

Επιμέλεια - Μάριος Νάνη

Σχολική Χρονιά: 2021 – 2022

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Ώρα Εξέτασης: 7: 45 – 9: 15

Τάξη: Α ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία Εξέτασης: 21/01/2022

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α'

A1. Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου των κύκλων $(K, 6\text{cm})$ και $(\Lambda, 2\text{cm})$, ώστε οι κύκλοι να εφάπτονται εξωτερικά.

Λύση

Εφάπτονται εξωτερικά σημαίνει: $R + \rho = \delta$

Άρα, $K\Lambda = 6 + 2 = 8\text{cm}$.

A2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Να βρείτε:

(α) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$

(β) Τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$

Λύση

(α) $|\vec{\alpha}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

(β) $\vec{\gamma} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$

A3. Αν $\eta\mu x = \frac{4}{5}$, $90^\circ < x < 180^\circ$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της πιο κάτω παράστασης, χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$A = \frac{15\sigma\upsilon\upsilon x}{\sigma\tau\epsilon\mu x + \epsilon\phi x}$$

Λύση

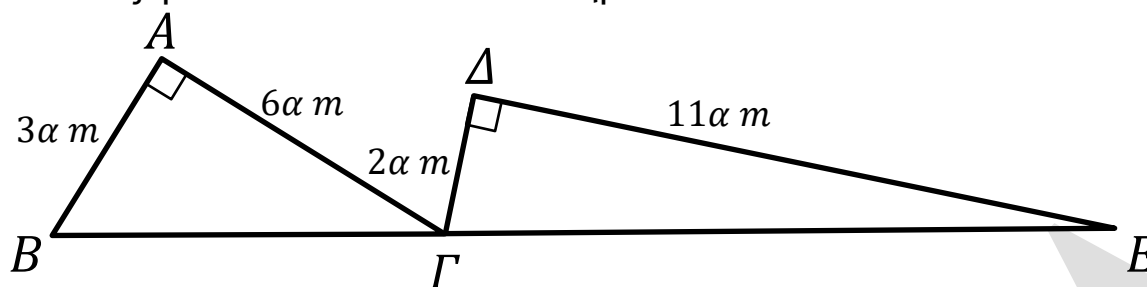
Είμαστε στο 2^ο τεταρτημόριο αφού $90^\circ < x < 180^\circ$, άρα $\eta\mu\iota\tau\omicron\nu\alpha$ θετικά.

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{3}{5}$$

$$\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -\frac{4}{3} \text{ και } \sigma\tau\epsilon\mu x = \frac{1}{\eta\mu x} = \frac{5}{4}. \text{ Άρα,}$$

$$A = \frac{15\sigma\upsilon\upsilon x}{\sigma\tau\epsilon\mu x + \epsilon\phi x} = \frac{15 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)}{\frac{5}{4} + \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{-9}{\frac{15-16}{12}} = \frac{-9}{-\frac{1}{12}} = 9 \cdot 12 = 108$$

A4. Ένας τοπογράφος έκανε τις παρακάτω μετρήσεις σε ένα αγροτεμάχιο $ABΓΔΕ$ όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Αν $\alpha > 0$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ριζών:

(α) Να δείξετε ότι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος BE είναι $8\sqrt{5}\alpha$ m

(β) Αν $\alpha = \sqrt[4]{\sqrt[3]{45^{11}}} : \sqrt[6]{\sqrt[4]{45^5}}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή του BE

Λύση

(α) Για το BE , παρατηρούμε ότι $BE = BΓ + ΓΕ$. Άρα, θα κάνουμε Π.Θ. για να βρούμε την $BΓ$ και μετά το ίδιο για την $ΓΕ$. Επομένως:

$$(BΓ)^2 = (3\alpha)^2 + (6\alpha)^2 \quad \text{και} \quad (ΓΕ)^2 = (2\alpha)^2 + (11\alpha)^2$$

$$(BΓ)^2 = 9\alpha^2 + 36\alpha^2$$

$$(ΓΕ)^2 = 4\alpha^2 + 121\alpha^2$$

$$(BΓ)^2 = 45\alpha^2$$

$$(ΓΕ)^2 = 125\alpha^2$$

$$(BΓ) = 3\sqrt{5}\alpha$$

$$(ΓΕ) = 5\sqrt{5}\alpha$$

$$\text{Άρα, } BE = 3\sqrt{5}\alpha + 5\sqrt{5}\alpha = 8\sqrt{5}\alpha \text{ m.}$$

$$(β) \alpha = \sqrt[4]{\sqrt[3]{45^{11}}} : \sqrt[6]{\sqrt[4]{45^5}} = \sqrt[12]{45^{11}} : \sqrt[12]{45^5} = \sqrt[12]{45^6} = \sqrt[2]{45^3} = \sqrt{45}$$

$$\text{Άρα, } BE = 8\sqrt{5} \cdot \sqrt{45} = 8\sqrt{5 \cdot 45} = 8\sqrt{225} = 8 \cdot 15 = 120$$

A5. Να αποδείξετε την ταυτότητα : $\tan\theta - \cot\theta + \frac{\sin\theta}{1-\eta\mu\theta} = 2\tan\theta$

Λύση

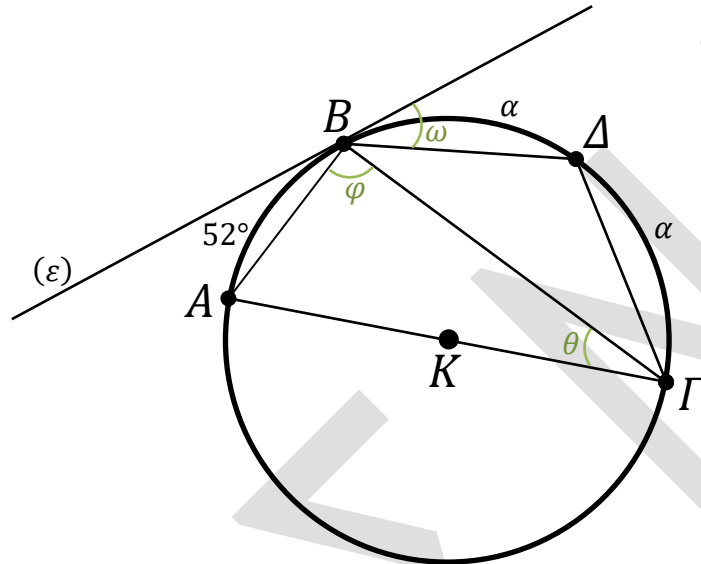
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\eta\mu\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{1-\eta\mu\theta} &= \frac{1-\eta\mu\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{1-\eta\mu\theta} = \frac{(1-\eta\mu\theta)(1-\eta\mu\theta) + \sin\theta \cdot \sin\theta}{\sin\theta(1-\eta\mu\theta)} \\ &= \frac{1-2\eta\mu\theta + \eta\mu^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta(1-\eta\mu\theta)} = \frac{1-2\eta\mu\theta + 1}{\sin\theta(1-\eta\mu\theta)} = \frac{2-2\eta\mu\theta}{\sin\theta(1-\eta\mu\theta)} \\ &= \frac{2(1-\eta\mu\theta)}{\sin\theta(1-\eta\mu\theta)} = \frac{2}{\sin\theta} = 2 \cdot \frac{1}{\sin\theta} = 2\tan\theta \end{aligned}$$

A6. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) . Η AG είναι διάμετρος του κύκλου, η ευθεία (ε) , εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B , $AB = 52^\circ$ και $B\Gamma = \Gamma\Delta = \alpha$.

(α) Να υπολογίσετε την τιμή του α .

(β) Αν $\alpha = 64^\circ$, να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών θ, φ και ω .

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



Λύση

(α) Παρατηρούμε ότι τα δύο α μαζί με το 52° είναι στο άνω ημικύκλιο. Άρα,
 $\alpha + \alpha + 52^\circ = 180^\circ$ (ημικύκλιο) $\Leftrightarrow 2\alpha = 128^\circ \Leftrightarrow \alpha = 64^\circ$

(β) Η $B\hat{K}A = 52^\circ$ (επίκεντρη) $\Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{52^\circ}{2} = 26^\circ$ (εγγεγραμμένη μισή της επίκεντρης)

Η $\Gamma\hat{A}B$ βαίνει στο τόξο $2\alpha = 128^\circ$. Άρα, $\Gamma\hat{A}B = \frac{128^\circ}{2} = 64^\circ$ (παρομοίως)

Άρα, $64^\circ + 26^\circ + \hat{\varphi} = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου). Άρα, $\hat{\varphi} = 90^\circ$.

(ή μπορούσαμε να πούμε, $\hat{\varphi} = 90^\circ$ γιατί βαίνει σε ημικύκλιο)

Η $\Delta\hat{\Gamma}B = \frac{64^\circ}{2} = 32^\circ$ (εγγεγραμμένη μισή της επίκεντρης $B\hat{K}\Delta = 64^\circ$)

Το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, άρα, $B\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{B}\Delta = 32^\circ$.

Επίσης, η $A\hat{B}(\varepsilon) = 26^\circ$ από το Θεώρημα χορδής - εφαπτομένης.

Άρα, $26^\circ + 90^\circ + 32^\circ + \hat{\omega} = 180^\circ$ (ευθεία), άρα $\hat{\omega} = 32^\circ$.

ΜΕΡΟΣ Β'

B1. (α) Να λύσετε τις εξισώσεις: $x^3 - 27 = 0$ και $\sqrt{y+14} = 6 - y$.

(β) Αν $x = 3$ και $y = 2$

(i) Να αποδείξετε ότι $\frac{7}{\sqrt{y+x}} - \frac{7}{\sqrt{y-x}} = 6$

(ii) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[4]{y}$ και $\sqrt[6]{x}$.

Λύση

(α) $x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3$ και $\sqrt{y+14} = 6 - y \Leftrightarrow y+14 = 36 - 12y + y^2$
 $\Leftrightarrow y^2 - 13y + 22 = 0$
 $\Leftrightarrow (y-11)(y-2) = 0 \Leftrightarrow y = 11 \text{ ή } y = 2$

(β) (i) $\frac{7}{\sqrt{2+3}} - \frac{7}{\sqrt{2-3}} = \frac{7(\sqrt{2}-3) - 7(\sqrt{2}+3)}{(\sqrt{2})^2 - 3^2} = \frac{7\sqrt{2}-21-7\sqrt{2}-21}{2-9} = \frac{-42}{-7} = 6$

(ii) Για να συγκρίνω τις ρίζες $\sqrt[4]{2}$ και $\sqrt[6]{3}$ πρέπει να τα υψώσω στην δύναμη που είναι το ΕΚΠ τους. Το ΕΚΠ(4,6) = 12. Άρα,

$$(\sqrt[4]{2})^{12} = ((\sqrt[4]{2})^4)^3 = 2^3 = 8 \text{ και } (\sqrt[6]{3})^{12} = ((\sqrt[6]{3})^6)^2 = 3^2 = 9$$

Άρα, αφού $9 > 8$, τότε $\sqrt[6]{3} > \sqrt[4]{2}$.

B2. Δίνονται τα σημεία $A(-4,6)$ και $B(-14,10)$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

(β) Να βρείτε τη διανυσματική ακτίνα του μέσου M του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

(γ) Να βρείτε μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο με το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$.

(δ) Δίνεται το σημείο $K(3,9)$. Να βρείτε την τετμημένη του σημείου $T(x,11)$, έτσι ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{KT}$ να είναι παράλληλα.

Λύση

(α) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -14 - (-4) \\ 10 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix}$

(β) $M : \left(\frac{-4-14}{2}, \frac{6+10}{2} \right) = (-9,8)$

(γ) $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -9 + 4 \\ 8 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\parallel$ στο $\overrightarrow{AM}$ είναι το $\frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|} = \frac{\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{29}} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{\sqrt{29}} \\ \frac{2}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$

(δ) $\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} -14 + 9 \\ 10 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\overrightarrow{KT} = \begin{pmatrix} x - 3 \\ 11 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - 3 = -5$
 $\Leftrightarrow x = -2$

B3. (α) Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\sigma\varphi(\pi + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) \cdot \varepsilon\varphi(2\pi + \omega)}{\eta\mu(\pi - \omega) \cdot \sigma\tau\epsilon\mu(-\omega)} \quad \text{και} \quad B = \tau\epsilon\mu\omega - \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{\tau\epsilon\mu\omega}$$

(i) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu\omega$ και $B = \sigma\upsilon\nu\omega$

(ii) Να υπολογίσετε τη γωνιά ω , αν: $\sqrt{2} \cdot \eta\mu\omega = A^2 + B^2$, $\omega \in (0, \pi)$

(β) Δίνεται η παράσταση: $\Gamma = 9 - 2\sigma\upsilon\nu\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $7 \leq \Gamma \leq 11$.

Λύση

$$(α) (i) A = \frac{\sigma\varphi\omega \cdot (-\eta\mu\omega) \cdot \varepsilon\varphi\omega}{\eta\mu\omega \cdot (-\sigma\tau\epsilon\mu\omega)} = \frac{\cancel{\sigma\upsilon\nu\omega} \cdot \eta\mu\omega \cdot \cancel{\eta\mu\omega}}{\eta\mu\omega \cdot \cancel{\sigma\upsilon\nu\omega}} = \frac{-\eta\mu\omega}{-1} = \eta\mu\omega$$

$$B = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega} - \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \cdot \cancel{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega} - \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$(ii) \sqrt{2} \cdot \eta\mu\omega = \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ άρα, } \omega = 45^\circ$$

(β) Γνωρίζουμε ότι $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\theta \leq 1$, άρα,

$$\stackrel{\cdot(-2)}{\Leftrightarrow} 2 \geq -2\sigma\upsilon\nu\theta \geq -2 \stackrel{+9}{\Leftrightarrow} 11 \geq 9 - 2\sigma\upsilon\nu\theta \geq 7 \Rightarrow 7 \leq \Gamma \leq 11$$