

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Κατεύθυνσης
ΤΑΞΗ : Β' Ενιαίου Λυκείου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 22/06/2015
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2,5 ώρες

Οδηγίες: α) Να γράφετε με πένα μπλε ή μαύρη (τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν με μολύβι).
β) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τρεις σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{4-x}{(x-2)(x-1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

1. $y = 5x^5 + e^x - e^{2x} + p$

2. $y = \frac{x+3}{1-x^2}$

3. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 8x + 3}{3x^2 - 5}$

4. Δίνεται αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο τριπλάσιο της διαφοράς της και το άθροισμα του δεύτερου και του πέμπτου όρου της να είναι 22.

1. Να σχηματίσετε την πρόοδο.
2. Να βρείτε το άθροισμα των είκοσι πρώτων όρων της.

5. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδό βάσης 64 cm^2 . Το παράπλευρο ύψος της πυραμίδας σχηματίζει με το ύψος της, γωνία 30° . Να βρείτε

1. Το εμβαδόν της ολικής της επιφάνειας.
2. Τον όγκο της.

6. Αν $f(x) = \sqrt{x-2}$ και $g(x) = x^2 - 5x + 6$, να βρείτε:

1. Το πεδίο ορισμού τους.
2. Τον τύπο και το πεδίο ορισμού της $f \circ g$.

7. Σε τρίγωνο ABG ισχύει η σχέση $4R^2 \sin A \sin B = b^2$

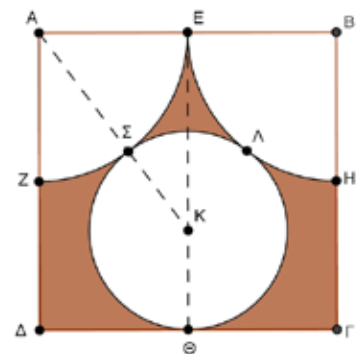
1. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές.
2. Αν επιπλέον δίνονται το μήκος της πλευράς του $g = 9$ cm και η $\hat{G} = 120^\circ$, να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του a και b .

8. Με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\text{ισχύει : } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

9. Να λύσετε την εξίσωση : $\log_5 5 - \log_5 \sqrt{5} + \log_5 \sqrt[4]{5} - \dots = 16^{\log_2 x}$

10. Δίνεται τετράγωνο ABΓΔ με πλευρά $2a$ cm. Με κέντρα τις κορυφές A και B και ακτίνα a σχηματίζουμε τεταρτοκύκλια μέσα στο τετράγωνο. Μέσα στο τετράγωνο γράφουμε κύκλο που εφάπτεται των δύο τεταρτοκυκλίων στα σημεία Σ και Λ και του τετραγώνου ABΓΔ στο σημείο Θ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



1. Να δείξετε ότι ο κύκλος (Κ,ΚΣ) έχει ακτίνα ίση με $\frac{2a}{3}$ cm
2. Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους του σχήματος συναρτήσει του a .

ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100 μονάδες.

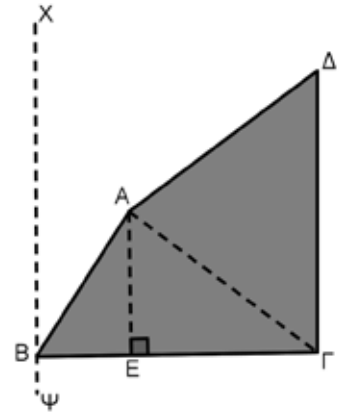
1. Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ (AB//ΓΔ) με κορυφές B(10, 3), Γ(5, 4), Δ(2, 2) και διαγώνιο ΑΓ με εξίσωση $7x - 4y = 19$. Να βρείτε:

1. Την εξίσωση της πλευράς του AB.
2. Τις συντεταγμένες της κορυφής του A.
3. Την απόσταση του σημείου Γ από την πλευρά AB.
4. Το μέτρο της γωνίας που σχηματίζουν οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ του τραpezίου ABΓΔ.
5. Το εμβαδόν του τραpezίου ABΓΔ.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}$ όπου $x \neq \frac{kp}{2} + \frac{p}{4}$ και $x \neq 2kp \pm \frac{p}{3}$.

1. Να δείξετε ότι: $f(x) = \cos 2x$
2. Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $\frac{3 \times (\sin x - \sin 2x + \sin 3x)}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x} - 2 \sin 2x = 0$.

3. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ADG είναι ισοσκελές με $AD = AG$ και το τρίγωνο ABG έχει πλευρές $AB = \sqrt{13} \text{ cm}$, $BG = 6 \text{ cm}$ και ύψος $AE = 3 \text{ cm}$. Η BG είναι κάθετη στον άξονα περιστροφής $\chi\psi$ και η GD είναι παράλληλη προς αυτόν. Το τετράπλευρο ABGDA περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα $\chi\psi$, να βρείτε:



1. Τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται.
2. Το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.

4. Δίνεται η συνάρτηση $y = \ln \sqrt{1 + \sin 2x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $kp - \frac{\rho}{4}$

1. Να δείξετε ότι $e^{2y} \frac{dy}{dx} - \frac{d^2 y}{dx^2} = \sin 2x = 2$

2. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της συνάρτησης στο σημείο της με τετμημένη $x = \frac{\rho}{12}$

5. Δίνεται η ακολουθία $\log_{\sin x}(\sin x)$, $\log_{\sin^2 x}(\sin x)$, $\log_{\sin^4 x}(\sin x) \dots$ με $\frac{\rho}{4} < x < \frac{\rho}{2}$.

1. Να δείξετε ότι η πιο πάνω ακολουθία αποτελεί φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο.
2. Να υπολογίσετε την τιμή του x για την οποία το άθροισμα των απείρων όρων της ακολουθίας είναι ίσο με $S_{\infty} = \log_{\sin x}(\sqrt{3} \sin x)$

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΪΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Β' κατεύθυνση

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29/5/2015

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 Ώρες (07:45–10:15)

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 - β) Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε ή μαύρο. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.
 - γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα $\frac{5x+1}{(x-1)(x+2)}$.

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2x}{x^2}.$$

3. Να βρείτε τις λύσεις της τριγωνομετρικής εξίσωσης $\sin 2x = 5 \sin x - 3$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-3}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της.

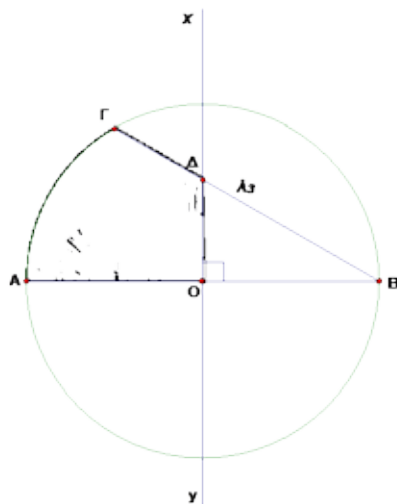
Ακολουθώντας, να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχει η αντίστροφη της συνάρτησης f^{-1} , να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.

5. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = 3x^2$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου. Στη συνέχεια, να βρεθεί η παράγωγος της $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 + 4}$.

6. Να αποδείξετε με τέλεια επαγωγή την παράσταση:

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

7. Να λύσετε την λογαριθμική εξίσωση: $\log(4^{x+1} + 2) = \log 9 + x \log 2$.
8. Σε τρίγωνο ABΓ ισχύουν οι σχέσεις $b^2 + g^2 - bg = a^2$ και $4h_n B h_n G = 3$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.
9. Σε μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα με πλευρά βάσης a , το παράπλευρο ύψος είναι $\frac{5}{6}a$.
Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας, αν η ολική της επιφάνεια έχει εμβαδόν 24 cm^2 .
10. Σε κύκλο (O, R) φέρουμε τη διάμετρο AB, τη χορδή $BG = l$ και την ευθεία xOy κάθετη στην AB που τέμνει την BΓ στο Δ.
- α) Να δείξετε ότι $OD = DG = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.
- β) Να βρείτε συνάρτησε του R το εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος.



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Θεωρώντας το κέντρο ενός χώρου στάθμευσης ως την αρχή ορθοκανονικού συστήματος αξόνων, τρία αυτοκίνητα βρίσκονται σταθμευμένα στις θέσεις με συντεταγμένες $A(1,1)$, $B(7,-5)$ και $\Gamma(-3,3)$ σχηματίζοντας τρίγωνο.
- α) Να βρείτε: i) την εξίσωση της πλευράς BΓ.
ii) το μήκος του ύψους AΔ, όπου Δ το ίχνος του ύψους στην πλευρά BΓ.
- β) i) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος AM χωρίζει το τρίγωνο ABΓ σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα.
ii) Να βρεθεί η οξεία γωνία, που σχηματίζεται από την διάμεσο AM και την πλευρά BΓ.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - \frac{7}{x+3}$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + x - 6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των f , g και h .

β) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $h(x)$ είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι ίσες, να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο για το οποίο ισχύει ότι $f(x) = h(x)$.

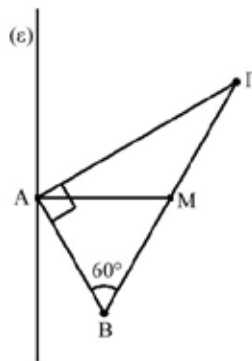
γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = -3$.

δ) Να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο τιμών, για το οποίο ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$ και να γράψετε τον τύπο της.

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(3^x) = 5k - 4$, όπου $k \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε την τιμή του k .

3. Κατασκευάζεται κωνικό καπέλο χρησιμοποιώντας κυκλικό τομέα με εμβαδόν $E_{\text{κτ}} = 4\pi \text{ cm}^2$ και με επίκεντρη γωνία $\alpha = 120^\circ$. Να υπολογίσετε το ύψος του κωνικού καπέλου.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), με $\hat{B} = 60^\circ$ και $AB = 6 \text{ cm}$. Φέρουμε την διάμεσο AM και ευθεία (ε) κάθετη στην AM στο A . Να βρείτε τον όγκο και την ολική επιφάνεια του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του τριγώνου $AB\Gamma$ γύρω από την ευθεία (ε) .



5. Δίνεται η συνάρτηση: $y = 1 + \sin 2x$.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί:

$$y, \quad -\frac{1}{2} \frac{dy}{dx}, \quad 2 \sin^2 x$$

είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, με λόγο $\lambda = \varepsilon\varphi x$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία x , $0^\circ < x < 45^\circ$, αν A είναι το άθροισμα των άπειρων όρων της πιο πάνω γεωμετρικής προόδου και ισχύει η σχέση: $\frac{A}{\sin x} = 3(\sin x + \eta\mu x)$.

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 19.5.2015

ΤΑΞΗ: Β΄

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ΩΡΕΣ

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 3 σελίδες

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
β) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι).
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1) Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{2x-1}{x^2-x-6}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2) Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 16}$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{16x^2 - 5}}{8x}$

3) Αν $\log_2(x+3)$, 1, $\log_2 x$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να βρείτε το x .

4) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $y = \sqrt{x^2 - 2x} - \tan^2 x$

β) $y = \frac{e^{3x^2}}{e^{2x}}$

5) Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(1,2), B(-1,3) και Γ(2,0).

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου.

6) Αν $e^{2x} + e^{3x} + e^{4x} + e^{5x} + \dots = \frac{1}{2}$, $x < 0$, να βρείτε την τιμή του x .

7) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης ίσο με 100cm^2 και παράπλευρη ακμή ίση με $5\sqrt{3}\text{cm}$. Να βρείτε:

- το παράπλευρο ύψος της πυραμίδας
- τον όγκο της πυραμίδας και
- τη γωνία που σχηματίζει η παράπλευρη έδρα με τη βάση της.

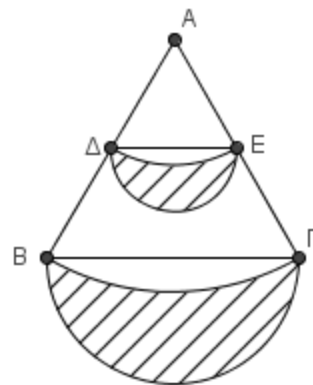
8) Να αποδείξετε την ταυτότητα $\frac{\sin 2x + 1}{\sin x + \cos x} - \sin x = \cos x$.

9) Δίνεται η συνάρτηση $y = \ln \frac{e^x + e^{2x}}{e^x + e^{3x}} - \frac{p}{3} e^{2x} + e^{2x} \ln x$, $x \in [0, p]$. Να βρείτε:

α) την πρώτη παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης

β) να λύσετε την εξίσωση $\frac{dy}{dx} = 2$

10) Στο διπλανό σχήμα το $\triangle AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά ίση με $4a\text{ cm}$ και Δ, E είναι τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Με κορυφή A και ακτίνα $A\Delta$ γράφουμε τόξο μέσα στο τρίγωνο και με κορυφή A και ακτίνα AB γράφουμε τόξο έξω από το τρίγωνο. Με διαμέτρους τις ΔE και $B\Gamma$ γράφουμε ημικύκλια μέσα και έξω από το τρίγωνο αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του μηνίσκου που βρίσκεται έξω από το τρίγωνο είναι τετραπλάσιο του εμβαδού του μηνίσκου που βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο.



ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) Σε αύξουσα αριθμητική πρόοδο η διαφορά της είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που επαληθεύει την ανίσωση $|4x - 5| \leq 3$. Ο έβδομος όρος της είναι η μεγαλύτερη ρίζα του πολυωνύμου

$f(x) = x^2 + bx + g$, με $f(0) = 32$ και $f(1) = 21$.

α) Να βρείτε την πρόοδο (5 πρώτους όρους)

β) Αν $d = 2$ και $a_1 = -4$, να βρείτε πόσους όρους πρέπει να πάρουμε, ώστε το άθροισμα τους να είναι ίσο με 176.

2) Δίνεται η καμπύλη $y^2 = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

α) Αν η ευθεία $x - 2y = 1$ είναι η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $(3, 1)$, να βρείτε τις τιμές των a και b .

β) Αν $g(x) = \frac{1}{x} \ln(3x - 1)$, να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης $g^{-1}(x)$.

γ) Αν $g(x) = \frac{3x - 1}{4x - 8}$ και $f(x) = \sqrt{1 - 4x}$, να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της $f \circ g$.

3) Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $e_1: (4^a + 3)x + (2 - 2^{a+1})y + 12 = 0$ και $e_2: 3x - y = 7$.

α) Να δείξετε ότι $a = \log_2 3$.

β) Να βρείτε την απόσταση των δύο ευθειών.

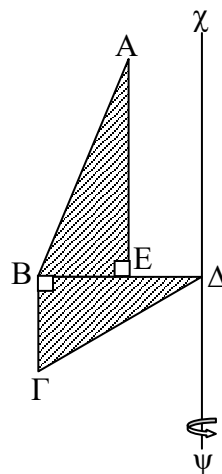
γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των e_1 και e_2 .

4) Στο διπλανό σχήμα δίνονται:

ABE ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{E} = 90^\circ$) με $BE = 5\text{cm}$ και $AB = 13\text{cm}$

BGD ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{B} = 90^\circ$) με $BG = 3\sqrt{3}\text{cm}$ και $\hat{D} = 30^\circ$.

Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του ABGDE γύρω από την ευθεία $\Delta\Gamma$ η οποία είναι παράλληλη με τη BΓ.



5) α) Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση $a \times E = R \times b \times g \times \sin^2 \frac{A}{2}$, να δείξετε ότι $\hat{A} = 60^\circ$.

β) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση $hm_G \times hn_B = hm^2(G + B)$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' Ενιαίου Λυκείου – Κατεύθυνσης

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 21/05/2015

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2½ ώρες

Ονοματεπώνυμο: _____ Βαθμός: _____

Τμήμα: _____ Αριθμός: _____ Βαθμός ολογράφως: _____

Υπογραφή καθηγητή: _____

ΟΔΗΓΙΕΣ :

- (α) Να γράψετε μόνο με **μπλε** μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
(β) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
(γ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

Το δοκίμιο αποτελείται από 16 σελίδες και τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α'

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το πιο κάτω κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{3c - 26}{(c+3)(c-4)}$$

2. Σε αριθμητική πρόοδο, το άθροισμα του δεύτερου και του πέμπτου όρου είναι 26 και ο όγδοος όρος ισούται με 31.
- (α) Να σχηματίσετε την αριθμητική πρόοδο.
- (β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 18 πρώτων όρων της προόδου.

3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $y = c^3 \hbar m^2 c$

(β) $y = \frac{c}{e^{3c} - 1}$

4. Η παράπλευρη έδρα κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας σχηματίζει γωνία 45° με τη βάση της. Αν η ακμή της βάσης της είναι ίση με 12cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.

5. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$(\alpha) \lim_{c \rightarrow 3} \frac{\ln(c-3)}{c^2-9}$$

$$(\beta) \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{-2c^2+18}{5c^2-7c+3}$$

6. (α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(c) = c^5 - 3c + 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

- (β) Να εξετάσετε αν η πιο κάτω συνάρτηση είναι συνεχής στο $c_0 = 1$.

$$g(c) = \begin{cases} 5 - 3c, & c \leq 1 \\ \frac{c-1}{\sqrt{c}-1}, & c > 1 \end{cases}$$

7. (α) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(c) = 4^{c+1} - 2^c + 5$ και $g(c) = 2 \times 4^c + 2^{c+3} + 1$. Να βρείτε τις τετμημένες c_1 και c_2 των σημείων τομής των $f(c)$ και $g(c)$.

- (β) Αν $c_1 = -1$ και $c_2 = 2$ να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης:
 $\sin q + c_1 \times \sin 7q = c_2 \times \sin 8q$

8. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου να δείξετε ότι: $(hmc)' = sun c$

9. Να αποδείξετε με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής ότι ο αριθμός $n(n^2 + 2)$ είναι πολλαπλάσιο του 3, για κάθε $n \in \mathbf{N}$ με $n \geq 1$.

10. Τρίγωνο $\overset{D}{A}\overset{B}{B}G$ με πλευρές $a=14\text{cm}$, $b=16\text{cm}$ και $g=10\text{cm}$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R) .

(α) Να βρείτε τη γωνία $\overset{\cup}{A}$.

(β) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ του τριγώνου $\overset{D}{A}\overset{B}{B}G$ και του περιγεγραμμένου κύκλου (K, R) .

ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Τρίγωνο με πλευρές τις ευθείες $e_1: c=0$, $e_2: \frac{c}{8} + \frac{y}{15} = 1$ και $e_3: \frac{c}{8} - \frac{y}{6} = 1$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $e_4: c=10$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται (το σχήμα μπορεί να γίνει στο τετραγωνισμένο χαρτί στο τέλος του δοκιμίου).

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(c) = \frac{1 - 5e^c}{1 + e^c}$ και $g(c) = c^2 - 5c - 5$ με $c \in \mathbf{R}$.

(α) Αν η $f(c)$ είναι ένα-προς-ένα να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης $f^{-1}(c)$.

(β) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $(f^{-1} \circ g)(c)$.

3. (α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$d = 8 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + c \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} - c \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + c \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} - c \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

(β) Δίνεται το πολυώνυμο $j(c) = c^3 + 27 \times 3^{3/4} \times c^2 - 20 \times 5^{3/4-1} \times c^2 - 5^{3/4+1} \times c - 18 \times 3^{3/4-2} - 1$. Αν το $j(c)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1, να υπολογίσετε την τιμή του 1 .

- (γ) Αριθμητική πρόοδος με διαφορά d και απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος με λόγο l (όπου d και l οι τιμές που βρήκατε στα υποερωτήματα 3(α) και 3(β) αντίστοιχα) έχουν τον ίδιο πρώτο όρο (a_1). Αν το άθροισμα των άπειρων όρων (S_∞) της φθίνουσας γεωμετρικής προόδου είναι η ρίζα της εξίσωσης $\log_3 \frac{a_1 + e^{\ln 2015}}{2} = 1$, να υπολογίσετε την τιμή του n έτσι ώστε το άθροισμα των n πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου να είναι $S_n = 165$.

4. Δίνονται οι καμπύλες με εξισώσεις $k_1: 3^c - 2 \times 3^y = 3^{c+y}$ και $k_2: y = \frac{3^{1+2Ac}}{\ln 81}$, όπου

$$A = 8hm^2 \frac{c}{4} \times sun^2 \frac{c}{4} - \frac{hm^2 \frac{c}{2} + sunc}{sun^2 \frac{c}{2}}.$$

(α) Να δείξετε ότι $A = -sunc$

- (β) Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες των k_1 και k_2 στα σημεία τους με τετμημένη $c = 0$ είναι κάθετες μεταξύ τους.

5. Δίνεται κύκλος με κέντρο $K(4, -1)$ και ακτίνα $R = 6$ μον. Η ευθεία $e: 3x - 4y = 1$ τέμνει τον κύκλο στα σημεία A και B.
- (α) Να βρείτε το μήκος της χορδής AB.

- (β) Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος AB που αντιστοιχεί στην επίκεντρη γωνία $\overset{\cup}{AKB}$, που είναι μικρότερη των 180° .

(γ) Αν το σημείο $Z(3, 2)$ ανήκει στην ευθεία (e) να βρείτε το σημείο $\Delta(c, \gamma)$, με $c > 0$, της ευθείας (e) έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $K \overset{D}{D} Z$ να είναι ίσο με $\frac{15}{2}$ τ.μον.

ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΟΥ ΙΩΑΝΝΗ ΛΕΜΕΣΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2014-2015

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥΤΑΞΗ: **Β' Ενιαίου Λυκείου**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: **29/05/2015**ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**ΩΡΑ: **07:45 – 10:15****ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ**

1. Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε ή μαύρο. Τα σχήματα με μολύβι.
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
3. Επιτρέπεται η χρήση σφραγισμένης υπολογιστικής μηχανής.
4. Το γραπτό αποτελείται από τρεις σελίδες.
5. Δίνεται τυπολόγιο στο τέλος.

ΜΕΡΟΣ Α' (50 μονάδες)**Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.****A1.** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει:

$$8 - 14i = x^3 + (3x + 2y)i$$

A2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x) = 2x^3 + \frac{1}{x^2} + \ln x$$

(μονάδες 2,5)

$$(\beta) g(x) = e^x \times \sin 2x$$

(μονάδες 2,5)**A3.** Να αποδείξετε με την μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι:

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

A4. Αν $a \neq 0$ και $\frac{a|\beta| - \beta|a|}{|a\beta|} = 2$ να δείξετε ότι οι αριθμοί a και β είναι ετερόσημοι.**A5.** Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών $\varepsilon_1: 3x + 4y - 1 = 0$ και $\varepsilon_2: y = -7x - 2$.Στη συνέχεια αν το σημείο $\Sigma(k, 2)$ απέχει από την ευθεία ε_1 απόσταση 5 μονάδων, να βρείτε τις τιμές του k .**A6.** Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3x - \sqrt{9x^2 + x} \right)$ **A7.** Να λύσετε την εξίσωση: $\log_3 \frac{1}{e} x + \log_2 (9 - 2^x) = 1$

A8. Τρίγωνο ABΓ με $\angle \Gamma = 120^\circ$, έχει εμβαδόν $E = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$ και η πλευρά ΒΓ είναι κατά 2cm μεγαλύτερη από την πλευρά ΑΓ. Να υπολογίσετε όλες τις πλευρές του τριγώνου.

A9. Η διαγώνιος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ισούται με $\delta = 5\sqrt{2} \text{ cm}$. Οι διαστάσεις του είναι φυσικοί διαδοχικοί αριθμοί. Να βρείτε το εμβαδόν και τον όγκο του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

A10. Δίνεται κύκλος (Κ, R) και χορδή AB που είναι πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου. Στα σημεία A και B να φέρετε τις εφαπτομένες του κύκλου που τέμνονται στο Γ. Να βρείτε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ABΓ συναρτήσει του R.

ΜΕΡΟΣ Β' (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Σε φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο τα S_v , S_{2v} , S_{3v} είναι αντίστοιχα τα αθροίσματα των v , $2v$ και $3v$ πρώτων όρων της.

(α) Να δείξετε ότι: $\frac{S_{3v} - S_{2v}}{S_v} = \lambda^{2v}$ (μονάδες 5)

(β) Στη συνέχεια αν $\lambda = \frac{1}{2}$, να βρείτε το άθροισμα: $\sum_{v=1}^{+\infty} \lambda^{2v}$. (μονάδες 5)

B2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ και $g(x) = \sqrt{x^2 + 9}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$ και $g(x)$. (μονάδες 3)

(β) Να ορίσετε την συνάρτηση $f \circ g$ (πεδίο ορισμού, τύπο) (μονάδες 4)

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $h(x) = \sqrt{16 - x^2}$ στο σημείο της $(\sqrt{7}, 3)$. (μονάδες 3)

B3. Δίνεται ρόμβος ABΓΔ με A(-1, 4) και Γ(3, 2).

(α) Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου ΒΔ. (μονάδες 4)

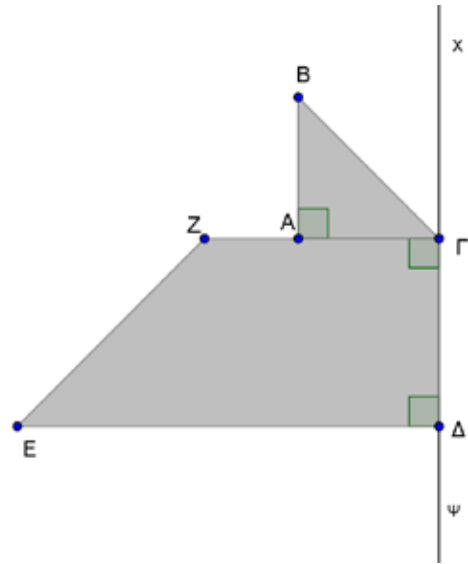
(β) Αν η πλευρά AB έχει εξίσωση $x + y = 3$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Δ. (μονάδες 3)

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του ρόμβου. (μονάδες 3)

B4. Αν οι γωνίες A, B, Γ τριγώνου ABΓ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να δείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma}{\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma} = \sqrt{3}$$

B5. Στο διπλανό σχήμα το ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο. Το τετράπλευρο ΓΔΕΖ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με $\angle G = \angle D = 90^\circ$. Αν $AB = 3\text{cm}$, $AZ = 2\text{cm}$, $ED = 9\text{cm}$ και $ZE = 5\text{cm}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το σκιασμένο σχήμα περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα ΧΨ.



Διευθύντρια

Οικονομίδου Σύλβια

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά
ΤΑΞΗ: Β΄ Λυκείου Κατεύθυνση

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 03/06/15
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ώρες

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
(β) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (στα σχήματα επιτρέπεται μολύβι).
(γ) Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
(δ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
(ε) Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ που αποτελείται από μια (1) σελίδα.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- A1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)}$
- A2. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} = 30^\circ$ και $\eta\mu B = \frac{1}{4}$, να δείξετε ότι $\alpha = 2\beta$.
- A3. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:
- (α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{x^3 + 2x - 7}$ (β) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - x - 2|}{x - 2}$
- A4. Σε αριθμητική πρόοδο το άθροισμα του δεύτερου και του έβδομου όρου είναι 7 και ο δέκατος όρος είναι τετραπλάσιος του πέμπτου.
Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.
- A5. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:
- (α) $y = 3x^2 - e^x \cdot \varepsilon\varphi x + \pi^{2015}$ (β) $x^2 + y^2 = 2xy + 4\eta\mu x$
- A6. Σε κύκλο (O, R) γράφουμε δύο χορδές $AB = \lambda_4$ και $A\Gamma = \lambda_3$.
Να βρείτε: (α) το εμβαδόν και (β) την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$ που περικλείεται από τις χορδές $AB, A\Gamma$ και το τόξο $B\Gamma$, συναρτήσει του R .

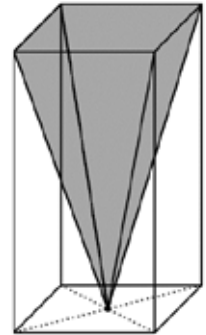
A7. Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής ότι, $\forall v \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + v(v+1)(v+2) = \frac{v(v+1)(v+2)(v+3)}{4}$$

A8. Αν $\alpha + \beta i = \frac{10}{1-2i}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να βρείτε τα α και β και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση:

$$\beta^x - 5 \cdot \alpha^x + 6 = 0$$

A9. Μια συμπαγής κανονική τετραγωνική πυραμίδα με περίμετρο βάσης $20\sqrt{2} \text{ m}$ βρίσκεται μέσα σε δοχείο με σχήμα κανονικό τετραγωνικό πρίσμα το οποίο είναι γεμάτο με υγρό. Η βάση της πυραμίδας συμπίπτει ακριβώς με τη βάση του τετραγωνικού πρίσματος και έχουν το ίδιο ύψος, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν αφαιρέσουμε την πυραμίδα από το δοχείο και δεν έχουμε απώλειες στο υγρό να βρείτε το παράπλευρο ύψος αν η στάθμη του υγρού κατέβει κατά 2m .



A10. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 + 6x + 1$, $x \in [-3, +\infty)$.

Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

(α) $f^{-1}(x)$

(β) $(f + f^{-1})(x)$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

(α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο της με τετμημένη $x = -1$.

(β) Να δείξετε ότι: $e^{2f(x)} \cdot f'(x) - x + (x^2 + x + 1)^2 \cdot f''(x) + x^2 = 1 - x$

B2. Αν $\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \frac{1}{5^5} + \frac{3}{5^6} + \dots \right)^{\frac{\eta\mu x + \eta\mu 3x + \eta\mu 5x}{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 3x + \sigma\upsilon\nu 5x}} = \frac{1}{3}$

να βρείτε τις τιμές του x αν $x \in [0, 2\pi]$.

B3. Δίνονται οι αριθμοί: $\alpha_1 = 2^{\sin 2x}$, $\alpha_2 = 2^{\sin^2 x}$ και $\alpha_3 = 2$.

(α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί α_1 , α_2 και α_3 αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου με $\lambda = 2^{\eta\mu^2 x}$.

(β) Να δείξετε ότι: $\frac{\log_2 \alpha_3 - \eta\mu 2x}{\log_8 \alpha_1} = \frac{3 - 3\epsilon\varphi x}{1 + \epsilon\varphi x}$

(γ) Αν $\frac{4\epsilon\varphi x}{1 - 3\epsilon\varphi^2 x} = 1 - \log_2 \lambda$, να δείξετε ότι $\epsilon\varphi(60^\circ + x) - \epsilon\varphi(60^\circ - x) = 1 + \sin 2x$

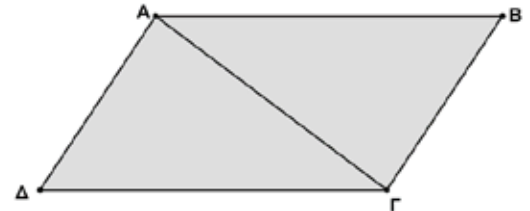
B4. Στο σχήμα δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$.

Αν η εξίσωση της πλευράς $\Delta\Gamma$ είναι $3x + 4y = 25$,

της διαγωνίου $A\Gamma$ είναι $2x + y = 10$,

μια κορυφή του είναι $(5, 5)$ και το μέσο της $A\Gamma$

είναι $(2, 6)$, να βρείτε:



(α) (i) την γωνία $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$.

(ii) την απόσταση του B από τη $\Delta\Gamma$.

(iii) το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

(β) Το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ϵ) που περνά από το B και είναι κάθετη στην AB . Αν $AB = 5\mu.$, η απόσταση του B από τη $\Delta\Gamma$ είναι $2\mu.$ και η απόσταση του Γ από την (ϵ) είναι $1\mu.$, να βρείτε το εμβαδόν του στερεού που παράγεται.

B5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$ και $g(x) = \sqrt{x^2 + 5}$.

(α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού και τα πεδία τιμών των $f(x)$ και $g(x)$.

(β) Να ελέγξετε αν ορίζεται η $g \circ f$ και αν ορίζεται να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.

(γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(x + 1) = 0$

(δ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -3} (e^{f(x)} \cdot \eta\mu(x + 3) + 2g^2(x))$

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ

ΤΑΞΗ: Β' Κατεύθυνσης

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 28/05/2015

ΟΔΗΓΙΕΣ: Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.

Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού και διορθωτικής ταινίας.

Να γράψετε μόνο με μπλε ή μαύρη πένα. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.

Το γραπτό αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α' : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Δίνεται φθίνουσα Γεωμετρική Πρόοδος με γενικό όρο $a_n = 4 \cdot 3^{1-n}$. Να βρείτε το άθροισμα των απείρων όρων της.

A2. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = e^x \cdot \eta\mu 3x$

β) $g(x) = \ln \frac{x}{x^2+1}$, $x > 0$.

A3. Με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής να αποδείξετε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

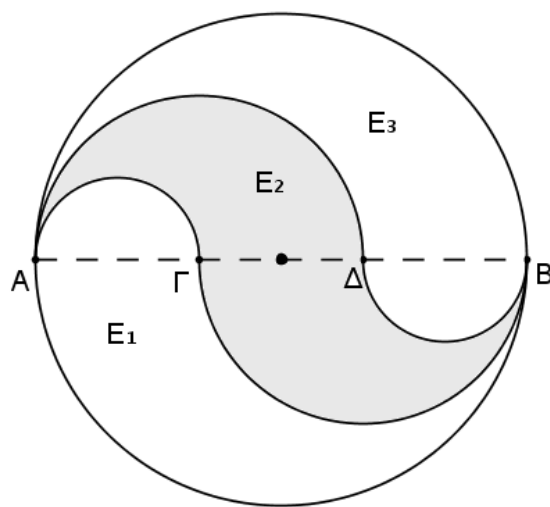
A4. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 4\alpha}{\eta\mu 4\alpha+\eta\mu 2\alpha}=\sigma\phi 2\alpha$.

A5. Να βρείτε τα πιο κάτω όρια συναρτήσεων :

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{3x - x^2}$

β) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|5-3x| - |3x-1|}{|x^2-1|}$.

- A6.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$.
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της κάθε συνάρτησης.
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = f^{-1}(x)$.
- γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.
- A7.** Να λύσετε την εξίσωση $4^{\sin x} - 2^{\sin x-1} - 2^{1+\sin x} + 1 = 0$ στο διάστημα $x \in [0, 2\pi]$.
- A8.** Εκατό ίσες χρυσές ράβδοι θα λιώσουν για να κατασκευαστεί μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα. Κάθε ράβδος έχει σχήμα ορθού πρίσματος με βάση τετράγωνο πλευράς 2m και ύψος 1m. Η βάση της πυραμίδας είναι εγγεγραμμένη σε κύκλο διαμέτρου $10\sqrt{2}$ m. Να υπολογίσετε:
- α) την ακμή της βάσης της πυραμίδας,
- β) το ύψος της πυραμίδας και
- γ) το εμβαδόν επιφάνειάς της.
- A9.** Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση $\varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi \Gamma = \frac{\alpha}{\beta\eta\mu\Gamma}$ να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
- A10.** Στο διπλανό σχήμα σε κύκλο (O,R) θεωρούμε τα σημεία Γ και Δ που διαιρούν τη διάμετρό του (AB)=δ σε τρία ίσα τμήματα. Στο ένα από τα δύο ημιεπίπεδα της AB γράφουμε τα ημικύκλια με διαμέτρους τις ΑΓ και ΑΔ και στο αντικείμενο ημιεπίπεδο γράφουμε τα ημικύκλια με διαμέτρους ΒΔ και ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:
- α) Το εμβαδόν E του κυκλικού δίσκου διαμέτρου (AB) = δ ισούται με $E = \frac{\pi\delta^2}{4}$.
- β) Το μήκος του καμπυλόγραμμου σχήματος ΑΓΒΔΑ (το γραμμοσκιασμένο) ισούται με το μήκος του κύκλου (O,R).
- γ) Οι καμπύλες γραμμές ΑΓΒ και ΑΔΒ διαιρούν τον κυκλικό δίσκο διαμέτρου AB=δ σε τρία ισεμβαδικά χωρία τα E_1, E_2, E_3 .



B1. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{2x^2 - 3x + 9}{x^3 - 9x}$.

α) Να αναλύσετε την παράσταση A σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

β) Χρησιμοποιώντας την ανάλυση της παράστασης A ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να

βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 9}{x^3 - 9x}$, $x \neq -3, x \neq 0, x \neq 3$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης $f(x)$ στο σημείο με $x = 1$.

B2. Ο τέταρτος όρος μιας Αριθμητικής Προόδου είναι ίσος με $\log 81$ και η διαφορά της είναι ίση με $\log 3$.

i) Να αποδείξετε ότι ο πρώτος όρος της προόδου ισούται με την διαφορά της.

ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $\alpha_{20} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{30}$.

B3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές στις ευθείες $(\varepsilon_1): x + y - 4 = 0$, $(\varepsilon_2): x - y + 8 = 0$ και στον οριζόντιο άξονα xx' . Αν οι κορυφές B και Γ βρίσκονται στον άξονα xx' , τότε:

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ και να προσδιορίσετε το είδος του.

γ) Να προσδιορίσετε τις εξισώσεις της διαμέσου ΓM και της διχοτόμου $A\Delta$ του τριγώνου.

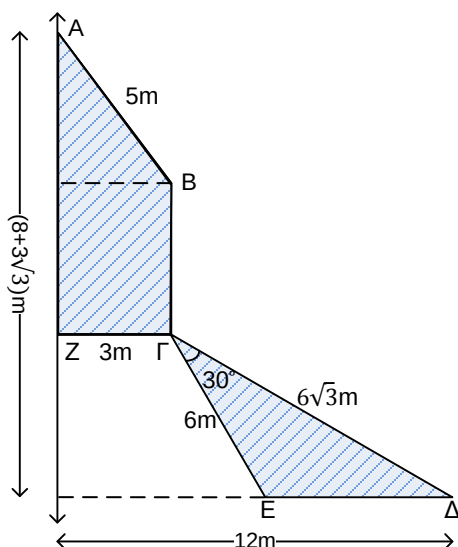
δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου.

B4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin x - \sin \alpha \cdot \sin(x + \alpha)$, όπου $x \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ και $\sin \alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \eta \mu \alpha \cdot \eta \mu(x + \alpha)$.

β) Αν $f(x) + f(x - \alpha) = 0$, να αποδείξετε ότι $x = \kappa \pi - \frac{\alpha}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

- B5.** Η Αρχή Τηλεπικοινωνιών Κύπρου θα στείλει δορυφόρο σε τροχιά γύρω από τη Γη. Ο δορυφόρος συνολικού ύψους $(8+3\sqrt{3})$ m θα προκύψει από την πλήρη περιστροφή του $AB\Gamma\Delta E\Gamma Z$ γύρω από την AZ . Αν $(AB) = 5$ m , $(\Gamma Z) = 3$ m , $(\Gamma\Delta) = 6\sqrt{3}$ m , $(\Gamma E) = 6$ m , $\Delta\hat{\Gamma}E = 30^\circ$ και το σημείο Δ απέχει από την AZ απόσταση 12m , να υπολογίσετε:
- α) το εμβαδόν και
- β) τον όγκο του δορυφόρου.



ΤΕΛΟΣ

Εισηγήτριες:

Μαρία Χριστοπούλου

.....

Μαρία Ηλιάδου

.....

Ο Συντονιστής:

Νίκος Νικολάου Β.Δ.

.....

Η Διευθύντρια:

Κυριακή Θεοδώρου

.....

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ 2015

ΤΑΞΗ: Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
 ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Κατεύθυνσης

ΗΜΕΡΟΜ.: 22 / 5 / 2015

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ½ ώρες

ΑΡ. ΣΕΛΙΔΩΝ: 4

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 2. Να γράφετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
 3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
 4. Επισυνάπτεται τυπολόγιο στο τέλος του γραπτού.

ΜΕΡΟΣ Α'

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

1. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(α) \ y = \ln(\sin 5x) \qquad (β) \ y = \frac{2x - 1}{x + 6}$$

2. Να αναλύσετε το κλάσμα $K = \frac{2x - 14}{(x + 2)(x - 4)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

3. Να επιλύσετε το τρίγωνο $\triangle ABC$, αν $\alpha = 8m$, $\beta = 4m$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

4. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \frac{3x - 2}{x + 5}$.

Να βρείτε:

(α) το πεδίο ορισμού της,

(β) το πεδίο τιμών της και

(γ) να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(x)$.

5. Να λύσετε την εξίσωση: $2\log_4(x^2 + 3) - \log_2(x + 3) = 1$.

6. Να σχηματίσετε φθίνουσα Γ. Π. στην οποία το άθροισμα του 1^{ου} και του 2^{ου} όρου είναι ίσο με 15 και το άθροισμα των απείρων όρων της είναι ίσο με 20.

7. Σε ένα ενδοσχολικό αγώνα δρόμου δόθηκαν χρηματικά βραβεία στους πρώτους με βάση τη θέση τερματισμού τους αρχίζοντας από τον 1^ο. Τα βραβεία με τη σειρά που δόθηκαν σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο. Ο 5^{ος} πήρε τετραπλάσια από τον 10^ο ενώ ο 3^{ος} και ο 7^{ος} πήραν συνολικά €80.

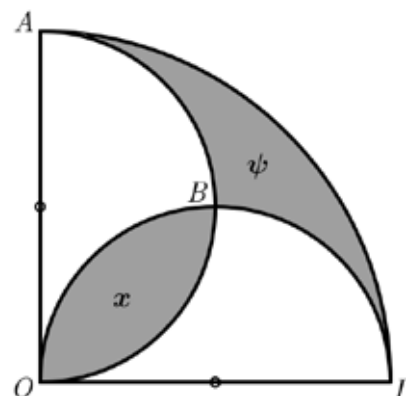
(α) Να σχηματίσετε την πρόοδο.

(β) Να υπολογίσετε το συνολικό ποσό που δόθηκε στους δέκα πρώτους.

8. Να λύσετε την εξίσωση: $\log_3(4^{x-1} + 5) = 1 + \log_3(2^{x-1} + 1)$.

9. Σε ένα τεταρτοκύκλιο ΑΟΓ με κέντρο το Ο και ακτίνα $2a$, σχεδιάζουμε δύο ημικύκλια με διαμέτρους ΑΟ και ΟΓ που τέμνονται στο σημείο Β. Δημιουργούνται δύο περιοχές με εμβαδά x και y .

Η περιοχή με εμβαδόν x είναι η τομή των δύο ημικυκλίων ενώ η περιοχή με εμβαδόν y είναι το καμπυλόγραμμο τρίγωνο ΑΒΓ. Να δείξετε ότι $y = x$.



10. (α) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας $E_{ολ} = 576m^2$ και το παράπλευρο ύψος της είναι κατά $6m$ μικρότερο από την ακμή της βάσης της.

- (i) Να δείξετε ότι η ακμή της βάσης της είναι ίση με $16m$ ($a = 16m$).
- (ii) Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.
- (iii) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παράπλευρη έδρα με τη βάση της πυραμίδας.

(β) Δύο κλειστές δεξαμενές φύλαξης κρασιού, με τον ίδιο όγκο, θα κατασκευαστούν από ανοξείδωτο ατσάλι, η μια ακριβώς στο σχήμα και στις διαστάσεις της πυραμίδας που περιγράψαμε στο (α) και η άλλη σε σχήμα κύβου.

Αν το ανοξείδωτο ατσάλι στοιχίζει $\text{€ } 3$ το m^2 , να υπολογίσετε ποια δεξαμενή θα κοστίσει λιγότερο να κατασκευαστεί και πόσο λιγότερο θα κοστίσει;

ΜΕΡΟΣ Β΄

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, η πλευρά ΑΒ έχει εξίσωση $x + y = 1$ και η ΑΔ έχει εξίσωση $x - y = -3$.
 - (α) Αν μια από τις κορυφές έχει συντεταγμένες $(7, 2)$, να αποδείξετε ότι είναι η κορυφή Γ.
 - (β) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.
 - (γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του Α, Β και Δ.
 - (δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

2. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $y^2 + 2xy - 6x = 9$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με τετμημένη $x = 1$ και τεταγμένη $y < 0$.

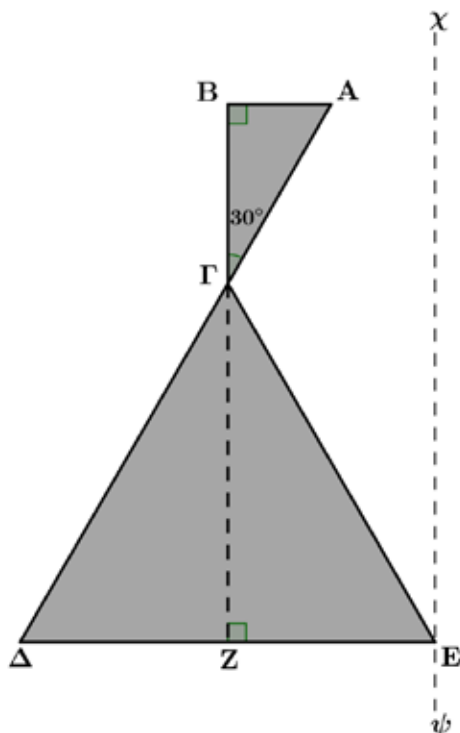
(β) Να αποδείξετε ότι : $(x+y)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2\frac{dy}{dx} = 0$.

3. Δίνονται: $A = \frac{2\sin 6w \times \sin 4w - \sin 10w}{2\sin 5w \times \sin 3w - \sin 8w + 1}$ και $B = \frac{\sin 5w - \sin 7w}{2\sin 6w}$.

(α) Να δείξετε ότι $A = \sin w$ και $B = \sin w$.

(β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να λύσετε την εξίσωση $2 \times B^2 - \sqrt{2} \times A \times \sin w = 0$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

4. Στο σχήμα που ακολουθεί, το $\triangle ABG$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο ($\angle B = 90^\circ$), η γωνία $\angle AGB = 30^\circ$ και το τρίγωνο $\triangle GDE$ είναι ισόπλευρο. Τα τμήματα $GE = 12\text{cm}$, $AG = 6\text{cm}$, τα σημεία B, Γ, Z είναι συνευθειακά και $GZ \perp DE$. Το $\triangle ABGDE$ περιστρέφεται μια πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy ($xy \parallel BG$). Να υπολογίσετε:
- (α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και
- (β) τον όγκο του στερεού που παράγεται.



5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ και $h(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 5}$.

(α) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f \circ h$ και $\frac{f}{h}$.

(β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$ (πεδίο ορισμού και τύπο).

(γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

(i) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|f(x)| + x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

$hm(A \pm B) = hmA \sin B \pm \sin A hmB$	$\sin(A \pm B) = \sin A \sin B \mp hmA hmB$	
$2hm a \sin b = hm(a - b) + hm(a + b)$	$2\sin a \sin b = \sin(a - b) + \sin(a + b)$	
$2hm a hm b = \sin(a - b) - \sin(a + b)$		
$hm^2 a = 2hm a \sin a$		
$\sin 2a = \sin^2 a - hm^2 a$, $hm^2 a = \frac{1 - \sin 2a}{2}$, $\sin^2 a = \frac{1 + \sin 2a}{2}$		
$hm^2 a = \frac{2t}{1+t^2}$, $\sin 2a = \frac{1 - t^2}{1+t^2}$, $t = \tan a$		
$hmA + hmB = 2hm \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$	$hmA - hmB = 2hm \frac{A-B}{2} \sin \frac{A+B}{2}$	
$\sin A + \sin B = 2\sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$	$\sin A - \sin B = 2hm \frac{B-A}{2} hm \frac{A+B}{2}$	
$a = 2RhmA$	$a^2 = b^2 + g^2 - 2bg \sin A$	$E = \frac{abhmG}{2}$

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

Ορθό πρίσμα	$E_p = P_b \chi$	$V = E_b \chi$
Κανονική Πυραμίδα	$E_p = \frac{1}{2} P_b \chi$	$V = \frac{E_b \chi}{3}$
Κύλινδρος	$E_k = 2pRu$	$V = pR^2 \chi$
Κώνος	$E_k = pRl$	$V = \frac{pR^2 \chi}{3}$
Κόλινδρος Κώνος	$E_k = p(R+r)l$	$V = \frac{p\chi}{3} (R^2 + Rr + r^2)$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2015**

Ημερομηνία: 26 / 5 / 2015

Χρόνος: 2,5 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- β) Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).
- γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- δ) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας .
- ε) Δίνεται τυπολόγιο.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.**ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $Z = 2 - 3i$. Να εκφράσετε την παράσταση $Z^2 - Z$ στην μορφή $\alpha + \beta i$.
2. Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-x}$

β) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{3x^2-x-7}$
3. Να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης $4^{|hm-1|} = 8$
4. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{4x^2 - 3x + 2}{x^2(x-1)}$.
5. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται $a=4\text{cm}$, $B=60^\circ$ και $E=4\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Να επιλύσετε το τρίγωνο και να βρείτε το είδος του ως προς τις πλευρές του.
6. Να βρείτε την παράγωγο $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ των συναρτήσεων:

α) $y = x^2 \ln^3 x + 3^{-x} \sin x$

β) $x^2 - 2xy = 5y$

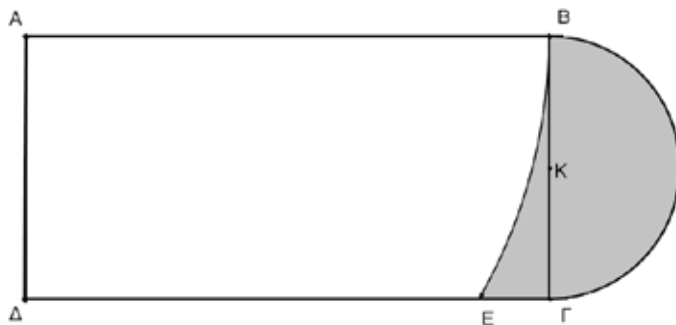
7. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας 384 m^2 και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 240 m^2 . Να βρείτε:
- (α) την ακμή της βάσης της,
 - (β) τον όγκο της,
 - (γ) το μήκος της παράπλευρης ακμής της και
 - (δ) το μέτρο της γωνίας που σχηματίζει το παράπλευρο ύψος της με την βάση της (σε προσέγγιση 1 δεκαδικού ψηφίου).

8. Να λύσετε την εξίσωση: $\log_2(9^{x-1} + 11) = 2 + \log_2(3^{x-2} + 4)$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x - 1$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

- (α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της $f(x)$
- (β) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της $g(x)$ και
- (γ) το πεδίο ορισμού και τον τύπο της $g \circ f$ και $\frac{g}{f}$

10. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ABGD$ με μήκος 16cm και πλάτος 8cm . Με κέντρο το K και ακτίνα KB γράφουμε τόξο $B\Gamma$ (K το μέσο της $B\Gamma$) και με κέντρο το A και ακτίνα AB γράφουμε τόξο BE όπως φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο της σκιασμένης επιφάνειας.



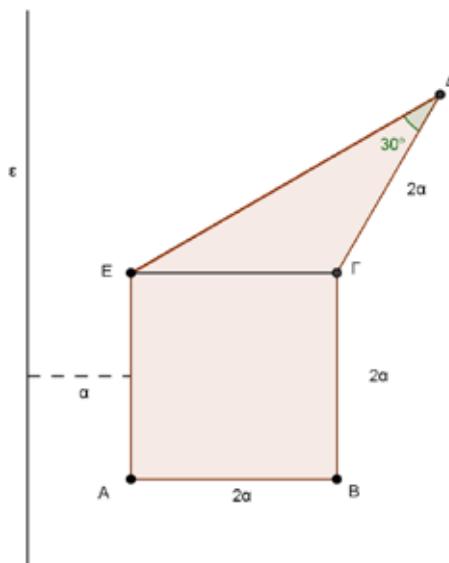
ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. α) Ο πρώτος όρος Αριθμητικής Προόδου είναι $a_1 = 40$ και η διαφορά $d = -\frac{5}{8}$.
- Να βρείτε τον εβδομηκοστό τρίτο όρο της Αριθμητικής Προόδου (a_{73}).
 - Ποιος όρος της Προόδου είναι ίσος με 0.
 - Αν S_n είναι το άθροισμα των n πρώτων όρων της Αριθμητικής Προόδου, να βρείτε την μεγαλύτερη δυνατή τιμή που μπορεί να πάρει το S_n .
- β) Δίνεται μια ακολουθία αριθμών $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ με $a_1 = 1$ που ορίζεται με τον αναγωγικό τύπο $a_{n+1} = 2a_n$.
- Να βρείτε τους 4 πρώτους όρους της ακολουθίας.
 - Να δείξετε ότι η ακολουθία είναι Γεωμετρική Πρόοδος.
 - Να δείξετε με την μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι " $n \in \mathbb{N}$ " ισχύει:
- $$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- iv) Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω τύπο ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να υπολογίσετε το άθροισμα των 14 πρώτων όρων της Γεωμετρικής Προόδου.
2. Τραπεζίο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) έχει κορυφές Β(10,3), Γ(5,4), Δ(2,2) και εξίσωση μιας διαγωνίου $7x - 4y - 19 = 0$. Να βρείτε:
- Την εξίσωση της άλλης διαγωνίου.
 - Τις συντεταγμένες της κορυφής Α.
 - Την γωνία ω που σχηματίζουν οι μη παράλληλες πλευρές του.
 - Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΔ.
 - την απόσταση μεταξύ των παραλλήλων πλευρών του.

3. α) i) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\sin 2x}{1 + \sin 2x} \times \frac{\sin x}{1 + \sin x} = \sin \frac{x}{2}$
- ii) Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω ταυτότητα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\sin 2x}{1 + \sin 2x} \times \frac{\sin x}{1 + \sin x} = \sin \alpha$ στο διάστημα $[0^\circ, 720^\circ]$
- β) Αν Α, Β και Γ είναι γωνίες τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:

$$\sin 2A - \sin 2B + \sin 2G = 4 \sin A \times \sin B \times \sin G.$$

4. Στο πιο κάτω σχήμα το πολύγωνο ΑΕΔΓΒ αποτελείται από το τετράγωνο ΑΒΓΕ πλευράς $2a$ cm και το ισοσκελές τρίγωνο ΕΓΔ με $ΕΓ = ΓΔ = 2a$ cm και $\widehat{ΕΔΓ} = 30^\circ$. Το πολύγωνο ΑΕΔΓΒ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε) που είναι παράλληλη προς την ΑΕ και απέχει από αυτήν a cm. Να υπολογίσετε (συναρτήσει του a):
- α) Τον όγκο, V .
- β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας, $E_{ολ}$, του στερεού που παράγεται κατά την περιστροφή.



5. Δίνεται η συνάρτηση $y = \ln \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης.

(β) Να δείξετε ότι: $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^{2x} - 1}$

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α της καμπύλης $y = \ln \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}$, στο οποίο η κλίση της εφαπτομένης είναι $\frac{2}{3}$.

.....

ΤΕΛΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Τριγωνομετρία

$$\begin{aligned} \hbar\pi(A \pm B) &= \hbar\pi A \sin B \pm \hbar\pi B \sin A & \sin(A \pm B) &= \sin A \sin B \mp \hbar\pi A \hbar\pi B \\ 2\hbar\pi A \sin B &= \hbar\pi(A - B) + \hbar\pi(A + B) & 2\sin A \sin B &= \sin(A - B) + \sin(A + B) \\ 2\hbar\pi A \hbar\pi B &= \sin(A - B) - \sin(A + B) \\ \hbar\pi^2 A &= 2\hbar\pi A \sin A, & \sin^2 A &= \sin^2 A - \hbar\pi^2 A \\ \hbar\pi^2 A &= \frac{1 - \sin^2 A}{2} & \sin^2 A &= \frac{1 + \sin^2 A}{2} \\ \hbar\pi^2 A &= \frac{2\epsilon_j A}{1 + \epsilon_j^2 A} & \sin^2 A &= \frac{1 - \epsilon_j^2 A}{1 + \epsilon_j^2 A} \\ \hbar\pi A + \hbar\pi B &= 2\hbar\pi \frac{A+B}{2} \times \sin \frac{A-B}{2} & \hbar\pi A - \hbar\pi B &= 2\hbar\pi \frac{A-B}{2} \times \sin \frac{A+B}{2} \\ \sin A + \sin B &= 2\sin \frac{A+B}{2} \times \sin \frac{A-B}{2} & \sin A - \sin B &= 2\hbar\pi \frac{B-A}{2} \times \hbar\pi \frac{A+B}{2} \\ a &= 2R \times \hbar\pi A & a^2 &= b^2 + g^2 - 2 \times b \times g \times \sin A & E &= \frac{a \times b \times \hbar\pi G}{2} \end{aligned}$$

2. Στερεομετρία

Ορθό πρίσμα	$E_p = P_b \times \iota$	$V = E_b \times \iota$
Κανονική πυραμίδα	$E_p = \frac{1}{2} P_b \times \hbar$	$V = \frac{E_b \times \iota}{3}$
Κύλινδρος	$E_k = 2 \times \rho \times R \times \iota$	$V = \rho \times R^2 \times \iota$
Κώνος	$E_k = \rho \times R \times \iota$	$V = \frac{\rho \times R^2 \times \iota}{3}$
Κόλουρος Κώνος	$E_k = \rho \times (R + r) \times \iota$	$V = \frac{\rho \times \iota}{3} (R^2 + R \times r + r^2)$

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)

ΧΡΟΝΟΣ : 2,5 ΩΡΕΣ

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29/05/2015

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
- (β) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι) .
- (γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- (δ) Το γραπτό αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.
- (ε) Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων την παράσταση $A = \frac{2x+4}{(x-1)(x+1)}$
2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:
 - α) $y = 4x^3 - \frac{1}{x} + 7$
 - β) $y = \ln 3x - \ln 2x$
3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της καθέτου της καμπύλης $y^2 - 4x = 4$ στο σημείο της Α με $x = 0$ και $y > 0$.
4. Να επιλύσετε το τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$), αν δίνονται το εμβαδόν του $E = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$ και οι δύο πλευρές του $b=4\text{cm}$ και $\gamma=2\sqrt{3} \text{ cm}$
5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + \sqrt{e}), & x \leq 0 \\ \frac{\ln x}{2x}, & x > 0 \end{cases}$
 - α) Να υπολογίσετε τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
 - β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$
6. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\frac{B}{2} = \frac{\ln B}{\ln A + \ln G}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

7. α) Να δείξετε με την μέθοδο της τέλειας επαγωγής ότι ισχύει η πρόταση

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

β) Δίνεται η ακολουθία 1, 3, 5, 7, Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω πρόταση ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε:

(i) τον 101^ο όρο της

(ii) πόσους όρους πρέπει να προσθέσουμε για να πάρουμε άθροισμα 900

8. Κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας η παράπλευρη ακμή είναι $4\sqrt{5}$ m . Αν οι παράπλευρες έδρες σχηματίζουν με τη βάση γωνία 60° , να υπολογίσετε τον όγκο της.

9. Να λύσετε την εξίσωση $\log_3(9 \times 4^{\eta \mu^2 x}) + \log_3 \frac{2}{8^{\sigma \nu \nu x}} = 2$ στο διάστημα $[0, 360^\circ]$

10. Στο διπλανό σχήμα δίνονται :

AB διάμετρος του κύκλου (K, ρ) ,

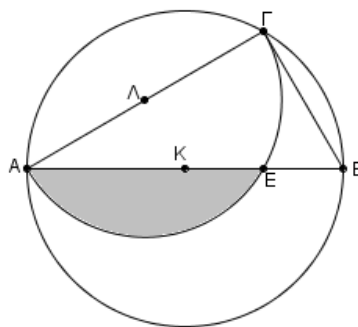
$\angle A \hat{B} \Gamma = 90^\circ$ και AΕΓ ημικύκλιο με

κέντρο το Λ και διάμετρο την ΑΓ.

Να υπολογίσετε συναρτήσει του ρ:

α) το εμβαδόν και

β) την περίμετρο του σκιασμένου χωρίου.



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \times e^{-x}$, $x \geq 0$

α) Να δείξετε ότι $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{4f(x)}{x} + e^x = 4$

2. Δίνεται η ακολουθία $4\eta\mu\theta, 2\eta\mu2\theta, \eta\mu3\theta+\eta\mu\theta, \dots$ με θ^1 κπ, θ^1 κπ+ $\pi/2$.

α) Να δείξετε ότι : i) η ακολουθία είναι απόλυτα φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος.

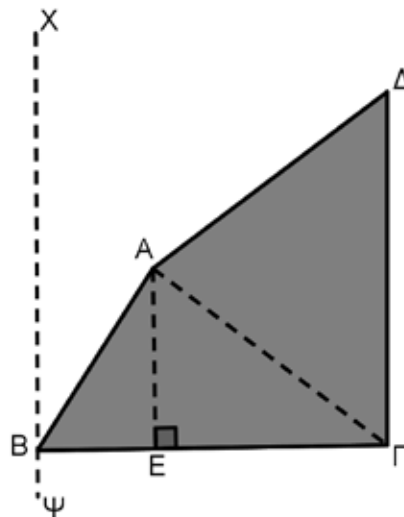
$$\text{ii) } \hat{a}_\neq = \frac{4\eta\mu\eta}{1 - \text{sun}\eta}$$

β) Να λύσετε την εξίσωση $\hat{a}_\neq = 4\epsilon\eta\eta$

3. Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο AΔΓ είναι ισοσκελές με AΔ=AΓ. Το τρίγωνο ABΓ με πλευρές AB = $\sqrt{13}$ cm και BΓ=6 cm έχει ύψος AE=3 cm. Το τετράπλευρο ABΓΔ περιστρέφεται πλήρως γύρω από άξονα ΧΨ που είναι κάθετος στη BΓ και παράλληλος με τη ΔΓ. Να βρείτε:

α) τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή και

β) το εμβαδόν ολικής του επιφάνειας



4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-3} + 2$ και $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών των συναρτήσεων f και g

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της f^{-1}

γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$ (τύπος και πεδίο ορισμού)

δ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{f(x)}{x - 7}$

5. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,1)$. Σημείο Γ ανήκει στην ευθεία $y = 2x$ και απέχει από την ευθεία AB απόσταση $d = \sqrt{5}$ μονάδες. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της ευθείας AB

β) τις συντεταγμένες του σημείου Γ

Αν το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(\frac{5}{2}, 5)$, να βρείτε:

γ) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

δ) τις συντεταγμένες σημείου Δ τέτοιο ώστε, το σημείο A να ισαπέχει από τα σημεία Γ και Δ και οι ευθείες AB και $\Gamma\Delta$ να είναι κάθετες.

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΕΤΑΡΤΗ, 27/05/2015

ΧΡΟΝΟΣ : 2 ΩΡΕΣ ΚΑΙ 30 ΛΕΠΤΑ

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.
- Επισυνάπτεται τυπολόγιο.
- Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.
- Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α΄ Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{x+8}{(x-1)(x+2)}$$

2. Σε αριθμητική πρόοδο ο τέταρτος όρος είναι 11 ενώ το άθροισμα του τρίτου και του έκτου όρου είναι 25. Να σχηματίσετε την πρόοδο και να βρείτε το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων της.

3. Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$
β) $g(x) = \eta\mu(e^{4x})$

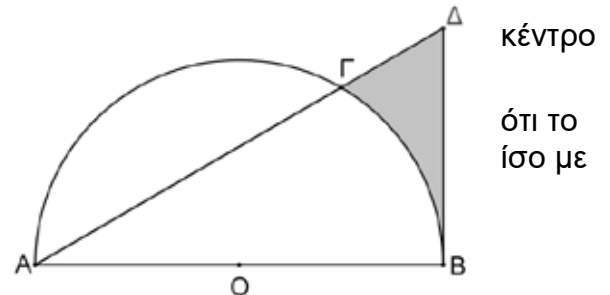
4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = 2\sqrt{3}$ cm, $\gamma = 2$ cm και $\hat{B} = 120^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες Α και Γ, την πλευρά α και το εμβαδόν του τριγώνου.

5. Να λύσετε την εξίσωση: $\left| \log_2 x - \frac{1}{\log_x 8} \right| = 2$

6. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $2\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \frac{\eta\mu(2\alpha - \beta)}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha}$

7. Σε κανονική τετραγωνική πυραμίδα το παράπλευρο ύψος είναι διπλάσιο του ύψους της. Αν ο όγκος της είναι 32cm^3 , να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.
8. Να αποδείξετε με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής ότι " $n \in \mathbb{N}$ " ισχύει:

$$2+5+8+\dots+(3n-1)=\frac{1}{2}n(3n+1)$$
9. Αν $f(x)=\frac{2x}{16-x^2}$ και $g(x)=\sqrt{9-x}$, να ορίσετε στο κατάλληλο πεδίο ορισμού τη συνάρτηση $f \circ g$ και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$.
10. Στο διπλανό σχήμα το ΑΓΒ είναι ημικύκλιο με Ο και διάμετρο ΑΒ=2R. Αν ΑΓ = λ₃ και ΒΔ εφαπτομένη του ημικυκλίου στο Β, να δείξετε εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΒΓΔ είναι $\frac{R^2}{12}(5\sqrt{3}-2\pi)$ τ.μ.



ΜΕΡΟΣ Β΄ Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β΄.
 Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $2\log 3 + \log(9^{x-1} + 3) = x \log 3 + \log 12$ και Σ_{Ψ} το άθροισμα των απείρων όρων Φθίνουσας Γεωμετρικής Προόδου με πρώτο όρο x_2^3 και τέταρτο όρο x_1^3 , να δείξετε ότι $\Sigma_{\Psi} = 16$.
2. Δίνονται τα σημεία Α(3,6), Β(7,2), Γ(3,-2).
 α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
 β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ΑΒ και ΑΓ.
 γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ έτσι ώστε το ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο.
 δ) Αν η απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία (ε): $4x - 3y + 2z - 1 = 0$, κλ $\square$ είναι ίση με 3 μονάδες, να βρείτε τις τιμές του κ.
3. Αν $A = \sin x + \sin 3x - \sin 2x$ και $B = \eta \mu x + \eta \mu 3x - \eta \mu 2x$,
 α) Να δείξετε ότι $\frac{B}{A} = \epsilon \phi 2x$. (μον. 4)
 β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{3(\eta \mu x + \eta \mu 3x - \eta \mu 2x)}{\sin x + \sin 3x - \sin 2x} - 2 \sin 2x = 0$. (μον. 4)
 γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{B}{A(2x^2 + 4x)}$. (μον. 2)

4. Δίνεται η καμπύλη $x \lambda \eta \psi = 1, x \neq 0$

α) Να δείξετε ότι: i) $\psi' = -\frac{\psi}{x^2}$ (μον. 3)

ii) $x^4 \times \psi'' - (2x+1) \times \psi = 0$ (μον. 3)

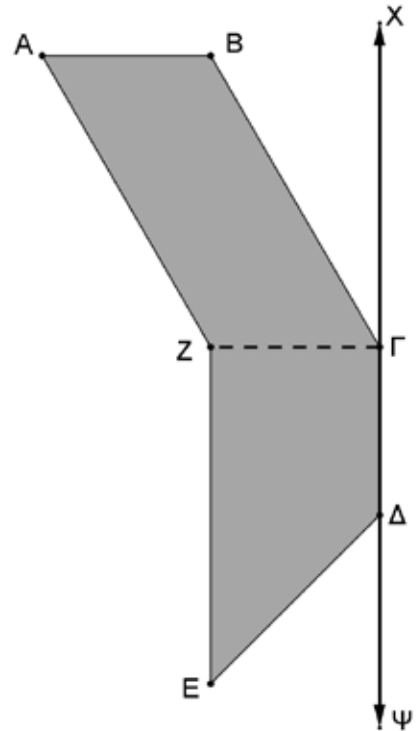
β) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της με τετμημένη $x=1$. (μον. 4)

5. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο και το $Z\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο ($\angle Z = \angle \Gamma = 90^\circ$).

Δίνονται $ZE = 8\text{cm}$, $Z\Gamma = 4\text{cm}$, $AZ = 8\text{cm}$,

$\angle B\Gamma X = 30^\circ$ και $\angle E\Delta\psi = 45^\circ$.

Το $AB\Gamma\Delta E Z$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $X\psi$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΤΑΞΗ: Β΄

ΧΡΟΝΟΣ: 2:30΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22/05/2015

Οδηγίες:

- Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Δίνεται τυπολόγιο.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από έξι (6) σελίδες

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις δέκα ασκήσεις .

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε μονάδες.

(1) Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{5x+7}{(x-4) \cdot (x+5)}$.

(2) Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = e^{8x} + \ln x$ (β) $g(x) = x^3 \ln x$.

(3) Να λύσετε τις ακόλουθες εξισώσεις :

(α) $\log(2x - 5) + \log(x - 2) = \log(5x - 14)$ (β) $9^x - 13 \cdot 3^x = -36$.

(4) Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\frac{1 + \sin 2q - \cos 2q}{1 + \sin 2q + \cos 2q} = \tan q$.

(5) Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο ABG δίνονται $a = \sqrt{3} \text{ cm}$, $g = 1 \text{ cm}$, $G = 30^\circ$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου.

(6) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+4}$ και $g(x) = \frac{x^2 - 36}{x - 10}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις

(α) $(f + g)(x)$ και (β) $\frac{f \circ g}{g \circ f}(x)$ (πεδίο ορισμού και τύπο).

(7) Τετραγωνική πυραμίδα έχει όγκο $72\sqrt{2} \text{ cm}^3$. Αν το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας είναι τετραπλάσιο από το εμβαδόν της βάσης, να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας.

(8) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) με $(AB)=2 \text{ cm}$, $(B\Gamma)=4 \text{ cm}$ και Δ το μέσο της AB . Με κέντρο το A και ακτίνα $A\Delta$, γράφουμε τεταρτοκύκλιο ΔZE . Αν το τμήμα $HZ\Theta$ είναι παράλληλο προς την πλευρά $B\Gamma$ και εφάπτεται του τεταρτοκυκλίου στο Z , να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του σκιασμένου μεικτόγραμμου τριγώνου $ZE\Theta$.

(9) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 8x} - \sqrt{x^2 - 5x})$.

(10) Δίνεται η γραφική παράσταση της καμπύλης $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ και σημείο Α σε αυτή στο

πρώτο τεταρτημόριο με τεταγμένη $y = 2\sqrt{2}$. Η εφαπτομένη της καμπύλης στο Α

τέμνει τον άξονα x στο σημείο Β.

(α) Να δείξετε ότι η κλίση της εφαπτομένης στο Α ισούται με $-\frac{4}{5}$. (3 Μον.)

(β) Η ευθεία ℓ διέρχεται από το Β και διχοτομεί τη γωνία ΑΒΓ. Να δείξετε, χωρίς την

χρήση υπολογιστικής μηχανής, ότι η κλίση της ευθείας ℓ ισούται με $\frac{5 + \sqrt{41}}{4}$. (2 Μον.)

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις πέντε ασκήσεις .
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα μονάδες.

- (1) (α) Σε αριθμητική πρόοδο ο 4ος όρος είναι πενταπλάσιος από τον 1ον και ο 3ος και 5ος όρος έχουν άθροισμα 30. Να σχηματίσετε την πρόοδο και να βρείτε το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων της.
- (β) Σε γεωμετρική πρόοδο $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ με $\alpha_1 > 0$, ο 5ος όρος είναι αντίστροφος του 1ου και ο 2ος και 3ος όρος έχουν άθροισμα -1 .
- (i) Να δείξετε ότι $\alpha_1=4$, και ο λόγος $\lambda = -\frac{1}{2}$.
- (ii) Να βρείτε το άθροισμα των άπειρων όρων $\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_7 + \alpha_{10} + \dots$.
- (2) Δίνεται πιο κάτω το σχήμα ΑΒΓΔΕ. Τα τμήματα ΕΑ και ΓΒ είναι κάθετα στο ΑΒ το οποίο είναι παράλληλο με το τμήμα ΕΔ. Αν $(ΑΒ)=8\text{ cm}$, $(ΒΓ)=13\text{ cm}$, $(ΑΕ)=10\text{ cm}$ και $(ΕΔ)=4\text{ cm}$, να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται αν το ΑΒΓΔΕ κάνει πλήρη περιστροφή 360° γύρω από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ.

(3) (α) Να βρείτε τη γενική λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης $\sin 3x + \sin 2x = \sin \frac{x}{2}$.

(β) Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει η τριγωνομετρική ταυτότητα

$$1 + \sin 2C - \sin 2A - \sin 2B = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

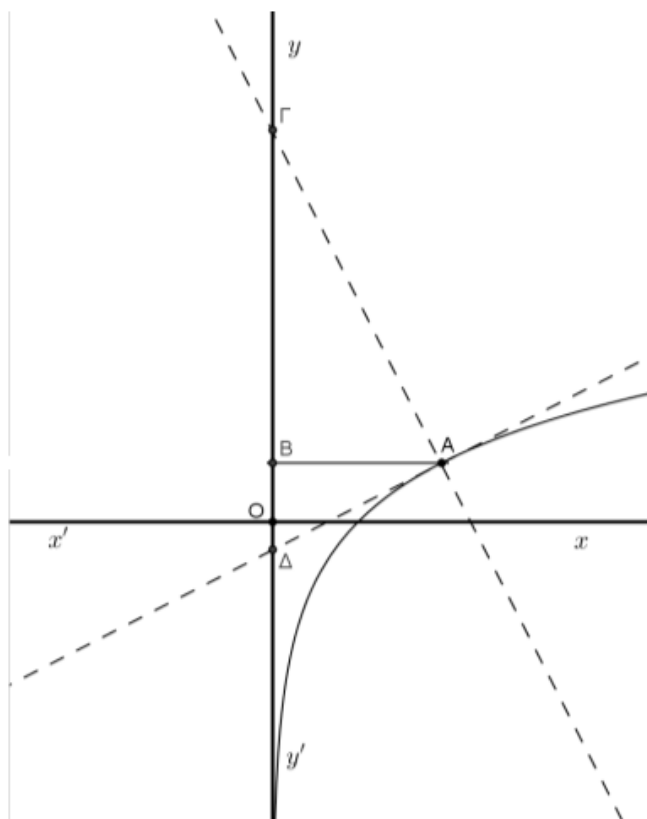
(4) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \ln x$ και τυχαίο σημείο $A(a, \ln a)$ σε

αυτή. Με διακεκομμένες γραμμές δίνονται η εφαπτομένη και η κάθετη της καμπύλης στο A ,

οι οποίες τέμνουν τον άξονα $y\psi$ στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα. Αν το ευθύγραμμο

τμήμα AB είναι κάθετο στον άξονα $y\psi$, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου a ώστε

το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ να είναι τετραπλάσιο από το εμβαδό του τριγώνου $AB\Delta$.



(5) Δίνεται τρίγωνο ABG όπου η κορυφή G βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο και ανήκει στην καμπύλη με εξίσωση $y = x^2$. Οι άλλες κορυφές A και B έχουν συντεταγμένες $A(2,3)$ και $B(3,5)$.

(α) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ABG είναι 18 τετραγωνικές μονάδες να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής G . (3 Μον.)

(β) Αν $G(-5,25)$ και το D είναι το συμμετρικό σημείο του G ως προς το ευθύγραμμο τμήμα AB ,

να δείξετε ότι το σημείο D έχει συντεταγμένες $D(-\frac{23}{5}, 10\frac{3}{5})$. (7 Μον.)

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά
ΤΑΞΗ: Β΄ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 08/06/2015
ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά
ΩΡΑ: 7:45-10:15

ΒΑΘΜΟΣ

Αριθμητικώς:

Ολογράφως:

Υπογραφή:

Ονοματεπώνυμο μαθητή/τριας:Τμήμα..... Αρ.**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Να γράψετε τις απαντήσεις σας στο εξεταστικό δοκίμιο.
2. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
3. Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 12 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΕΠΙΣΥΝΑΠΤΕΤΑΙ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 1 ΣΕΛΙΔΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{x+8}{(x-1)(x+2)}$.

2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται οι πλευρές $a = 7\text{cm}$, $b = 8\text{cm}$ και $g = 5\text{cm}$.
- Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας Α.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
 - Να βρείτε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του.

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{-4x^2 + 1}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$

4. (α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{hm^2asun^3a + hma}{hm^2a} = sun^2a$.

(β) Στη συνέχεια να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης: $\frac{hm^2asun^3a + hma}{hm^2a} = sun^4a$.

5. Σε κανονική τετραγωνική πυραμίδα το ύψος είναι ίσο με 15cm και το παράπλευρο ύψος είναι ίσο με 17cm. Να βρείτε:
- (α) τον όγκο της πυραμίδας
 - (β) το εμβαδόν της ολικής της επιφάνειας.

6. (α) Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής ότι " $\forall n \in \mathbb{N}$ ", ισχύει η πιο κάτω πρόταση

$$1+3+5+7+9+\dots+(2n-1)=n^2$$

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των πρώτων πενήντα όρων της προόδου:

$$1, 3, 5, 7, \dots$$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\log_2 x - 3\log_x 4 = -1$

(β) $2 \times 4^x + 3 \times 9^x = 5 \times 6^x$

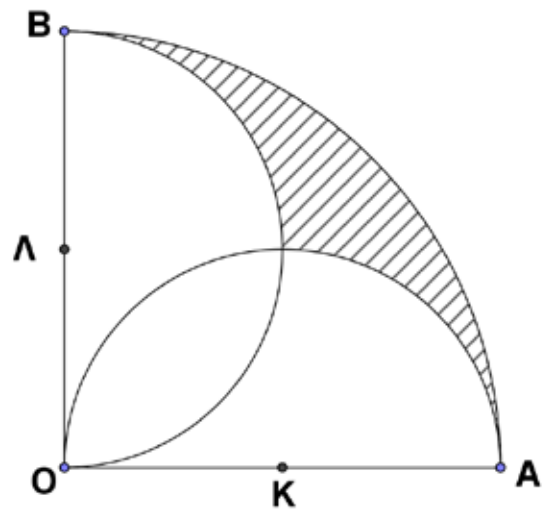
8. Να βρείτε το $a \in \mathbf{R}^+$, ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{ax}{x^2 + 9}$ να έχει Πεδίο Τιμών το $y \in [-2, 2]$.

9. Δίνεται η καμπύλη $y = e^{3x} \sin 2x$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με τετμημένη $x = p$.

ii. Να αποδείξετε ότι $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = -8e^{3x} \sin 2x$

10. Δίνεται τεταρτοκύκλιο AOB , ακτίνας 2α . Με διαμέτρους τις OA και OB γράφουμε ημικύκλια μέσα στο τεταρτοκύκλιο όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας συναρτήσει του α .



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1,4)$, $B(-3,1)$ και $\Gamma(-8,1)$.
 - i. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές
 - ii. Να υπολογίσετε την εφαπτομένη της οξείας γωνίας $BA\Gamma$.
 - iii. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
 - iv. Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ , έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι ρόμβος.

2. (α) Να λύσετε την εξίσωση $x^{(\log_3 x)-1} = 9$

(β) Αν $x = 9$ είναι η ακέραια ρίζα της εξίσωσης $x^{(\log_3 x)-1} = 9$ και x, y, w είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου, ενώ οι $x - 2, y, 2w - 10$ είναι διαδοχικοί όροι Γεωμετρικής Προόδου, να βρείτε τα y, w .

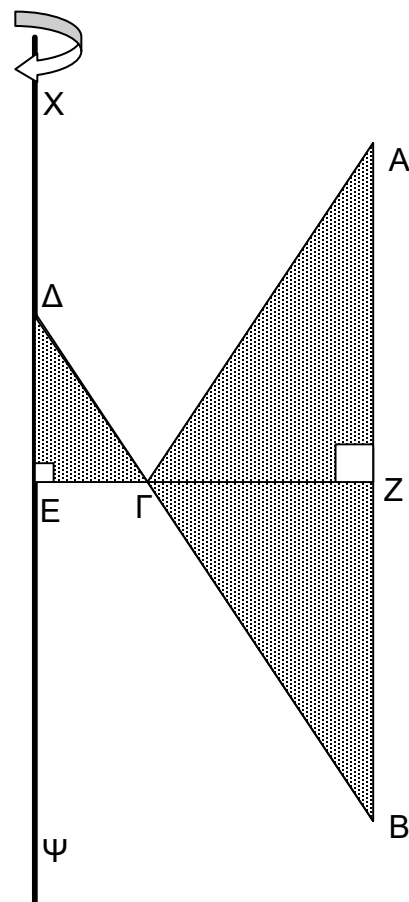
(βαθμοί.4-6)

3. (α) Δίνεται τρίγωνο ABΓ για το οποίο ισχύει $2\log_{\frac{A}{2}} \sin \frac{A}{2} + \log 2 = \log 1$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης με τύπο $f(x) = \ln A e^{x^2} - \ln B x \ln 2x + \ln C (x+e) \ln (x+e) + 2 \ln^2 \frac{A}{2} x$ στο σημείο της με $x=0$ ισούται με 1, να δείξετε ότι το ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ είναι και ισοσκελές.

4. Να βρείτε το εμβαδόν και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου χωρίου γύρω από τον άξονα $X\Psi$, αν $\Gamma Z=6\text{cm}$, $A\Gamma=10\text{cm}$, $E\Gamma=3\text{cm}$ και $\Gamma\Delta=5\text{cm}$, όπου $X\Psi \parallel AB$.

Δίνεται επίσης ότι: $\triangle ABG$ είναι ισοσκελές ($A\Gamma=B\Gamma$), ΓZ κάθετη στην AB και $E\Gamma$ κάθετη στην $X\Psi$.



5. (α) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x} + 1$ και $g(x) = \log_{x-1}(x^2 + x - 6)$.

Να ορίσετε τη σύνθεση $g \circ f$.

(β) Αν
$$h(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x+3}-2}, & x > 1 \\ \frac{4}{2^{1-x} + 5^{x-1}}, & x < 1 \end{cases}$$
, να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$.

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

Ημερομηνία: 5 / 6 / 2015

Χρόνος: 2,5 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- (α) Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- (β) Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο που αποτελείται από μια σελίδα.
- (γ) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- (δ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- (ε) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 (δέκα) ασκήσεις του ΜΕΡΟΥΣ Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 (πέντε) μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα $\frac{5x - 1}{(x + 3)(x - 1)}$.

2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $y = x^3 + \sqrt{x} - \frac{5}{x} + 2e^x + \frac{1}{3}x$

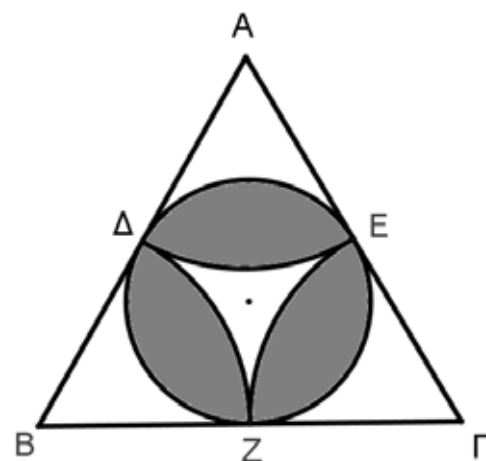
(β) $y = 3^x \times$

3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$, $x \in [2, +\infty)$. Να βρείτε:

(α) το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x)$

(β) τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης $f^{-1}(x)$.

4. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ακμή βάσης ίση με το παράπλευρο της ύψος.
Αν το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της ισούται με 72 cm^2 , να υπολογίσετε:
(α) τον όγκο της
(β) τη γωνία που σχηματίζει η παράπλευρη έδρα με τη βάση.
5. Σε αριθμητική πρόοδο το άθροισμα του $3^{\text{ου}}$ και του $5^{\text{ου}}$ όρου της είναι 26 και ο $12^{\text{ος}}$ όρος της είναι εννιάπλάσιος του $2^{\text{ου}}$ όρου της. Να βρείτε πόσοι όροι της έχουν άθροισμα 780.
6. Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση $\frac{\alpha + \beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
7. Η ακέραια λύση της εξίσωσης $\log_2 x - \log_x 8 + 2 = 0$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(x) = x^2 + \dots$ και $f'(3) = -9$. Να βρείτε τα α και β.
8. Να αποδείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό n ισχύει: $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
9. Αν α είναι η θετική λύση της εξίσωσης $3^{\log_3 x} = 27^3$, να λύσετε την εξίσωση: $\log_{\alpha} x + \log_{\alpha} x + \log_{\alpha} x + \dots = 2 + \log_{\alpha}(x+4)$, $x > 0$.
10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ με πλευρά $4\sqrt{3} \text{ cm}$ και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών AB, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Με κέντρα τις κορυφές Α, Β, Γ γράφουμε τόξα ΔΕ, ΔΖ, ΖΕ αντίστοιχα μέσα στο τρίγωνο. Να βρείτε:
(α) το εμβαδόν του κύκλου που εφάπτεται των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ στα σημεία Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα.
(β) το εμβαδόν και την περίμετρο της σκιασμένης επιφάνειας.



ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ Α΄
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 (πέντε) ασκήσεις του ΜΕΡΟΥΣ Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 (δέκα) μονάδες.

1. Δίνεται η καμπύλη $x^2 + 2x - 3 = 0$.

(α) Αν το σημείο $A(2, -1)$ ανήκει στην καμπύλη, να δείξετε ότι $2 = 1$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης στο σημείο A.

2. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$ και $B = \frac{2x}{2x^2 - 3x + 1}$.

(α) Να δείξετε ότι $A = 4$ και $B = 1$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $A + 12B = 8$ στο διάστημα $[0, 2]$.

(γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{A \cdot B}{x^2 + 3x}$.

3. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές $A(0,0)$, $B(x, y)$ και $C(-7,1)$. Η κορυφή B βρίσκεται πάνω στην ευθεία $2x - 3y = 7$ και το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι 10 τ.μ..

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής B.

(β) Αν η κορυφή B έχει συντεταγμένες $(1,3)$:

(i) να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και να καθορίσετε την ορθή γωνία του

(ii) να βρείτε την εξίσωση και το μήκος του ύψους BE του τριγώνου

(iii) να υπολογίσετε την εφαπτομένη της οξείας γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου

(iv) να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ ώστε το ABΓΔ να είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ και $g(x) = x + 3$.

(α) Να δείξετε ότι: $(16 - x^2) \frac{d^2 f}{dx^2} - x \frac{df}{dx} + f(x) = 0$.

(β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ (τύπο και πεδίο ορισμού).

(γ) Αν $h(x) = \ln \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in (0, 4)$, να βρείτε την τιμή του α , $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $h'(\alpha) = (0)$.

(δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f^2(x)}{x - 2 - \sqrt{x}}$.

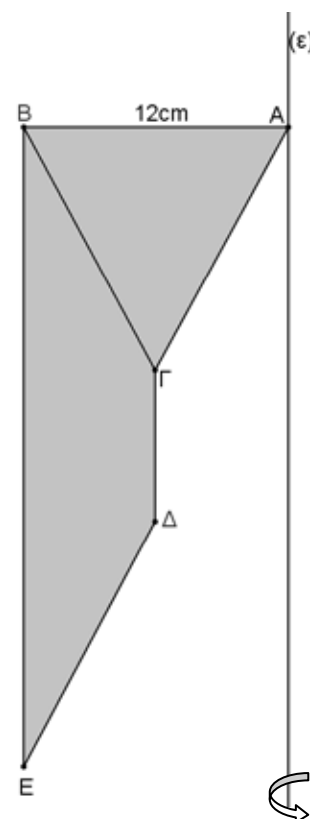
5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (ΑΓ=ΒΓ)

με AB=12 m, ΒΓΔΕ ισοσκελές τραπέζιο ($ΒΓ = ΔΕ = \frac{ΒΕ}{2}$)

και ΓΔ // (ε) .

(α) Αν το εμβαδόν που παράγεται από την πλήρη περιστροφή της πλευράς ΑΓ γύρω από την ευθεία (ε) είναι $60\pi \text{ m}^2$, να υπολογίσετε την πλευρά ΑΓ.

(β) Αν η πλευρά ΑΓ=10 m, να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του πολυγώνου ΑΒΕΔΓ γύρω από την (ε).



ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΤΑΞΗ: Β' Ενιαίου Λυκείου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 28/5/2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να γράψετε με μπλε μελάνι. (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
3. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
4. Δίνεται τυπολόγιο.
5. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 3 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α' Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων: $\frac{\chi+5}{(\chi-3)(\chi+1)}$.

2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης:

$$\Psi = \eta\mu\chi + \chi^2 - \ln\chi + e^{\chi} + 5$$

3. Η γενέτειρα κώνου σχηματίζει γωνία 60° με τη βάση του. Αν η ακτίνα της βάσης είναι 7cm, να βρείτε τον όγκο του κώνου και το εμβαδό της κυρτής επιφάνειάς του.

4. Να λύσετε την εξίσωση $(\log \chi)^2 - \log \chi^3 + 2 = 0$.

5. Να αποδείξετε ότι : $\frac{1+\sigma\upsilon\nu 6\alpha-\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\eta\mu 6\alpha-\eta\mu 3\alpha} = \sigma\varphi 3\alpha$

6. Να υπολογίσετε το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h\eta\mu x}{x}$$

7. Αν $\sigma\upsilon\nu\beta$, $\eta\mu\alpha$, $\sigma\upsilon\nu\alpha$, $\eta\mu\beta$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = 1$.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3x - 4$ και $g(x) = ax + 3$.
Αν ισχύει η σχέση $f \circ g = g \circ f$, να βρείτε την τιμή του a .
9. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x^{2k} - x\psi + 4\psi - 2^k = 0$ περνά από το σημείο $A(2, -1)$. Να βρεθεί η τιμή του k .
10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x$. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{df}{dx} = 1$
για $0 \leq x \leq 2\pi$.

ΜΕΡΟΣ Β΄ Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = xe^{2x}$. Να δείξετε ότι

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - 4\frac{d\psi}{dx} + 4\psi = 0.$$

2. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ δίνονται οι εξισώσεις των πλευρών του

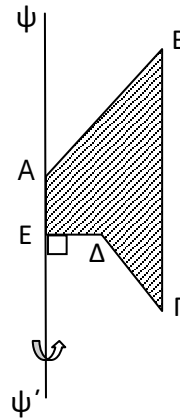
AB: $x - \psi + 3 = 0$ και BΓ: $2x - \psi + 3 = 0$.

Αν $E(-1, 3)$ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, να βρείτε:

- α) Τις συντεταγμένες των κορυφών του B και Δ .
- β) Την εξίσωση της πλευράς του $\Gamma\Delta$.
- γ) Την εξίσωση της διαγωνίου του $A\Gamma$
- δ) Να βρεθούν οι γωνίες του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

3. Αριθμητική πρόοδος και φθίνουσα Γεωμετρική πρόοδος έχουν τον ίδιο πρώτο όρο. Η διαφορά της Α.Π. είναι διπλάσια από το αντίστροφο του λόγου της Γ.Π. και το άθροισμα των απείρων όρων της Γ.Π. είναι διπλάσιο του πρώτου της όρου. Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της Α.Π. είναι ίσο με -16, να σχηματίσετε τις δυο Προόδους.

4. Δίνεται η συνάρτηση $\psi^2 = 16\chi$ και σημείο της P με $\chi = 4$ και $\psi > 0$.
- α) Να βρείτε τις εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης της γραφικής παράστασης της καμπύλης στο σημείο P.
 - β) Η κάθετη στο P τέμνει τον άξονα OX στο σημείο A και η εφαπτομένη στο P τέμνει τον άξονα OY στο σημείο B. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.
 - γ) Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ABP.
5. Το επίπεδο σχήμα ABΓΔΕ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα $\psi\psi'$ κάθετο στην ΕΔ και παράλληλο στην ΒΓ.
- Αν $AB=10\text{cm}$, $B\Gamma=16\text{cm}$, $\Delta\Gamma=5\text{cm}$, $\Delta E=3\text{cm}$ και η ΒΓ απέχει από τον άξονα περιστροφής 6cm, τότε να υπολογίσετε:
- α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και
 - β) τον όγκο του στερεού που παράγεται.



Οι Εισηγητές

Η Συντονίστρια ΒΔ

Η Διευθύντρια

.....
Ιωακείμ Μάριος

.....
Χρίστου Ροϊδη Μάρω

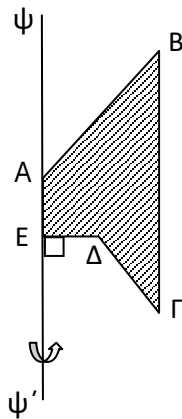
.....
Ιωάννου Ολυμπία

.....
Γερμανός Νικόλας

.....
Κυριάκου Ιωακείμ

.....
Αναστασιάδης Χρίστος

4. Δίνεται η συνάρτηση $\psi^2 = 16x$ και σημείο της P με $x = 4$ και $\psi > 0$.
- α) Να βρείτε τις εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης της γραφικής παράστασης της καμπύλης στο σημείο P.
 - β) Η κάθετη στο P τέμνει τον άξονα OX στο σημείο A και η εφαπτομένη στο P τέμνει τον άξονα OΨ στο σημείο B. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.
 - γ) Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ABP.
5. Το επίπεδο σχήμα ABΓΔΕ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα $\psi\psi'$ κάθετο στην ΕΔ και παράλληλο στην ΒΓ.
- Αν $AB=10\text{cm}$, $B\Gamma=16\text{cm}$, $\Delta\Gamma=5\text{cm}$, $\Delta E=3\text{cm}$ και η ΒΓ απέχει από τον άξονα περιστροφής 6cm, τότε να υπολογίσετε:
- α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και
 - β) τον όγκο του στερεού που παράγεται.



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

Μάθημα: Μαθηματικά

Ημερομηνία: 29/05/2015

Τάξη : Β' Λυκείου Κατεύθυνση

Χρόνος : 2:30'

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
4. Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε ή μαύρο (Τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).
5. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.
6. Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

Μέρος Α'

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα:

$$\frac{5x+3}{x^2-9}$$

2. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{x^2+4x+2}$, β) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4\ln(x-3)}{x^2-3x}$

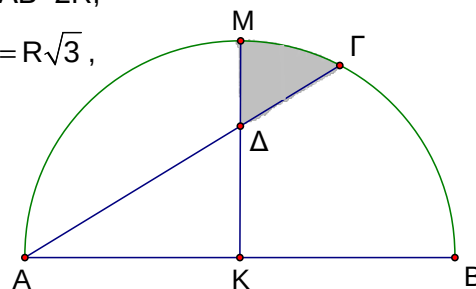
3. Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+4}$

β) $g(x) = \sqrt{x} \ln(\sin^4 x)$

4. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει όγκο 48m^3 και το ύψος της είναι ίσο με τα $\frac{2}{3}$ της ακμής της βάσης. Να βρείτε το ύψος της και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

5. Δίνεται ευθεία AB με σημεία A(1,1) και B(7,-2). Ευθεία (ε): $2x + 3y - 7 = 0$ τέμνει την AB στο σημείο M.
 α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M.
 β) Να αποδείξετε ότι $(AB) = 3(BM)$.
6. Σε αριθμητική πρόοδο το άθροισμα του τρίτου και του δέκατου όρου είναι 67 και το άθροισμα των 14 πρώτων όρων της είναι 427.
 α) Να σχηματίσετε την πρόοδο.
 β) Να βρείτε το άθροισμα όλων των θετικών της όρων.
7. Να λύσετε την εξίσωση $(x - 4)\ln 2 + \ln(2^x - 4) = \ln(2^{x-1} + 4) - \ln 4$.
8. Αν $A = \frac{\eta\mu 4x \sigma\upsilon\nu 5x + \eta\mu x}{\eta\mu 5x}$ και $B = \frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{\sigma\upsilon\nu x}$ να δείξετε ότι:
 α) $B = 2$.
 β) $A = \sigma\upsilon\nu 4x$.
9. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους: $f(x) = 3 + \sqrt{x}$ και $g(x) = x^2 - 4$.
 α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$ (τύπο και πεδίο ορισμού).
 β) Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{13 - x^2}$.
10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο K και διάμετρο AB=2R,
 Αν το M είναι το μέσο του τόξου AB και Γ σημείο έτσι ώστε $AG = R\sqrt{3}$,
 να υπολογίσετε συναρτήσει του R:
 α) Το ΔΚ.
 β) Το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτόγραμμου
 τριγώνου ΓΔΜ.

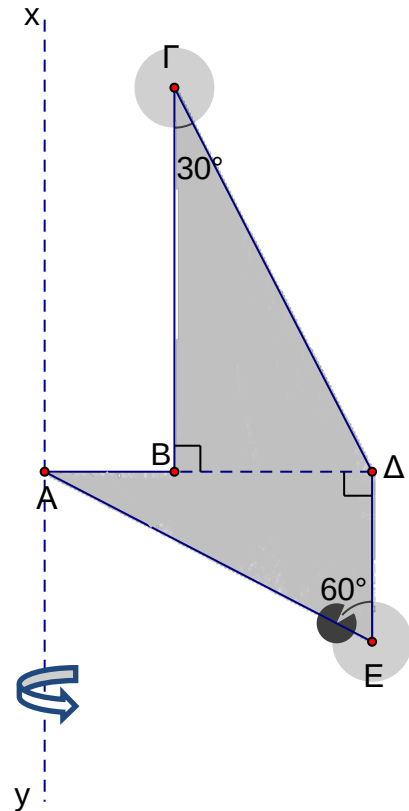


Μέρος Β΄

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με $G(-2, -1)$. Η πλευρά AB έχει εξίσωση $2x+y-10=0$ και το ύψος AD εξίσωση $x+3y-15=0$. Να βρείτε:
- α) Τις συντεταγμένες των κορυφών A και B .
 - β) Το μέτρο της οξείας γωνίας B .
 - γ) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - δ) Τα σημεία του άξονα $x'x$ που απέχουν από την ευθεία $B\Gamma$ απόσταση ίση με $\sqrt{10}$.
2. Δίνεται η συνάρτηση $y = e^{-x}\eta\mu 2x$.
- α) Να δείξετε ότι $\frac{d^2y}{dx^2} = -4e^{-x}\sigma\upsilon\nu 2x - 3e^{-x}\eta\mu 2x$.
 - β) Να λύσετε την εξίσωση $e^x \times \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{y}{e^{-x}} = 0$, $x \in (0, \pi)$.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x$, με $x \in \mathbb{R}$.
- α) Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη f^{-1} της f και να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της.
 - β) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης f με τεταγμένη το -3 .
 - γ) Να ορίσετε την $\frac{f(x)}{f^{-1}(x)}$.
 - δ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|f(x)|}{f^{-1}(x)}$.
4. α) Αν για τις οξείες γωνίες B και Γ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει $\log_2(\eta\mu 2B + \eta\mu 2G) = 1 + \log_2 \sigma\upsilon\nu(B - G)$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Αν επιπλέον ισχύει $4E = \alpha^2$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.
- β) Να δείξετε ότι οι αριθμοί $\eta\mu 2\alpha, \frac{1}{2}\eta\mu 4\alpha, \eta\mu 2\alpha \times \sigma\upsilon\nu^2 2\alpha$ όπου $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Ακολουθώς να δείξετε ότι το άθροισμα των απείρων όρων της πιο πάνω γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το $\eta\mu 2\alpha$ είναι ίσο με $\sigma\phi\alpha$.

5. Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle ADE$ και $\triangle B\Gamma\Delta$ με $\hat{D} = 90^\circ$, $\hat{B} = 90^\circ$, $\hat{G} = 30^\circ$, $\hat{E} = 60^\circ$, $AB = k$ και $B\Gamma = 2k\sqrt{3}$. Η AD είναι κάθετη στην ευθεία xy . Το σκιασμένο πολύγωνο $AB\Gamma\Delta E$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία xy . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται συναρτήσει του k .



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΜΑΪΟΥ/ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

Τάξη: Β΄

Μάθημα: Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Ημερομηνία: 8/6/2015

Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
(β) Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (στα σχήματα επιτρέπεται μολύβι).
(γ) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
(δ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
(ε) Επισυνάπτεται τυπολόγιο.
(στ) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 2 μέρη και 5 σελίδες.

**ΜΕΡΟΣ Α΄ : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1) Να αναλυθεί σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{3x+9}{(x-2)(x+1)}$

2) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x^2 - 3x| + 2x^2 - 3x - 9}{3 - x}$

3) Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

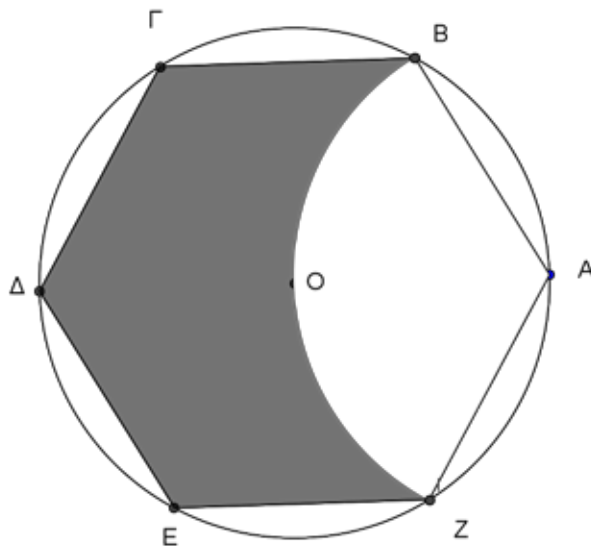
α) $\psi = \ln \sqrt{4x^2 + 1}$ β) $4x\psi - \psi^2 + 8x = 0$

4) Οι αριθμοί $2x-1$, $x+2$, $3x-1$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και αποτελούν τις πλευρές ορθογώνιου τριγώνου που είναι η βάση ορθού πρίσματος ύψους 7 cm, να βρείτε : α) τις πλευρές της βάσης του πρίσματος
β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του.

5) Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $3 \cdot 3^{\log x} + 3^{1-\log x} = 10$

β) $\log(x+3) + \log(x-2) = 1 + \log 5$

6) Κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Με κέντρο το Α και ακτίνα R γράφουμε τόξο ΒΖ μέσα στο εξάγωνο. Να βρεθεί το εμβαδόν του μεικτόγραμμου χωρίου ΒΓΔΕΖΒ συναρτήσει του R.



7) Αν ισχύει η σχέση $\frac{1-\sin 2\gamma}{1-\sin 2\alpha} = 1 - \frac{\epsilon\phi(\alpha-\beta)}{\epsilon\phi\alpha}$, να αποδείξετε ότι : $\eta\mu^2\gamma = \frac{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

8) Αν $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ είναι τα αθροίσματα των $n, 2n, 3n$ πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το α και λόγο το λ , να δειχθεί ότι :

$$\Sigma_1 \cdot (\Sigma_2 + \Sigma_3) = \Sigma_1^2 + \Sigma_2^2$$

9) Σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ δίνονται οι κορυφές $A(1,3)$, $\Gamma(0,-4)$ και οι εξισώσεις δύο πλευρών του: $\chi - \psi + 2 = 0$ και $2\chi + \psi + 4 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΒΔ και το μήκος του.

10) Αν $f(x+1) = 2x^2 - f(2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε :

α) Την τιμή του $f(2)$.

β) Τον τύπο της $f(x)$ και να δώσετε έναν περιορισμό του πεδίου ορισμού της, ώστε να υπάρχει η αντίστροφή της.

ΜΕΡΟΣ Β΄ : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

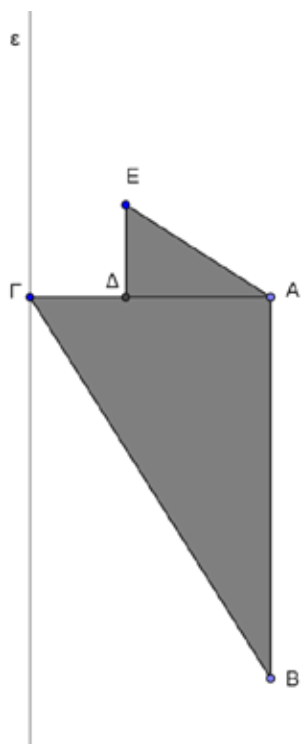
1) Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται $AE = 2a\sqrt{3}$ cm, $B\Gamma = 8a$ cm, $\Gamma\Delta = a$ cm, $\angle B\Gamma\Delta = 60^\circ$,

$ED \perp AG$, $AG \perp \varepsilon$, $AB \parallel \varepsilon$.

α) Να δείξετε ότι ο όγκος του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του

πολυγώνου $AB\Gamma\Delta E$ γύρω από την ευθεία (ε) ισούται με $\frac{146a^3\sqrt{3}\pi}{3}$ cm³.

β) Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του παραγόμενου στερεού συναρτήσει του a .



2) Αριθμητική πρόοδος (Α.Π.) και απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος (Γ.Π.) έχουν τον ίδιο πρώτο όρο α και η διαφορά δ της Α.Π. είναι ίση με τον λόγο λ της Γ.Π. Ο δεύτερος όρος της Γ.Π. ισούται με τον δέκατο τρίτο όρο της Α.Π. και το άθροισμα των άπειρων όρων της Γ.Π. ισούται με $8/3$. Να βρείτε τις προόδους.

3) Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ δίνονται οι εξισώσεις των πλευρών του
 ΑΔ: $\chi + 3\psi - 4 = 0$ και ΑΒ: $\chi - 5\psi + 4 = 0$. Αν το σημείο τομής των διαγωνίων του έχει συντεταγμένες $(-1, 3)$, να βρείτε : α) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ (4 μον.)
 β) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ (3 μον.)
 γ) την εφΓ (3 μον.)

4) Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \ln(e^{2\alpha\chi} + 1) - \alpha\chi$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι : $\frac{d^2\psi}{d\chi^2} + \frac{\psi^2}{d\chi} = \alpha^2$ (4 μον.)

β) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης $\psi = \ln(e^{2\alpha\chi} + 1) - \alpha\chi$ στο σημείο της Α με τετμημένη $\chi=0$ είναι η ευθεία $\psi = \ln 2$. (3 μον.)

γ) Αν η εφαπτομένη της $\psi = \ln(e^{2\alpha\chi} + 1) - \alpha\chi$ στο σημείο Α τέμνει την καμπύλη

$\psi = \ln \chi$ στο σημείο Β, να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $\overset{\square}{\text{ΑΒΟ}}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων, είναι ίσο με $\ln 2$ τ.μ. (τετραγωνικές μονάδες)

(3 μον.)

5) α) Να λυθεί η εξίσωση : $2^{\eta\mu\chi} \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon} (4^{\eta\mu\chi})^{\sigma\upsilon\nu\chi} = \sqrt[5]{32^{\eta\mu 3\chi}}$ $\chi \in [0, 2\pi]$ (3 μον.)

β) Αν σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ισχύει η ισότητα $\eta\mu B = \frac{\eta\mu A + \eta\mu \Gamma}{\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu \Gamma}$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. (3 μον.)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \log_{\sqrt{5}} \frac{x+2}{x(x+3)} - \left(\log_5 25 \right) \times \frac{\epsilon}{\epsilon} \log_{\frac{1}{5}} (x+3) \frac{\upsilon}{\upsilon}$ (4 μον.)

i) Να δείξετε ότι $f(x) = \log_5 \frac{(x+2)(x+3)}{x}$

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΤΑΞΗ: Β' ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22/05/2015
ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ώρες

Βαθμός:

Ολογράφως:

Υπογραφή:

Ονοματεπώνυμο: Τμήμα: Αρ.:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να γράψετε τις απαντήσεις σας πάνω στο εξεταστικό δοκίμιο.
2. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
3. Να γράψετε με μελάνι μαύρο ή μπλέ (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού.
5. Στο τέλος του γραπτού επισυνάπτεται τυπολόγιο.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΕΝΤΕΚΑ (11) ΣΕΛΙΔΕΣ.

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{x + 8}{(x - 1)(x + 2)}$

2. Να λύσετε την εξίσωση: $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 3}$. Να βρείτε:

α) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

β) $f'(x)$

4. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(0,1)$, $B(2,2)$, $\Gamma(4,-2)$. Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της $A\Gamma$.

β) Την απόσταση του σημείου B από την πλευρά $A\Gamma$.

γ) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

5. Να αποδείξετε την ταυτότητα:
$$\frac{\eta\mu 2x + \eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu x} = \varepsilon\varphi x$$

[illegible]

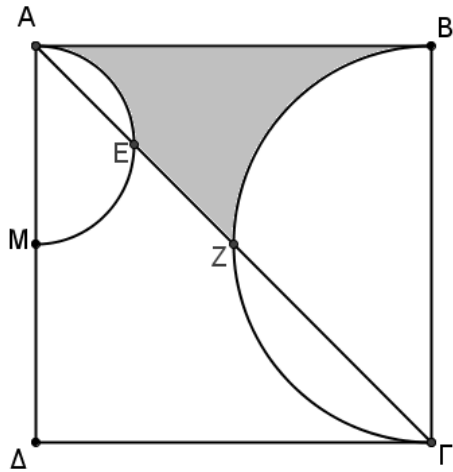
8. Να αποδείξετε με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

9. Αφού αποδείξετε ότι $\log_2 32 + \log_2 \sqrt{32} + \log_2 \sqrt[4]{32} + \log_2 \sqrt[8]{32} + \dots = 10$, να λύσετε την εξίσωση:

$$(\log_2 32 + \log_2 \sqrt{32} + \log_2 \sqrt[4]{32} + \log_2 \sqrt[8]{32} + \dots)^{\log(x^2 - 2x)} = \log 100^x + \log \frac{1}{1000}$$

10. Στο πιο κάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς 8cm και M είναι το μέσο της $A\Delta$. Με διαμέτρους τις AM και $B\Gamma$ σχηματίζουμε ημικύκλια μέσα στο τετράγωνο, τα οποία τέμνουν τη διαγώνιο $A\Gamma$ του τετραγώνου στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



ΜΕΡΟΣ Β': Να απαντήσετε και στις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφή $B(k,k)$, σημείο τομής διαγωνίων $M(1,0)$ και εξισώσεις πλευρών $AD: 3x+2y+4=0$ και $AB: x-4y+6=0$.
 - α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής A και το μέτρο της οξείας γωνίας A .
 - β) Να δείξετε ότι $k=2$.
 - γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ του παραλληλογράμμου.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\alpha + \eta\mu x)$ όπου α σταθερά και $\alpha > 1$.

α) Να δείξετε ότι: $f'(x) - \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{-f(x)} = 0$.

β) Αν η εφαπτομένη της συνάρτησης στο σημείο με τετμημένη $x = 0$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y = \frac{1}{2}x + 3$, να βρείτε την τιμή του α .

γ) Αν $\alpha = 2$, να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της συνάρτησης στο σημείο της με τετμημένη $x = 0$ είναι $y = -2x + \ln 2$.

3. Αριθμητική πρόοδος με διαφορά δ και απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ έχουν τον ίδιο πρώτο όρο. Το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου είναι ίσο με δ . Η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι τετραπλάσια του λόγου της γεωμετρικής προόδου. Το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι 9. Να σχηματίσετε τις δύο προόδους.

4. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \eta\mu 3x + \eta\mu x$ και $B = \sigma\upsilon\nu 3x + \sigma\upsilon\nu x$.

α) Να δείξετε ότι:

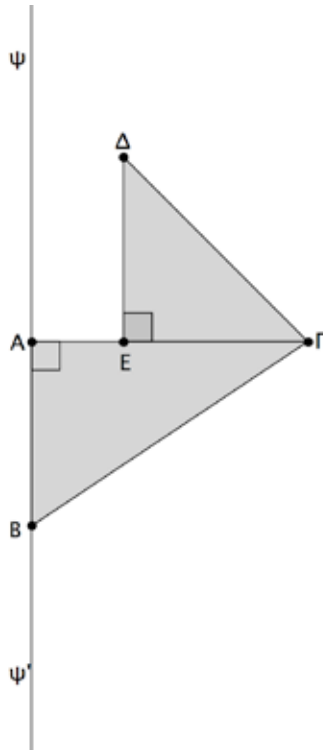
i) $A \cdot B = (1 + \sigma\upsilon\nu 2x) \eta\mu 4x$

ii) $\frac{2A \cdot B}{A^2 + B^2} = \eta\mu 4x$

β) Να λύσετε την τριγωνομετρική εξίσωση:

$$2A \cdot B = A^2 + B^2$$

5. Στο πιο κάτω σχήμα το $\Gamma Ε Δ$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ($\hat{Ε} = 90^\circ$) και το $Α Β Γ$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{Α} = 90^\circ$). Το σχήμα $Α Β Γ Δ Ε Α$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα $\psi\psi'$. Αν $\Delta Γ = 6\sqrt{2}cm$, $BΓ = 10cm$ και $Α Ε = 2cm$, να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που δημιουργείται.



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ**

ΤΑΞΗ: **Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: **2, 5 ΩΡΕΣ**

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 03 ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

- ΟΔΗΓΙΕΣ:** α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 β) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
 γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
 δ) Δίνεται τυπολόγιο.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$(\alpha) \lim_{c \rightarrow 2} \frac{c^2 - 4}{c - 2}$$

$$(\beta) \lim_{c \rightarrow -\infty} (3c^2 + 2|c| - 5)$$

2. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα $K = \frac{x-7}{(x+2)(x-1)}$.

3. Μεταξύ των αριθμών 24 και 6 να παρεμβάλετε 8 αριθμούς ώστε να σχηματίζουν όλοι μαζί Αριθμητική Πρόοδο.

4. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(c) = 3c^2 - \frac{6}{c} + \frac{\sqrt{c}}{3} - e^c \ln 2$$

$$(\beta) \psi = x \cdot \eta \mu x + \sigma \nu \nu 3x$$

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$ και $g(x) = \frac{3x}{3+x}$.

(α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

(β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις: (ι) $f - g$, (ιι) $\frac{f}{g}$

6. Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ αν: $E = 8\sqrt{3} m^2$, $\gamma = 4\sqrt{3} m$ και $\alpha = 8m$ ($\hat{B} < 90^\circ$).

7. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου.

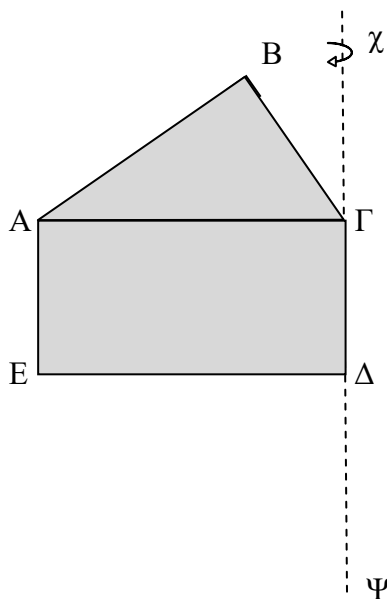
8. Να δείξετε, με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής, ότι ισχύει η πρόταση :

$$2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + (n+1) \cdot 2^n = n \cdot 2^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

9. Σε κύκλο με διάμετρο $AB = 4\alpha$, να φέρετε χορδή AG έτσι ώστε $\widehat{BAG} = 30^\circ$ και από το σημείο G κάθετη πάνω στην AB που την τέμνει στο σημείο Δ . Να υπολογίσετε συναρτήσει του α το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου BGD .
10. Να δείξετε ότι ο όγκος κανονικού τετραέδρου με πλευρά α , ισούται με $\frac{\alpha^3\sqrt{2}}{12}$ κ.μ.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Παραλληλόγραμμο $ABGD$ έχει κορυφές $B(-3, -1)$ και $\Delta(3, -3)$. Η $A\Delta$ έχει εξίσωση $2\chi + \psi = 3$ και η AB έχει εξίσωση $4\chi - 3\psi = -9$.
- (α) Να βρείτε:
- (ι) τις συντεταγμένες της κορυφής A
 - (ιι) τις συντεταγμένες του κέντρου O του παραλληλογράμμου
 - (ιιι) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ .
- (β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $\Gamma\Delta$ και το μήκος της πλευράς $\Gamma\Delta$.
- (γ) Να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής A από την ευθεία $\Gamma\Delta$.
- (δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $ABGD$.
2. Για το πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι: $B\Gamma = \Gamma\Delta = 4\text{ cm}$, $\widehat{\chi\Gamma B} = 30^\circ$, $\widehat{A\hat{B}\Gamma} = 90^\circ$ και $A\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Το σχήμα $AB\Gamma\Delta E$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $\chi\psi$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



3. (α) Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος

$$\log_{\sin \chi}(\varepsilon \varphi \chi), \log_{\sin^2 \chi}(\varepsilon \varphi \chi), \log_{\sin^4 \chi}(\varepsilon \varphi \chi), \dots \quad \text{όπου } \frac{\pi}{4} < \chi < \frac{\pi}{2}.$$

(ι) Να δείξετε ότι είναι φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος με $\lambda = \frac{1}{2}$.

(ιι) Να υπολογίσετε την τιμή του χ για την οποία το άθροισμα των άπειρων όρων της προόδου αυτής είναι ίσο με $\log_{\sin \chi}(\sqrt{3} \varepsilon \varphi \chi)$.

(β) Οι αριθμοί $\log 2$, $\log(5^x - 1)$, $\log(5^x + 3)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε το χ .

4. (α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sin 5a \times \sin a - \sin 4a}{\sin 5a} = \sin a$$

(β) Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\frac{\sin B + \sin(G - A)}{\sin(G - A)} = \frac{a}{b}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g με τύπους:

$$f(c) = \ln \frac{\sqrt{2c+44}}{2-c}, \quad g(c) = \frac{1}{2} \ln(2c+44) - \ln(2-c).$$

(α) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο $f = g$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $f(c)$ στο σημείο της με τεταγμένη $y = 0$.

(γ) Αν $h(c) = 2f'(c) \times \frac{(c+22)}{(c+46)}$, να δείξετε ότι $h(c) = \frac{1}{2-c}$.

(δ) Αν $f(c) = 6 - c^2$, να ορίσετε την συνάρτηση $h \circ f$ (τύπος και πεδίο ορισμού).

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΤΑΞΗ: Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 28/05/2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ώρες

Ονοματεπώνυμο: Τμήμα: Αριθ.:

Οδηγίες:

- 1) Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε.
- 2) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- 3) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- 4) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).
- 5) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.
- 6) Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α'

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το πιο κάτω κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{5x+34}{(x+4)(x-3)}$$

2. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(1,2), B(-3,1), Γ(-5,8). Αν Μ το μέσο της πλευράς ΑΓ, να βρείτε :

(α) τις συντεταγμένες του Μ,

(β) την εξίσωση της διαμέσου ΒΜ.

3. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων :

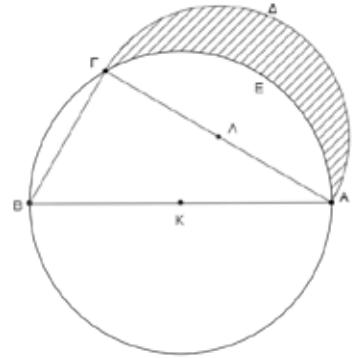
(α) $x^2 + \psi^2 = 20$ (β) $\psi = \frac{2x^3+1}{x^3-3}$

4. Σε αριθμητική πρόοδο ο τέταρτος όρος είναι κατά μία μονάδα μικρότερος από το διπλάσιο του δεύτερου όρου, ενώ ο έβδομος όρος είναι κατά 12 μεγαλύτερος του τρίτου όρου. Να σχηματίσετε την πρόοδο.

5. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης 100 cm^2 . Το παράπλευρο ύψος σχηματίζει με το ύψος της γωνία 30° . Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής της επιφάνειας και τον όγκο της.

6. Να λύσετε την εξίσωση : $\log x(\log x - 4) = 12 - 3 \log x$

7. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο Κ, ακτίνα R, χορδή $AG = \frac{1}{3}$ και ημικύκλιο ΑΔΓ με κέντρο το μέσο Λ της ΑΓ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μηνίσκου συναρτήσει της ακτίνας R.



8. (α) Να αποδείξετε την ταυτότητα : $\frac{\sin 8w - \sin 4w + \sin 2w}{\sin 8w + \sin 4w + \sin 2w} = \frac{1}{2}$ (μον. 3)

- (β) Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση : $\frac{\sin 8w - \sin 4w + \sin 2w}{\sin 8w + \sin 4w + \sin 2w} = \frac{1}{2} \left(w - \frac{\pi}{4} \right)$ (μον. 2)

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x - 6)$ και $g(x) = \ln(10 - x)$.

- (α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης : $f'(7) + e^{g(6)}$ (μον. 2)

- (β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f + g$. (μον. 2)

- (γ) Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $h(x) = g^{-1}(x)$. (μον. 1)

10. (α) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - 3x + 2x^2}{5x^2 - 6x + 14}$. (μον. 3)

- (β) Να εξετάσετε αν η πιο κάτω συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο της με $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{3x+1}, & x \leq 2 \\ \frac{x-2}{x^2+3x-10}, & x > 2 \end{cases} \quad (\text{μον. 2})$$

ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ , έχει άθροισμα απείρων όρων ίσο με 24 και άθροισμα τριών πρώτων όρων ίσο με 21. Αριθμητική πρόοδος έχει τον ίδιο πρώτο όρο με τη γεωμετρική πρόοδο και η διαφορά της δ , είναι η λύση της εξίσωσης $4^{x+4} = 8^{3x-2}$.

(α) Να σχηματίσετε τις δυο προόδους.

(μον. 6)

(β) Αν $a_1 = 12$ και $\delta = 2$, να βρείτε πόσους όρους της αριθμητικής προόδου πρέπει να προσθέσουμε για να πάρουμε άθροισμα ίσο με 102.

(μον. 4)

2. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει κορυφές $B(4, -1)$, $\Delta(-1, 4)$ και πλευρά ΓΔ με εξίσωση $3x + y = 1$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του Α και Γ.

(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΓ.

(δ) Ένα σημείο $Z(2, \alpha)$ με $\alpha < 0$, απέχει από τη διαγώνιο ΒΔ απόσταση ίση με $3\sqrt{2}$ μονάδες. Να δείξετε ότι το Z βρίσκεται πάνω στην ευθεία ΓΔ.

3. Δίνονται οι καμπύλες : $f(x) = e^{2x} \cdot \ln 3x$ και $g(x) = \frac{vx^3 + \mu}{x}$, $x \neq 0, v, \mu \in \mathbb{R}$.

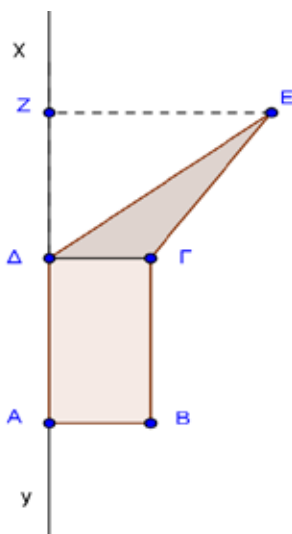
(α) Να δείξετε ότι : $f''(x) - 4f'(x) + 13f(x) = 0$

(μον. 6)

(β) Η γραφική παράσταση της καμπύλης g διέρχεται από το σημείο $A(1, -3)$ και η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης g στο Α, είναι διπλάσια από την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης f στο σημείο με τετμημένη $x = 0$. Να βρείτε τις τιμές των v και μ .

(μον. 4)

4.



Στο διπλανό σχήμα δίνεται ΑΒΓΔ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ΕΖΔ ορθογώνιο τρίγωνο.

Δίνονται:

$AB=4\text{cm}$, $BG=8\text{cm}$, $EZ=9\text{cm}$ και $ED=15\text{cm}$.

Το σκιασμένο πολύγωνο ΑΒΓΕΔ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy .

(α) Να δείξετε ότι $EG=13\text{cm}$.

(μον. 2)

(β) Να υπολογίσετε:

(ι) τον όγκο και

(μον. 4)

(ιι) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που σχηματίζεται.

(μον. 4)

5. Αν $f(x) = \frac{\eta\mu 4x \cdot \sigma\upsilon\nu 5x + \eta\mu x}{\eta\mu 5x}$, $g(x) = \frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{\sigma\upsilon\nu x}$ και $h(x) = 8\sigma\upsilon\nu^4 x + 8\eta\mu^2 x - 7$.

(α) Να δείξετε ότι : $g(x) = 2$. (μον. 3)

(β) Να δείξετε ότι : $f(x) = \sigma\upsilon\nu 4x$ και $h(x) = \sigma\upsilon\nu 4x$. (μον. 5)

(γ) Αν ισχύει η σχέση $2\eta\mu 2x + h\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{h'\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sqrt{3}} = 0$, να βρείτε τις τιμές της $\varepsilon\varphi x$. (μον. 2)

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΕΙΡΑ: Α΄

ΤΑΞΗ: Β΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 27/05/2015

ΧΡΟΝΟΣ: 8:00 π.μ. – 10:30 π.μ.

Οδηγίες:

- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **δύο (2) μέρη**.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **τέσσερις (4) σελίδες**.
(επισυνάπτεται τυπολόγιο)
- Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (με μολύβι **μόνο** τα σχήματα).
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής σφραγισμένης από το σχολείο.
- **Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.**
- **Όλες οι απαντήσεις να δοθούν σε σφραγισμένες κόλλες.**

ΜΕΡΟΣ Α: (μονάδες 50) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες (5/100).

1) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $y = x^3 + 2x^2 - \frac{5}{x}$

β) $y = x^2 \ln x$

2) Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{5x-2}{(x+5)(x-4)}$

3) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\sin \alpha + \sin 5\alpha + \sin 3\alpha}{\eta \mu \alpha + \eta \mu 5\alpha + \eta \mu 3\alpha} = \sigma \phi 3\alpha$

4) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$

5) Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{\gamma x}{\delta}$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta \neq 0$ και $g(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \neq 0$.

α) Αν $f \circ g = g \circ f$ να δείξετε ότι: $\gamma = \delta$

β) Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της g και να βρείτε τον τύπο της.

6) Να δείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

7) α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 4x + \eta\mu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu 4x + \sigma\upsilon\nu 2x} = \epsilon\phi 2x$

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\eta\mu 4x + \eta\mu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu 4x + \sigma\upsilon\nu 2x} = 1$

8) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με εμβαδόν ολικής επιφάνειας 28 cm^2 .

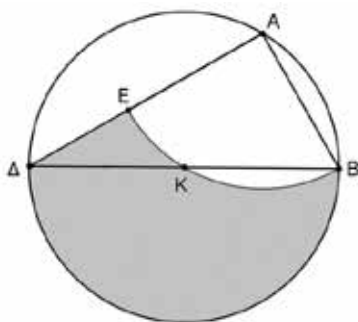
Αν οι διαστάσεις του είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο 2, να υπολογίσετε τον όγκο του.

9) Δίνεται η καμπύλη: $y^2 + x^2 + 2x - 4y = 5$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης και της κάθετης ευθείας στο σημείο $\Gamma(2,1)$

β) Αν η εφαπτομένη και η κάθετη τέμνουν τον άξονα $x'x$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\overset{D}{AB\Gamma}$.

10) Στο πιο κάτω σχήμα, η BD είναι διάμετρος του κύκλου (K, R). Το τόξο BE γράφτηκε με κέντρο το σημείο A του κύκλου και ακτίνα την AB. Αν $\angle A = \lambda_3$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους συναρτήσει του R.



- 4) Σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ABC ισχύει η σχέση: $2\epsilon\phi B = \epsilon\phi A + \epsilon\phi \Gamma$
 Να αποδείξετε ότι:
- α) $\sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu A \times \sigma\upsilon\nu \Gamma$
- β) $\epsilon\phi A \times \epsilon\phi \Gamma = 3$

- 5) Η συνάρτηση: $f(x) = e^{2x} - \kappa x$, $\kappa \in \mathbb{R}^+$, εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο A .

α) Να υπολογίσετε την τιμή του κ και τις συντεταγμένες του σημείου A .

β) Αν $\kappa=2e$ να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln f(x) + 2ex}{e^x x}$

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2015
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΤΑΞΗ Β΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 19-05-2015

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 02:30΄

- ΟΔΗΓΙΕΣ:** α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
β) Να γράφετε μόνο με μπλε ξηρό μελάνι (μόνο τα σχήματα με μολύβι).
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
δ) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
ε) Πρέπει να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 03 (τρεις) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε και τα δέκα (10) θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{2x-5}{(x-1)^2}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
2. Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων :
α) $f(x) = x^2 \cdot \varepsilon\varphi x$
β) $f(x) = \tau\epsilon\mu^3(x^2)$
3. Να λύσετε την εξίσωση $\log(4^{x-2} + 9) + \log 2 = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$. Να βρείτε (τύπο) και να ορίσετε (π.ο και π.τ) την f^{-1} .
5. Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu 5\alpha + 2\eta\mu 4\alpha + \eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu 5\alpha + 2\sigma\upsilon\nu 4\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha} = \varepsilon\varphi 4\alpha$.
6. Σε αριθμητική πρόοδο ο τρίτος όρος είναι 2 και ο όγδοος όρος είναι -8. Να βρείτε την πρόοδο και να υπολογίσετε το άθροισμα των πρώτων 10 αρνητικών όρων.
7. Να υπολογίσετε το όριο των πιο κάτω συναρτήσεων:
α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x})$
β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x^2 - x}$

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(2,5) , Β(-4,3) και Γ(λ,10).
 α) Να βρείτε το λ, έτσι ώστε η διάμεσος ΓΜ του τριγώνου να σχηματίζει ορθή γωνία με τον άξονα χ'χ.
 β) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΓΔ του τριγώνου.
9. Δίνεται η καμπύλη $x^2 + y^2 = 5$ και το σημείο της Α, με τετμημένη $x=1$ και $y < 0$.
 Να βρείτε τις εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης στο σημείο Α.
10. Ο όγκος κυλίνδρου είναι $54\pi \text{ m}^3$ και το ύψος του είναι διπλάσιο από την ακτίνα της βάσης του. Να βρείτε το εμβαδό της ολικής επιφάνειάς του.

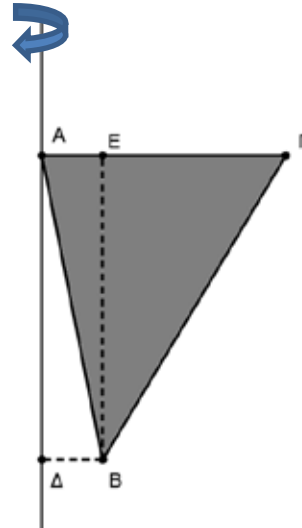
ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε και τα πέντε (5) θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. α) Να λύσετε την εξίσωση $4^{\sin 2x} + 4^{\sin^2 x} = 3$.
 β) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{\log x + 2}{\log x - 2}$.
 i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{5}{2}$.
2. α) Να ορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο, έτσι ώστε οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ και $g(x) = \ln e^{x+1}$ να είναι ίσες.
 β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x}{x+4}$ και $g(x) = \sqrt{x+1}$. Να ορίσετε (π.ο) και να βρείτε τον τύπο της $g \circ f$.

3. Στο διπλανό σχήμα το σκιασμένο τρίγωνο ABΓ κάνει πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα ΑΔ. Να υπολογίσετε την ολική επιφάνεια και τον όγκο του στερεού, που σχηματίζεται.

Δίνονται: $ΑΓ=4\text{cm}$, $ΒΕ=4\text{cm}$,
 $ΒΓ=5\text{cm}$, $ΑΓ \perp ΑΔ$, $ΒΕ \perp ΑΓ$



4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \ln x - \beta x^2$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

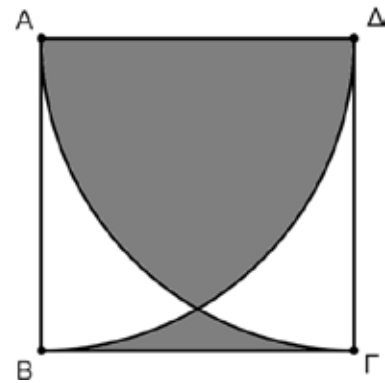
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρείτε την παράγωγο της f στο πεδίο ορισμού της.

γ) Να βρείτε τα α και β , έτσι ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $A(1,1)$ της γραφικής παράστασης της f να είναι η $y = 3x - 2$.

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένα τετράγωνο ABΓΔ πλευράς α και μέσα σε αυτό ένα σκιασμένο κύπελο, το οποίο δημιουργήθηκε από δύο τεταρτοκύκλια με κέντρα τα A και Δ και ακτίνες τις πλευρές AB και ΔΓ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το σκιασμένο εμβαδό.
 (Η απάντηση να δοθεί συναρτήσει του α).



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)

ΤΑΞΗ: Β΄

Ημερομηνία: 09/06/2015

Χρόνος: 2,5 ώρες

Ώρα Έναρξης: 07:45 πμ

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες
συμπεριλαμβανομένου του τυπολογίου.

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας τύπου Tipp-Ex.
- Τα σχήματα να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
- Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνεται ο τρόπος επίλυσής τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της επίλυσης δεν θα λαμβάνονται υπόψη.

ΜΕΡΟΣ Α:

- Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{x-8}{(x-2)(x+1)}$

2. Δίνεται η καμπύλη με τύπο: $y = x^3 + e^{2x} - 5x$.

(α) Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$

(β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με $x = 0$ είναι: $3x + y - 1 = 0$.

3. Να λύσετε στο διάστημα $60^\circ, 360^\circ$ ή την εξίσωση: $\eta\mu 3x \csc x - \csc 3x \eta\mu x = \frac{1}{2}$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x + x^2 - 5x}{x}$. Να υπολογίσετε:

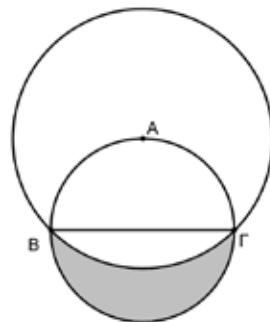
(α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(β) $f'(x)$.

5. Να λύσετε την εξίσωση: $25^x - 28 \times 5^x + 75 = 0$.

6. Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $(\beta - \gamma)^2 + 4\beta\gamma\eta\mu^2 \frac{A}{2} = a^2$.

7. Οι παράπλευρες έδρες κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρά 8cm. Να υπολογίσετε:
 (α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και
 (β) τον όγκο της πυραμίδας.
8. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της τέλει επαγωγής, να αποδείξετε για κάθε θετικό ακέραιο n , τη σχέση: $1+5+9+13+K+(4n-3)=n \times (2n-1)$.
9. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο κύκλος (A, AB) με $AB=4\text{cm}$ και χορδή του $B\Gamma=\lambda_4$. Από τα σημεία A, B, Γ διέρχεται δεύτερος κύκλος.
 (α) Να δείξετε ότι η ακτίνα του δεύτερου κύκλου είναι ίση με $2\sqrt{2}\text{cm}$.
 (β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μηνίσκου του σχήματος.



10. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = 5-x$ και $g(x)=\sqrt{3-x}$.
 (α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$.
 (β) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{|f(x)| + x^2 - 5|x|}{x^2 - 25} \times$

ΜΕΡΟΣ Β:

- Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

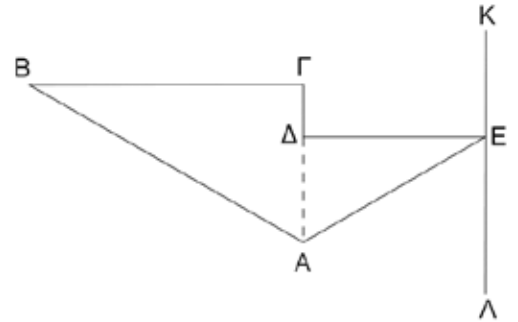
1. Σε τρίγωνο ABΓ δίνονται οι κορυφές $A(0,1)$, $B(4,-2)$ καθώς και η εξίσωση της πλευράς BΓ: $5x-y-22=0$.
 (α) Αν η απόσταση της κορυφής Γ από την πλευρά AB είναι $\frac{23}{5}$, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ με τεταγμένη $y > 0$.
 (β) Αν η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(5, 3)$, να υπολογίσετε την εφαπτομένη της γωνίας B του τριγώνου.
 (γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου AΓM, όπου M το μέσο της πλευράς AB.
2. Αριθμητική πρόοδος με διαφορά δ και φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ έχουν για πρώτο όρο την τιμή του ορίου $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-3}-1}$, ενώ το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι ίσο με τον έκτο όρο της. Επιπλέον ισχύει η σχέση $e^{\ln \lambda} = 10^{-\log \delta}$.
 (α) Να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-3}-1} = 2$.
 (β) Να σχηματίσετε τις δύο προόδους.
 (γ) Να υπολογίσετε πόσους όρους της γεωμετρικής προόδου πρέπει να προσθέσουμε για να έχουμε άθροισμα $\frac{31}{8}$.

3. Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ABΓ και AΔΕ είναι ορθογώνια (με ορθή γωνία την Γ και τη Δ αντίστοιχα), AB=12cm, AE=8cm και ΔΓ=2cm.

Το πολύγωνο ABΓΔΕ περιστρέφεται πλήρως γύρω από άξονα ΚΛ που διέρχεται από το σημείο Ε και είναι κάθετος στο ΔΕ. Η γωνία ΑΕΛ του σχήματος είναι ίση με 60° .

Να υπολογίσετε:

- (α) τον όγκο και
(β) το εμβαδόν της επιφάνειας του παραγόμενου στερεού.



4. Δίνεται η ακολουθία: $4\eta\mu 2x, 2\eta\mu 4x, \eta\mu 6x + \eta\mu 2x, \dots$ με θετικούς όρους.

(α) Να δείξετε ότι η πιο πάνω ακολουθία είναι φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος.

(β) Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση: $\Sigma_{\varphi} = 4\sigma\varphi x$

(όπου Σ_{φ} είναι το άθροισμα των άπειρων όρων της ακολουθίας).

(γ) Να λύσετε την εξίσωση: $\Sigma_{\varphi} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

5. (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $y = \ln \frac{x+2}{x^2}$

(β) Να δείξετε ότι η παράγωγος της πιο πάνω συνάρτησης είναι: $y' = \frac{-x-4}{x(x+2)}$

(γ) Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$, για την οποία ισχύει:

$$f\left(\ln \frac{x+2}{x^2}\right) = -x^2 - 8x$$

Να δείξετε ότι :

(i) $f(0) = -20$

(ii) $f'(0) = 16$.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Τριγωνομετρία

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A \quad \cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$2 \sin A \cos B = \sin(A - B) + \sin(A + B) \quad 2 \sin A \sin B = \sin(A - B) - \sin(A + B)$$

$$2 \sin A \sin B = \sin(A - B) - \sin(A + B)$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A, \quad \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2} \quad \cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$$

$$\sin 2A = \frac{2 \sin A \cos A}{1 + \sin^2 A} \quad \cos 2A = \frac{1 - \sin^2 A}{1 + \sin^2 A}$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad \sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad \cos A - \cos B = 2 \sin \frac{B-A}{2} \sin \frac{A+B}{2}$$

$$a = 2R \sin A \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad E = \frac{a \times b \times c \sin A}{2}$$

2. Στερεομετρία

Ορθό πρίσμα	$E_p = P_b \times h$	$V = E_b \times h$
Κανονική πυραμίδα	$E_p = \frac{1}{2} P_b \times h$	$V = \frac{E_b \times h}{3}$
Κύλινδρος	$E_k = 2 \times p \times R \times h$	$V = p \times R^2 \times h$
Κώνος	$E_k = p \times R \times h$	$V = \frac{p \times R^2 \times h}{3}$
Κόλυρος Κώνος	$E_k = p \times (R + r) \times h$	$V = \frac{p \times h}{3} (R^2 + R \times r + r^2)$

ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ 2015

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Τάξη : Β΄

Ημερ. εξέτασης :

21/05/2015

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ**Επιτρεπόμενη διάρκεια γραπτού 2 ώρες και 30 λεπτά (150 λεπτά)****ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- Επιτρέπεται η χρήση ΜΗ προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
- Να γράψετε μόνο με μελάνι μπλε ή μαύρο (τα σχήματα επιτρέπονται και με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας .
- Οι απαντήσεις να δίνονται σε ξεχωριστό φύλλο απαντήσεων.
- Δίνεται τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α΄ : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων : $\frac{c+1}{(c-2)(c-1)}$
2. Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:
 - α. $f(x) = \frac{x+4}{x-3}$
 - β. $g(x) = \ln(x^2 - 5x)$
3. Να υπολογίσετε τον όγκο κύβου που έχει εμβαδόν επιφάνειας 150 cm^2 .
4. Να αποδείξετε ότι ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, αν και μόνο αν ισχύει $b = 2gs_{\alpha}\eta A$.
5. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που περνά από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με $A(-1, 3)$, $B(5, 5)$ και σχηματίζει με τον άξονα Οχ γωνία 45° .
6. Να δείξετε (με τη μέθοδο τέλειας επαγωγής) ότι η σχέση

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1) \quad \text{ισχύει για κάθε } n \in \mathbb{N}^+$$

7. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}}$

8. Να λύσετε την εξίσωση $9^{x+1} - 5 \cdot 6^x + 2^{2x+1} = 0$ για $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

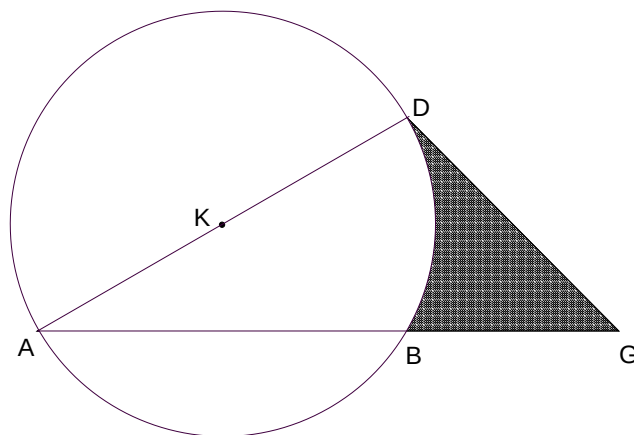
9. Με βάση τον ορισμό της παραγώγου να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $y = \sin x$

10. Δίνεται κύβος ακμής $2a$ cm. Με πριόνι αποκόπτουμε από κάθε κορυφή κομμάτια έτσι ώστε οι τομές να περνούν από τα μέσα των τριών ακμών που ορίζουν κάθε κορυφή. Να δείξετε ότι η ολική επιφάνεια του στερεού που θα απομείνει θα έχει εμβαδό $E = a^2 (12 + 4\sqrt{3})$ τ.μ.

ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β' .
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(2, -1)$ και $\Gamma(2, 5)$. Αν η διάμεσος AM έχει εξίσωση $5x - y - 11 = 0$ και $B\Gamma: x + y - 7 = 0$, να βρείτε :
 - τις συντεταγμένες του σημείου M
 - τις συντεταγμένες της κορυφής B
 - την εξίσωση της $A\Gamma$
 - το μήκος του ύψους $B\Delta$
 - το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

- Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος $(K, 6\text{cm})$.
Αν $AB = \lambda_3$, $B\Gamma = \lambda_6$
 - Να δείξετε ότι $\Gamma\Delta = \lambda_4$.
 - Να βρείτε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους.



3. α) Να δείξετε ότι η ακολουθία $\log_{\text{Sun}c} c, \log_{\text{Sun}^2 c} c, \log_{\text{Sun}^4 c} c, \dots$

με $c \in (\frac{\rho}{4}, \frac{\rho}{2})$ είναι φθίνουσα Γεωμετρική Πρόοδος.

β) Να υπολογίσετε την τιμή του x αν ισχύει : $\log_{\text{Sun}c} \sqrt{3} c$

4. Δίνεται η καμπύλη $y^2 = x(\ln x + 1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της $x=1$, $y < 0$.

β) Να αποδείξετε ότι : $2xy \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 1 = 0$

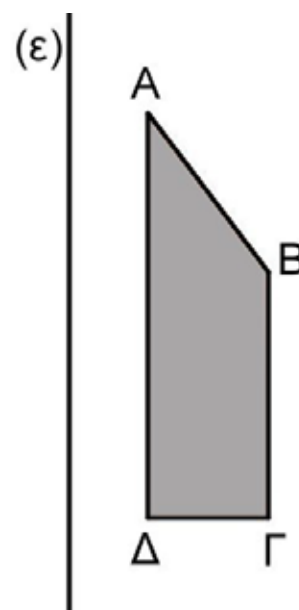
5. Ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, ($\angle A = \angle \Gamma = 90^\circ$) με πλευρές $A\Delta=12\text{cm}$, $B\Gamma=8\text{cm}$ και $\Delta\Gamma=3\text{cm}$

περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε) που είναι παράλληλη προς την $A\Delta$ και απέχει 2cm από αυτή.

Να υπολογίσετε:

α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας, και

β) τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή.



...ΤΕΛΟΣ...

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22 / 05 / 2015

ΤΑΞΗ: Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΩΡΑ: 8.00 π.μ.

ΣΥΝ. ΣΕΛ.: 4

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΟΔΗΓΙΕΣ: Να γράφετε με μπλε πένα (με μολύβι μόνο τα σχήματα).

Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα $\frac{4x - 13}{(x + 3)(x - 2)}$.

2. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{5x - 10}$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2x}{x^2}$

3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $y = x^3 \cdot e^{2x}$

β) $y = \sqrt{\sin 2x + 5}$

4. Αν $\sin x = \frac{3}{5}$ με $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α) $\sin 2x$

β) $\sin \frac{x}{2}$

5. Δίνεται ευθεία (ε) με εξίσωση $(\alpha - 2)x + (\alpha + 3)y - 3\alpha = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Να υπολογίσετε την τιμή του α ώστε η ευθεία (ε):

α) Να είναι κάθετη στον άξονα των τεταγμένων yy'

β) Να περνά από το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, όπου $A(2\alpha, -3)$ και $B(4, 1 - 2\alpha)$.

6. Να λύσετε την εξίσωση $25^{\frac{\sqrt{3}\eta\mu 4x}{2}} = 5^{3\sigma\upsilon\nu 2x}$, στο διάστημα $(0, \pi)$.

7. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ακμή βάσης $\alpha = 8\sqrt{2}\text{cm}$ και όγκο $V = \frac{256}{3}\text{cm}^3$.

Να υπολογίσετε:

α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας.

β) Την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η παράπλευρη ακμή με τη βάση της πυραμίδας.

8. α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = \log_{x^2+1} \frac{x+2}{x+3}$.

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln \frac{2x-5}{x-3}$ και $g(x) = \ln(5-2x) - \ln(3-x)$.

i) Να εξετάσετε αν $f = g$.

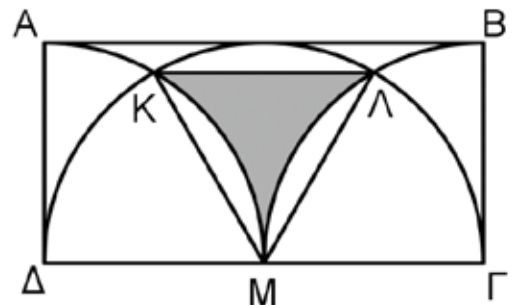
ii) Αν $f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $f = g$.

9. Δίνεται η ακολουθία: $\log_3(4-x)$, $\log_3\sqrt{4-x}$, $\log_3\sqrt[4]{4-x}$, ..., με $x < 4$.

α) Να αποδείξετε ότι η πιο πάνω ακολουθία είναι φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\log_3(4-x) + \log_3\sqrt{4-x} + \log_3\sqrt[4]{4-x} + \dots = 4$.

10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με $AB = 2a$ και σημείο M μέσο της $\Gamma\Delta$. Με κέντρα τα σημεία Γ και Δ και με ακτίνες ΓM και ΔM αντίστοιχα, γράφουμε τα τόξα MB και MA μέσα στο ορθογώνιο. Γράφουμε επίσης το ημικύκλιο $(M, M\Gamma)$, το οποίο τέμνει τα τόξα MA και MB στα σημεία K και Λ αντίστοιχα.



α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισόπλευρο.

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin x$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, να αποδείξετε ότι $f'(x) = \cos x$.
- β) Δίνεται η συνάρτηση $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.
Να αποδείξετε ότι:
- i) $\frac{dy}{dx} = 0$.
- ii) Η παράσταση $A = \frac{dy}{dx} \times \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} \times \frac{d^2y}{dx^2}$ είναι ανεξάρτητη του x .
2. Δίνεται ορθό πρίσμα με ύψος $2R$ και βάση τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Η βάση $AB\Gamma\Delta$ του πρίσματος είναι εγγεγραμμένη σε κύκλο ακτίνας R . Αν $AB = \lambda_4$, $B\Gamma = \lambda_3$ και $\Gamma\Delta = \lambda_6$, να υπολογίσετε συναρτήσει του R :
- α) Τον όγκο του πρίσματος.
- β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του πρίσματος.
3. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$, $x < 3$ και $g(x) = x^2 - 79$, $x \in \mathbb{R}$.
- α) Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση της f (τύπο και πεδίο ορισμού).
- β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f^{-1} \circ g$ (τύπο και πεδίο ορισμού).
4. Δίνεται καμπύλη με εξίσωση $x \times y = 4$ και σημείο της A με τετμημένη $x = 1$.
- α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ_1) και της κάθετης (ϵ_2) της πιο πάνω καμπύλης στο A .
- β) Η εφαπτομένη (ϵ_1) τέμνει τον άξονα των τεταγμένων $y\phi$ στο σημείο B και η κάθετη (ϵ_2) τέμνει τον άξονα των τεταγμένων $x\phi$ στο σημείο Γ . Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B και Γ .
- γ) Αν $B(0,8)$ και $\Gamma(-15,0)$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- δ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία $B\Gamma$.
- ε) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\widehat{AB\Gamma}$ (κατά προσέγγιση ακεραίου).

5. α) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α , β και γ . Αν $\hat{A} = 30^\circ$ και $\gamma = \alpha\sqrt{3}$, να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου καθώς και την πλευρά β , συναρτήσει της πλευράς α του τριγώνου (2 περιπτώσεις).
- β) Τα πιο πάνω τρίγωνα κάνουν πλήρη στροφή γύρω από ευθεία ΧΑΧ', η οποία είναι κάθετη στην πλευρά τους ΑΒ. Αν η διαφορά των όγκων των δύο στερεών που παράγονται είναι ίση με $80\pi\text{cm}^3$, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ = α .

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 27/5/2015

ΤΑΞΗ: Β'

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: _____

ΤΜΗΜΑ: _____ ΑΡ.: _____

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
1. Οι απαντήσεις δίνονται μόνο με **μπλε μελάνι**.
 2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού (υγρού ή ταινίας/Tipp Ex).
 3. Τα σχήματα μπορούν να σχεδιαστούν με μολύβι.
 4. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής με σφραγίδα του Σχολείου.
 5. Χορηγείται τυπολόγιο.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (04) ΣΕΛΙΔΕΣ.

ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ **ΟΛΑ** ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΜΕΡΟΣ Α': Περιλαμβάνει 10 θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα $\frac{6x}{(x-1)(x-2)}$
2. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει περίμετρο βάσης 16 cm. Το παράπλευρο ύψος της σχηματίζει με το επίπεδο της βάσης γωνία 60° . Να υπολογίσετε:
 - 1) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.
 - 2) Το μήκος της παράπλευρης ακμής της πυραμίδας.
3. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των συναρτήσεων:
 - 1) $\psi = 2x^4 - 5x$
 - 2) $\psi = \frac{5x^2}{2x-3}$
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-3}$.
 - 1) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .
 - 2) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))$.

5. Δίνεται τρίγωνο ABΓ, στο οποίο ισχύει η σχέση $\eta\mu B = 2 \kappa\eta\mu\Gamma \times \sigma\upsilon\nu A$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

6. Να λύσετε την εξίσωση $\log_3\left(\frac{x}{27}\right) + \log_x 9 = 0$.

7. Δίνεται η καμπύλη $x^2 + x \kappa\psi = 3$.

1) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης στο σημείο της καμπύλης με $\psi = -2$ και $x < 0$.

2) Να δείξετε ότι $\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{6}{x^3}$.

8. Δίνεται η ακολουθία $4\eta\mu\omega, 2\eta\mu 2\omega, 4\eta\mu\omega \times \sigma\upsilon\nu^2\omega \dots$, όπου $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

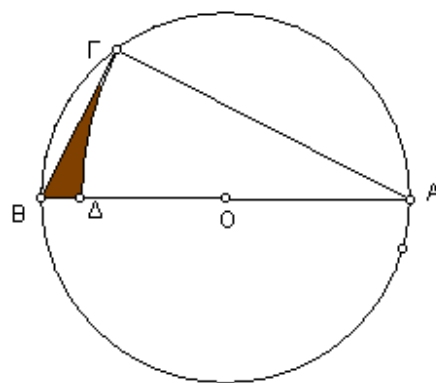
1) Να δείξετε ότι είναι φθίνουσα Γεωμετρική Πρόοδος.

2) Να δείξετε ότι $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 4 \times \sigma\phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x-1)$ και $g(x) = x^2$.

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $\frac{f}{g}$.

10. Στο σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) με $AB = 4\text{cm}$ και $\widehat{A\Gamma B} = 30^\circ$. Το τόξο ΓΔ γράφτηκε με κέντρο A και ακτίνα ΑΓ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους του σχήματος.



ΜΕΡΟΣ Β': Περιλαμβάνει 5 θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνονται τα σημεία $A(2,-3)$, $B(4,1)$ και $\Gamma(0,-2)$. Ζητούνται:

1) Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι AB και ΓΜ, όπου Μ το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB.

2) Να βρείτε τις συντεταγμένες του Δ, ώστε το ΑΓΒΔ να είναι παραλληλόγραμμο.

3) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία είναι παράλληλη με την AB, έχει από το σημείο Γ απόσταση $\sqrt{5}$ μονάδες, και τέμνει τον θετικό ημιάξονα των ψ.

2. Δίνονται $f(a) = \frac{\eta\mu a - \eta\mu 2a + \eta\mu 3a}{\sigma\upsilon\nu a - \sigma\upsilon\nu 2a + \sigma\upsilon\nu 3a}$ και $g(a) = \frac{\eta\mu 3a}{\eta\mu a} + \frac{\sigma\upsilon\nu 3a}{\sigma\upsilon\nu a}$.

1) Να δείξετε ότι $f(a) = \epsilon\phi 2a$ και $g(a) = 4\sigma\upsilon\nu 2a$.

2) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(a) - g(a)}{a^3 - a^2}$.

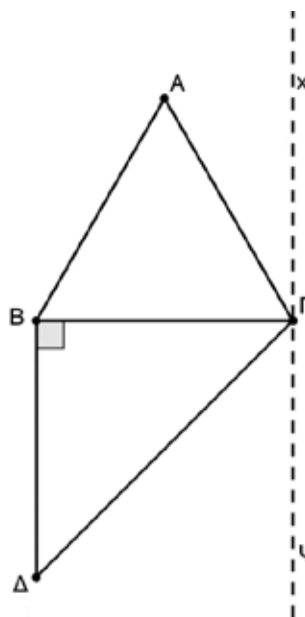
3) Να λύσετε την εξίσωση $3f(a) - \frac{1}{2}g(a) = 0$, όπου $a \in (0, 2\pi)$.

3. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ με πλευρά 2a και ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο BΔΓ με $\hat{B} = 90^\circ$. Το τετράπλευρο ABΔΓ κάνει πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα χΓψ, που είναι κάθετος στη ΒΓ, στο σημείο Γ.

Αν η επιφάνεια που παράγει η πλευρά AG, κατά την περιστροφή, έχει εμβαδόν $8\pi \text{ cm}^2$, να υπολογίσετε:

- 1) την τιμή του a,
- 2) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του παραγόμενου στερεού.

Να μεταφέρετε το σχήμα στις κόλλες απαντήσεών σας.



4. 1) Να δείξετε, με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής, ότι ο νιοστός όρος Αριθμητικής Προόδου δίνεται από τον τύπο $a_n = a_1 + (n - 1) \times \delta$.

2) Σε μια Αριθμητική Πρόοδο ισχύει ότι ο έκτος όρος ισούται με 11 και το άθροισμα των 20 πρώτων όρων είναι ίσο με 400.

- i. Να βρείτε την Πρόοδο.
- ii. Να υπολογίσετε το άθροισμα όλων των περιττών αριθμών που είναι μικρότεροι από το 1000 και μεγαλύτεροι από το 100.
- iii. Να δείξετε ότι $\sum_{v=2}^n a_{v+2} - a_{v+2} = (n + 1)^2$.

5. 1) Δίνεται η καμπύλη $f(x) = e^{-x} \sin^2 x$. Να δείξετε ότι $f'(x) + 2xf'(x) + 5f(x) = 2e^{-x}$.
- 2) Μία παραγωγίσιμη συνάρτηση g ικανοποιεί, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, την ισότητα $g^3(x) + x^5 = -e^{g(x)}$. Να αποδείξετε ότι $g'(x) \leq 0$.
- 3) Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση h ισχύει $h(\eta\mu x) = e^{kx} \sin x$, όπου k πραγματικός αριθμός, για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Στο σημείο $M(0, h(0))$ της καμπύλης, φέρουμε εφαπτομένη που τέμνει τον άξονα των x στο σημείο B . Αν O είναι η αρχή των αξόνων και $k > 0$, να υπολογίσετε, συναρτήσει του k , το εμβαδόν του τριγώνου OBM .

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2015ΤΑΞΗ: Β' **Ενιαίου Λυκείου**

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 21 / 5 / 2015

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 Ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
β) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
δ) Δίνεται τυπολόγιο.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α' Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{x-1}{x(x+1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων .

2. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων.

(α) $y = \frac{e^x}{\eta \mu x}$

(β) $y = \epsilon \phi^3 x$

3. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 3 - 5i$ και $z_2 = 3 - 3i$. Να υπολογίσετε το μέτρο του μιγαδικού $z_1 + z_2$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$.

Να ορίσετε (τύπο και πεδίο ορισμού) τις συναρτήσεις :

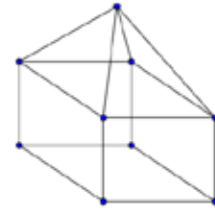
(α) $f + g$

(β) $\frac{f}{g}$

5. Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι " $\forall n \in \mathbb{N}$ " ισχύει η πρόταση:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

6. Το στερεό στο διπλανό σχήμα αποτελείται από ένα κύβο ακμής 6cm και μια κανονική πυραμίδα. Το παράπλευρο ύψος της πυραμίδας σχηματίζει με τη βάση της γωνία 60° . Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού.



7. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7\eta\mu x}{5 - \sqrt{x+25}}$

(β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 4}}{2x}$

8. Αν $\eta\mu y = x$ και $y \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, να δείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της παραγώγου.

9. Να λύσετε στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ την εξίσωση:

$$\log_{\eta\mu x} 2 + \log_{\sigma\upsilon\nu x} 2 + \log_{\eta\mu x} 2 \times \log_{\sigma\upsilon\nu x} 2 = 0$$

10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται:

Τρίγωνο ABΓ με $AB = 2\sqrt{2}$ cm, $B\Gamma = 2$ cm και $\hat{B} = 135^\circ$.

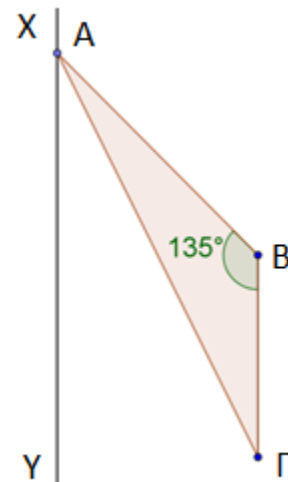
Το τρίγωνο ABΓ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $XY \parallel B\Gamma$.

Να βρείτε :

(α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και

(β) τον όγκο

του στερεού που παράγεται.



**ΜΕΡΟΣ Β' Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Οι εξισώσεις των πλευρών ΒΓ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι $3x - y + 22 = 0$ και $5y + x = 30$ αντίστοιχα. Μια κορυφή του έχει συντεταγμένες $(-1, 3)$.

Να βρείτε:

- (α) τις εξισώσεις των διαγωνίων του,
(β) την απόσταση μεταξύ των πλευρών ΑΒ και ΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

(γ) το συνημίτονο της οξείας γωνίας μεταξύ των διαγωνίων του είναι $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(δ) το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι 16 τ.μ.

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται:

ΑΟΒ τεταρτοκύκλιο με κέντρο Ο και ακτίνα 2cm,

ΒΕ πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε

κύκλο (Ο,ΟΒ), ΒΕ ημικύκλιο με κέντρο Κ και $\angle ΕΔΟ = 45^\circ$

Να δείξετε ότι :

(α) το $\eta\mu 105^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

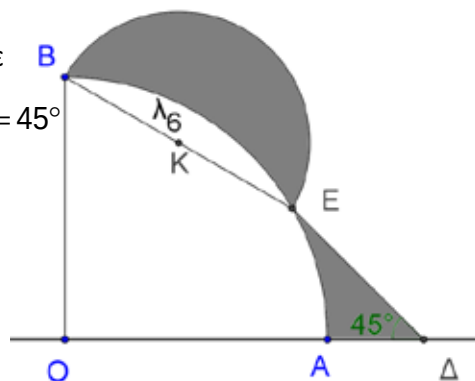
(χωρίς τη χρήση υπολογιστικής)

(β) το μήκος της ΕΔ = $\sqrt{2}$ cm

(γ) το μήκος της ΟΔ = $(\sqrt{3} + 1)$ cm

(δ) το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής είναι ίσο με $\frac{3\sqrt{3} + 1 - \pi}{2} \text{ cm}^2$

(ε) η περίμετρος της σκιασμένης περιοχής είναι ίση με $(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1 + 2\pi)$ cm



3. (α) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 5^x$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$g(x) + g(x+1) + g(x+2) + \dots + g(x+49) = \frac{125(5^{50} - 1)}{4}$$

(β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x) = \sqrt{5^{2x} - 6 \times 5^x + 5}$

(γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^x + \frac{1}{5^x}}{5^x - \frac{1}{5^x}}$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

(α) Να δείξετε ότι η $f(x)$ μπορεί να εκφραστεί στη μορφή $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

(β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.

(γ) Αν δίνεται ότι η $f(x)$ είναι συνάρτηση ένα προς ένα, να προσδιορίσετε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.

(δ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + K$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi - 2\eta\mu^2\chi - 4\sigma\upsilon\nu^2\chi$.

(α) Να δείξετε ότι: $f(x) = \sqrt{2} \eta\mu\chi - \frac{\pi}{4} - 3$

(β) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης στην γραφική παράσταση της $f(x)$ στο σημείο της με τετμημένη $x = \frac{\pi}{4}$

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - f(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ στο διάστημα $[0, \pi]$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 21 / 05 / 2015

ΤΑΞΗ: Β'
ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ΩΡΕΣ

- ΟΔΗΓΙΕΣ :** α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής που φέρει σφραγίδα δημόσιου σχολείου.
- β) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- γ) Να γράφετε με μελάνι μπλε ή μαύρο (τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι).
- δ) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.
- ε) Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α': Αποτελείται από 10 ασκήσεις.
 Να λύσετε ΟΛΕΣ τις ασκήσεις.
 Η κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1) Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{3x+2}{x(x-2)}$.
- 2) Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\alpha \sin B + \beta \sin A = 2R$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
- 3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$. Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f . Αν ορίζεται η f^{-1} να βρείτε τον τύπο, το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της.
- 4) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ακμή βάσης 6 m και ύψος 4 m. Να υπολογίσετε:
 - α. τον όγκο της
 - β. το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.
- 5) Να βρείτε τα πιο κάτω όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2 + 2x + 1}{x^2 + x + 1} \right)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x^2 - 2x}{|x^2 - x - 2|} \right)$$
- 6) Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$\alpha. y = x^5 \cdot \eta\mu(3x)$$

$$\beta. y = \frac{e^{2x}}{x^2 + 1}$$
- 7) Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι $\forall n \in \mathbb{N}$, ισχύει: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.
- 8) Να δείξετε ότι:

$$\alpha. \frac{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 3x + \sigma\upsilon\nu 5x}{\eta\mu x + \eta\mu 3x + \eta\mu 5x} = \sigma\phi 3x$$

$$\beta. \frac{\eta\mu 5\theta}{\eta\mu \theta} - \frac{\sigma\upsilon\nu 5\theta}{\sigma\upsilon\nu \theta} = 8\sigma\upsilon\nu^2 \theta - 4$$

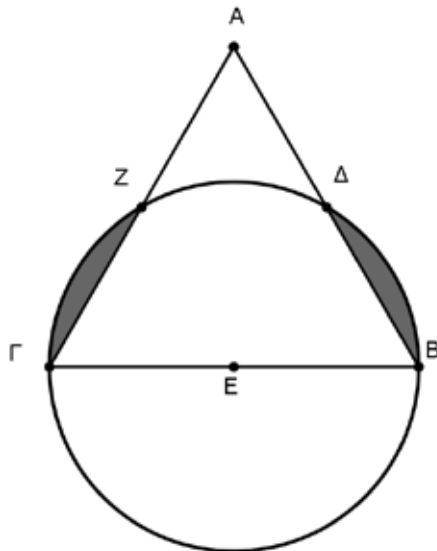
9) Αν $\log_3(5 \cdot 5^{x-1} - 8)$, 1 , $x \cdot \log_3 5$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να βρείτε το x .

10) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(2, 2\sqrt{3} + 2)$, $B(4, 2)$, και εξισώσεις των πλευρών AB : $y - \sqrt{3}x - 2 = 0$ και $B\Gamma$: $y = 2$. Ο κύκλος με κέντρο το E και ακτίνα BE τέμνει τις πλευρές του τριγώνου AB και $A\Gamma$ στα Δ και Z αντίστοιχα.

α. να βρείτε την εξίσωση της AE

β. να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου

γ. να αποδείξετε ότι το $\Gamma\Delta = \lambda_3$.



ΜΕΡΟΣ Β': Αποτελείται από 5 ασκήσεις.
Να λύσετε ΟΛΕΣ τις ασκήσεις.
Η κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$. Να βρείτε:

α. i. το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .

ii. την $f \circ g$ και να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται.

β. Να εξετάσετε αν η πιο κάτω συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο της με $x = -3$.

$$h(x) = \begin{cases} \frac{3x + 1}{4} & x \geq -3 \\ g(x) \cdot |x + 3| & x < -3 \end{cases}$$

2) Παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ έχει κορυφές $A(0, -7)$ και $\Gamma(0, 1)$. Η $B\Gamma$ έχει εξίσωση $y = x + 1$ ενώ η

AB έχει εξίσωση $5x + 3y + 21 = 0$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών B και Δ .

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου βάρους του τριγώνου $AB\Gamma$.

γ. Να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής Γ από την πλευρά AB .

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

ε. Αν η πλευρά AB σχηματίζει γωνία 45° με ευθεία (ϵ) να βρείτε την κλίση της λ ($\lambda > 0$).

3) Δίνεται η συνάρτηση $y = \ln(1 + \sin 2x)$.

α. Να δείξετε ότι: $y' = -2 \cot x$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $y' \cdot \sin x = 1$ στο διάστημα $[0^\circ, 360^\circ]$.

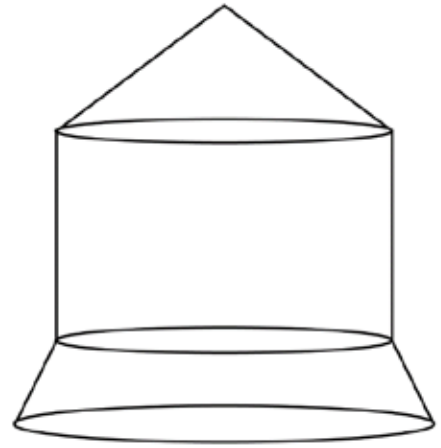
γ. Να δείξετε ότι $y'' + 4 \cdot e^{-y} = 0$.

4) Δίνεται η καμπύλη $2y^3 + x^2 = 3xy$.

α. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο της $y = 1$ ($x < 2$), έχει εξίσωση $x - 3y + 2 = 0$.

β. Δίνεται μια ρουκέτα των πολεμικών αεροπλάνων.

Η μύτη της έχει σχήμα κώνου με διάμετρο **16m** και γενέτειρα **10m**. Η ουρά της έχει σχήμα κώλου με ύψος **4m** και γενέτειρα **5m**. Ο όγκος του μετάλλου που χρειάζεται για την κατασκευή της ρουκέτας είναι **$1132\pi \text{ m}^3$** . Να υπολογίσετε:



i. το συνολικό ύψος της ρουκέτας.

ii. το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της ρουκέτας.

5) Αριθμητική πρόοδος με διαφορά δ και απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda > 0$ έχουν τον ίδιο πρώτο όρο. Το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου ισούται με τον τρίτο όρο της αριθμητικής προόδου. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu(\lambda x)}{x} + \frac{2\lambda x^2 + 3x}{x} \right) = \frac{7}{2}$ και η λύση της εξίσωσης $\log \left(\frac{7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2}}{3^{x+4} - 5^{x+3}} \right) = 0$ είναι ο αντίθετος του τέταρτου όρου της γεωμετρικής προόδου να σχηματίσετε τις δύο προόδους.

- ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ -

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

Μάθημα: **Μαθηματικά Β' κατεύθυνσης**Διάρκεια: **2,5 ώρες**Ημερομηνία: **26.05.2015****Οδηγίες:**

1. Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε ή μαύρο (για τα σχήματα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι).
2. Τα σχήματα των ασκήσεων να αντιγράφονται στη θέση που λύνεται η άσκηση.
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
5. Το δοκίμιο αποτελείται από 3 σελίδες.
6. Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α' : Να λύσετε **όλες** τις ασκήσεις.Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **πέντε** μονάδες από τις **εκατό**.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{12x}{(x-1)(x+3)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:
 - 1) $\psi = 3x^2 - 5x + \sqrt{x}$
 - 2) $\psi = e^x \cdot (5x - 2)$
3. Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ακμή βάσης 10 cm και όγκο 400 cm³. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της.
4. Σε αριθμητική πρόοδο το άθροισμα του τέταρτου και του έκτου όρου της ισούται με 20 και ο έβδομος όρος είναι τετραπλάσιος του τρίτου όρου της. Να σχηματίσετε την πρόοδο και να υπολογίσετε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.
5. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\gamma \cdot \sin B = \beta \cdot \sin \Gamma$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
6. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ με $x \neq 1$.
 - 1) Να βρείτε το Πεδίο Τιμών της.
 - 2) Αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(x)$, να βρείτε τον τύπο και το Πεδίο Ορισμού της.

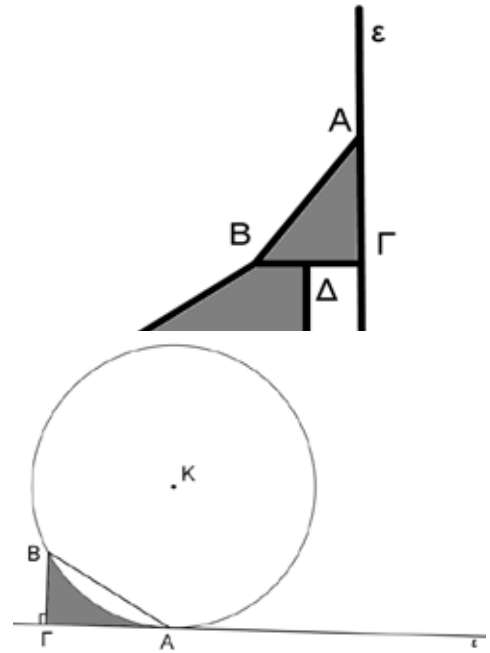
7. Να λύσετε την εξίσωση: $\log_2 \sqrt{x} + \log_4 (x + 6) = 2$.

8. Να υπολογίσετε τα όρια των συναρτήσεων:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 5x}$,

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{\sqrt{x+9} - 3}$.

9. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) , η χορδή $AB = \lambda_6$ και η εφαπτομένη (ϵ) του κύκλου στο σημείο A . Αν $B\Gamma \perp (\epsilon)$, να βρείτε (συναρτήσει του R) το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους.



10. Το σημείο A είναι το σημείο τομής των ευθειών $\psi = 2x - 5$ και $3x - \psi = 7$ και το σημείο B έχει συντεταγμένες $B(0, 4)$. Αν το σημείο Γ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $x + 2\psi = 0$ και το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ ισούται με 9 τετραγωνικές μονάδες, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ ($\psi_\Gamma > 0$).

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε **όλες** τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **δέκα** μονάδες από τις **εκατό**.

1. Δίνεται η ευθεία (ϵ) με εξίσωση $x + 2\psi - 4 = 0$.

- 1) Αν A είναι το σημείο τομής της ευθείας (ϵ) με τον άξονα $x'x$ και B το σημείο τομής της με τον άξονα $\psi'\psi$, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B .
- 2) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB .
- 3) Να βρείτε το μήκος του ύψους $ΟΓ$ του τριγώνου OAB που φέρνουμε από την κορυφή O , όπου O η αρχή των αξόνων.
- 4) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .
- 5) Αν $\Gamma(\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ έτσι ώστε το $ΟΓ\Delta A$ να είναι παραλληλόγραμμο.

2. Δίνεται ότι $A = \frac{1}{\sigma \phi x - \sigma \phi 2x}$ και $B = \eta \mu^2 x - \eta \mu^2 3x$.

- 1) Να δείξετε ότι $A = \eta \mu 2x$ και $B = -\eta \mu 2x \eta \mu 4x$.
- 2) Να υπολογίσετε τις τιμές του $x \in [0, 2\pi]$ για τις οποίες ισχύει $e^{\frac{A}{2}} = \sqrt[4]{e}$.

- 3.** Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{\Gamma} = 90^\circ$, $AB=8\text{cm}$ και $B\Gamma=4\text{cm}$. Το τετράπλευρο $B\Delta EZ$ έχει $\hat{\Delta}=\hat{E}=90^\circ$, $\Delta E=6\text{cm}$ και $BZ=10\text{cm}$. Αν Δ είναι το μέσο της $B\Gamma$ και η σκιασμένη επιφάνεια $ABZE\Delta\Gamma$ περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $(\varepsilon) \perp B\Gamma$, να υπολογίσετε:
- 1) το εμβαδόν και
 - 2) τον όγκο του στερεού που παράγεται.
- 4.** Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $2\psi - \chi - e^{-\psi} + 2 = 0$.
- 1) Να δείξετε ότι $\frac{d\psi}{d\chi} = \frac{1}{2 + e^{-\psi}}$.
 - 2) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{d\psi}{d\chi} = e^{2\psi}$.
 - 3) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της καμπύλης $2\psi - \chi - e^{-\psi} + 2 = 0$ στο σημείο της με $\psi=0$.
 - 4) Να υπολογίσετε τις τιμές του κ ($\kappa \in \mathbb{R}$) έτσι ώστε η εφαπτομένη (ε) να σχηματίζει με την ευθεία $\kappa\chi - \psi - 5 = 0$ γωνία 45° .
- 5.** Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = 3\ln\sqrt{\frac{x}{2-x}}$ και $g(x) = \sqrt{x} - 1$.
- 1) Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού της f και της g .
 - 2) Να ορίσετε την $(f \circ g)(x)$. (Πεδίο Ορισμού και τύπο)
 - 3) Αν η εφαπτόμενη της καμπύλης $\psi=f(x)$ στο σημείο της A σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα των χ γωνία 45° , να βρείτε τις συντεταγμένες του A .

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Β' Κατεύθυνση

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22/5/2015

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 Ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

β) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).

γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

δ) Δίνεται τυπολόγιο

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

- 1)**
- Να αναλύσετε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων

$$\frac{6c - 3}{(c - 4)(c - 1)}$$

- 2)**
- Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $y = 3c^2 + 5\ln c + \sqrt{c}$

β) $y = c^2 \cdot \ln c$

- 3)**
- Να βρείτε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{|6 - 3c| + c + 1}{c - 5}$

β) $\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\ln 8c}{2c}$

- 4)**
- Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:
- $z_1 = 5 + 3i$
- και
- $z_2 = 2 - 6i$
- . Να υπολογίσετε:

α) $z_1 + \bar{z}_2$ και β) $|z_1 + z_2|$

- 5)**
- Δίνεται η συνάρτηση:
- $f(c) = (2\ln c - \ln^2 c) \cdot \sin^2 \frac{c}{2}$

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln^3 c$

β) Να λυθεί η εξίσωση: $f(c) = \ln c$

6) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB} = (k^2 - 6k + 9, k - 3)$ και $\vec{AG} = (1, 6)$ $k \in \mathbb{R}$

α) να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$

β) να βρείτε τις τιμές του k ώστε τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$ να είναι κάθετα.

7) Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η μαθηματική πρόταση: $2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \dots + (n+1) \times 2^n = n \times 2^{n+1}$.

8) Σε Γ.Π. με πρώτο όρο $a_1 = \log a$ και λόγο $l = \log b$, $a, b > 1$ δίνονται οι όροι: $a_3 = 12$ και $a_7 = 192$

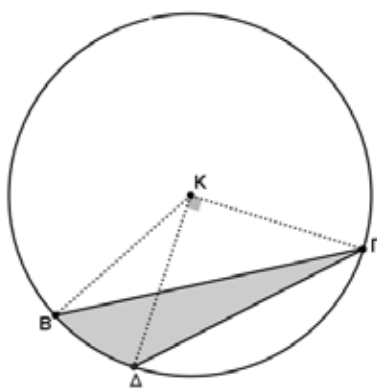
α) Να βρείτε τα a, b

β) και στη συνέχεια να βρείτε την αριθμητική τιμή του αθροίσματος:

$$a_3 + a_4 + \dots + a_7$$

9) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ύψος $u = 2\sqrt{6} \text{ cm}$. Αν η παράπλευρη ακμή της σχηματίζει με το επίπεδο της βάσης της γωνία 60° , να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της.

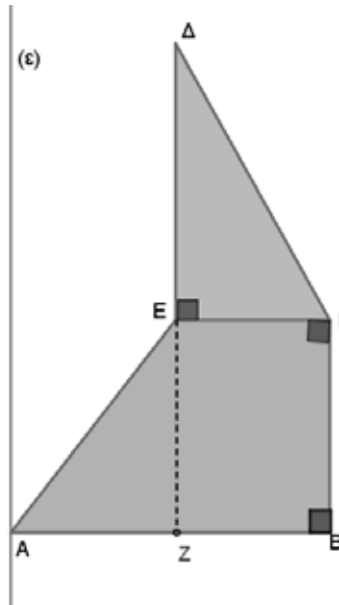
10) Σε κύκλο (K, R) δίνεται χορδή ΒΓ ίση με την πλευρά εγγεγραμμένου κανονικού τριγώνου (I_3) και χορδή ΓΔ ίση με την πλευρά εγγεγραμμένου τετραγώνου (I_4) . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του **μικτόγραμμου** τριγώνου ΒΓΔ. (σε συνάρτηση με το R).



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(c) = 2 - \frac{5+c}{c+2}$, $g(c) = \sqrt{c+2}$, $h(c) = \frac{c^2 - 5c + 4}{c^2 - 2c - 8}$.
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των f , g και h .
- β) Να εξετάσετε αν $f = h$. Αν δεν είναι ίσες να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο για το οποίο $f(x) = h(x)$.
- γ) Να βρείτε το πεδίο τιμών της συνάρτησης f .
- δ) Να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο τιμών για το οποίο ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$ και να γράψετε τον τύπο της.
- 2) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ. Η εξίσωση της πλευράς ΑΒ είναι $c + 5y - 38 = 0$ και της διαγωνίου ΑΓ: $c + y - 10 = 0$.Αν $(4,2)$ είναι μια κορυφή του ρόμβου να βρείτε:
- α) την εξίσωση της ΒΔ
- β) τις κορυφές Α και Β
- γ) την απόσταση του σημείου Δ από την πλευρά ΑΒ
- δ) εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ.
- 3) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} + 1) - x$.
- α) να δείξετε ότι $f'(c) = \frac{e^{2c} - 1}{e^{2c} + 1}$
- β) να δείξετε ότι : $f''(c) = [1 - f'(c)] \cdot [1 + f'(c)]$
- γ) να υπολογίσετε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(c)$
- δ) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης $g(c) = f'(c)$ στο σημείο με τετμημένη $c=0$.
- 4) Σε Α.Π. δίνονται $a_2 = \sin^4 a$ και $a_4 = 3\sin^4 a - 2\sin^4 a$.
- α) Να αποδείξετε ότι $d = \sin 2a$
- β) Να αποδείξετε ότι $a_1 + a_2 = \frac{3 + \sin 4a}{4}$

- 5) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα εξής: Το $ABΓE$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο ($\hat{B} = \hat{E} = 90^\circ$) και το $\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{E} = 90^\circ$) και $\hat{D} = 30^\circ$. Επίσης $\Delta E \parallel (\epsilon)$, $\Delta\Gamma = 6\text{cm}$, $AB \perp (\epsilon)$, EZ μεσοκάθετος της AB και $AE = 5\text{cm}$. Το σχήμα $AB\Gamma\Delta E$ κάνει πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ϵ) . Να υπολογίσετε τον όγκο και την ολική επιφάνεια του στερεού που παράγεται.



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 27/05/15

ΤΑΞΗ: Β' κατεύθυνση

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΟΔΗΓΙΕΣ: Να γράψετε μόνο με **μπλε ή μαύρο** μελάνι (μόνο τα σχήματα με μολύβι).

Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.

Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **3 σελίδες**.**ΜΕΡΟΣ Α' :** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις .

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{6-x}{x^2+3x}$.

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3+x}{x-2}$

β) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2+2x}{x^2-16}$

3. Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $y = \ln 2x + \sqrt{x^2+1} - \sigma\phi x$

β) $y = \frac{e^{3x}}{\sigma\upsilon\nu x}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2^{x+1} = 16$

β) $\log_3 \log_x (x^2 - 2) = 0$

5. Να δείξετε ότι: $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{n}{n+1}$ " $n \in \mathbb{N}$

6. Δίνεται η εξίσωση: $2\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x = 2$.

α) Να βρείτε τις τιμές της $\epsilon\phi x$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία x (κατά προσέγγιση ακεραίου), αν $x \in (0, 360^\circ)$.

7. Αριθμητικής προόδου ο πρώτος, ο τρίτος και ο έβδομος όρος είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και ο ένατος όρος της αριθμητικής προόδου είναι 20. Να βρείτε το λόγο της γεωμετρικής προόδου.

8. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ύψος 2cm. Η γωνία που σχηματίζει το ύψος με το παράπλευρο ύψος της πυραμίδας είναι 60° . Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς της.
9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = x^2 - x - 6$. Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $\frac{df}{dx} \cdot \frac{d}{dx}g(x)$ και $(f \circ g)(x)$.
10. Δίνεται τεταρτοκύκλιο OAB με ακτίνα OA=OB=2a cm. Με διάμετρο την OA να γράψετε ημικύκλιο μέσα στο τεταρτοκύκλιο. Πάνω στο ημικύκλιο να πάρετε σημείο Γ, έτσι ώστε η χορδή ΟΓ να ισούται με λ_3 . Αν Δ είναι το σημείο στο οποίο η προέκταση της ΟΓ τέμνει το τόξο AB, να βρείτε το **εμβαδόν** και την **περίμετρο** του μικτογράμμου τριγώνου ΓΑΔ.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Αριθμητική πρόοδος και φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος έχουν τον ίδιο πρώτο όρο. Η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι διπλάσια του λόγου της γεωμετρικής προόδου. Το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι 10 και το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου είναι 2.
α) Να βρείτε τις προόδους.
β) Αν S_1 είναι το άθροισμα των n πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου και S_2 το άθροισμα των n πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου, να βρείτε το πιο κάτω όριο:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2} + 2 - S_2 = \frac{5}{2}$$

2. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\eta\mu 5\alpha - 2\eta\mu 3\alpha + \eta\mu \alpha}{\sigma\upsilon\nu 5\alpha - \sigma\upsilon\nu \alpha} = \epsilon\phi \alpha$

β) Σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση: $2E = R\gamma\sigma\upsilon\nu(A - B)$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

3. Δίνεται καμπύλη με εξίσωση $x^2 + y^2 + axy + \beta = 0$. Η κάθετη της καμπύλης στο σημείο της $(1, -3)$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 5x + 1$. Να βρείτε:
α) την τιμή των a και β
β) την εφαπτομένη της οξείας γωνίας που σχηματίζεται από την κάθετη της καμπύλης στο $(1, -3)$ και την ευθεία $x + 3y = 6$.

4. Ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{B} = 90^\circ$ έχει διαστάσεις $AB = 5\text{cm}$ και $GD = 9\text{cm}$.
- α) Το τραπέζιο έχει κορυφή $A(-2, -2)$ και η πλευρά $B\Gamma$ έχει εξίσωση $3x + 4y = 11$. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ είναι $\frac{15}{2}\text{cm}^2$. Η κορυφή Δ που βρίσκεται στο 3^ο τεταρτημόριο ανήκει στην ευθεία $y = 2x - 3$.
- i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών B και Δ .
- ii) Να δείξετε ότι το μήκος του ύψους του τραπέζιου είναι 3cm .
- β) Το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ περιστρέφεται πλήρως γύρω από άξονα xy παράλληλο προς την ευθεία $B\Gamma$ που απέχει από αυτήν 1cm . Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που δημιουργείται.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\kappa^2+1} \ln x$, $\kappa \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) - \frac{f(x)}{x} = (\kappa^2 + 1)x^{\kappa^2}$$

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2^{\ln \kappa} (2^{1+\ln \kappa} - 1) = 1$$

Αν $\kappa = 1$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x)$ στο $x = e$.

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 26/5/ 2015

ΤΑΞΗ : Β' (ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)

ΧΡΟΝΟΣ: 2.30'

- ΟΔΗΓΙΕΣ:** α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
β) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
δ) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
ε) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 3 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων: $\frac{3x - 1}{x(x - 2)}$

2. Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $y = \frac{x^2 - 2}{3x}$

β) $y = e^{2x} \times e^x$

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4}$

β) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 3}{x^2 + 4x - 3}$

4. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{1 + \sin 2q + \sin^2 q - \cos^2 q}{1 + \sin 2q - \sin^2 q} = \tan q$

5. Δίνετε η συνάρτηση: $f(x) = \frac{4x - 3}{x - 2}$, $x > 3$. Να βρείτε το πεδίο τιμών της και τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης της.

6. Άδειο δοχείο σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου έχει μήκος 12m, πλάτος 8m και ύψος 6m. Δοχείο σε σχήμα τετραγωνικής πυραμίδας έχει ακμή βάσης 8m και παράπλευρο ύψος 5m. Γεμίζουμε την πυραμίδα με νερό και την αδειάζουμε 6 φορές στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Να βρείτε το ύψος της στάθμης του νερού στο παραλληλεπίπεδο.

7. Να δείξετε ότι " $n \in \mathbb{N}$ " ισχύει ότι:

$$1 \times 3 + 2 \times 7 + 3 \times 11 + \dots + n \times (4n - 1) = \frac{n \times (n + 1) \times (8n + 1)}{6}$$

8. Να ορίσετε την σύνθεση $f \circ g$ των συναρτήσεων: $f(x) = e^{\sqrt{x-1}}$ και $g(x) = 2(x+1)^2 - 1$ (τύπος και πεδίο ορισμού).

9. Σε κύκλο (O, R) δίνονται η διάμετρος $AB = 8\sqrt{3}$ και $GD = \frac{1}{3}$ χορδή κάθετη στην AB που την τέμνει στο E . Να βρείτε το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου AEG .

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε σημείο της P διέρχεται από το σημείο $M(2,3)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του P , ($x < y$).

**ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. α) Αν $y = \ln \sqrt{1+x^4}$, να δείξετε ότι: $e^{2y} \times \frac{dy}{dx} = 2x^3$.

β) Αν οι αριθμοί $\log 6, \log \sqrt{2 \times 3^x + 9 \times 2^x}, x \log 3$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να υπολογίσετε την τιμή του x .

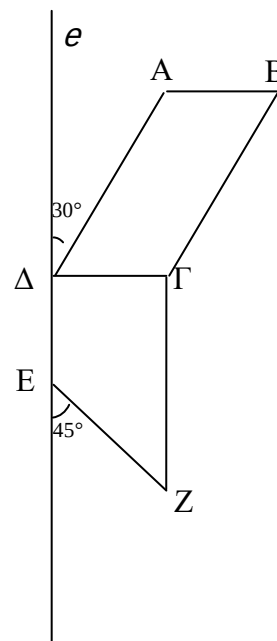
2. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται παραλληλόγραμμο $ABGD$

με πλευρές $BG = a \text{ cm}$, $GD = \frac{a}{2} \text{ cm}$ και ορθογώνιο τραπέζιο

$GDEZ$ με πλευρά $GZ = a \text{ cm}$. Το σχήμα περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $e \perp GD$.

α) Αν κατά την περιστροφή η επιφάνεια που παράγει η πλευρά AD είναι ίση με $32\pi \text{ cm}^2$, να βρείτε το a .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν και τον όγκο του παραγόμενου στερεού.



3. Τρίγωνο ABΓ έχει κορυφές $A(1,1)$, $B(0,0)$ και $G(x_G, y_G)$.

α) Αν η κορυφή G βρίσκεται πάνω στην ευθεία $x + 2y = 0$ και το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι 9 cm^2 να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου G ($y_G > 0$).

β) Αν το σημείο G έχει συντεταγμένες $(-12, 6)$, να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΓΔ.

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών e_1 και e_2 που διέρχονται από το μέσο M της πλευράς BG και σχηματίζουν με αυτή γωνία 45° .

4. α) Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος: $\log_{\text{sun}x}(e^j x)$, $\log_{\text{sun}^2x}(e^j x)$, $\log_{\text{sun}^4x}(e^j x)$,

$$\text{όπου } \frac{p}{4} < x < \frac{p}{2}.$$

i) Να δείξετε ότι είναι φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος.

ii) Δεδομένου ότι ο λόγος της πιο πάνω γεωμετρικής προόδου είναι $\frac{1}{2}$, να υπολογίσετε την τιμή του x για την οποία το άθροισμα των απείρων όρων της είναι ίσο με $\log_{\text{sun}x}(\sqrt{3}e^j x)$.

β) Αν ο έκτος όρος αριθμητικής προόδου είναι τριπλάσιος του δεύτερου όρου αυξημένος κατά 2 και το άθροισμα του τέταρτου μέχρι και τον όγδοο όρο είναι 85, να σχηματίσετε την πρόοδο.

5. Δίνονται $K = \frac{hm6x}{hm2x} - \frac{\text{sun}6x}{\text{sun}2x}$ και $L = \frac{\text{sun}x - \text{sun}3x \times \text{sun}4x}{hm4x}$.

α) Να δείξετε ότι: $K = 2$ και $L = hm8x$.

β) Αν b πλευρά τριγώνου ABΓ με $E = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $\hat{A} = 30^\circ$ και $g = 4 \text{ cm}$ να λύσετε την εξίσωση:

$$4K \times L = \frac{b}{\text{sun}3x} \quad \text{στο διάστημα } \left[\frac{e}{8}, \frac{p}{2} \right].$$

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 21/05/2015

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2,5 ώρες

ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 07:45 π.μ.

- ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ.
- Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο, το οποίο αποτελείται από μία (1) σελίδα.
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν και με μολύβι.)
- Τα σχήματα να μεταφέρονται στη θέση που λύνεται η άσκηση.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, σφραγισμένης από το Σχολείο.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x - 5| = 7$

2) Ο έβδομος όρος αριθμητικής προόδου είναι 15 και το άθροισμα του πρώτου και του δέκατου όρου της είναι 24. Να σχηματίσετε την πρόοδο.

3) Να λύσετε την εξίσωση: $\log(x - 2) + \log x = 3\log 2$

4) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 - 7}$ β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

5) Τρίγωνο ABG έχει εμβαδόν $E = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$ και πλευρές $\gamma = 4\sqrt{3} \text{ cm}$ και $\alpha = 8 \text{ cm}$.

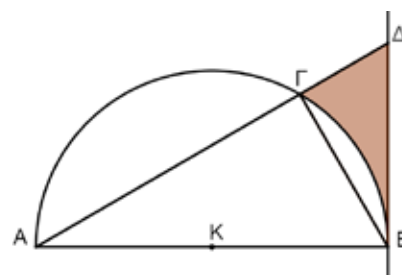
Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$ ($\hat{B} < 90^\circ$) και την πλευρά β του τριγώνου.

6) Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{3x+1}{(x+1)(x^2+1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

7) Κανονικό τριγωνικό πρίσμα έχει ύψος ίσο με 10 cm και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας ίσο με 240 cm^2 . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του πρίσματος.

8) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\sin 2\theta - 2\sin\theta + 1}{\eta\mu 2\theta - 2\eta\mu\theta} = \sigma\phi\theta$

9) Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 2R$, και χορδή $B\Gamma = \lambda_6$. Αν $B\Delta$ η εφαπτομένη του κύκλου (K, R) στο B , να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου $B\Gamma\Delta$.



10) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $f(x) = x^3 + (a - 4)x^2 + \beta x - \gamma$, $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
Η γραφική παράσταση της καμπύλης περνά από την αρχή των αξόνων και η ευθεία $5x + y = 7$ είναι παράλληλη με την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο της $(-1, 1)$.
Να υπολογίσετε τις τιμές των a, β και γ .

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = \frac{x+1}{3-x}$ και $h(x) = \sqrt{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ και $h(x)$.

β) Να ορίσετε το γινόμενο των συναρτήσεων f και g .

γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{h}{f} \times$

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{h(x) - 1} \times$

2) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κορυφές Α(0, 2), Β(8, 1) και η εξίσωση της μιας διαγωνίου του είναι $2x + 3y = 19$.

α) Να βρείτε:

- i) την εξίσωση της άλλης διαγωνίου του
- ii) τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ

β) Αν Γ(4, 8) και Δ(-4, 9) να υπολογίσετε:

- i) την απόσταση της κορυφής Α από την πλευρά ΒΒ
- ii) την περίμετρο και το εμβαδόν του ρόμβου

3) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln \sqrt{2e^x + 6}$ και $g(x) = e^{-x}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του x για την οποία ισχύει $\frac{df(x)}{dx} = -2 \frac{dg(x)}{dx}$

β) Να δείξετε ότι: $e^{2f(x)} \times \frac{d^2f(x)}{dx^2} + 2e^{2f(x)} \times \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{g(x)}$

4) Δίνεται ότι $\alpha = 2\sin\omega$, $\beta = \eta\mu 2\omega$ και $\gamma = \frac{\sin\omega - \sin 3\omega}{2}$, $0^\circ < \omega < 90^\circ$ είναι οι τρεις πρώτοι όροι μιας ακολουθίας.

α) Να δείξετε ότι:

i) α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους φθίνουσας γεωμετρικής προόδου

$$\text{ii) } S_{\infty} = 2 \frac{\frac{1}{\zeta} \left(1 + \epsilon \phi \frac{\omega}{2} \right)}{\frac{1}{\zeta} \left(1 - \epsilon \phi \frac{\omega}{2} \right)}$$

β) Αν $f(\omega) = \alpha_{\eta}$, όπου α_{η} ο η -στός όρος της προόδου, και $y = \ln f(\omega)$, να δείξετε ότι:

$$\text{i) } \frac{df(\omega)}{d\omega} = 2\eta\mu^7\omega(8 - 9\eta\mu^2\omega)$$

$$\text{ii) } \frac{dy}{d\omega} = 7\sigma\tau\epsilon\mu 2\omega + 9\sigma\phi 2\omega$$

5) Στο διπλανό σχήμα δίνονται:

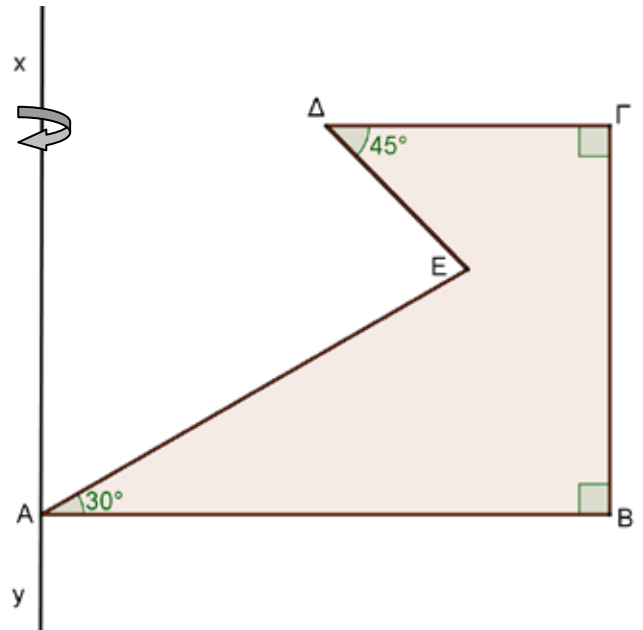
$$AB = 8 \text{ cm}, \Gamma\Delta = 4 \text{ cm}, \Delta E = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{και οι γωνίες } \hat{B}\hat{A}E = 30^\circ, \hat{E}\hat{\Delta}\Gamma = 45^\circ,$$

$\hat{\Gamma} = \hat{B} = 90^\circ$. Το σκιασμένο πολύγωνο $AB\Gamma\Delta E$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xAy που είναι κάθετος στην AB .

Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.

(Να γίνει σχήμα στο φύλλο απαντήσεων και να φαίνεται η περιστροφή.)



Βαθμός	
Ολογράφως	
Υπογραφή	

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

Μαθηματικά

Τάξη Β΄

Ημερομηνία: 22/05/15

Ώρα: 7:45΄

Ημέρα: Παρασκευή

Χρόνος: 2:30΄

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΤΜΗΜΑ:..... ΑΡΙΘΜΟΣ:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται συνολικά από 4 σελίδες
2. Κατοχή κινητού τηλεφώνου = Δολίευση
3. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού
4. Δεν επιτρέπεται να γράφετε με μολύβι παρά μόνο με μπλε πένα
5. Δεν επιτρέπεται να δανείζεστε οτιδήποτε από συμμαθητές σας
6. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου
7. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι

ΜΕΡΟΣ Α΄ : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

$$(\alpha) f (x) = e^{2x} - 4x^{-3} + \sqrt[3]{x^2} + e^1 \quad (\beta) y = 6e^2(3x - 5)$$

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 3x - \ln 2}{x}$$

3. Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $4 \ln(3x - 60^0) = 2$.

4. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A (2 , 3) , B (-3 , 1) και Γ (1, -1). Να βρείτε :
- (α) Την εξίσωση της διαμέσου AM.
- (β) Το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.
5. Σε Αριθμητική πρόοδο ο τέταρτος όρος της είναι ίσος με 11, ενώ το άθροισμα του δεύτερου και έβδομου όρου είναι 25 .
- (α) Να σχηματίσετε την πρόοδο .
- (β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των είκοσι πέντε πρώτων όρων της .
6. (α) Να λύσετε την εξίσωση : $\ln \sqrt[3]{\log_3 (3x)} - 3 \log_9 x + 1 = 0$.
- (β) Αν η ρίζα της πιο πάνω εξίσωσης είναι η $x = 9$, να δείξετε ότι είναι και ρίζα του πολυωνύμου $f(x) = x^3 - 8x^2 - 8x - 9$.
7. Να δείξετε ότι ισχύει η ταυτότητα: $\arcsin \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cdot \arcsin \frac{a}{c} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha}$
8. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει περίμετρο βάσης 48cm και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 240 cm². Να υπολογίσετε:
- (α) Το παράπλευρο ύψος της .
- (β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της.
- (γ) Τη γωνία που σχηματίζει η παράπλευρη ακμή της με το ύψος της (κατά προσέγγιση ακέραιου).
9. Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση $b + g = a \sqrt{2} \sin \frac{B - G}{2}$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο .
10. Σε κύκλο (O, R) , με διάμετρο ΑΓ = 6α, παίρνουμε τόξο $\widehat{AB} = 120^\circ$.
Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ τέμνει την προέκταση της χορδής ΑΒ στο σημείο Δ. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου ΒΓΔ, συναρτήσει του α .

ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{2\sin x}{\sin x + \cos x}$

α) Να δείξετε ότι : $\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{1 + \sin 2x}$

β) Να δείξετε ότι : $\frac{d^2y}{dx^2} - \sin 2x \times \frac{dy}{dx} = 0$

γ) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της συνάρτησης στο σημείο της με τετμημένη $x = \frac{\pi}{4}$.

2. α) Το άθροισμα των έξι πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ , όπου $|\lambda| < 1$, είναι $\frac{63}{8}$ και το άθροισμα των απείρων όρων της είναι 8. Να σχηματίσετε την πρόοδο.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$3 \times \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots \right)^{\log_5 x} = 20 \times \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots \right)^{\log_x 5}$$

3. α) Να δείξετε ότι: $\frac{\sin 2x + 4 \cos x}{\sin 2x + 4 \sin x + 1} = \tan x$.

β) Να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης $\sin 2x + 4 \sin x + 1 = 0$.

γ) Αν οι αριθμοί $\sin 2x$, $2 \sin x$, 4 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να βρείτε το x στο διάστημα $[0^\circ, 360^\circ]$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ και $g(x) = \ln(2x+1) - \ln(x-3)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, το πεδίο τιμών και τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης της f αν ορίζεται.

β) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις: $h(x) = \ln \frac{2x+1}{x-3}$, $g(x) = \ln(2x+1) - \ln(x-3)$ είναι ίσες. Αν $h \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο οι h , g γίνονται ίσες.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων πάνω στις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} , όπου οι εφαπτόμενες των καμπύλων είναι παράλληλες.

5. Στο πιο κάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α (0 , 4) , Β (-2 , 0) και Γ (2, 0) . Από το σημείο Β φέρουμε ευθεία ΒΔ κάθετη στην ΑΓ.

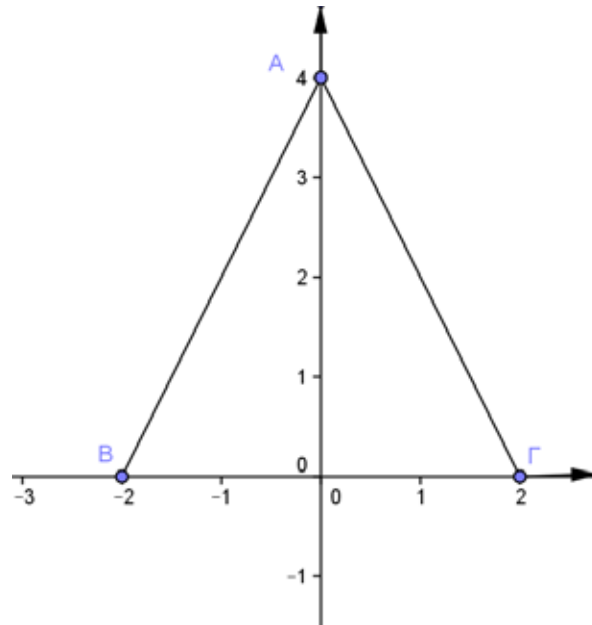
α) Να δείξετε ότι το σημείο Δ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5} \right)$.

β) Να υπολογίσετε το μήκος των ΑΒ , ΒΓ.

γ) Να υπολογίσετε την γωνιά Γ κατά προσέγγιση ακεραίου.

δ) Αν από το Β φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς την ΑΓ, να βρείτε:

- i. Την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε) .
- ii. Τον όγκο και την επιφάνεια του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του τριγώνου ΑΒΓ γύρω από την ευθεία (ε) .



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 02/06/2015

ΤΑΞΗ: Β' Ενιαίου Λυκείου

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2:30'

ΩΡΑ: 7:45 – 10:15 π.μ

Οδηγίες:

- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- β) Να γράφετε με μελάνι μπλε (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
- δ) Τα σχήματα να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
- ε) Σε όλες τις ερωτήσεις να φαίνεται ο τρόπος απάντησής τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της απαιτούμενης αιτιολόγησης δεν θα λαμβάνονται υπόψη.
- ζ) Να συμμορφώνεστε πρόθυμα με τις οδηγίες των επιτηρητών.
- στ) Η ΔΟΛΙΕΥΣΗ ΤΙΜΩΡΕΙΤΑΙ ΑΥΣΤΗΡΑ

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη, το ΜΕΡΟΣ Α' και το Μέρος Β'.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις σελίδες.

Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο που αποτελείται από μία (1) σελίδα.

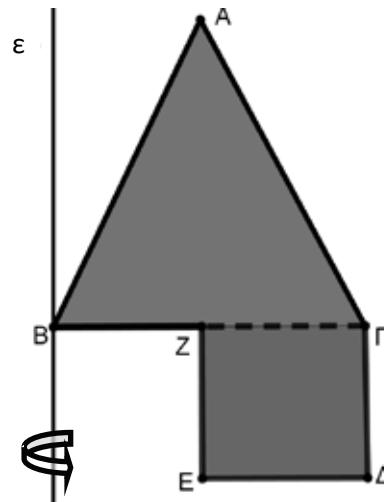
ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

1. Να βρείτε τον ένατο όρο της αριθμητικής προόδου $-2, 1, 4, \dots$.
2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $A(1, -2)$ και σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα των x .
3. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της κάτω συνάρτησης $y = 3x^4 + \sin x + e^x + 5$
4. Δίνονται τα σημεία $A(2, -3)$ και $B(1, -5)$.
 - α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
 - β) Αν $\vec{v} = 3 \cdot \vec{i} + \vec{j}$ να βρείτε το $\vec{u} \cdot \vec{v}$

5. Να επιλύσετε το τρίγωνο ΑΒΓ αν $\alpha = 7\text{cm}$, $\hat{B} = 120^\circ$, $\hat{G} = 30^\circ$.
6. Δίνεται κανονική τετραγωνική πυραμίδα με εμβαδό παράπλευρης επιφάνειας ίσο με 240cm^2 και εμβαδό βάσης ίσο με 144cm^2 . Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδό της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.
7. Να αποδείξετε ότι : $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n \cdot (3n + 1) = n(n + 1)^2$.
8. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Αν το μήκος του μικρού τόξου ΒΓ είναι $4\pi\text{ cm}$, να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος μεταξύ της χορδής ΒΓ και του μικρού τόξου ΒΓ.
9. Αν $g(x) = \begin{cases} a \frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-5x+6} , & x < 2 \\ \frac{|2x-x^2|+4x}{x+2} , & x \geq 2 \end{cases}$, να βρείτε την τιμή του α ώστε η συνάρτηση g να είναι συνεχής στο $x = 2$.
10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-3}{x}$, $x > 3$.
- α) Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f , να βρείτε το πεδίο ορισμού της, το πεδίων τιμών της και να δείξετε ότι δίνεται από τον τύπο $f^{-1}(x) = \frac{3}{1-x}$
- β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} 3^{f^{-1}(x)}$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές τρίγωνο ($AB = A\Gamma$), $AB = 5\text{cm}$ και η $B\Gamma \perp \epsilon$. Το $Z\Gamma\Delta E$ είναι τετράγωνο πλευράς 3cm , και Z μέσο του $B\Gamma$. Το σκιασμένο πολύγωνο περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ϵ). Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



2. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση εφαπτομένης της συνάρτησης που ορίζεται από την εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ στο σημείο της $A(3, -2)$ είναι η $x = 3$
- β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$, $-1 < x < 1$. να δείξετε ότι $(1-x) \cdot \frac{df}{dx} + 1 = -e^{f(x)}$
3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) δίνεται η κορυφή $A(3, -2)$. Αν η εξίσωση της AB είναι η $x = 3$ και η εξίσωση της διαμέσου ΓM είναι η $3x + 2y = -1$, να βρείτε :
- i. τις συντεταγμένες των κορυφών του
 - ii. το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}$ και $g(x) = \sin 2x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$
- α) Να ορίσετε την συνάρτηση $(f \circ g)(x)$ και να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης $h(x) = (f \circ g)(x)$ δίνεται από τον τύπο $h(x) = \frac{\eta\mu 2x}{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}$.
- β) Να δείξετε ότι: $h\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{1}{h(x)} = 2\epsilon\phi x$

5. α) Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το $\frac{6x-3}{x^2-5x+4}$.

β) Αν $f(x) = \frac{3 \cdot 2^{x+1} - 3}{4^x - 5 \cdot 2^{x+4}}$ και $g(x) = \frac{1}{1-2^x}$, χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α) ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να ορίσετε την συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$.

γ) Αν $h(x) = \frac{7}{2^x - 4}$ και $k(x) = \frac{7}{h(\frac{x}{2})}$, να δείξετε ότι $k(x) = 2^{\frac{x}{2}} - 4$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{dk}{dx} + \frac{d^2k}{dx^2} + \frac{d^3k}{dx^3} + \dots = \frac{2^{x-3} \cdot \ln 16}{2 - \ln 2}$.

Τέλος Δοκιμίου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Κατεύθυνσης

ΤΑΞΗ: Β' Ενιαίου Λυκείου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: Τετάρτη, 27 Μαΐου 2015

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ
ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ ΕΠΙΣΥΝΑΠΤΕΤΑΙ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

ΟΔΗΓΙΕΣ:

Να γράφετε με μελάνι χρώματος μπλε. Για τα σχήματα επιτρέπεται το μολύβι.

Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται καθαρά και επιμελημένα όλη η αναγκαία εργασία.

Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα: $\frac{2x - 6}{(x + 3)(x - 1)}$

2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $y = \frac{x^2 + 3}{5x}$

β) $y = e^{3x} \cdot \varphi(x)$

3. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 - 1}{5x^2 + 6x}$

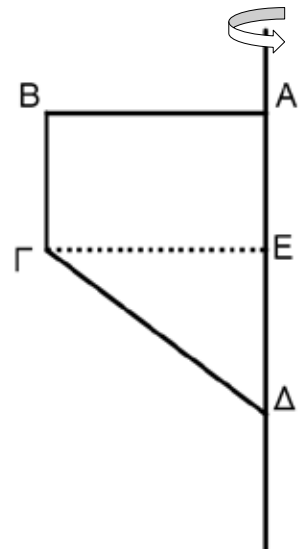
β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{x+4} - 2}$

4. Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής, ότι " $n \in \mathbb{N}$ ", ισχύει η πιο κάτω πρόταση:

$$1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

5. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1 + \sin 2\theta}{\eta\mu\theta + \eta\mu 3\theta} = \frac{1}{2} \sigma\epsilon\mu\theta$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$, $x \in [2, +\infty)$. Να βρείτε:
- 1) το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x)$,
 - 2) τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης $f^{-1}(x)$.
7. Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι $E_{ολ} = 384 \text{ cm}^2$ και το παράπλευρο ύψος της είναι ίσο με τα $\frac{5}{6}$ της ακμής της βάσης της.
- 1) Να αποδείξετε ότι το μήκος της ακμής της βάσης της πυραμίδας είναι $a = 12 \text{ cm}$.
 - 2) Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.
8. Να λύσετε την εξίσωση: $(\log_2 x)^2 + 2^{\log_2 10} = 6\log_2 x + 4^{\log_2 \sqrt{2}}$
9. Αν $y = \frac{\eta\mu 4x}{8} - 3\sigma\upsilon\nu 2x - 10x + 27^{5^{2015}}$, $0 \leq x \leq \pi$, να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$.
10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, με $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 10 \text{ cm}$ και $B\Gamma = 5 \text{ cm}$. Αν το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του ορθογωνίου $AB\Gamma E$ γύρω από την ευθεία AD είναι ίσο με $80\pi \text{ cm}^2$, να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ γύρω από την ευθεία AD .



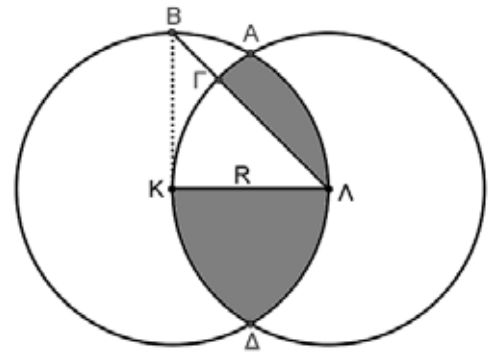
ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ Α΄
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Φθίνουσα αριθμητική πρόοδος με διαφορά δ και φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος με λόγο l , $l > 0$, έχουν τον ίδιο πρώτο όρο. Το άθροισμα των άπειρων όρων της φθίνουσας γεωμετρικής προόδου ισούται με 36, ενώ το άθροισμα των δυο πρώτων όρων της είναι ίσο με 27. Αν η διαφορά δ της αριθμητικής προόδου είναι η αρνητική ρίζα του πολυωνύμου $j(x) = x^2 + x - 6$, να βρείτε:
α) τις δύο προόδους,
β) το άθροισμα των τριάντα πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου.
2. Παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει κορυφές Β(-3, -1) και Δ(3, -3).
Η πλευρά ΑΔ έχει εξίσωση $y = -2x + 3$, ενώ η πλευρά ΑΒ έχει εξίσωση $4x - 3y + 9 = 0$.
 - 1) Να δείξετε ότι οι κορυφές Α και Γ του παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχουν συντεταγμένες Α(0,3) και Γ(0, -7).
 - 2) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΓΔ.
 - 3) Να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής Α από την ευθεία ΓΔ.
 - 4) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
3. Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$ με τύπο $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{\ln(2^x - 3)}{\ln 8}$
 - α) Να δείξετε ότι: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3 - 2^x}$
 - β) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $y = f(x)$ στο σημείο της με τετμημένη $x = 2$.
 - 3) Να δείξετε ότι: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2^x \ln 2}{(3 - 2^x)^2}$
 - 4) Να λύσετε την εξίσωση: $5 \frac{d^2y}{dx^2} = -8 \frac{dy}{dx} \ln 2$
4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν $\eta_{\mu B}$, συν $\frac{A}{2}$, $\eta_{\mu \Gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να δείξετε ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.
Αν επιπλέον ισχύει η σχέση $\alpha = \beta\sqrt{2}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.

5. Στο διπλανό σχήμα δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (K, R) , (Λ, R) , οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και Δ . Αν $BL = \lambda_4$, όπου BL χορδή του κύκλου (K, R) , να βρείτε συναρτήσει του R , το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας.



----- ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ -----

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2015**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**ΤΑΞΗ:** Β΄ Λυκείου**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** Πέμπτη, 4 Ιουνίου 2015**ΔΙΑΡΚΕΙΑ:** 2,5 ώρες**ΟΔΗΓΙΕΣ**

- Γράφετε με πέννα μπλε. Τα σχήματα αν θέλετε με μολύβι.
- Επιτρέπεται η χρήση **μη προγραμματιζόμενης** υπολογιστικής μηχανής.
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- Γράφετε καθαρά και ευανάγνωστα γράμματα.
- Να φαίνονται όλες οι ενέργειες που κάνετε.
- Χορηγείται Τυπολόγιο.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες & 1 σελίδα τυπολόγιο .

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες στις 100.

1. Κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας η περίμετρος βάσης είναι 24cm και το ύψος της είναι $v = 4\text{cm}$. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας.

2. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{6}{(x+2)(x-4)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

3. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων f, g με τύπους

$$f(x) = \eta\mu(3x + 4) \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^3}{\varepsilon\varphi x}$$

4. Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 - i$. Να βρείτε:

α) Τους αριθμούς $z_3 = z_1 \cdot z_2$ και $z_4 = \frac{z_1}{z_2}$

β) Το μέτρο $|w|$ του μιγαδικού $w = z_3 - z_4$.

5. Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 6x}{6x^2}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(3x - 6)}{6x - 12}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 4x + 3|}{1 - \sqrt{x}}$$

6. Να αποδείξετε ότι σε τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει

$$\frac{(\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A)(1 - \sigma\upsilon\nu^2 B)}{\beta^2} = \eta\mu^2(B + \Gamma)$$

7. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι ταυτόχρονα διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου και διαδοχικοί όροι Γεωμετρικής Προόδου. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

8. Να αποδείξετε ότι $\ln[\varepsilon\varphi(45^\circ + x)] + \ln[\varepsilon\varphi(45^\circ - x)] = 0$, όπου $0^\circ < x < 45^\circ$
(Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi(\alpha \pm \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha \pm \varepsilon\varphi\beta}{1 \mp \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta}$).

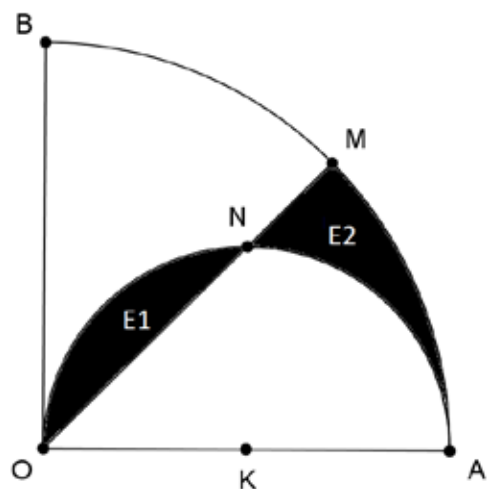
9. Δίνονται τα σημεία $A(1, 4)$, $B(4, 1)$, $\Gamma(7, 4)$ και $\Delta(4, 7)$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο.

β) Να βρείτε την κορυφή E ώστε το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ να είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του $ABE\Gamma$.

10. Στο διπλανό σχήμα το τεταρτοκύκλιο OAB έχει κέντρο O και ακτίνα 2α , το σημείο είναι το M μέσο του τόξου BA και το ημικύκλιο με διάμετρο OA τέμνει την OM στο σημείο N . Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά E_1 και E_2 των σκιασμένων μικτόγραμμων χωρίων είναι ίσα.



ΜΕΡΟΣ Β΄

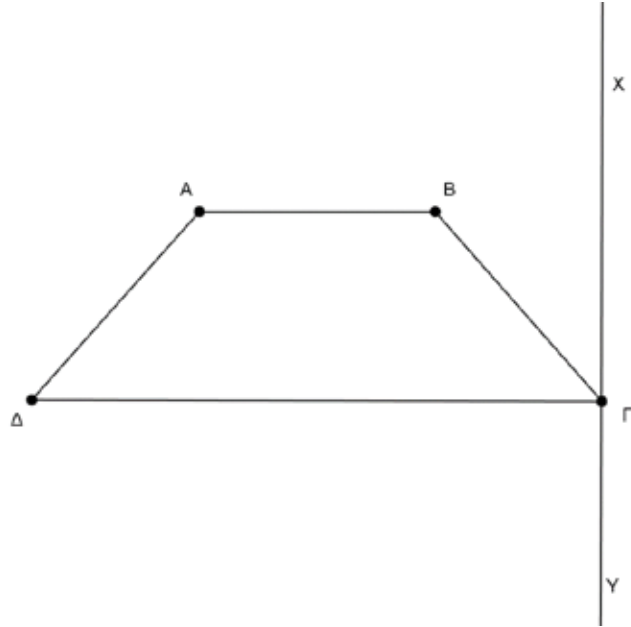
Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες στις 100.

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+4}{x^2+1}}$ με $x \geq 0$.
 - α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο τιμών της f είναι το διάστημα $(1,2]$
 - β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της συνάρτηση f^{-1} (πεδίο ορισμού και τύπο)
 - γ) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση $f \circ f$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της.
2. Ο Γιώργος σε διαδοχικές μέρες αποταμιεύει €50, €60, €70 και ούτω καθεξής.
Η Μαρία τις ίδιες διαδοχικές μέρες αποταμιεύει €190, €175, €160 και ούτω καθεξής.
Να βρείτε:
 - α) i) Σε πόσες μέρες το συντομότερο θα μπορεί ο Γιώργος να αγοράσει μια μοτοσυκλέτα, που κοστίζει €1500;
ii) Πόσα χρήματα θα περισσεύσουν του Γιώργου την ημέρα της αγοράς;
 - β) Για πόσες μέρες ο Γιώργος θα αποταμιεύει ημερησίως λιγότερα από τη Μαρία;
 - γ) Σε πόσες μέρες το συντομότερο ο Γιώργος θα έχει αποταμιεύσει συνολικά περισσότερα από τη Μαρία;
 - δ) Ποιό είναι το μέγιστο ποσό που είναι δυνατόν να αποταμιεύσει συνολικά η Μαρία;
3. α) Με χρήση του ορισμού, να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2 + 4x - 8$
 - β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(0, -8)$
 - γ) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης στην καμπύλη με εξίσωση $y^2 \cdot f(x) = e^{f(x)}$ στο σημείο της με τετμημένη $x = 2$ και τεταγμένη $y > 0$.
4. α) Να αποδείξετε ότι

$$K(x) = \frac{2\eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu 2x}{2\eta\mu 3x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu 4x} = 2\eta\mu 2x$$

- β) Να λύσετε την εξίσωση: $2 \cdot [\log_3 K(x)]^2 - 5 \cdot \log_3 K(x) = -2$, στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

5. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $B\Gamma = A\Delta$, $AB = 4cm$, $\Delta\Gamma = 10cm$. Αν το ύψος του τραπέζιου είναι $4cm$, να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν επιφάνειας του στερεού, που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ γύρω από τον άξονα $X\Gamma Y$, που είναι κάθετος στη $\Gamma\Delta$ στο σημείο Γ .



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

Τάξη: Β΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Μάθημα: Μαθηματικά

Ημερομηνία: 26 / 05 / 2015

Αρ. σελίδων: 5

Χρόνος εξέτασης: 2:30 (δύο ώρες και τριάντα λεπτά)

ΟΔΗΓΙΕΣ

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 5 σελίδες (συμπεριλαμβανομένης και της 1^{ης} σελίδας)

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη.

Το μέρος Α΄ αποτελείται από 10 ασκήσεις από τις οποίες πρέπει να λύσετε ΚΑΙ τις 10.

(Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με **5 μονάδες**)

Το μέρος Β΄ αποτελείται από 5 ασκήσεις από τις οποίες πρέπει να λύσετε ΚΑΙ τις 5.

(Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με **10 μονάδες**).

Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικών υλικών.

Γράφετε μόνο με μελάνι, μπλε ή μαύρου χρώματος. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.

Δίνεται τυπολόγιο που αποτελείται από μία 1 σελίδα

ΜΕΡΟΣ Α': ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ ΚΑΙ ΤΙΣ 10 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

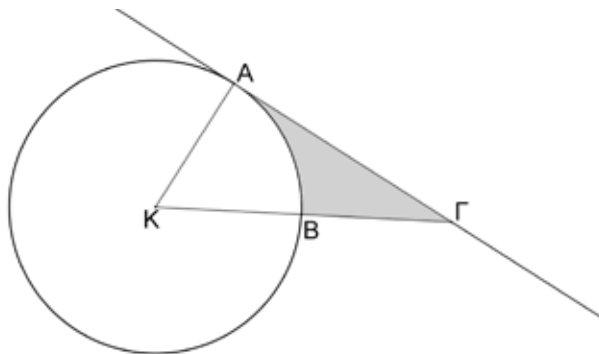
1) Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα $\frac{5x - 7}{(x + 4)(5 - x)}$

2) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 3x + 2|}{x - 2}$

3) Να λύσετε την εξίσωση $4^x - 2 \cdot 2^x - 8 = 0$

4) Σε αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος της είναι τριπλάσιος της διαφοράς της ενώ το άθροισμα του δεύτερου και του πέμπτου όρου της είναι 22. Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.

5) Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται $KB = B\Gamma = \alpha \text{ cm}$ και $A\Gamma$ εφαπτομένη του κύκλου στο Α. Να υπολογίσετε συναρτήσει του α το **εμβαδόν** και την **περίμετρο** του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.



6) Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu \alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu \alpha} = 4\sigma\upsilon\nu 2\alpha$

7) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα $KAB\Gamma\Delta$ (K η κορυφή) έχει πλευρά βάσης ίση με 12 cm και όγκο ίσο με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής της επιφάνειας.

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - (\alpha + 2\beta)x^2 + 2\alpha x - 2$. Να βρείτε τα α και β αν $f(1)=0$ και $f'(1)=1$.

- 9) (α) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση: $\varepsilon\varphi \frac{B}{2} = \frac{\eta\mu B}{\eta\mu A + \eta\mu \Gamma}$ να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
- (β) Να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης : $\eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu x$

- 10) (α) Αν $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = 3x^2$ να βρείτε τις τιμές $(g \circ f)(\frac{\pi}{4})$ και $(f \circ g)(0)$

- (β) Να βρείτε το πεδίο τιμών της συνάρτησης $h(x) = \frac{2x-1}{x-3}$, $x < 3$

- (γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $h^{-1}(x)$ και να γράψετε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της.

ΜΕΡΟΣ Β΄: ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ ΚΑΙ ΤΙΣ 5 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(7,5)$, $B(2,3)$ και $\Gamma(4,-2)$.

- α) Να βρείτε εξίσωση του ύψους ΒΔ.
- β) Να βρείτε την απόσταση της κορυφής Α από το ύψος ΒΔ.
- γ) Να δείξετε ότι $\hat{B} = 90^\circ$
- δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

- 2) Δίνεται η συνάρτηση: $y = 1 + \sigma\upsilon\nu 2x$

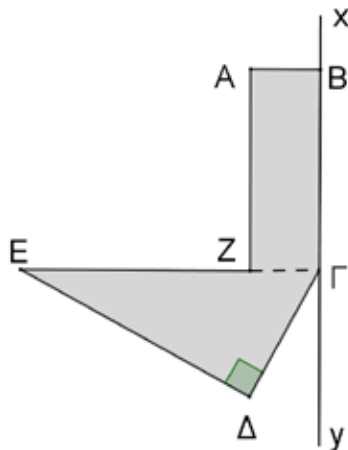
- α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί y , $-\frac{1}{2} \times \frac{dy}{dx}$, $2\eta\mu^2 x$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, με λόγο $\lambda = \varepsilon\varphi x$.

- β) Αν Α είναι το άθροισμα των απείρων όρων της πιο πάνω γεωμετρικής προόδου με

$0^\circ < x < 45^\circ$ και $\frac{A}{\sigma\upsilon\nu x} = 3(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)$, να υπολογίσετε τη γωνία x .

3) Στο πιο κάτω σχήμα $AB\Gamma Z$ ορθογώνιο, $AZ = 8 \text{ cm}$, $\hat{\Delta E} = 90^\circ$, $\Gamma\Delta = 6 \text{ cm}$, $\hat{\Delta\Gamma Y} = 30^\circ$, και A, Z, Δ συνευθειακά σημεία. Το σχήμα $AB\Gamma\Delta EZ$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα XY . Να υπολογίσετε:

- α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και
- β) τον όγκο του στερεού που παράγεται.



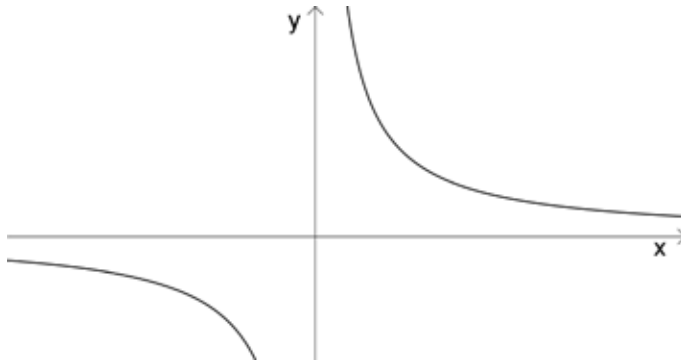
4) (α) Δίνονται οι καμπύλες με εξισώσεις $y = x^{\eta\mu x}$, $x \in (1, +\infty)$ και $y = \pi \ln(\ln x)$, $x \in (1, +\infty)$.
Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των καμπύλων στα σημεία τους που έχουν τετμημένη $x = \pi$ είναι κάθετες.

(β) Αν $\varphi(x) = \frac{2\log x + 1}{2\log x - 1}$ να λύσετε την εξίσωση $\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{10}{3}$

5) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $xy = c^2$, όπου c σταθερός θετικός πραγματικός αριθμός

και τα σημεία της $A\left(\frac{2c^2}{t}, \frac{c^2}{t}\right)$ και $B\left(\frac{2c^2}{t}, \frac{c^2}{t}\right)$ $t, \rho \in \mathbb{R}^+$, $t \neq \rho$. Η γραφική παράσταση της

καμπύλης $xy = c^2$ δίνεται πιο κάτω:



Η εφαπτομένη της καμπύλης στο A τέμνει τον άξονα x' στο Γ και τον άξονα y' στο Δ .

α) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο A έχει εξίσωση: $x + t^2y = 2ct$.

β) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της καμπύλης στα σημεία A και B δεν μπορούν να είναι κάθετες μεταξύ τους.

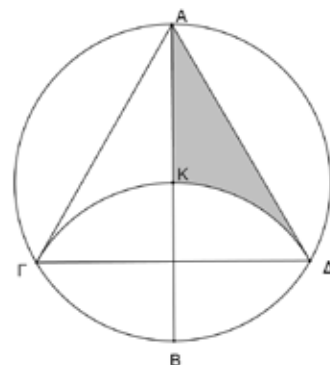
γ) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $T\Delta\Gamma$ είναι ίσο με $\frac{c^2}{3}$ όπου $T\left(\frac{2c^2}{t}, \frac{c^2}{t}\right)$.

δ) Να βρείτε για ποια τιμή του t ισχύει $OG = OD$ (όπου O η αρχή των αξόνων).

8. Να δείξετε ότι:
$$\frac{\sin \alpha - \sin 5\alpha - \sin 9\alpha + \sin 13\alpha}{\eta\mu \alpha - \eta\mu 5\alpha + \eta\mu 9\alpha - \eta\mu 13\alpha} = \epsilon\phi 4\alpha.$$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \sqrt{x - 5}$. Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων: α) $\frac{f}{g}$, β) $g \circ f$.

10. Δίνεται κύκλος (K, R) , με διάμετρο AB και εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο $AG\Delta$. Με κέντρο B και ακτίνα BK γράφουμε το τόξο $Γ\Delta$. Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους συναρτήσει του R .

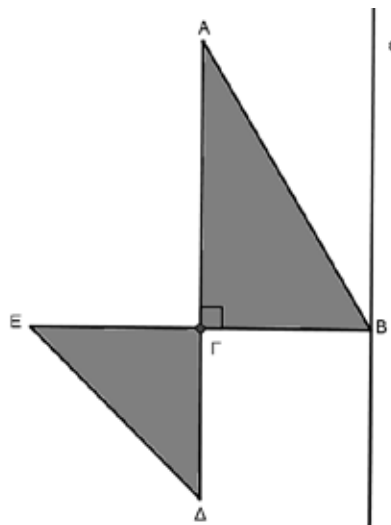


ΜΕΡΟΣ Β΄:

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$. Η πλευρά του AB έχει εξίσωση $x + 5\psi = 38$, η διαγώνιος του $A\Gamma$ έχει εξίσωση $x + \psi - 10 = 0$ και οι συντεταγμένες μιας κορυφής του είναι $(4, 2)$. Να βρείτε:
 - την εξίσωση της διαγωνίου $B\Delta$
 - τις συντεταγμένες της κορυφής A και B
 - την απόσταση του σημείου Δ από την πλευρά AB
 - το εμβαδόν του ρόμβου.

- Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $A\Gamma B$ είναι ορθογώνιο ($\hat{\Gamma} = 90^\circ$) με $\hat{A} = 30^\circ$ και $AB = 12 \text{ cm}$, το τρίγωνο $E\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές ($\hat{\Gamma} = 90^\circ$) και Γ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος BE . Το σκιασμένο σχήμα $AB\Gamma\Delta E\Gamma$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ϵ) που είναι κάθετη στη BE . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



3. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $x^2 + \psi^2 - 2x\psi = 2x$.

(α) Να βρείτε την πρώτη και την δεύτερη παράγωγο.

(β) Αν $\psi = \frac{\psi - x + 1}{\psi - x}$ και η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο Γ με τετμημένη 2 και $\psi > 0$ τέμνει τους άξονες $x\chi'$ και $\psi\psi'$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

4. Αν $y = \ln \sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}}$, $x \in 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

(i) να δείξετε ότι: $\psi = \tan x$

(ii) να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\psi}{x \cdot \psi}$

(iii) να λύσετε την εξίσωση $2\psi \sin x - \psi = 0$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

5. Αριθμητική πρόοδος με διαφορά δ και απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda > 0$ έχουν τον ίδιο πρώτο όρο. Το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου ισούται με το δεύτερο όρο της αριθμητικής προόδου.

Αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις $\frac{2\lambda}{\delta} = 2\eta\mu \frac{\pi}{12} \times \frac{\pi}{24} \sin^2 \frac{\pi}{24} - \eta\mu^2 \frac{\pi}{24}$ και

$\delta \times \lambda = \log_2(2 + \sqrt{2}) + \log_2(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \log_2(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})$ να σχηματίσετε τις δύο προόδους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗ Β΄ ΤΑΞΗ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B \pm \sigma\upsilon\nu A \eta\mu B, \quad \sigma\upsilon\nu(A \pm B) = \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A \eta\mu B$$

$$2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta), \quad 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha, \quad \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad t = \epsilon\phi\alpha$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} \quad \eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} \quad \sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu \frac{B-A}{2} \eta\mu \frac{A+B}{2}$$

$$\alpha = 2R\eta\mu A \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A \quad E = \frac{\alpha\beta\eta\mu\Gamma}{2}$$

2. Στερεομετρία

Ορθό Πρίσμα	$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \times \upsilon$	$V = E_{\beta} \times \upsilon$
Κανονική Πυραμίδα	$E_{\pi} = \frac{1}{2} \Pi_{\beta} \times h$	$V = \frac{E_{\beta} \times \upsilon}{3}$
Κύλινδρος	$E_{\kappa} = 2\pi R \upsilon$	$V = \pi R^2 \upsilon$
Κώνος	$E_{\kappa} = \pi R \lambda$	$V = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3}$
Κόλουρος Κώνος	$E_{\kappa} = \pi(R + \rho) \lambda$	$V = \frac{\pi \upsilon}{3} (R^2 + R\rho + \rho^2)$

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Κατεύθυνσης

ΤΑΞΗ: Β΄ Λυκείου

ΩΡΑ: 7:45-10:15

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: Παρασκευή 5/ 6 /2015

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- 1) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- 2) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- 3) Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (Μόνο τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν με μολύβι).
- 4) Τα σχήματα των ασκήσεων να αντιγράφονται στο φύλλο των λύσεών σας.
- 5) Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.**ΜΕΡΟΣ Α΄****Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

- 1) Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα $\frac{5x-13}{(x+3)(x-1)}$.
- 2) Δίνονται οι αριθμοί $Z_1 = 3 + 4i$ και $Z_2 = 9i$.
 - 1) Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού Z_1 .
 - 2) Να γράψετε το μιγαδικό αριθμό $\frac{Z_2}{Z_1}$ στη μορφή $a + bi$.
- 3) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει παράπλευρο ύψος 10cm. Αν οι παράπλευρες έδρες της σχηματίζουν γωνία 60° με τη βάση της, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.
- 4) Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:
 - 1) $\psi = \ln(5x) + \frac{7}{x^2} + 3^x - \pi$
 - 2) $\psi = \sin 7x + \sqrt{5x^2 + 2x + 3}$

5) Τρεις ίσοι κύκλοι ακτίνας R εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο στα σημεία A , B και Γ . Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$, συναρτήσει του R .

6) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-5}$ και $g(x) = \frac{1}{x+1}$.

Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ (τύπος και πεδίο ορισμού).

7) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4}-2}$

β) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{|5-x| + x^2 - 6x + 5}{x-5}$

8) α) Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση: $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \varepsilon\varphi \frac{A-B}{2} \cdot \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2}$.

β) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\varepsilon\varphi(x + 60^\circ) \cdot \varepsilon\varphi(x - 60^\circ) = \frac{1+2\sigma\upsilon\nu 2x}{1-2\sigma\upsilon\nu 2x}$.

9) Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι ισχύει η πρόταση:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

10) Δίνεται η συνάρτηση $\psi = x e^{4x}$. Να δείξετε ότι ισχύει: $\frac{e^{4x}}{2} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} - \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + 16\psi^2 = 3e^{8x}$.

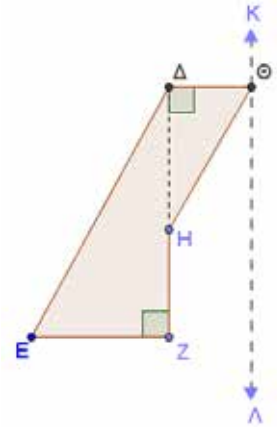
ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) Αριθμητική πρόοδος (Α.Π) και απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος (Γ.Π) έχουν τον ίδιο πρώτο όρο. Ο λόγος λ της Γ.Π και η διαφορά δ της Α.Π συνδέονται με τη σχέση $\delta + 8\lambda = 0$. Το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της Α.Π είναι 25, ενώ το άθροισμα των απείρων όρων της Γ.Π είναι $\frac{8}{3}$. Να σχηματίσετε τις δύο προόδους.

- 2) Στο διπλανό σχήμα δίνονται: $\Delta Z // K\Lambda$, $\Theta H = 10\text{cm}$, $\Delta\theta = 6\text{cm}$, $EZ = 5\text{cm}$, $\Delta Z = 12\text{cm}$, $\Delta\hat{Z}E = 90^\circ$ και $\Theta\hat{\Delta}Z = 90^\circ$. Το πολύγωνο $\Delta EZH\Theta$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $K\Lambda$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του παραγόμενου στερεού.



- 3) Δίνονται οι αριθμοί $\log 178$, $\log \sqrt{81(2^k + 2 \cdot 3^k)}$, $k \log 3$ οι οποίοι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + 2x - 3}{x}$.
- 1) Να βρείτε την τιμή του k .
 - 2) Εάν δίνεται ότι $k = 4$, να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με $x = k$, να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με 135° .
- 4) Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $B(2,3)$, η εξίσωση του ύψους AD είναι $x + y = 1$.
- 1) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ και τις συντεταγμένες των σημείων Δ και Γ .
 - 2) Εάν επιπρόσθετα, το μήκος του ύψους AD είναι $\sqrt{8}$ μονάδες, να βρείτε:
 - i) τις συντεταγμένες της κορυφής A .
 - ii) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - iii) τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
- 5) Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ και $g(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.
- 1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x)$.
 - 2) Να δείξετε ότι $f^{-1} = g$.
 - 3) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)$ στο σημείο της με $x = \frac{1}{2}$.
 - 4) Να λύσετε την εξίσωση $(1 + \sqrt{3}) \cdot f\left(\frac{1}{2} \ln 3\right) = \varepsilon \varphi 2x - 1$ εάν $x \in [0, 2\pi]$.