

### Θέμα Α

**A1.** Σχολικό βιβλίο σελ. 150

**A2.** Σχολικό βιβλίο σελ. 87

**A3.** Σχολικό βιβλίο σελ. 14

- A4.** α. Σωστό  
β. Λάθος  
γ. Σωστό  
δ. Σωστό  
ε. Λάθος

### Θέμα Β

**B1.** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = x^2 - 5x + 6$ .

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\text{Είναι } \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1.$$

$$\text{Οπότε } x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}. \text{ Έτσι } x_1 = 3 \text{ και } x_2 = 2.$$

Προκύπτει επομένως ο παρακάτω πίνακας μεταβολών.

| x       | $-\infty$                                                                            | 2 | 3               | $+\infty$ |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------|---|-----------------|-----------|
| $f'(x)$ | +                                                                                    | ○ | ○               | +         |
| $f(x)$  |  |   |                 |           |
|         | Τοπικό μέγιστο                                                                       |   | Τοπικό ελάχιστο |           |

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 2]$ , γνησίως φθίνουσα στο  $[2, 3]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[3, +\infty)$ .

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 2 με τιμή

$$f(2) = \frac{2^3}{3} - \frac{5}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 1 = \frac{8}{3} - 5 \cdot 2 + 12 - 1 = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$$

και τοπικό ελάχιστο στο 3 με τιμή

$$f(3) = \frac{3^3}{3} - \frac{5}{2} \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 - 1 = 9 - \frac{5}{2} \cdot 9 + 18 - 1 = -\frac{45}{2} + 26 = -\frac{45}{2} + \frac{52}{2} = \frac{7}{2}$$

**B2.** Είναι  $f(0) = \frac{0^3}{3} - \frac{5}{2} \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 - 1 = -1$ .

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο  $A(0, -1)$  είναι της μορφής  $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ , όπου

$$\lambda = f'(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6.$$

Οπότε η  $(\varepsilon)$  γράφεται  $y = 6x + \beta$ .

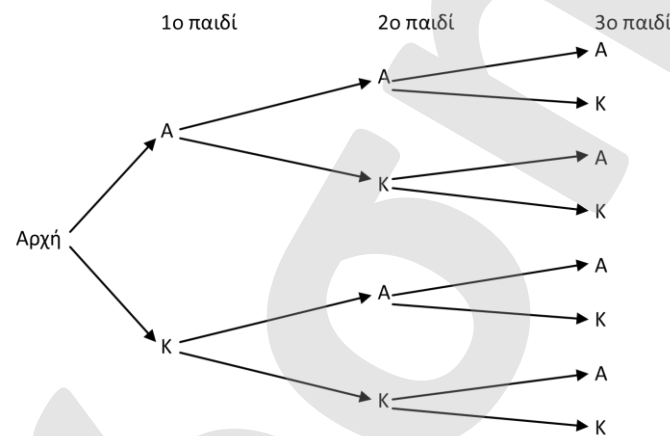
Όμως  $A(0, -1) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow -1 = 6 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1$ . Οπότε η ζητούμενη ευθεία είναι  $\varepsilon: y = 6x - 1$

**B3.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x) - 12}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x + 6 - 12}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 6)}{(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 6) = -1 - 6 = -7 \end{aligned}$$

**Θέμα Γ**

**Γ1.**



Επομένως ο δειγματικός χώρος είναι:

$$\Omega = \{AAA, AAK, AKA, AKK, KAA, KAK, KKA, KKK\}$$

**Γ2.** Για τα ενδεχόμενα  $A, B, \Gamma$  έχουμε;

$$A = \{KAA, KAK, KKA, KKK\}$$

$$B = \{AKK, KAK, KKA, KKK\}$$

$$\Gamma = \{AAA, AAK, KKA, KKK\}$$

**Γ3. α)**

$$\bullet \Delta = A \cap B = \{KAK, KKA, KKK\}. \text{ Άρα } P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

$$\bullet E = A \cup B = \{AKK, KAA, KAK, KKA, KKK\}. \text{ Άρα } P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{5}{8}$$

$$\bullet Z = \Gamma - E = \{AAA, AAK\}. \text{ Άρα } P(Z) = \frac{N(Z)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

**β)**

- $H = (A \cup B)' = E'$ . Άρα  $P(H) = P(E') = 1 - P(E) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$
- $\Theta = (A - B) \cup (B - A)$ . Άρα  

$$P(\Theta) = P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) =$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{4}{8} + \frac{4}{8} - 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

### Θέμα Δ

**Δ1.** Έστω  $c$  το πλάτος των κλάσεων.

Τότε η πρώτη κλάση είναι  $[8, 8+c)$  και η δεύτερη  $[8+c, 8+2c)$ .

Εφόσον  $x_2=14$  ισχύει:

$$\frac{8+c+8+2c}{2} = 14 \Rightarrow \frac{16+3c}{2} = 14 \Rightarrow 16+3c = 28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3c = 28 - 16 \Rightarrow 3c = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 4$$

**Δ2.** Αν  $[\alpha, \beta)$  η κλάση  $i$  τότε  $x_i = \frac{\alpha + \beta}{2}$ .

Επομένως  $x_1=10, x_2=14, x_3=18, x_4=22$ .

$$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4} = 14 \Leftrightarrow \frac{10 \cdot 20 + 14 \cdot 15 + 18 \cdot 10 + 22 v_4}{20 + 15 + 10 + v_4} = 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{200 + 210 + 180 + 22 v_4}{45 + v_4} = 14 \Leftrightarrow \frac{540 + v_4}{45 + v_4} = 14 \Leftrightarrow 540 + v_4 = 630 + 14 v_4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 22 v_4 - 14 v_4 = 630 - 540 \Leftrightarrow 8 v_4 = 90 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_4 = 11.25$$

Ο πίνακας είναι:

| Χρόνος (σε λεπτά) | Κεντρική τιμή $x_i$ | Συχνότητα $v_i$ |
|-------------------|---------------------|-----------------|
| $[8, 12)$         | 10                  | 20              |
| $[12, 16)$        | 14                  | 15              |
| $[16, 20)$        | 18                  | 10              |
| $[20, 24)$        | 22                  | $v_4=5$         |
| Σύνολο            |                     | 50              |

**Δ3.** 20 υπολογιστές χρειάστηκαν  $[8, 12)$  λεπτά. Άρα τουλάχιστον 9 λεπτά (έως

12) χρειάστηκαν  $v'_1 = \frac{3}{4} \cdot 20 = 15$  υπολογιστές.

Συνολικά τουλάχιστον 9 λεπτά χρειάστηκαν

$v'_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 15 + 15 + 10 + 5 = 45$  υπολογιστές.

**Δ4.** Είναι:

$$s^2 = \frac{(\bar{x} - x_1)^2 \cdot v_1 + (\bar{x} - x_2)^2 \cdot v_2 + (\bar{x} - x_3)^2 \cdot v_3 + (\bar{x} - x_4)^2 \cdot v_4}{v}$$

$$= \frac{(14 - 10)^2 \cdot 20 + (14 - 14)^2 \cdot 15 + (14 - 18)^2 \cdot 10 + (14 - 22)^2 \cdot 5}{50}$$

$$= \frac{16 \cdot 20 + 0 \cdot 15 + 16 \cdot 10 + 64 \cdot 5}{50} = \frac{320 + 160 + 320}{50} = \frac{800}{50} = 16$$

$$\text{Άρα, } s = \sqrt{16} \Rightarrow s = 4$$

$$\text{Επομένως } CV_x = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{4}{14} \cdot 100\% = 28\% > 10\%$$

Οπότε το δείγμα είναι ανομοιογενές.

**Δ5.** Έστω  $y_i$ ,  $i=1,2,3,4$  οι τιμές της μεταβλητής για την οποία ισχύει  $y_i = 0,8 \cdot x_i$  όπου  $x_i$ ,  $i=1,2,3,4$  οι κεντρικές τιμές των κλάσεων. Τότε από την εφαρμογή του σχολικού βιβλίου ισχύει:

$$\bar{y} = 0,8 \cdot \bar{x}$$

$$s_y = |0,8| \cdot s = 0,8 \cdot s$$

$$\text{Άρα, } CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{0,8 \cdot s}{0,8 \cdot \bar{x}} = \frac{s}{\bar{x}} = CV_x = 28\% > 10\% \text{ είναι επίσης ανομοιογενές.}$$