

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 – 06 – 2018

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΗΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ**

Θέμα Α

A1 Σελίδα 15, ορισμός.

β) i. Σελίδα 35, από “Έστω... $f(x) = y$.”

β) ii. Σελίδα 35, από “Από τον τρόπο... $g(y) = x$.”

A2 Σελίδα 142, ορισμός Fermat.

A3 Σελίδα 135, θεώρημα.

A4 α) Λάθος. Αντιπαράδειγμα σχολικού βιβλίου, σελίδα 134.

β) Λάθος. Αντιπαράδειγμα σχολικού βιβλίου, σελίδα 71.

A5 Η σωστή απάντηση είναι η γ.

Θέμα Β

B1. Η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$f(x) = e^{-x} + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ με οριζόντια ασύμπτωτη.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \lambda - 2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} + \lambda - 2 \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} + \lambda - 2 \right) = 0 + \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = 2$$

B2. $f(x) = e^{-x} + 2$, $\mathbb{R}$

Θεωρούμε $g(x) = e^{-x} + 2 - x$, $\mathbb{R}$

g συνεχής στο $[2, 3]$ ως πράξεις συνεχών (σύνθεση εκθετικής

και πολυωνυμικής)

$$g(2) = \frac{1}{e^2} + 2 - 2 = \frac{1}{e^2} > 0$$

$$g(2) \cdot g(3) < 0.$$

$$g(3) = \frac{1}{e^3} + 2 - 3 = \frac{1}{e^3} - 1 < 0$$

Άρα υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ έτσι ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{-x_0} + 2 - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 = 0$$

$$g'(x) = (e^{-x} + 2 - x)'$$

$$g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \text{ άρα } g(x) \downarrow \text{ γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}.$$

Οπότε η λύση x_0 είναι μοναδική στο $(2, 3)$ εφόσον η g είναι γνησίως μονότονη.

B3. $f(x) = e^{-x} + 2$ για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{e^{x_1}} + 2 = \frac{1}{e^{x_2}} + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x_1}} = \frac{1}{e^{x_2}} \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1 - x_2} = e^0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$x_1 = x_2$ άρα η f είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.

Η f είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται οπότε έχουμε

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{e^x} + 2 \text{ με } y > 2$$

$$y - 2 = \frac{1}{e^x} \text{ με } y - 2 > 0$$

$$y > 2$$

$$e^x = \frac{1}{y - 2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{y - 2}\right)$$

$$x = -\ln(y - 2)$$

$$f^{-1}(y) = -\ln(y - 2) \text{ με } y > 2$$

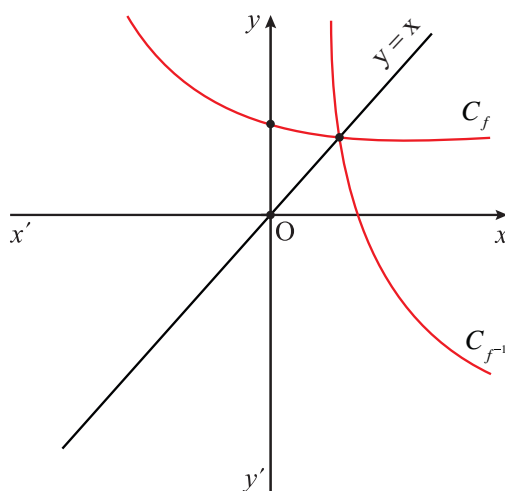
Θέτουμε όπου y το x άρα $f^{-1}(x) = -\ln(x - 2)$ για κάθε $x > 2$.

B4. $f^{-1}(x) = -\ln(x - 2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [-\ln(x - 2)] = -(-\infty) = +\infty$$

$$\text{Διότι: } \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

Θέτουμε $x - 2 = u$ για $x \rightarrow 2^+$ τότε $u \rightarrow 0^+$



Θέμα Γ

Γ1.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1 \end{cases}$$

αφού η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ θα είναι και συνεχής στο $x_0 = 1$ από

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + \beta x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + \alpha)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \beta = 1 + \alpha \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

Επαναδιατυπώνοντας

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \alpha \cdot x, & x < 1 \end{cases}$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \alpha \cdot x - (1 + \alpha)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + \alpha - (1 + \alpha)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 1 + \alpha(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} + \alpha = 2 \Leftrightarrow 1 + \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ οπότε και } \beta = 1.$$

Διότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} \stackrel{0}{=} \stackrel{0}{=} (\text{εφαρμόζεται ο κανόνας DLH}) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(e^{x-1} - 1)'}{(x-1)'}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} e^{x-1} = e^0 = 1.$$

Γ2.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + x, & x < 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$			+
$f'(x)$	+		
$f(x)$			

Για $x > 1$ έχουμε f παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = 2x > 0$ και f συνεχής $(-\infty, 1)$ τότε f γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Για $x < 1$ έχουμε f παραγωγίσιμη ως αλγοριθμικό άθροισμα παραγωγίσιμων με $f'(x) = e^{x-1} + 1 > 0$ και f συνεχής στο $(1, +\infty)$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1)$

αφού f συνεχής στο $x_0 = 1$ τότε f είναι γνησίως αύξουσα στην ένωση των διαστημάτων δηλαδή στο $\mathbb{R}$.

Εύρεση συνόλου τιμών

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + x, & x < 1 \end{cases}$$

$$\Delta_1 = (-\infty, 1] \quad \Delta_2 = (1, +\infty)$$

$$f_{\Delta_1} \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 2]$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x) = -\infty$$

$$\text{και αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{θέτω } \kappa = x - 1$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\kappa \rightarrow -\infty$$

$$f_{\Delta_2} \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (2, +\infty)$$

$$\text{άρα } f_{\Delta} = f_{\Delta_1} \cup f_{\Delta_2} = (-\infty, 2] \cup (2, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Γ3. i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ άρα υπάρχει $\kappa < 0$ τέτοιο ώστε $f(\kappa) < 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} f(0) = \frac{1}{e} > 0 \text{ άρα υπάρχει } \lambda < 0 \text{ τέτοιο ώστε } f(\lambda) > 0.$$

Οπότε η f συνεχής στο $[\kappa, \lambda] \subseteq (-\infty, 0)$ ως άθροισμα εκθετικής και πολυωνυμικής

$$\bullet f(\kappa) \cdot f(\lambda) < 0$$

από Θ. Bolzano υπάρχει ένα $x_0 \in (\kappa, \lambda)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ άρα το x_0 : μοναδική ρίζα της f στο $(-\infty, 0)$.

$$\text{ii) } f^2(x) - x_0 f(x) = 0$$

$$\text{Θεωρούμε } \varphi(x) = f^2(x) - x_0 f(x), D_\varphi = (x_0, +\infty)$$

Έστω ότι υπάρχει $\rho > x_0$ τέτοιο ώστε

$$\varphi(\rho) = 0 \Leftrightarrow f^2(\rho) - x_0 f(\rho) = 0$$

$$f(\rho)(f(\rho) - x_0) = 0$$

$$\begin{aligned} f(\rho) \in \mathbb{R} \\ f(\rho) - x_0 \in \mathbb{R} \end{aligned} = \begin{cases} f(\rho) = 0 \\ \text{ή} \\ f(\rho) = x_0 \end{cases} \quad \text{Αδύνατο διότι}$$

$$\bullet f(\rho) = 0 \text{ Αδύνατη αφού } \rho > x_0 \xRightarrow{f \uparrow} f(\rho) > f(x_0)$$

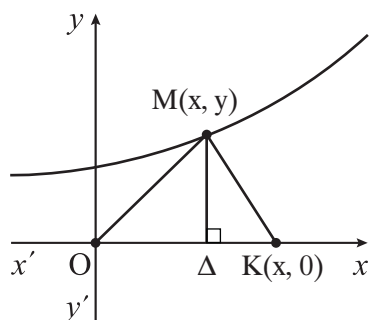
$$f(\rho) > 0$$

$$f(\rho) = x_0 \text{ αδύνατη αφού } f(\rho) > 0 \text{ και } x_0 < 0.$$

$$\text{Γ4. } M(x, y) \quad y = f(x), x \geq 1$$

$$t_0: x_{(t_0)} = 3, y_{(t_0)} = 10$$

$$x'_{(t)} = 2 \text{ μον/sec.}$$



$$E = \frac{1}{2} |OK| |\Delta M|$$

$$|OK| = |x| = x$$

$$|\Delta M| = f(x)$$

$$E = \frac{1}{2} x \cdot f(x)$$

$$E_{(t)} = \frac{1}{2} x_{(t)} \cdot f_{(x(t))}$$

$$E'_{(t)} = \frac{1}{2} x'_{(t)} \cdot f_{(x(t))} + \frac{1}{2} x_{(t)} \cdot \left(f_{(x(t))} \right)'$$

$$E'_{(t_0)} = \frac{1}{2} x'_{(t_0)} \cdot y_{(t_0)} + \frac{1}{2} x_{(t_0)} \cdot y'_{(t_0)}$$

$$E'_{(t_0)} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12 = 28 \text{ τ.μ./s}$$

Θέμα Δ

Δ1 $f(x) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta$

η f παραγωγίσιμη ως $f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + (x-1) \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha$

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, 1)$ είναι $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$$y = f'(1) \cdot x + f(1) - f'(1)$$

άρα προκύπτει το (Σ)

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} f'(1) = -1 \\ f(1) - f'(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = -1 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \beta = 2 \text{ και } \alpha = -1$$

Δ2 $E = \int_1^2 |f(x) - \varepsilon| dx = \int_1^2 |(x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2)| dx =$

$$= \int_1^2 (x-1) \cdot \ln((x-1)^2 + 1) dx$$

* όταν $1 \leq x \leq 2$

$$\bullet x-1 \geq 0$$

$$\text{οπότε } |f(x)| = f(x) \text{ για } x \in [1, 2].$$

$$\bullet \ln[(x-1)^2 + 1] \geq \ln 1 > 0$$

Θέτουμε $x - 1 = u$

- $du = dx$
- $x = 1 \rightarrow u = 0$
- $x = 2 \rightarrow u = 1$

$$\text{άρα } E = \int_0^1 u \cdot \ln(u^2 + 1) du = \int_0^1 \left(\frac{u^2}{2} \right)' \cdot \ln(u^2 + 1) du$$

$$= \left[\frac{u^2}{2} \cdot \ln(u^2 + 1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{u^2}{2} \cdot \ln(u^2 + 1)' du$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 - \int_0^1 \frac{u^2}{2} \cdot \frac{1}{u^2 + 1} \cdot 2u du =$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 - \int_0^1 \frac{u^3}{u^2 + 1} du$$

$$\text{Υπολογισμός } \int_0^1 \frac{u^3}{u^2 + 1} du$$

Εκτελούμε τη διαίρεση

$$\begin{array}{r} u^3 \\ -u^3 - u \\ \hline -u \end{array} \quad \text{άρα } u^3 = u \cdot (u^2 + 1) - u$$

$$\text{οπότε } \int_0^1 \frac{u^3}{u^2 + 1} du = \int_0^1 u du - \int_0^1 \frac{u}{u^2 + 1} du$$

$$= \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(u^2 + 1)'}{u^2 + 1} du$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\ln(u^2 + 1) \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\text{άρα } E = \frac{1}{2} \ln 2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 = \ln 2 - \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

43 i) Να δείξετε ότι $f'(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = (x-1) \ln((x-1)^2 + 1) - x + 2$$

$$f'(x) = (x-1)' \ln(x^2 - 2x + 2) + (x-1) \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 2} - 1$$

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1$$

$$f'(x) \geq -1 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \geq -1$$

$$\ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} \geq 0$$

$$\bullet \ln((x-1)^2 + 1) \geq \ln 1 > 0$$

$$\bullet 2(x-1)^2 \geq 0$$

$$\bullet (x-1)^2 + 1 \geq 1 > 0$$

Για $x = 1$ ισχύει η ισότητα.

ii) $f(x) = (x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + \frac{3}{2} + 2 - 2$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \geq f(\lambda) \quad \text{ΘΜΤ στο } \left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right] \quad (\text{ικανοποιούνται οι συνθήκες})$$

$$\frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\lambda + \frac{1}{2} - \lambda} = f'(\xi) \geq -1$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq \frac{1}{2}$$

44 $f(x) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$

$$g(x) = -x^3 - x + 2$$

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1$$

$$g'(x) = -3x^2 - 1$$

Επειδή f, g , και $\varepsilon: y = -x + 2$ είναι συνεχείς – παραγωγίσιμες έχουμε:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \varepsilon}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \ln x^2 - 2x + 2}{x - 1} = 0$$

άρα η (ε) εφάπτεται στην C_f στο $x_0 = 1$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - \varepsilon}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3}{x} = 0$$

άρα η (ε) εφάπτεται στην C_g στο $x_0 = 0$.

Συμπέρασμα η $y = -x + 2$ είναι κοινή εφαπτομένη της C_f και C_g .

Εφαπτομένη της C_g στο $(0, g(0))$

$$y - g(0) = g'(0)(x - 0)$$

$$y - 2 = -x$$

$$y = -x + 2$$

Θα βρούμε την εφ της C_f στο $x_0 = 1$.

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$y - 1 = -1(x - 1)$$

$$y = -x + 2$$

Παρατηρούμε ότι οι f, g δέχονται κοινή εφαπτομένη την $y = -x + 2$.

Επειδή $f'(x) \geq -1$ (το ίσο για $x = 1$) και

$$g'(x) = -3x^2 - 1 \leq -1 \text{ (το ίσο για } x = 0)$$

Είναι $g'(x_1) \neq f'(x_2)$ έτσι η $y = -x + 2$ είναι μοναδική.

Η $g'(x_1) = f'(x_2)$ δεν έχει άλλο ζευγάρι λύσεων.

Επιμέλεια απαντήσεων των θεμάτων: Τομέας Μαθηματικών

Αξιολόγηση θεμάτων

Τα θέματα χαρακτηρίζονται ως ποιοτικά, διατυπωμένα με σαφήνεια, καλύπτουν σχεδόν όλη την ύλη βασισμένα στο Σχολικό Βιβλίο.