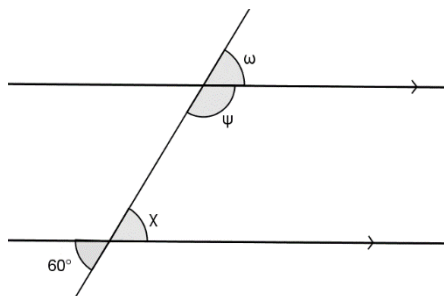
$$A = 5 \cdot 2^3 + (-5 + 3)^3 + (-4)^2 \div (-2)^0$$

5. Να λύσετε την εξίσωση:

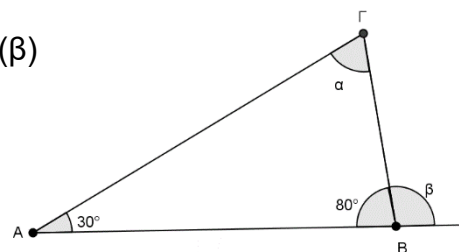
$$6 + 5 \cdot (\chi - 4) = 3\chi - 2$$

6. Στα πιο κάτω σχήματα να βρείτε τις γωνίες  $\chi$ ,  $\psi$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$  και  $\beta$  χωρίς μοιρογνώνιο. Χρησιμοποιήστε εξισώσεις και δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

(α)



(β)



7. Ο κύριος Γιάννης ψώνισε **10** φρούτα και τα έβαλε όλα στο ίδιο καλάθι. Τα **5** από αυτά ήταν πορτοκάλια, τα **3** ήταν μήλα και τα **υπόλοιπα** ροδάκινα.

(α) Αν πάρει ένα φρούτο από το καλάθι ποια η πιθανότητα:

(i) A: Να είναι ροδάκινο

(ii) B: Να **μην** είναι μήλο.

(iii) Γ: Να είναι σύκο.

[3 M]

(β) Πόσα φρούτα τουλάχιστο πρέπει να πάρει για να είναι βέβαιος ότι ένα από αυτά θα είναι μήλο;

[2 M]

8. Το 70% του σώματος του ανθρώπου αποτελείται από νερό. Να βρείτε πόσα kg νερό περιέχει το σώμα ενός ατόμου που ζυγίζει 80 kg.

9. Δίνεται η αλγεβρική παράσταση:  $A = 6 \cdot (2 + \chi) - 3\chi - (5\psi - 3) + 8\psi$

(α) Να την γράψετε στη πιο απλή της μορφή.

[3 M]

(β) Αν  $\chi + \psi = 12$ , να βρείτε την αριθμητική τιμή της.

[2 M]

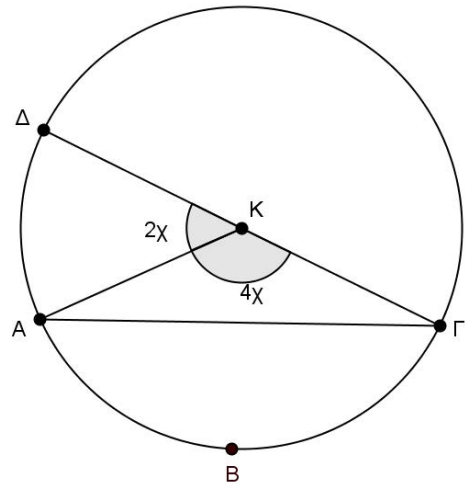
10. Στο διπλανό σχήμα, να βρείτε:

(α) Το  $\chi$ . [2 M]

(β) Τις **γωνίες** του τριγώνου ΚΑΓ. [2 M]

(γ) Το **μέτρο** του τόξου ΑΒΓ. [1 M]

Να δικαιολογήσετε όλες τις απαντήσεις σας.



**ΜΕΡΟΣ Β´**    **Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β´.**  
**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Δίνεται ο τύπος της συνάρτησης  $\psi = \chi + 3$ .

(α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της πιο πάνω συνάρτησης.

| Τιμή εισόδου<br>$\chi$ | Τιμή εξόδου<br>$\psi$ | Διατεταγμένα ζεύγη<br>( $\chi, \psi$ ) |
|------------------------|-----------------------|----------------------------------------|
| -5                     |                       |                                        |
| -3                     |                       |                                        |
| 0                      |                       |                                        |
| 2                      |                       |                                        |

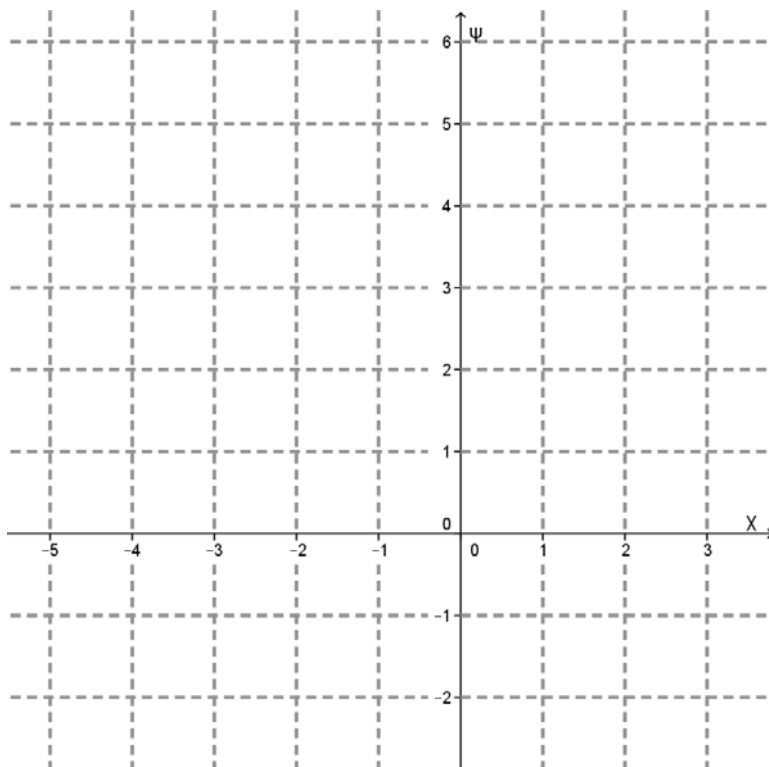
[5 M]

(β) Να τοποθετήσετε τα σημεία που αντιστοιχούν στα διατεταγμένα ζεύγη στο πιο κάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να τα ενώσετε.

[3 M]

(γ) Αν το σημείο **A(κ+1, 4)** ανήκει στη πιο πάνω συνάρτηση, να βρείτε τη τιμή του κ.

[2 M]

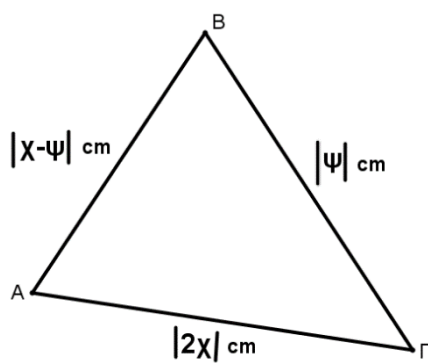


2. (α) Να λύσετε την εξίσωση:  $\frac{\chi}{2} - \frac{\chi-4}{3} = \frac{2\chi-7}{6}$

[6 M]

(β) Αν ο αριθμός  $\chi$  είναι ο **αντίθετος** του **+4** και ο αριθμός  $\psi$  είναι ο **αντίστροφος** του  $-\frac{1}{9}$ , να βρείτε τη περίμετρο του πιο κάτω τριγώνου.

[4 M]



3. (α) Σε μια πολύτεκνη οικογένεια (δηλαδή με 3 παιδιά και άνω), ο πατέρας αγόρασε για τα παιδιά του στην αρχή της σχολικής χρονιάς **60** τετράδια, **28** στυλό και **24** μολύβια. Σε κάθε παιδί δίνει τον ίδιο αριθμό από τετράδια, τον ίδιο αριθμό από στυλό και τον ίδιο αριθμό από μολύβια.

Να βρείτε: (i) Πόσα παιδιά έχει η οικογένεια.

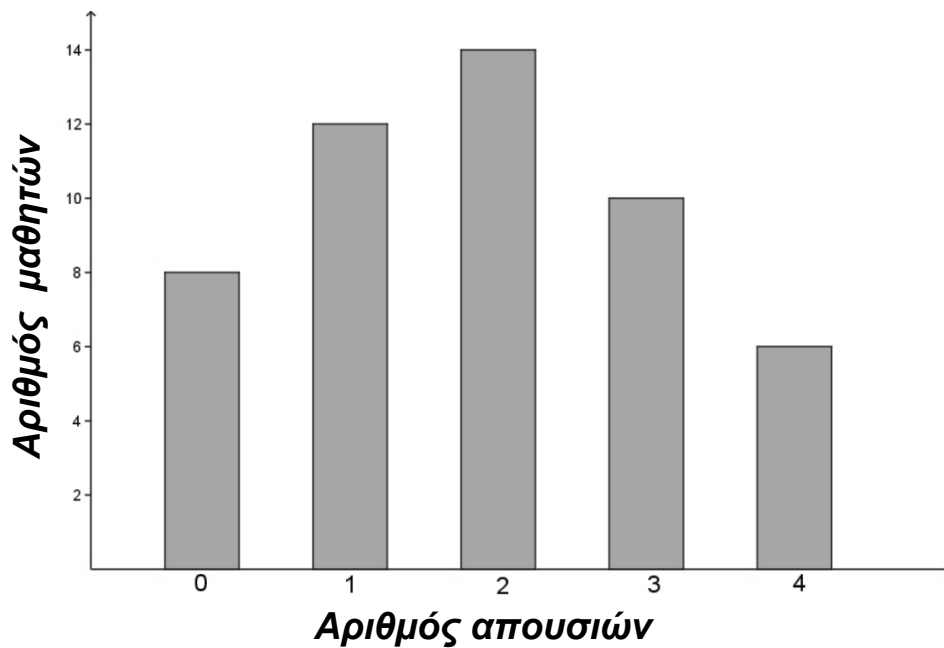
(ii) Πόσα τετράδια, πόσα στυλό και πόσα μολύβια πήρε κάθε παιδί.

[8 M]

- (β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τριών διαδοχικών αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 3.

[2 M]

4. Ρωτήσαμε μερικούς μαθητές ενός γυμνασίου πόσες ημέρες απουσίαζαν από το σχολείο τον τελευταίο μήνα. Οι απαντήσεις φαίνονται στο πιο κάτω ραβδόγραμμα.



- (α) Να κάνετε πίνακα συχνοτήτων. [3 M]
- (β) Να βρείτε πόσοι μαθητές έλαβαν μέρος στην έρευνα. [2 M]
- (γ) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που απουσίασαν από το σχολείο τον τελευταίο μήνα **τουλάχιστο** 2 ημέρες. [3 M]
- (δ) Τι ποσοστό των μαθητών **δεν** έκανε απουσίες τον τελευταίο μήνα; [2 M]

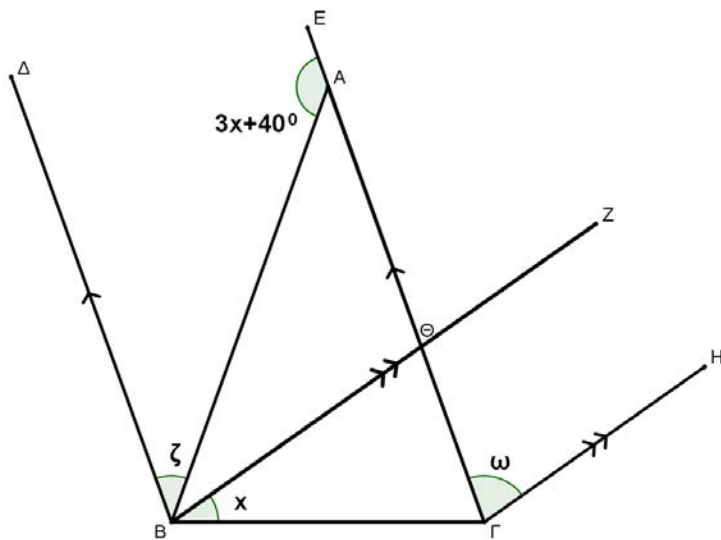
5. Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι **ισοσκελές** ( $AB = A\Gamma$ ),  $B\Delta \parallel \Gamma E$ ,  $BZ \parallel \Gamma H$  και  $BZ$  είναι **διχοτόμος** της γωνίας  $AB\Gamma$ .

(α) Να υπολογίσετε την τιμή του  $\chi$ . [4 M]

(β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του **τριγώνου  $AB\Gamma$**  και τις γωνίες  $\omega$  και  $\zeta$ . [4 M]

(γ) Να βρείτε το είδος του τριγώνου  **$AB\Theta$**  ως προς τις **γωνίες** και ως προς τις **πλευρές** του. [2 M]

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



Η Διευθύντρια,

Ανδρεανή Στυλιανίδου



5. Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι **ισοσκελές** ( $AB = A\Gamma$ ),  $B\Delta \parallel \Gamma E$ ,  $BZ \parallel \Gamma H$  και  $BZ$  είναι **διχοτόμος** της γωνίας  $AB\Gamma$ .

(α) Να υπολογίσετε την τιμή του  $\chi$ . .

[4 M]

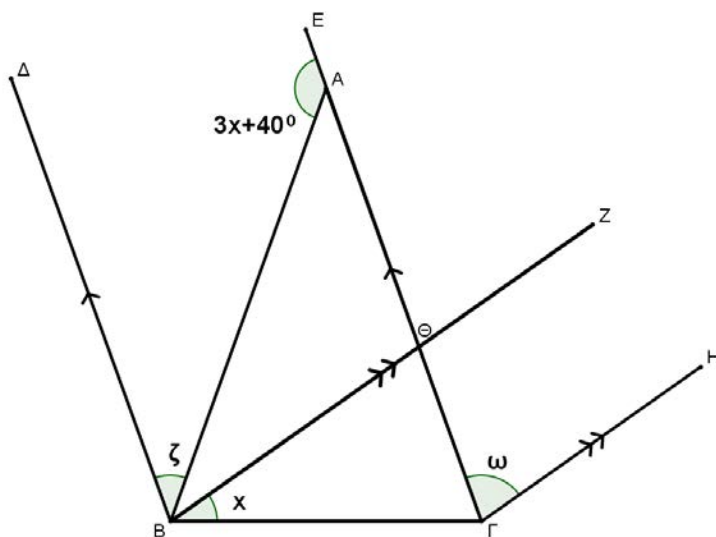
(β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του **τριγώνου  $AB\Gamma$**  και τις γωνίες  $\omega$  και  $\zeta$ . .

[4 M]

(γ) Να βρείτε το είδος του τριγώνου  **$AB\Theta$**  ως προς τις **γωνίες** και ως προς τις **πλευρές** του.

[2 M]

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.





**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2015**

**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΤΑΞΗ: Α΄ Λυκείου**

**Ημερομηνία: 22/5/2015**

**ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ΩΡΕΣ**

**Ωρα: 08:00 – 10:30**

**ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:** \_\_\_\_\_

**ΤΜΗΜΑ:** \_\_\_\_\_

**ΒΑΘΜΟΣ:**

**Αριθμητικά:** \_\_\_\_\_

**Ολογράφως:** \_\_\_\_\_

**Υπογραφή:** \_\_\_\_\_

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- 1) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- 2) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι ( τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
- 3) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

**ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΔΕΚΑ (10) ΣΕΛΙΔΕΣ**

**Μέρος Α΄:** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Να μετατρέψετε το κλάσμα  $K = \frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$  σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

2. Να σχηματίσετε εξίσωση β΄ βαθμού με ρίζες  $x_1 = 5$  και  $x_2 = -3$ .

3. Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{x+4}{3-x} > 0$ .

4. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ . Να υπολογίσετε:

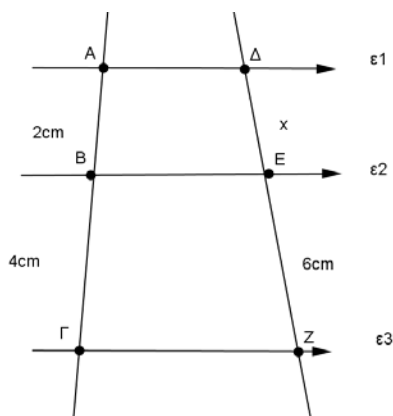
α) τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και

β) το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\alpha}$ .

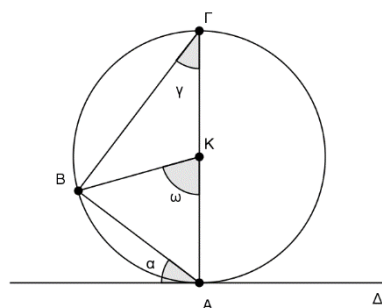
5. Αν  $-5 < x < -2$  και  $5 < y < 8$ , να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α)  $x + y$  και β)  $2xy$

6. Στο πιο κάτω σχήμα  $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$ . Αν  $AB = 2 \text{ cm}$ ,  $B\Gamma = 4 \text{ cm}$ ,  $\Delta E = x \text{ cm}$  και  $EZ = 6 \text{ cm}$ , να υπολογίσετε το  $x$ .



7. Δίνεται κύκλος με κέντρο  $K$  και Διάμετρο  $ΑΓ$ . Αν η γωνιά  $\alpha = 40^\circ$  και η  $ΑΔ$  είναι η εφαπτομένη του κύκλου, να υπολογίσετε τις γωνίες  $\gamma$  και  $\omega$ , δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



8. Να συμπληρώσετε τα κενά:

α) Αν  $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{4}{7}$  τότε  $\varepsilon\varphi(180^\circ + \varphi) = \dots\dots\dots$

β) Αν  $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{2}{3}$  τότε  $\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) = \dots\dots\dots$

γ) Αν  $\varepsilon\varphi\theta = \frac{3}{4}$  τότε  $\sigma\varphi(90^\circ + \theta) = \dots\dots\dots$

δ) Αν  $\eta\mu\theta = \frac{12}{13}$  τότε  $\sigma\tau\epsilon\mu\theta = \dots\dots\dots$

**9.** Αν το πιο κάτω σύστημα είναι συμβιβαστό, να βρείτε την τιμή του  $a$ .

$$3x + 2y = 8$$

$$x - 3y = -1$$

$$5ax + 2ay = 36$$

**10.** Να δείξετε ότι:

$$\sigma\phi^2x \cdot \eta\mu^2x + \epsilon\phi^2x \cdot \sigma\upsilon\nu^2x = 1$$

**Μέρος Β΄:** Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

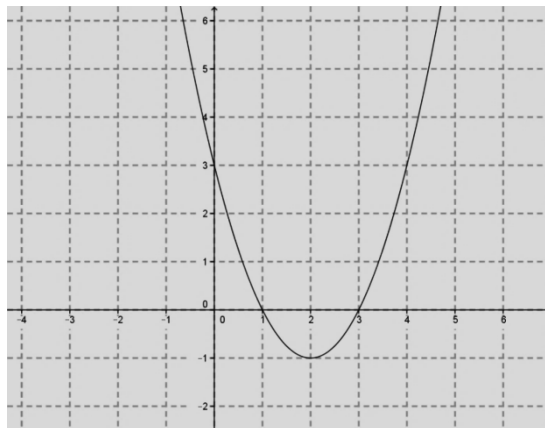
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνετε η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ . Να βρείτε :

α) το πρόσημο του  $a$

β) το πεδίο ορισμού (π.ο) και το πεδίο τιμών (π.τ) της  $f(x)$

γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας



δ) το είδος της κορυφής της και τις συντεταγμένες του

ε) της ρίζες  $x_1, x_2$  της εξίσωσης  $ax^2 + bx + \gamma = 0$

στ) το πρόσημο της διακρίνουσας της εξίσωσης  $ax^2 + bx + \gamma = 0$

ζ) τις τιμές του  $x$  για τις οποίες  $ax^2 + bx + \gamma \leq 0$

η) την τιμή του  $\gamma$

θ) την τιμή του  $a$

ι) την τιμή του  $\beta$ .

2. Τα τέρματα που πέτυχαν οι διάφορες ομάδες σε μια αγωνιστική του πρωταθλήματος ποδοσφαίρου ήταν:

0, 2, 1, 3, 2, 2, 3, 3, 1, 3

Να βρείτε:

α) Τα τρία βασικά μέτρα θέσης (μέση τιμή, διάμεσο, επικρατούσα τιμή).

β) Το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.



3. Δίνετε η εξίσωση  $x^2 - \lambda x + \lambda + 3 = 0$ . Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , η εξίσωση έχει:

α) μια ρίζα τον αριθμό 3

β) ρίζες αντίθετες

γ) ρίζες αντίστροφες

δ) ρίζες πραγματικές.

4. Δίνεται η εξίσωση  $(\mu^2 - 9)x = \mu + 3$  . Να βρείτε :

α) Για ποια τιμή του  $\mu$  η εξίσωση είναι αόριστη.

β) Για ποια τιμή του  $\mu$  η εξίσωση είναι αδύνατη.

γ) Για ποιες τιμές του  $\mu$  έχει μόνο μια λύση.

δ) Αν  $\mu=2$  ποια είναι η λύση της εξίσωσης;

$$5. \text{ Αν } \frac{\eta\mu(180^\circ - \theta) \cdot \eta\mu(90^\circ + \theta) \cdot \varepsilon\varphi(180^\circ - \theta)}{\eta\mu(-\theta)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{και} \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ,$$

να βρείτε τις πιθανές τιμές της γωνιάς  $\theta$ .

**ΟΔΗΓΙΕΣ:** Να γράψετε μόνο με **μπλε ή μαύρο** μελάνι (μόνο τα σχήματα με μολύβι).

Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.

Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **4 σελίδες**.

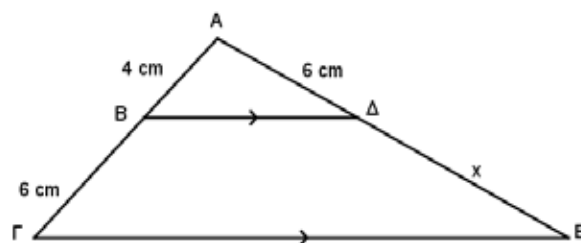
**ΜΕΡΟΣ Α' :** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις .

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να λύσετε την ανίσωση:  $x^2 - 5x + 4 < 0$ .

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι  $B\Delta \parallel \Gamma E$ ,  $AB = 4\text{ cm}$ ,  
 $A\Delta = 6\text{ cm}$  και  $B\Gamma = 6\text{ cm}$ .

Να υπολογίσετε το μήκος του  $\Delta E$ .



3. Να μετατρέψετε την παράσταση  $\frac{7}{3 - \sqrt{2}}$  σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή.

4. Στον πιο κάτω πίνακα φαίνεται η κατανομή των τερμάτων που πέτυχε μια ομάδα ποδοσφαίρου σε 15 αγώνες πρωταθλήματος.

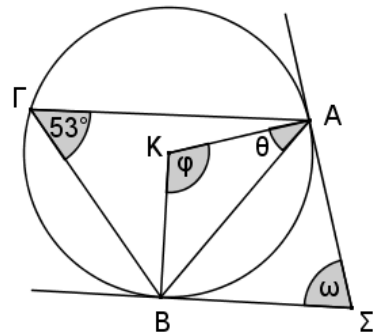
| Αριθμός<br>τερμάτων ( $x_i$ ) | Αριθμός<br>ομάδων( $f_i$ ) |
|-------------------------------|----------------------------|
| 0                             | 2                          |
| 1                             | 4                          |
| 2                             | 3                          |
| 3                             | 4                          |
| 4                             | 2                          |

Να υπολογίσετε: α) τη μέση τιμή ( $\bar{x}$ ) και  
β) την τυπική απόκλιση ( $\sigma$ ).

5. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

Να υπολογίσετε: α) τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$   
 β) το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ .

6. Στο διπλανό σχήμα,  $K$  είναι το κέντρο του κύκλου,  $\Sigma A$  και  $\Sigma B$  οι εφαπτομένες του στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα. Αν  $\angle BPA = 53^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες  $\varphi$ ,  $\theta$  και  $\omega$ .  
 (να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)



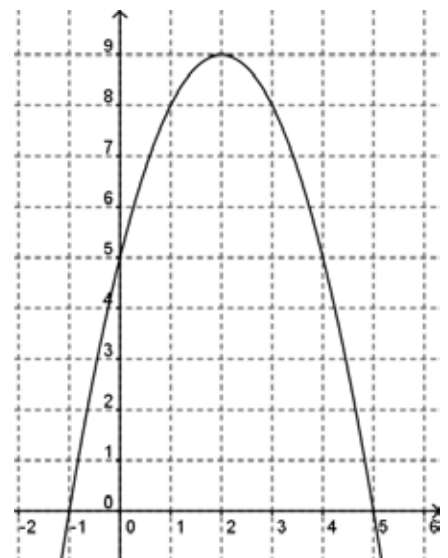
7. Αν  $\cot \theta = \frac{5}{12}$  και  $180^\circ < \theta < 270^\circ$ , να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{39 \times \mu\theta - 10 \times \sigma\phi\theta}{12 \times \epsilon\mu\theta}$$

8. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής  $y = ax^2 + bx + c$ .

Να βρείτε:

- α) το πρόσημο του  $a$  και την τιμή του  $c$   
 β) τις ρίζες της εξίσωσης  $ax^2 + bx + c = 0$   
 γ) το είδος και τις συντεταγμένες της κορυφής  
 δ) τις τιμές του  $x$  για τις οποίες  $f(x) \geq 0$ .



9. Αν  $-3 < x < -1$  και  $1 < y < 4$ , να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

- α)  $x + y$      β)  $\frac{y}{x}$

10. Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση  $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ , για  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.**

**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

$$\begin{array}{l} x + y = 1 \\ 1. \text{ α) Να λύσετε το σύστημα } y + \omega = 3 \\ x + \omega = 8 \end{array}$$

β) Να προσδιορίσετε την τιμή του  $\lambda \in R$ , ώστε το πιο κάτω σύστημα να έχει άπειρες λύσεις.

$$\begin{array}{l} y = (\lambda^2 + 1)x + \lambda^2 - 3 \\ y - (3\lambda - 1)x = 1 \end{array}$$

2. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + (1 - \eta\mu\alpha)x - \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 0$

α) Να βρείτε την τιμή του  $\eta\mu\alpha$ , ώστε η πιο πάνω εξίσωση να έχει ρίζες πραγματικές και ίσες.

β) Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της πιο πάνω εξίσωσης, να δείξετε ότι  $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} = \frac{2}{1 + \eta\mu\alpha}$ .

3. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα  $\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu x} + \frac{\epsilon\varphi x}{1 + \epsilon\varphi^2 x} = \sigma\varphi x$ .

β) Αν ισχύει η σχέση  $\frac{\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \alpha) \times \epsilon\varphi(180^\circ - \alpha) \times \sigma\upsilon\nu(90^\circ + \alpha)}{\sigma\upsilon\nu(360^\circ - \alpha) \times \eta\mu(180^\circ + \alpha)} = -3$  και  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , να υπολογίσετε την γωνιά  $\alpha$ .

4. α) Δίνεται η παραβολή  $y = (\lambda + 1)x^2 + (\lambda - 3)x + 3 - \lambda$ . Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$ , ώστε να έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία  $x = \frac{3}{2}$ .

β) Δίνεται η εξίσωση  $(\lambda + 1)x^2 + (\lambda - 3)x + 3 - \lambda = 0$  με ρίζες  $x_1, x_2$ . Για ποιες τιμές του  $\lambda$ :

i) έχει μία ρίζα τον αριθμό  $-2$

ii) έχει ρίζες αντίστροφες

iii) ικανοποιείται η σχέση  $x_1^2 + x_2^2 < 0$

5. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο με διάμετρο  $AB$ . Στο σημείο  $A$  φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου. Η διχοτόμος της γωνίας  $B$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $\Delta$ , τον κύκλο στο  $\Sigma$  και την εφαπτομένη στο  $E$ .
- α) Να δείξετε ότι η  $A\Sigma$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $EAG$ .
  - β) Να δείξετε ότι  $(\Gamma B)(\Sigma E) = (\Gamma \Delta)(\Sigma A)$ .
  - γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $\Delta AE$  είναι ισοσκελές.
  - δ) Αν  $A\Delta = 3cm$  και  $B\Sigma = 8cm$ , να υπολογίσετε την  $\Sigma E$ .



## ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 02 / 06 / 2015

ΤΑΞΗ: Α΄ Ενιαίου Λυκείου

ΧΡΟΝΟΣ: 2:30΄ ώρες

ΩΡΑ: 7:45΄ - 10:15΄

ΟΔΗΓΙΕΣ : (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.

(β) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).

(γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

(δ) Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνεται ο τρόπος επίλυσής τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της επίλυσης τους δε θα λαμβάνονται υπόψη.

(ε) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.

**ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ**

**ΜΕΡΟΣ Α΄ :** Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1.(α) Δίνονται τα διανύσματα  $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  και  $\beta = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\gamma = \alpha + \beta$ .

(β) Να αναφέρετε πότε δύο διανύσματα είναι ίσα.

2. Να λύσετε την εξίσωση:  $(2x + 4)^{\frac{3}{5}} + 3 = 11$ .

3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (Κ,Ρ) και η ευθεία (ε) είναι η εφαπτόμενή του στο σημείο του Β. Δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας να υπολογίσετε τις γωνίες φ, χ, ψ, ω και  $\widehat{ΒΕΔ}$ .

4. Για ποιες τιμές του μ η εξίσωση:  $2x^2 + (\mu - 3)x - \mu + 3 = 0$  έχει ρίζες πραγματικές;

5. Χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, να αποδείξετε ότι:  $\sqrt{\frac{9^{12} + 3^{20}}{9^{11} + 27^6}} = 3$ .

6. Να βρείτε τις τιμές των κ και μ για τις οποίες η συνάρτηση με τύπο:  $f(x) = x^2 - 2(\kappa + 1)x + \mu + 2$  έχει άξονα συμμετρίας το  $x = -3$  και ελάχιστη τιμή το 3.

7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με  $\hat{Α} = 90^\circ$ . Από την κορυφή Α φέρουμε το ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:  $(ΑΔ)^2 = (ΒΔ)(ΓΔ)$ .



8. Το σύστημα 
$$\begin{cases} 4\chi + \psi = 7 \\ 2\chi + 3\psi = 1 \\ \alpha\chi + \beta\psi = -7 \\ \alpha\beta\chi - \beta^2\psi = -3 \end{cases}$$
 είναι συμβιβαστό. Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ , όπου  $\alpha, \beta$  είναι ακέραιοι αριθμοί.

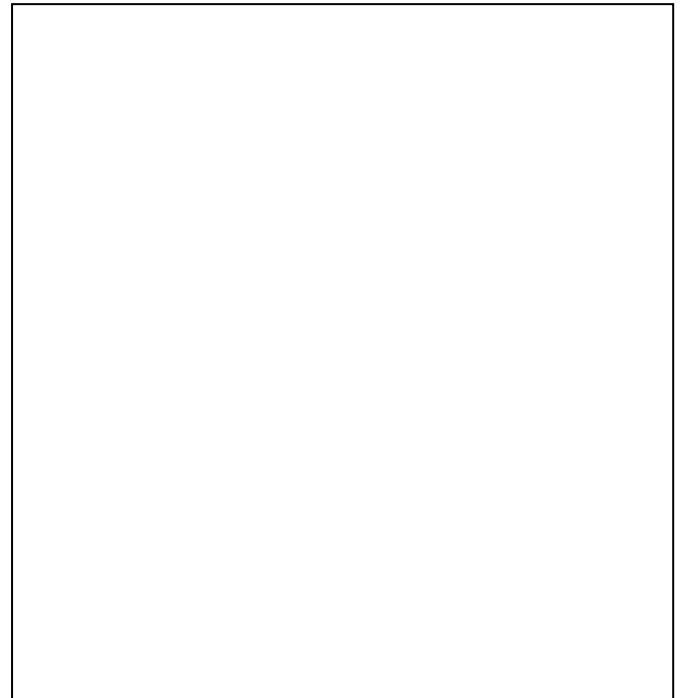
9. Δίνεται η εξίσωση:  $3 \times (2\chi + 3) = 5$  με  $180^\circ < \chi < 270^\circ$ . Χρησιμοποιώντας τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:  

$$= 5\chi - 4\chi + 6\chi$$

10. Να λύσετε και να διερευνήσετε το σύστημα: 
$$\begin{cases} \psi = (\kappa + 2)\chi + 3 \\ \kappa^2\chi - \psi = -2 + \kappa \end{cases}$$
 για τις διάφορες τιμές του  $\chi \in \mathbb{R}$ .

**ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.**  
**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με τύπο  $f(x) = \alpha x^2 + \alpha x + 2$ , με  $\alpha \neq 0$ .  
**Δικαιολογώντας τις απαντήσεις** σας να βρείτε:  
 (α) Το πρόσημο του  $\alpha$ .  
 (β) Το πεδίο τιμών της  $f(x)$ .  
 (γ) Το πρόσημο της παράστασης  $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ .  
 (δ) Τις λύσεις της εξίσωσης  $f(x) = -5$ .  
 (ε) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας.  
 (στ) Τις τιμές του  $\chi$  για τις οποίες ισχύει  $f(x) \leq 0$ .  
 (ζ) Την τιμή της παράστασης:  $\frac{3\beta - 2\gamma + \alpha}{\alpha}$ .  
 (η) Την εξίσωση της παραβολής  $g(x)$  στη μορφή  $g(x) = \alpha(x + \kappa)^2 + \delta$  που προκύπτει, όταν η διπλανή παραβολή μετατοπιστεί 3 μονάδες προς τα δεξιά και 2 μονάδες προς τα κάτω.



- 2.(α) Δίνονται οι ανισότητες  $3 < \alpha < 4$  και  $-5 < \beta < -3$ . Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:  $A = \alpha - \beta$  και  $B = \frac{\alpha}{\beta}$ .  
 (β) Δίνεται ορθογώνιο με πλάτος  $\chi$  και μήκος  $\psi$ , που οι διαστάσεις του ικανοποιούν τις ανισότητες  $2 < \chi < 3$  και  $3 < \psi < 5$ . Εάν αυξήσουμε το πλάτος κατά 2 μονάδες και ελαττώσουμε το μήκος κατά 1 μονάδα, να βρείτε τις δυνατές τιμές της περιμέτρου και του εμβαδού του νέου ορθογωνίου.

3.(α) Δίνονται οι συναρτήσεις:  $f(x) = x^2 + 2x -$

$$g(x) = (3 - \mu)x^2 - 5x + 2, \quad \mu \neq 3 \text{ και } \mu \neq 1$$

i. Να βρείτε την τιμή του  $\mu$ , ώστε η εξίσωση  $g(x) = 0$  να έχει ρίζες αντίστροφες.

ii. Δεδομένου ότι  $\mu=1$  να απλοποιήσετε την παράσταση  $\frac{f(x)}{g(x)}$ .

(β) Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης:  $x^2 - (\lambda + 1)x + 3 = 0$  με  $\lambda \in \mathbb{R}$ , να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  ισχύει η σχέση:  $\frac{x_1 \times x_2}{x_1 + x_2} > 5$ .

4. Δίνονται οι παραστάσεις  $A = \frac{\sin(90^\circ - x) \cdot \eta\mu(360^\circ - x) \cdot \epsilon\varphi(x - 90^\circ)}{\sin(270^\circ - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(x - 180^\circ) \cdot \chi\epsilon\mu(720^\circ + x)}$  και

$$B = (\sin x + \cos x)^2 - 1(270^\circ + x) + 2(-x)(360^\circ + x).$$

(α) Να αποδείξετε ότι  $A = -1$  και  $B = 1$ .

(β) Με τη βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος να αποδείξετε ότι:  $\frac{A+B}{1 - \sin^2 \frac{x}{2} + \chi^{\frac{\pi}{2}}_{\frac{\pi}{2}}} = -1 + \eta\mu x$ .

5. (α) Δίνεται κύκλος (K, R). Από σημείο T εκτός του κύκλου φέρουμε την τέμνουσα TBΓ και την TA εφαπτόμενη του κύκλου. Από το σημείο B φέρουμε παράλληλη προς την ΑΓ, που τέμνει την TA στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι:  $(BT)^2 = (TA)(TE)$ .

(β) Δεδομένου ότι  $TA = 6 \text{ cm}$  και  $B\Gamma = 5 \text{ cm}$  να υπολογίσετε το μήκος του TB.

ΤΕΛΟΣ

Ο Διευθυντής

Σόλων Χαραλάμπους

|           |  |
|-----------|--|
| Βαθμός    |  |
| Ολογράφως |  |
| Υπογραφή  |  |

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

Μαθηματικά

Τάξη Α΄

Ημερομηνία: 29/05/15

Ώρα: 7:45΄

Ημέρα: Παρασκευή

Χρόνος: 2:30΄

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:..... ΤΜΗΜΑ:..... ΑΡΙΘΜΟΣ:.....

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται συνολικά από 4 σελίδες
2. Κατοχή κινητού τηλεφώνου = Δολίευση
3. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού
4. Δεν επιτρέπεται να γράφετε με μολύβι παρά μόνο με μπλε πένα
5. Δεν επιτρέπεται να δανείζεστε οτιδήποτε από συμμαθητές σας
6. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου
7. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι

**ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.**

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$(\sqrt{5})^2 + \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{27} : \sqrt{3} =$$

2. Αν  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων

- 1)  $\vec{a} + \vec{b} =$

- 2)  $\vec{a} - 2\vec{b} =$

3. Να λύσετε την ανίσωση :  $3x^2 - x - 2 > 0$

4. Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $3x^2 - 6x + 2 = 0$ , να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς να λύσετε την εξίσωση.

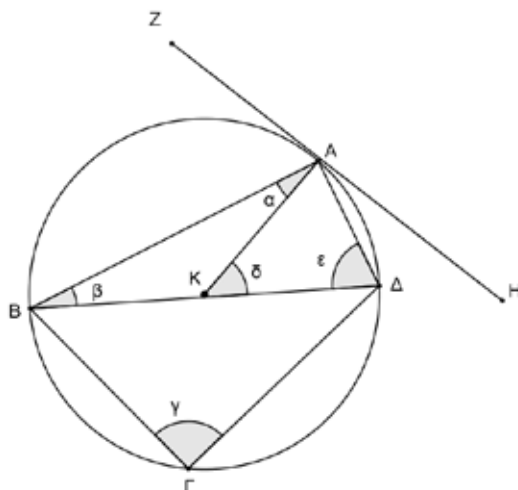
1)  $x_1 + x_2 =$

2)  $x_1 \times x_2 =$

3)  $x_1^2 \times x_2 + x_1 \times x_2^2 =$

4)  $3x_1 + 5x_1x_2 + 3x_2 =$

5. Δίνεται ο κύκλος με κέντρο K και η διάμετρος του BD. Αν η ευθεία ZH είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A και  $\angle ZAB = 70^\circ$  να υπολογίσετε τις γωνίες  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$  δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



6. Να λύσετε την ανίσωση:

$$(7 - c)(c^2 + 16)(c^2 - 6c - 7) \leq 0$$

7. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\sin c - \sin c) \times (1 + \sin c) = \sin c \times \sin^2 c$$

8. Αν το σύστημα: 
$$\begin{cases} 3c - 4y = 2 \\ 2c + 3y = 7 \\ ac - by = 4 \end{cases}$$
 είναι συμβιβαστό (έχει λύση) να υπολογίσετε

την αριθμητική τιμή της παράστασης  $A = 100 + 6a - 3b$ .

9. Αν  $\sin w = -\frac{4}{5}$  και  $90^\circ < w < 180^\circ$ , να δείξετε ότι

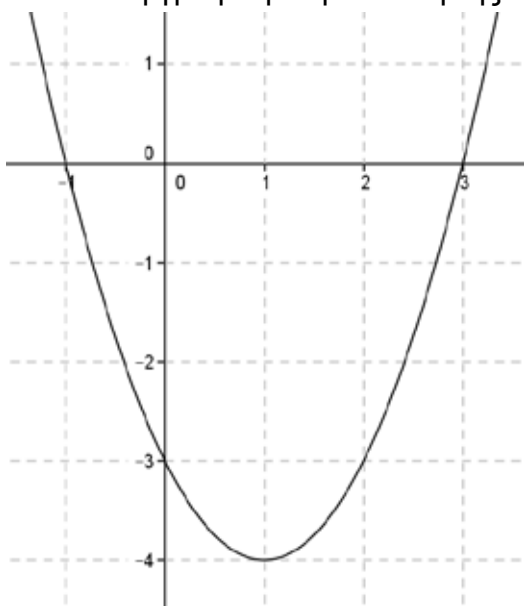
$$\frac{4\cot(180^\circ + w) + 9\tan(90^\circ - w)}{5\cot(270^\circ + w)} = 3$$

10. Για ποιες τιμές της παραμέτρου  $\mu$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  η εξίσωση:  $\mu^2 (x - 1) = x + (2\mu + 1)$

- 1) είναι αδύνατη
- 2) είναι αόριστη
- 3) έχει μοναδική λύση. Να βρείτε τη λύση αυτή.

**ΜΕΡΟΣ Β΄:** Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.  
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = ax^2 + bx + g$ :



Από τη γραφική παράσταση να βρείτε :

- 1) τις λύσεις της εξίσωσης  $f(x) = 0$
- 2) τις συντεταγμένες της κορυφής
- 3) το πεδίο τιμών της συνάρτησης
- 4) το πρόσημο της διακρίνουσας
- 5) το πρόσημο του  $a$
- 6) την τιμή του  $g$
- 7) την τιμή του  $f(2)$
- 8) το πρόσημο του  $f(-2)$
- 9) τις λύσεις της ανίσωσης  $f(x) > 0$
- 10) τις τιμές των  $a$  και  $b$

2. Δίνεται η εξίσωση  $c^2 - (2\lambda - 1)c + \lambda^2 = 0$  με ρίζες  $c_1, c_2$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  σε κάθε μια από τις πιο κάτω περιπτώσεις ώστε:

- 1) η εξίσωση να έχει ρίζες αντίθετες.
- 2) η εξίσωση να έχει ρίζα τον αριθμό  $-1$
- 3) να ισχύει η σχέση  $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} > -1$
- 4) η εξίσωση να έχει ρίζες πραγματικές.

3. Αν  $A = \frac{c}{1 - h \cos \theta} - \frac{c}{1 + h \cos \theta}$

1) Να δείξετε ότι  $A = 2h \sin \theta$

2) Να λύσετε την εξίσωση  $\left( \frac{c}{1 - h \cos \theta} - \frac{c}{1 + h \cos \theta} \right)^2 = 4$  στο διάστημα  $(0^\circ, 360^\circ)$ .

4. Καθηγητής των Μαθηματικών πρότεινε στους μαθητές του να λύσουν ορισμένες ασκήσεις για να εμπεδώσουν την ενότητα που διδάχτηκαν. Όταν αυτοί τον ρώτησαν σε ποια σελίδα είναι γραμμένες οι ασκήσεις, αυτός απάντησε: «Αν ανοίξετε το βιβλίο σας, το άθροισμα των τετραγώνων των δύο διαδοχικών σελίδων μέσα στις οποίες είναι γραμμένες οι ασκήσεις, είναι 181». Να βρείτε σε ποιες σελίδες είναι γραμμένες οι ασκήσεις.

5. Από σημείο Σ εκτός κύκλου φέρουμε τυχαία τέμνουσα ΣΑΒ και την εφαπτομένη ΣΓ του κύκλου (όπου Γ το σημείο επαφής στο μεγάλο τόξο ΑΒ).

1) Να δείξετε ότι  $(SG)^2 = (SA)(SB)$

2) Αν Μ είναι το μέσο του μικρού τόξου ΑΒ και Δ το σημείο τομής της ΓΜ με την ΑΒ να δείξετε ότι  $\angle BGD = \angle MGA$

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2015****ΤΑΞΗ: Α΄****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 21/05/2015****ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2.30΄****ΩΡΑ: 10:45 – 1:15****Οδηγίες:**

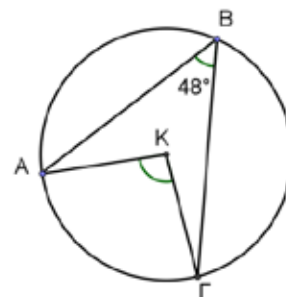
- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- β) Να γράφετε με μελάνι μπλε (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
- δ) Τα σχήματα να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
- ε) Σε όλες τις ερωτήσεις να φαίνεται ο τρόπος απάντησής τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της απαιτούμενης αιτιολόγησης δεν θα λαμβάνονται υπόψη .
- ζ) Να συμμορφώνεστε πρόθυμα με τις οδηγίες των επιτηρητών.
- στ) Η ΔΟΛΙΕΥΣΗ ΤΙΜΩΡΕΙΤΑΙ ΑΥΣΤΗΡΑ

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη, το ΜΕΡΟΣ Α΄ και το ΜΕΡΟΣ Β΄.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.

**ΜΕΡΟΣ Α΄:** Να λύσετε και τα 10 ερωτήματα. Κάθε ερώτημα βαθμολογείται με 5/100.

1. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται κύκλος με κέντρο Κ. Αν η γωνία  $\widehat{AB\Gamma} = 48^\circ$ , τότε να υπολογίσετε τη γωνία  $\widehat{AK\Gamma}$ .



2. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ .
3. Να λύσετε την ανίσωση:  $(x + 6) \cdot (x - 4) \leq 0$ .

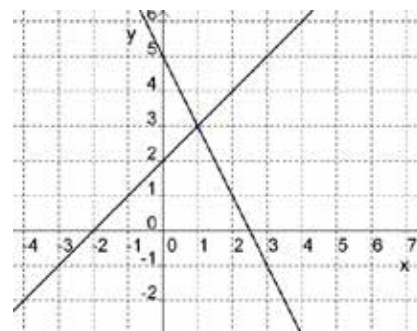
4. α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{4}$  .  
 β) Να μετατρέψετε το κλάσμα  $\frac{3}{\sqrt{5}}$  σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή .
5. Να αποδείξετε ότι:  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \eta\mu(\pi - x) - \epsilon\varphi(-x) - \sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 0$ .
6. Δίνονται οι αριθμοί 3, 5, 1, 10, 2, 9 .  
 Να υπολογίσετε :  
 α) τη μέση τιμή και  
 β) την τυπική απόκλιση των αριθμών .
7. Δίνεται η εξίσωση:  $(\kappa^2 - 4\kappa + 3)x = 9 - \kappa^2$  ,  $\kappa \in \mathbb{R}$  .  
 α) Να βρείτε τις τιμές του  $\kappa$  ώστε η εξίσωση να έχει λύση το  $x = 1$  .  
 β) Για ποιες τιμές του  $\kappa$  η εξίσωση είναι αόριστη ;
8. Αν  $1 < x < 4$  και  $-3 < y < -2$  , να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:  
 α)  $x + y$   
 β)  $xy$
9. Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = x^2 - 2\kappa x + \kappa + 2$  ,  $\kappa \in \mathbb{R}$  και  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$ . Να υπολογίσετε τις τιμές του  $\kappa$  ώστε :  
 α) να ισχύει η ισότητα  $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = -2$  .  
 β) η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  να εφάπτεται του άξονα των  $x$  .

10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση δύο ευθειών .

Αν η λύση του συστήματος των εξισώσεων των δύο ευθειών είναι και λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} \kappa x + (\mu + \lambda)y = 7 \\ (\mu - \kappa)x + \lambda y = 1 \\ -2\mu x + 3\lambda y = 20 \end{cases}$$

να υπολογίσετε τις τιμές των  $\kappa$  ,  $\lambda$  και  $\mu$  .





**ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τα 5 ερωτήματα. Κάθε ερώτημα βαθμολογείται με 10/100.**

1. Να λύσετε την ανίσωση :  $\frac{(x^2-9)(x^2+2x+5)}{(x^2-3x)(2-x)} \geq 0$

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ,  $x \in \mathbb{R}$

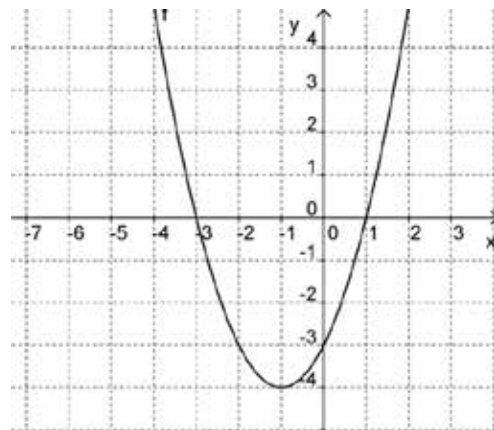
α) να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της,

β) να βρείτε το πρόσημο του  $\alpha$ , της διακρίνουσας ( $\Delta$ ) και των τιμών  $f(0)$ ,  $f(-1000)$ ,

γ) να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας,

δ) να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$  και να υπολογίσετε το άθροισμα (S) και το γινόμενο (P) των ριζών της,

ε) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:  $A = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha^2}$ .



3. Δίνεται κύκλος (K, R) με ακτίνα  $R = \sqrt{13}$  cm, διάμετρο ΒΓ και χορδή  $BA = 4$  cm.

Αν Μ είναι το μέσο της χορδής ΑΓ και η ευθεία ΒΜ τέμνει τον κύκλο και στο Δ, να βρείτε το μήκος του τμήματος ΜΔ.

4. α) Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα :  $\frac{(1 + \epsilon\phi x)^2}{\tau\epsilon\mu x \cdot \eta\mu x} = \tau\epsilon\mu x \cdot \sigma\tau\epsilon\mu x + 2$ .

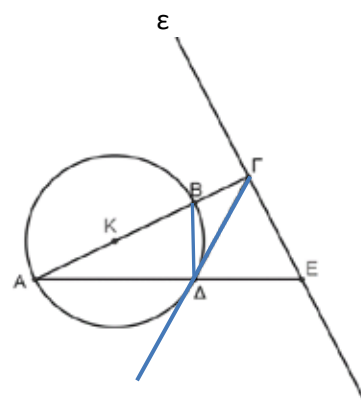
β) Δίνονται οι παραστάσεις:  $A = \frac{\eta\mu\theta}{1 - \sigma\upsilon\nu\theta}$  και  $B = \sigma\tau\epsilon\mu\theta - \sigma\phi\theta$ ,  $0 < \theta < \pi$

i. Να δείξετε ότι:  $A + B = \frac{2}{\eta\mu\theta}$

ii. Αν η εξίσωση  $x^2 + 3x + \frac{1}{\eta\mu\theta} \cdot A = 0$ , έχει ρίζες αντίστροφες

να δείξετε ότι  $\hat{\theta} = \frac{\pi}{2}$ .

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος  $(K, R)$  και  $AB$  μια διάμετρος του κύκλου. Στην προέκταση της  $AB$  προς το μέρος του  $B$  παίρνουμε σημείο  $\Gamma$ . Από το  $\Gamma$  φέρουμε ευθεία  $(\varepsilon)$  κάθετη στην ευθεία  $AB$ . Αν  $\Gamma\Delta$  εφαπτομένη του κύκλου ( $\Delta$  σημείο επαφής) και η ευθεία  $(\varepsilon)$  τέμνει την  $A\Delta$  στο  $E$ , να δείξετε ότι :
- α) i) τα τρίγωνα  $A\Delta\Gamma$ ,  $B\Delta\Gamma$  είναι όμοια  
ii)  $(A\Delta)(B\Gamma) = (\Delta B)(\Delta\Gamma)$   
β)  $(A\Delta)(AE) = (AB)(A\Gamma)$



**Τέλος Δοκιμίου**

## ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Α΄ Ενιαίου Λυκείου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: Τρίτη, 09 Ιουνίου 2015

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

Να γράφετε με μελάνι χρώματος μπλε. Για τα σχήματα επιτρέπεται το μολύβι.

Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται καθαρά και επιμελημένα όλη η αναγκαία εργασία.

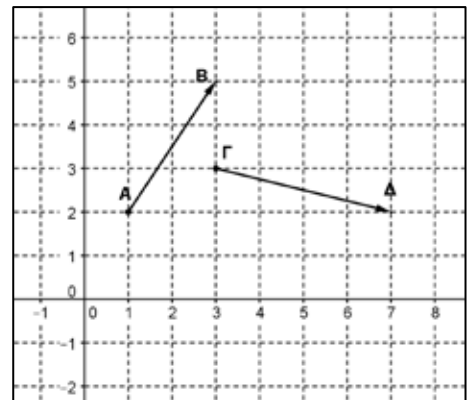
Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού.

**ΜΕΡΟΣ Α΄:** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Στο σχήμα δίνονται τα διανύσματα  $\vec{AB}$  και  $\vec{GD}$ .
  - i) Να γράψετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\vec{AB}$  και  $\vec{GD}$
  - ii) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{v} = 3\vec{AB} + \vec{GD}$



2. Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$ ,  $(x \in \mathbb{R})$  αληθεύει η ανίσωση  $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$
3. Χωράφι σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου έχει πλευρές  $a = \sqrt[4]{y^4 x^8}$  και  $b = \sqrt[3]{y^6}$ ,  $x, y > 0$ . Να υπολογίσετε τη διαγώνιο του χωραφιού αυτού.
4. Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $\tan \omega - \frac{\epsilon \phi^2 \omega}{\tan \omega} = \sin \omega$ .

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (Κ, ρ) με εφαπτομένη ΑΒΓ και τέμνουσα ΓΔΕ.

Αν  $\angle DBE = 40^\circ$  και  $\angle BED = 45^\circ$ ,

να βρείτε τη γωνία  $\angle BGD$ .

6. Δίνεται το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{cases} 2x + y = k + 2 \\ (3k^2 - 1)x + y = 3 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε την τιμή του  $k$  ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις.

7. Να απλοποιήσετε την πιο κάτω παράσταση:

$$A = \frac{\sin(180^\circ - \alpha) \times \sin(270^\circ + \alpha) \times \cos(180^\circ + \alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha) \times \sin(90^\circ + \alpha) \times \sin(-\alpha)}$$

8. Αν ισχύει  $0 < a < b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ανισώσεων, να συγκρίνετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

α)  $C = 2a - 3$ ,  $U = 2b - 3$

β)  $M = \frac{1 - 4a}{3}$ ,  $N = \frac{1 - 4b}{3}$

9. Οι σχέσεις  $Y_A = 3t - 2$  και  $Y_B = \frac{5}{t}$ , όπου  $1 \leq t \leq 12$  ώρες, παρουσιάζουν τον αριθμό των βακτηριδίων  $Y_A$  και  $Y_B$  (σε εκατομμύρια) που παρατηρούνται στις αποικίες Α και Β αντίστοιχα, σε σχέση με το χρόνο  $t$ .

Να βρείτε:

α) τη χρονική στιγμή  $t$  όπου ο αριθμός των βακτηριδίων  $Y_A$  και  $Y_B$  θα είναι ίσος

β) τον αριθμό των βακτηριδίων στις αποικίες Α και Β τη χρονική στιγμή  $t$ .

10. Η εξίσωση  $x^2 - 3x + 10 = 0$  έχει ρίζες τους αριθμούς  $x_1, x_2$ . Να σχηματίσετε εξίσωση

δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς  $p_1 = \frac{1}{x_1^2}$  και  $p_2 = \frac{1}{x_2^2}$

**ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ Α΄**

**ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄**

**ΜΕΡΟΣ Β':** Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

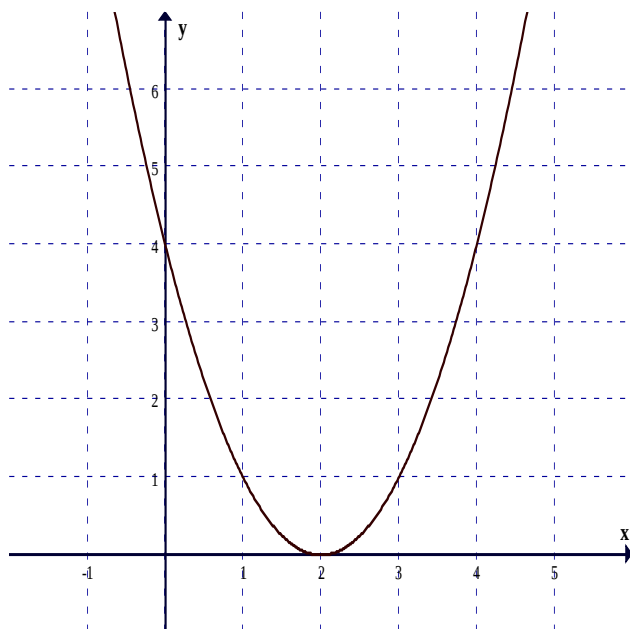
1. Η βαθμολογία 16 μαθητών σε ένα διαγώνισμα ήταν:  
10, 15, 13, 20, 9, 13, 17, 19, 20, 9, 10, 10, 15, 13, 14, 17.

Να υπολογίσετε:

- α) τη μέση τιμή και  
β) την τυπική απόκλιση.

2. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)=ax^2+bx+c$ ,  $a \neq 0$ .

Από τα στοιχεία του σχήματος να βρείτε:



- I. Το πεδίο τιμών της συνάρτησης
- II. Το πρόσημο του  $a$
- III. Την τιμή της διακρίνουσας
- IV. Την τιμή του  $c$
- V. Την τιμή του  $f(4)$
- VI. Τον άξονα συμμετρίας
- VII. Την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης
- VIII. Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης  $f(x)=0$
- IX. Τη λύση της ανίσωσης  $ax^2+bx+c<0$
- X. Το πρόσημο της διακρίνουσας της εξίσωσης  $ax^2+bx+c=6$

3. Να δείξετε ότι το σύστημα είναι συμβιβαστό:
- $$\begin{cases} x \sin \omega + y \eta \mu \omega = 1 \\ x \eta \mu \omega + y \sin \omega = \epsilon \phi \omega, & 0 < \omega < \frac{\pi}{2} \\ x \sin \omega + y = 1 \end{cases}$$

4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ, R).

Να αποδείξετε ότι  $\beta \gamma = 2R \kappa$ , όπου  $\kappa = AZ$  είναι το ύψος που φέρουμε από την κορυφή Α στην πλευρά  $\alpha = \beta\gamma$ .

5. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + \kappa x + \kappa - 1 = 0$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

β) Να βρείτε για ποια τιμή του  $\kappa$ , το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με το διπλάσιο του γινομένου τους.

γ) Να βρείτε για ποιές τιμές του  $\kappa$  ισχύει η σχέση  $x_1 - x_2 = 2$ , όπου  $x_1, x_2$  οι ρίζες της πιο πάνω εξίσωσης.

δ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{S^2 - P}}$

----- ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ -----

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2015****ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**ΤΑΞΗ:** Α΄ Λυκείου**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** Πέμπτη, 21 Μαΐου 2015**ΔΙΑΡΚΕΙΑ:** 2,5 ώρες**ΟΔΗΓΙΕΣ**

- Γράφετε με πέννα μπλε. Τα σχήματα αν θέλετε με μολύβι.
- Επιτρέπεται η χρήση **μη προγραμματιζόμενης** υπολογιστικής μηχανής.
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- Γράφετε καθαρά και ευανάγνωστα γράμματα.
- Να φαίνονται όλες οι ενέργειες που κάνετε.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

**ΜΕΡΟΣ Α΄****Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.**

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες από τις 100.

1. Να λύσετε την ανίσωση :  $x^2 - x - 2 > 0$

2. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

α) Να γράψετε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$

3. Δίνεται η εξίσωση  $3x^2 - x - 6 = 0$ , με ρίζες  $x_1, x_2$ . Χωρίς να τη λύσετε, να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α)  $x_1 + x_2$

β)  $x_1 \cdot x_2$

γ)  $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$

4. Αν  $\eta\mu\theta = \frac{12}{13}$  και  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ , να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = 5\varepsilon\varphi\theta + 10\tau\epsilon\mu\theta - 12\sigma\varphi\theta$$

5. Αν  $\alpha = 3 + \sqrt{6}$  και  $\beta = 3 - \sqrt{6}$ , να αποδείξετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, ότι :

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 2$$

6. Το σύστημα  $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 3y = 16 \\ κx - λy = -2 \end{cases}$  είναι συμβιβαστό. Να αποδείξετε ότι:  $κ = 2λ - 1$ .

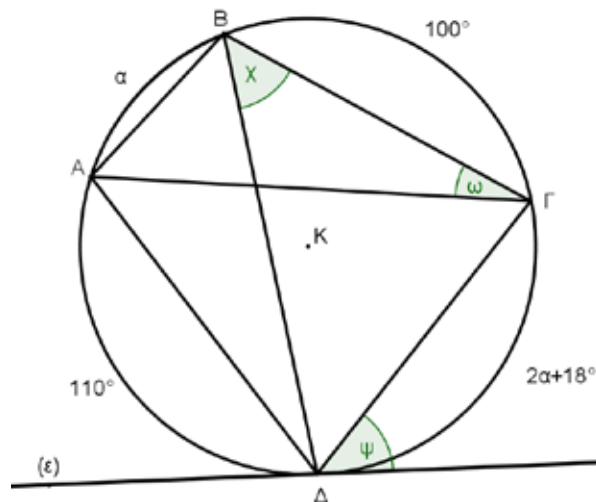
7. Στο διπλανό σχήμα:

Η ευθεία (ε) εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Δ.

Τα τόξα  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BΓ}$ ,  $\widehat{ΓΔ}$ ,  $\widehat{ΔΑ}$  έχουν μέτρα

$\alpha$ ,  $100$ ,  $2\alpha + 18$ ,  $110$  (σε μοίρες), αντίστοιχα.

Να βρείτε τα  $\alpha$ ,  $\chi$ ,  $\psi$ ,  $\omega$ , δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



8. Οι επτά αριθμοί  $\alpha, \beta, 5, 5, 5, 7, 10$  έχουν μέση τιμή  $\bar{x} = 5$ .

Να βρείτε: α) Τα  $\alpha, \beta$  αν γνωρίζετε ότι  $\beta = 2\alpha$

β) Αν  $\alpha = 1$ , να βρείτε την επικρατούσα τιμή, τη διάμεσο και τη τυπική απόκλιση των επτά πιο πάνω αριθμών.

9. Δίνεται η συνάρτηση  $y = f(x) = x^2 + (\mu - 2)x + \mu - 2$ , με  $\mu \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε

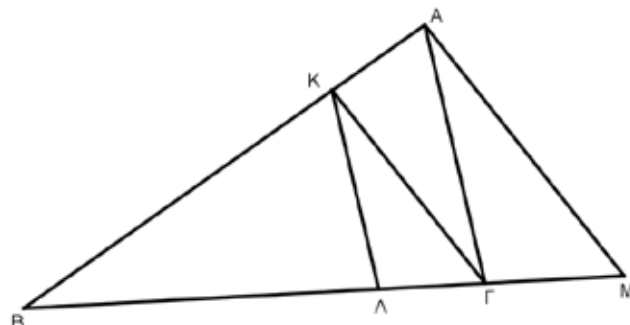
1) τις τιμές του  $\mu$ , για τις οποίες η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ρίζες πραγματικές και ίσες.

2) την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $y = f(x)$ , αν  $\mu = 2$  ή  $\mu = 6$ .

10. Στο διπλανό σχήμα η  $AM$  είναι παράλληλη με

την  $KΓ$  και η  $ΑΓ$  παράλληλη με την  $ΚΛ$ .

Να αποδείξετε ότι  $(BΓ)^2 = (BΛ) \cdot (BM)$ .





## ΜΕΡΟΣ Β΄

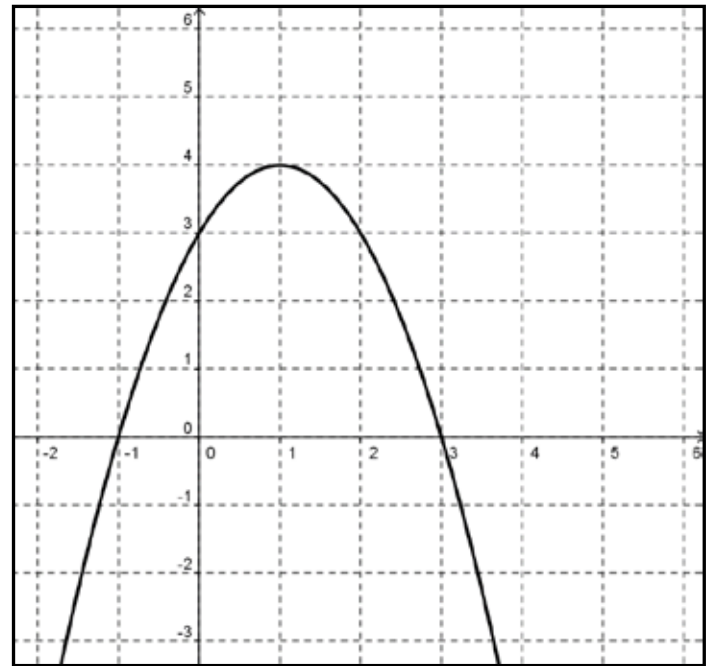
### Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες από τις 100

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$ , είναι η παραβολή του διπλανού σχήματος.

Να προσδιορίσετε τα παρακάτω:

- α) Το πεδίο ορισμού (Π. Ο.) και το πεδίο τιμών (Π.Τ.) της συνάρτησης  $f$ .
- β) Το πρόσημο του  $a$  και της διακρίνουσας  $\Delta$  της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .
- γ) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής
- δ) Τις τιμές του  $x$ , που επαληθεύουν την ανίσωση  $f(x) \geq 0$ .
- ε) Τις τιμές των  $a, \beta, \gamma$



2. Δίνεται η εξίσωση  $2x^2 - (2\kappa - \lambda^2)x + (\kappa - 3\lambda) = 0$ , με παραμέτρους  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ .

- 1) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι αντίστροφες, να δείξετε ότι  $\kappa = 2 + 3\lambda$
- 2) Αν το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης ισούται με  $\frac{9}{2}$ , να δείξετε ότι  $\lambda^2 = 2\kappa - 9$
- 3) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι αντίστροφες και το άθροισμά τους ισούται με  $\frac{9}{2}$ , να υπολογίσετε τις τιμές των  $\kappa, \lambda$ .

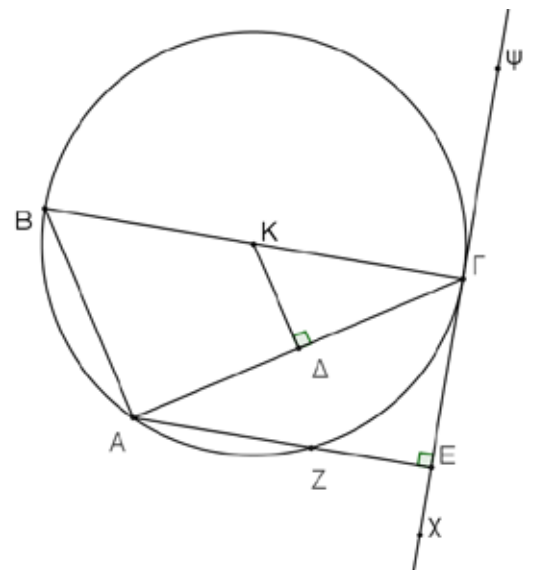
3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος  $(K, R)$

με διάμετρο  $B\Gamma$ . Η  $\chi\Gamma\psi$  είναι εφαπτομένη

του κύκλου στο σημείο  $\Gamma$ ,  $K\Delta \perp A\Gamma$  και  $AE \perp \chi\Gamma\psi$ .

Να αποδείξετε τα παρακάτω, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

- α) i) Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$ ,  $\Delta KA$  είναι όμοια.  
ii)  $(AB) \cdot (KA) = (\Delta K) \cdot (B\Gamma)$
- β)  $(E\Gamma)^2 = (EZ) \cdot (EA)$ .



4. Δίνεται η παράσταση  $A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)-\eta\mu(\pi+\omega)+\sigma\upsilon\nu(\pi-\omega)}{\sigma\varphi(\pi-\omega)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)}$  , με  $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$  .

α) Να δείξετε ότι : i)  $A = \frac{\eta\mu\omega}{1+\sigma\upsilon\nu\omega}$

ii)  $A + \frac{1}{A} = 2\sigma\tau\epsilon\mu\omega$

β) Να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού που έχει ρίζες  $\rho_1 = A$  ,  $\rho_2 = \frac{1}{A}$  και να αποδείξετε ότι

οι ρίζες  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  είναι άνισες, για κάθε  $\omega \in (0, \frac{\pi}{2})$  .

5. Δίνεται η εξίσωση  $(\lambda^2 - 6\lambda - 27)x = \lambda - 9$  , όπου  $\lambda \in R$  παράμετρος.

α) i) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  η εξίσωση είναι αδύνατη.

ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  η εξίσωση είναι αόριστη.

β) Αν η εξίσωση έχει μοναδική λύση, που τη συμβολίζουμε  $x_0$  , να δείξετε ότι  $x_0 = \frac{1}{\lambda+3}$

και να βρείτε : i) Για ποιες τιμές του  $\lambda$  ισχύει  $3 < \frac{1}{x_0} < 8$

ii) Για ποιες τιμές του  $\lambda$  ισχύει  $4x_0 \geq \lambda$  .

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ****ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2015****Τάξη:** Α΄ Ενιαίου Λυκείου**Μάθημα:** Μαθηματικά**Ημερομηνία:** 21 / 05 / 2015**Αρ. σελίδων:** 5**Χρόνος εξέτασης:** 2:30 (δύο ώρες και τριάντα λεπτά)**ΟΔΗΓΙΕΣ**

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 5 σελίδες (συμπεριλαμβανομένης και της 1<sup>ης</sup> σελίδας)

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη.

Το μέρος Α΄ αποτελείται από 10 ασκήσεις από τις οποίες πρέπει να λύσετε ΚΑΙ τις 10.

(Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με **5 μονάδες**)

Το μέρος Β΄ αποτελείται από 5 ασκήσεις από τις οποίες πρέπει να λύσετε ΚΑΙ τις 5.

(Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με **10 μονάδες**).

Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικών υλικών.

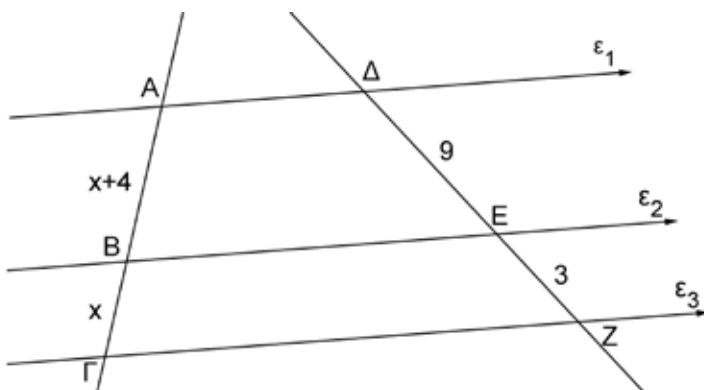
Γράφετε μόνο με μελάνι, μπλε ή μαύρου χρώματος. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.

## ΜΕΡΟΣ Α΄: ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ ΚΑΙ ΤΙΣ 10 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε την ανίσωση:  $x^2 - 4x - 32 \leq 0$
2. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των πιο κάτω διανυσμάτων:  
(α)  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$   
(β)  $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$
3. Να μετατρέψετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:  
(α)  $\frac{3}{\sqrt{3}}$                       (β)  $\frac{39}{4 - \sqrt{3}}$
4. Ο πιο κάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων παρουσιάζει τους καθηγητές ενός σχολείου και τα χρόνια υπηρεσίας τους. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  και την τυπική απόκλιση  $s$ .

|                         |   |   |    |   |   |
|-------------------------|---|---|----|---|---|
| Χρόνια $x_i$            | 4 | 5 | 6  | 7 | 8 |
| Αριθμός καθηγητών $f_i$ | 6 | 7 | 10 | 9 | 5 |

5. Αν  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ , να βρείτε την τιμή του  $x$  στο πιο κάτω σχήμα:



6. Να αποδείξετε ότι :  $\frac{\eta\mu\theta}{1-\sigma\upsilon\nu\theta} - \sigma\phi\theta = \sigma\tau\epsilon\mu\theta$

7. Να συγκρίνετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ανισώσεων αν ισχύει  $0 < x_1 < x_2$ ,  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  :

(α)  $A = 3x_1 - 4$ ,  $B = 3x_2 - 4$

(β)  $\Gamma = \frac{7-2x_1}{5}$ ,  $\Delta = \frac{7-2x_2}{5}$

8. Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\mu$  το πιο κάτω σύστημα :

(α) έχει άπειρες λύσεις

(β) δεν έχει λύση

$$2\psi = -\mu x + \mu^2 - 8$$

$$\mu\psi + 2x = 2\mu$$

9. Στο σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο  $K$ , η ευθεία  $\varepsilon_1$  είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο  $B$  και

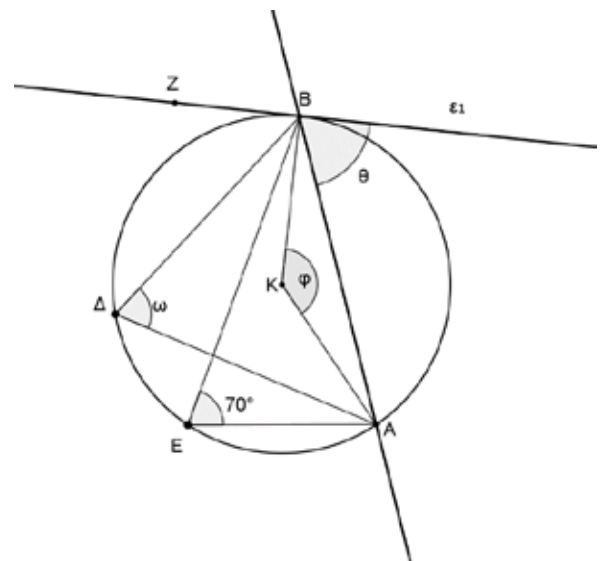
$\widehat{BEA} = 70^\circ$ . Να υπολογίσετε:

(1) τις γωνίες  $\omega$ ,  $\phi$  και  $\theta$

(2) το τόξο  $B\Delta A$

(3) τη γωνία  $KBZ$ .

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



10. Να εξετάσετε αν το πιο κάτω σύστημα είναι συμβιβαστό :

$$2x - 3\psi = 8$$

$$4x + 5\psi = -6$$

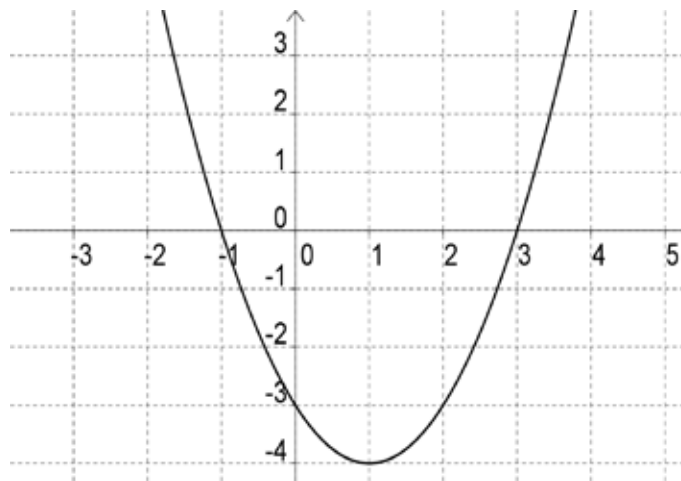
$$2x\eta\mu^2\theta - \psi\sigma\upsilon\nu^2\theta = 2$$

## ΜΕΡΟΣ Β΄: ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ ΚΑΙ ΤΙΣ 5 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma. \text{ Να βρείτε :}$$

- (α) τις λύσεις της εξίσωσης  $f(x) = 0$
- (β) τις λύσεις της ανίσωσης  $f(x) > 0$
- (γ) τις συντεταγμένες του ελάχιστου σημείου
- (δ) το πεδίο τιμών της συνάρτησης
- (ε) τον τύπο της  $f(x)$ .



2. Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Να φέρετε το ύψος  $AD$  και την  $DE \perp A\Gamma$ .

Να δείξετε ότι :

(α) Τα τρίγωνα  $ABD$  και  $ADE$  είναι όμοια .

(β)  $(AB)(DE) = (AD)(BD)$

3. (α) Να λύσετε την ανίσωση :  $\frac{(x^2 - 5x + 6)(9 - x^2)(1 + x^2)}{(x^2 - x + 1)(2x - 7)} \geq 0$

(β) Να λύσετε το σύστημα :

$$3x - 2\psi = 0$$

$$x^2 + \psi^2 + x\psi - 19 = 0$$

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (2\kappa + \lambda + \mu)x^2 - (\kappa + \lambda)x + (2\lambda + \mu)$  όπου  $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(α) Αν η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει λύσεις  $x_1 = 0$  και  $x_2 = 2$  και η γραφική παράσταση της  $f(x)$  περνά από το σημείο  $(1, -1)$  να βρείτε τις τιμές των  $\kappa$ ,  $\lambda$  και  $\mu$ .

(β) Αν  $\kappa = 1$ ,  $\lambda = 1$  και  $\mu = -2$  να σχηματίσετε δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες  $\rho_1 = 2\kappa + \lambda$  και  $\rho_2 = 3\mu - \kappa^2$

5. (α) Να δείξετε ότι  $\frac{\varepsilon\varphi^2\theta - 1}{\varepsilon\varphi^2\theta + 1} = \eta\mu^4\theta - \sigma\upsilon\nu^4\theta$

(β) Αν ισχύει 
$$\frac{\eta\mu(-\alpha) \times \sigma\upsilon\nu^2(\pi - \omega) + \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha\pi}{2} + \alpha \times \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha\pi}{2} + \omega \times \varepsilon\varphi(\pi - \omega) \times \sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu(\pi - \alpha) \times \sigma\upsilon\nu(-\omega)} = -\frac{5}{4}$$

και  $\sigma\upsilon\nu\omega \times \eta\mu\alpha = -\frac{2}{5}$  με  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  και  $\frac{3\pi}{2} < \omega < 2\pi$  να υπολογίσετε τη γωνία  $\alpha$ .

## ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΤΑΞΗ: ΘΠ1 - Α' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22/05/2015

**ΟΔΗΓΙΕΣ:** 1. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

2. Να γράφετε **μόνο** με **μπλε** μελάνι. ( τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι)

3. **Δεν** επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού ή διορθωτικής ταινίας.

4. Επιτρέπεται η χρήση **μη** προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

**ΜΕΡΟΣ Α**

Να λύσετε **όλες** τις πιο κάτω ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **5** μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση:  $2x^2 + 3x - 2 = 0$

2. Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

(α)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  (μ. 2)

(β)  $\frac{3}{\sqrt{5} - 2}$  (μ. 3)

3. Να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες  $x_1 = 2$  και  $x_2 = -5$ .

4. Δίνονται οι θερμοκρασίες των 10 πρώτων ημερών του Ιουλίου.

28, 27, 28, 30, 32, 29, 28, 27, 30, 32

(α) Να βρείτε την διάμεσο και την επικρατούσα τιμή

(β) Να βρείτε τη μέση τιμή

5. Να λύσετε το σύστημα:  $x + \psi = 1$

$$3x^2 - \psi^2 = 3$$

6. Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $\sigma\tau\epsilon\mu\chi - \frac{\eta\mu\chi}{1 - \sigma\upsilon\nu\chi} = -\sigma\phi\chi$





2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = ax^2 + bx + g$ . Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

(α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών (μ. 1)

(β) το πρόσημο της διακρίνουσας (μ. 1)

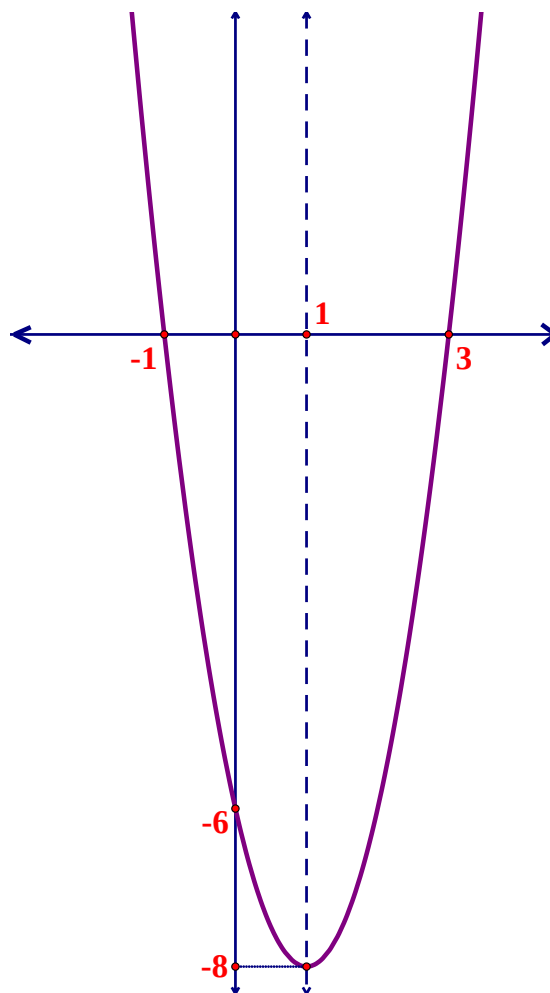
(γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας (μ. 1)

(δ) τις συντεταγμένες του ακρότατου της  $f(x)$  (μ. 2)

(ε) τις τιμές των  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  (μ. 3)

(στ) τις τιμές του  $\chi$  για τις οποίες  $f(x) \geq 0$  (μ. 1)

(ζ) το πρόσημο της παράτασης  $\frac{f(-152) \times f(2)}{f(1) \cdot f(2)}$  (μ. 1)



3. (α) Να λύσετε την ανίσωση:  $\frac{(1-x^2)(-x^2+4x-5)(x^2-3x+2)}{x^2+x+1} \leq 0$

(β) Αν  $\frac{\eta\mu(180^\circ+\theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ+\theta) \cdot \sigma\phi(90^\circ-\theta)}{\eta\mu(180^\circ-\theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(\theta-360^\circ) \cdot \eta\mu(-\theta)} = -2$  και  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  να δείξετε ότι:  $\theta=60^\circ$

4. Από σημείο A που βρίσκεται εκτός κύκλου φέρνουμε εφαπτόμενες AB και AG όπου B και Γ σημεία του κύκλου. Από το A φέρνουμε τη τέμνουσα ADE (που δεν περνά από το κέντρο του κύκλου) όπου Δ και Ε σημεία του κύκλου. Η EA και BG τέμνονται στο σημείο M. Να δείξετε ότι:
- (α) (i) τα τρίγωνα AGΔ και AEG είναι όμοια  
(ii) ισχύει η σχέση  $(AG)^2 = (AE)(AD)$
- (β) ισχύει η σχέση  $(BM)(MG) = (MD)(EM)$

5. Δίνεται η εξίσωση  $(\sigma\phi\theta - \sigma\upsilon\nu\theta)\chi^2 - 4\chi + \sigma\phi\theta.\sigma\upsilon\nu^2\theta = 0$ . Να δείξετε ότι:

(α) το γινόμενο των ριζών της είναι ίσο με  $1 + \eta\mu\theta$

(β) χρησιμοποιώντας το πρώτο ερώτημα ή με άλλο τρόπο και τη σχέση  $(\chi_1 + \chi_2)\chi_1\chi_2 = \epsilon\phi\theta$  να βρείτε την τιμή του  $\eta\mu\theta$



Βαθμός: .....  
Ολογράφως: .....  
Υπογραφή: .....

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2015**

**Μάθημα:** Μαθηματικά

**Τάξη:** Α'

**Χρόνος:** 2,5 ώρες

**Ημερομηνία:** 19 Μαΐου 2015

**Ονοματεπώνυμο:** .....

**Τμήμα:** ..... **Αριθμός:** .....

**ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ**

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

Τα θέματα του εξεταστικού δοκιμίου είναι γραμμένα στις σελίδες 2-5.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη, Α' και Β'.

ΜΕΡΟΣ Α' – Αποτελείται από **δέκα (10)** ερωτήσεις. Να απαντηθούν **ΟΛΕΣ**.  
Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

ΜΕΡΟΣ Β' – Αποτελείται από **πέντε (5)** ερωτήσεις. Να απαντηθούν **ΟΛΕΣ**.  
Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- Να γράφετε μόνο με πένα μαύρη ή μπλε.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- Επιτρέπεται η χρήση **μη** προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Τα διαγράμματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.
- Τα σχήματα να μεταφέρονται στο φύλλο απαντήσεων.

**ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.**

**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ .

2. Να λύσετε την ανίσωση:  $(x+2)(x-1)(x-3) < 0$ .

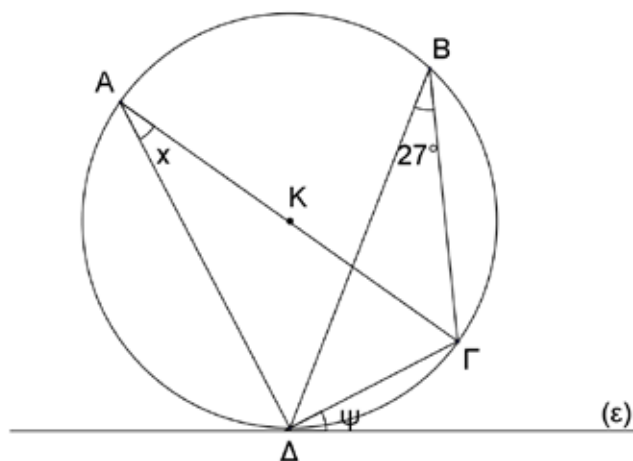
3. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

(α)  $\frac{2}{\sqrt{x}}$

(β)  $\frac{5}{3 - \sqrt{x}}$

4. Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $\epsilon\phi x (\sigma\phi x - \sigma\epsilon\mu x) = 1 - \tau\epsilon\mu x$

5. Δίνεται ο κύκλος (Κ, R) και η διάμετρος του ΑΓ. Αν η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Δ, να υπολογίσετε τις γωνιές  $\chi$ ,  $\psi$  και  $\widehat{A\Delta\Gamma}$  δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



6. Ο πίνακας παρουσιάζει τους μισθούς των υπαλλήλων μιας εταιρείας:

| Μισθός €<br>$x_i$ | Αριθμός Υπαλλήλων<br>$f_i$ |
|-------------------|----------------------------|
| 1800              | 1                          |
| 1300              | 3                          |
| 800               | 9                          |
| 600               | 10                         |
| 300               | 17                         |

Να υπολογίσετε:

α) τη μέση τιμή

β) την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

7. Αν  $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$  και  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{5\sigma\eta\theta + 10\eta\mu\theta}{4\tau\epsilon\mu\theta - 3\sigma\phi\theta}$$

8. Δίνεται η παραβολή  $f(x) = (\alpha - 2)x^2 + \alpha x$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(α) Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha$  ώστε η παραβολή να έχει ελάχιστη τιμή.

(β) Αν  $\alpha=4$ , να βρείτε τον άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής.

9. Αν το σύστημα  $\begin{cases} 2x + 3\psi = 7 \\ 3x - 2\psi = 4 \\ \alpha x + \beta\psi = 1 \end{cases}$  είναι συμβιβαστό, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = 14\alpha + 7\beta - 3$$

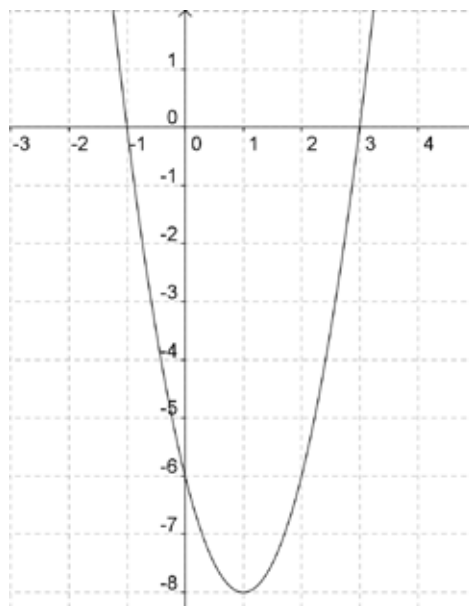
10. Από σημείο  $\Sigma$  εκτός κύκλου  $(K, R)$  φέρουμε εφαπτομένη  $\Sigma\Gamma$  ( $\Gamma$  σημείο επαφής) και  $\Sigma AB$  μια τέμνουσα του κύκλου.

(α) να δείξετε ότι  $(\Sigma A)(\Sigma B) = (\Sigma \Gamma)^2$

(β) να βρείτε το  $\Sigma A$  αν  $\Sigma \Gamma = 6$  cm και  $AB = 5$  cm.

**ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.**  
**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ .



Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε:

- A) i. το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της  $f(x)$   
ii. το πρόσημο της διακρίνουσας  $\Delta$
- B) i. την τιμή του  $\gamma$   
ii. τις τιμές του  $x$  για τις οποίες  $f(x) = 0$
- Γ) i. την εξίσωση του άξονα συμμετρίας  
ii. τις συντεταγμένες της κορυφής
- Δ) i. το πρόσημο του  $a$   
ii. τις τιμές του  $x$  για τις οποίες  $f(x) < 0$
- Ε) i. το άθροισμα ( $S$ ) και το γινόμενο ( $P$ ) των ριζών της εξίσωσης  
ii. τις τιμές των  $a$  και  $b$  της συνάρτησης  $f(x)$ .

2. α) Να λύσετε την ανίσωση: 
$$\frac{(x^2 - 4x + 4)(25 - x^2)}{x^2 - 13x + 36} \leq 0$$

β) Με βάση το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt{\left(x + \frac{4}{x-4}\right)\left(\frac{25-9x}{x-9} - x\right)}$$

3. Δίνεται η εξίσωση  $(\lambda+1)x^2 + 3\lambda x + 2\lambda - 1 = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$ , με ρίζες  $x_1$  και  $x_2$ . Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  ώστε:
- (α) η εξίσωση να έχει ρίζες αντίστροφες
  - (β) η εξίσωση να έχει ρίζες πραγματικές και ίσες
  - (γ) μια ρίζα της εξίσωσης είναι το -3
  - (δ) να ισχύει η σχέση  $(x_1-5)(x_2-5) = 8$ .

4. (α) Να υπολογίσετε την τιμή του  $\eta\mu\theta$ , με  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ , αν ισχύει:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \theta) \cdot \eta\mu(270^\circ + \theta) + \tau\epsilon\mu(180^\circ + \theta) \sigma\upsilon\nu(-\theta)}{\sigma\phi(180^\circ - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(270^\circ - \theta) \cdot \epsilon\phi(360^\circ - \theta)} = \frac{3}{4}$$

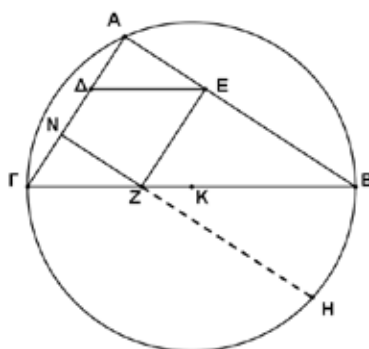
- (β) Αν  $\eta\mu\theta = \frac{3}{4}$ , να δείξετε ότι η εξίσωση  $5x^2 + (16\sigma\upsilon\nu^2\theta - 7)x + 3\epsilon\phi\theta = 0$  έχει ρίζες αντίθετες.

5. (α) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(\kappa, R)$ . Από τυχαίο σημείο  $E$  της πλευράς  $AB$  φέρουμε την  $DE \parallel B\Gamma$ , από το σημείο  $E$  φέρουμε την  $EZ \parallel A\Gamma$  και από το σημείο  $Z$  φέρουμε την  $ZN \parallel AB$ . Δίνεται ότι η γωνιά  $\widehat{A\hat{E}\Delta} = 40^\circ$ .

- (i) Να δείξετε ότι:  $\frac{A\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{N\Gamma}{N\Lambda}$

- (ii) Να υπολογίσετε τις γωνιές του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

- (β) Η προέκταση της  $NZ$  προς το μέρος του  $Z$  τέμνει τον κύκλο στο σημείο  $H$ . Αν η διάμετρος του κύκλου είναι 10 cm, το  $Z\Gamma = 4$  cm και το  $NZ = 3$  cm, να υπολογίσετε το μήκος του  $ZH$ .





ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Α΄ Λυκείου

ΩΡΑ: 7:45

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: Τρίτη 26/ 5 /2015

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ώρες

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- 1) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- 2) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- 3) Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (Μόνο τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν με μολύβι).
- 4) Τα σχήματα των ασκήσεων να αντιγράφονται στο φύλλο των λύσεων σας.

**Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.****ΜΕΡΟΣ Α΄****Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του μέρους Α΄****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

- 1) Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

- 1) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ .
- 2) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\beta}$ .

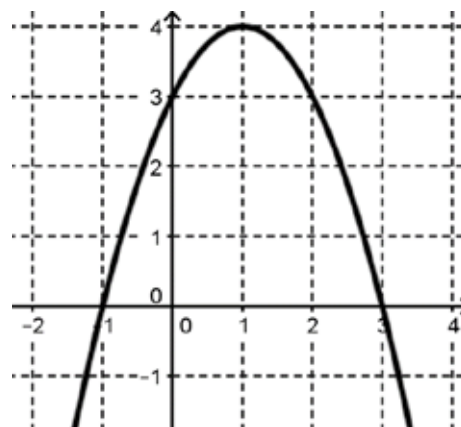
- 2) Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή, χωρίς τη χρήση της υπολογιστικής μηχανής.

- 1)  $\frac{10}{\sqrt{5}}$
- β)  $\frac{12}{3+\sqrt{5}}$

- 3) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  ώστε το σύστημα: 
$$\begin{cases} \chi + \psi = 8 \\ 3\chi - \psi = 12 \\ \lambda\chi - 2\psi = 14 \end{cases}$$
 να είναι συμβιβαστό.

- 4) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ . Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

- 1) Το πρόσημο του  $\alpha$ .
- 2) Τις ρίζες της εξίσωσης  $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ .
- 3) Τις λύσεις της ανίσωσης  $f(\chi) > 0$ .
- 4) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας.
- 5) Τις συντεταγμένες της κορυφής.



5) Να λύσετε την ανίσωση :  $\frac{(\chi-3)(\chi+4)}{2-\chi} \leq 0$ .

6) Αν  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  και  $270^\circ < \theta < 360^\circ$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης:

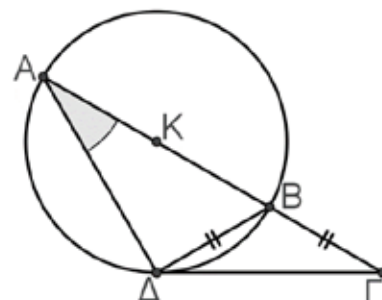
$$A = \frac{5\eta\mu\theta + 3\varepsilon\varphi\theta}{3\tau\epsilon\mu\theta}.$$

7) Αν  $1 < \chi < 6$  και  $-7 < \psi < -2$  να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:  $A = 3\chi - 2$ ,  $B = \chi - 2\psi$ ,  $\Gamma = \frac{\chi}{\psi}$ .

8) Δίνεται ο κύκλος (K, 6cm). Από σημείο Σ εκτός του κύκλου να φέρετε την τέμνουσα ΣΑΒ. Εάν  $(\Sigma K) = 10 \text{ cm}$  και ισχύει η σχέση  $(AB) = 3(AS)$ , να υπολογίσετε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ και ΑΣ.

9) Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση  $\lambda^2(\chi - 1) + 9\lambda = 4(4\chi + 5)$  για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

10) Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) με διάμετρο ΑΒ. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του Δ, τέμνει την ΑΒ στο σημείο Γ. Αν το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές ( $B\Delta = B\Gamma$ ), να αποδείξετε ότι  $\widehat{B\Delta\Delta} = 30^\circ$ .




---

**ΜΕΡΟΣ Β' Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του μέρους Β'.**  
**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

---

1) Οι βαθμοί 11 φοιτητών σ' ένα εργαστήριο είναι οι εξής: 5, 8, 6, 9, 7, 8, 6, 7, 9, 4, 8.

- 1) Να βρείτε τη διάμεσο  $\chi_\delta$  και την επικρατούσα τιμή  $\chi_\varepsilon$ .
- 2) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή  $\bar{\chi}$  και την τυπική απόκλιση  $s$ .
- 3) Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβλητότητας  $CV$ .
- 4) Αν πολλαπλασιάσουμε τον κάθε βαθμό επί 12 και στη συνέχεια προσθέσουμε τον αριθμό 25, ποια θα είναι η νέα μέση τιμή;

2) Δίνεται η εξίσωση  $\chi^2 + (2 - \mu^2)\chi + 1 = 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  με ρίζες  $\chi_1, \chi_2$ .

- 1) Για ποιες τιμές της παραμέτρου  $\mu$  ισχύει η σχέση  $\frac{\chi_1}{\chi_2} + \frac{\chi_2}{\chi_1} = 18 - 4\mu^2$ ;
- 2) Για ποιες τιμές της παραμέτρου  $\mu$  η εξίσωση  $\chi^2 + (2 - \mu^2)\chi + 1 = 0$  έχει ρίζες πραγματικές άνισες;
- 3) Για ποιες τιμές της παραμέτρου  $\mu$  η παραβολή  $f(\chi) = \chi^2 + (2 - \mu^2)\chi + 1$  έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία  $\chi = 5$ ;

3) Δίνονται οι παραστάσεις:

$$X = \frac{\eta\mu^3\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{\sigma\varphi\theta}{\sigma\tau\epsilon\mu^2\theta} \quad \text{και} \quad \Psi = \frac{\eta\mu(360^\circ+\theta)\sigma\upsilon\nu(270^\circ+\theta)\sigma\varphi(90^\circ+\theta)}{\eta\mu(-\theta)\sigma\upsilon\nu(180^\circ-\theta)}.$$

1) Να δείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις  $X = \varepsilon\varphi\theta$  και  $\Psi = -\varepsilon\varphi^2\theta$ .

2) Αν ισχύει η σχέση  $\sqrt[3]{X^2 + 5} = 2$ , να βρείτε:

i. Τις τιμές του  $X$ .

ii. Τις τιμές του  $\theta$ , εάν  $X = \varepsilon\varphi\theta$  και  $0^\circ < \theta < 180^\circ$ .

4) Δίνεται η εξίσωση β' βαθμού:  $\alpha\beta\chi^2 + (\alpha + \beta)\chi + 6 = 0$

και το σύστημα ευθειών με εξισώσεις:  $\begin{cases} \alpha\chi + \psi = 2 \\ (1 - \beta)\chi - 2\psi = 5 \end{cases}$  με  $\alpha, \beta \neq 0$ .

Η πιο πάνω εξίσωση β' βαθμού έχει ρίζες αντίστροφες και το σύστημα ευθειών είναι αδύνατο.

1) Να δείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις  $\alpha\beta = 6$  και  $2\alpha - \beta = -1$ .

2) Να υπολογίσετε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ .

3) Να βρείτε τις τιμές των  $\kappa$  και  $\lambda$  έτσι ώστε το σημείο τομής των ευθειών με εξισώσεις  $-2\chi + \psi = 2$  και  $\psi = \chi - 5\kappa$  να είναι το σημείο  $A(\kappa, \lambda)$ .

5) Στο διπλανό σχήμα, δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο  $AB$  και χορδή  $B\Gamma$ . Από σημείο  $\Delta$  του ημικυκλίου, φέρουμε την  $\Delta H$  κάθετη στην  $AB$  που τέμνει την  $B\Gamma$  στο  $E$ .

1) Να δείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα  $BEH$  και  $AB\Gamma$  είναι όμοια.

ii.  $(B\Gamma)(BE) = (BH)(BA)$

iii.  $(B\Gamma)(BE) = (B\Delta)^2$

2) Αν  $(BH) = \frac{3}{2}(B\Gamma)$  και η περίμετρος του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι ίση με 10cm, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου  $BEH$ .

