

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

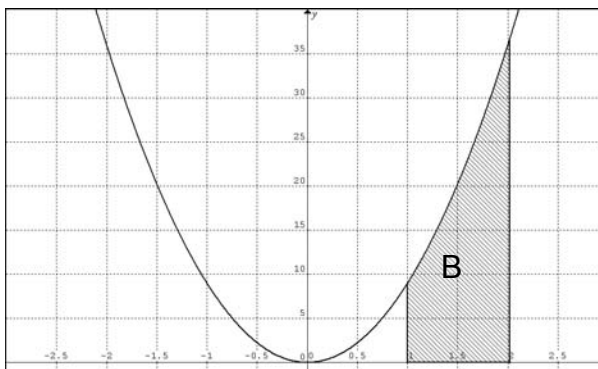
Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (Για αποφοίτους Τεχνικών Σχολών)

ΛΥΣΕΙΣ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α 1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $y = x^3 - 4x^2 + x + 3$ $y' = 3x^2 - 8x + 1$	
2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\eta \mu x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\eta \mu x} = \frac{e^0 + e^{-0} - 2}{\eta \mu 0} = \frac{0}{0}$ (απροσδιόριστη μορφή) $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sigma \upsilon \nu x} = \frac{1 - 1}{1} = 0$	
3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x} dx$ $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x} dx = \int_1^2 \frac{(x^2+x)'}{x^2+x} dx = \left[\ln x^2+x \right]_1^2 = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3$	
4. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$ Να βρείτε: α) Τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κύκλου. β) Τη θέση του σημείου $B(3, 1)$ ως προς τον κύκλο γ) Την εξίσωση της κάθετης του κύκλου στο σημείο του $A(0, 5)$ α) $K(-3, 1)$, $R = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 15} = \sqrt{25} = 5$ β) $3^2 + 1^2 + 6 \cdot 3 - 2 \cdot 1 - 15 = 9 + 1 + 18 - 2 - 15 = 11 > 0$ Το σημείο είναι έξω από τον κύκλο. γ) $2x + 2yy' + 6 - 2y' = 0 \Rightarrow 2yy' - 2y' = -2x - 6 \Rightarrow y' = \frac{-2x - 6}{2y - 2} = \frac{x + 3}{1 - y}$ $\Rightarrow \lambda_{\epsilon \phi} = \frac{0 + 3}{1 - 5} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \lambda_{\kappa \alpha \theta} = \frac{4}{3}$ εξ. κάθετου: $y - 5 = \frac{4}{3}(x - 0) \Rightarrow 3y - 15 = 4x \Rightarrow 4x - 3y = -15$	

5. Αν ο έκτος όρος του διωνύμου $(x^2 + \beta)^{12}$ είναι ο $32 \binom{12}{5} x^9$ να βρείτε το όρο β του διωνύμου. $T_6 = \binom{12}{5} (x^2)^{12-5} \cdot \beta^5 = \binom{12}{5} x^{14} \cdot \beta^5$ $\Rightarrow \binom{12}{5} x^{14} \beta^5 = 32 \binom{12}{5} x^9 \Rightarrow x^{14} \beta^5 = 32 x^9$ $\Rightarrow \beta^5 = \frac{32}{x^5} \Rightarrow \beta = \frac{2}{x}$	
6. Αν $y = x \text{Τοξεφ} x$ να δείξετε ότι $x(1+x^2) \frac{dy}{dx} = x^2 + (1+x^2) \cdot y$ $\frac{dy}{dx} = \text{Τοξεφ} x + x \cdot \frac{1}{1+x^2}$ $x(1+x^2) \frac{dy}{dx} = x(1+x^2) \cdot \left[\text{Τοξεφ} x + \frac{x}{1+x^2} \right] = x(1+x^2) \cdot \text{Τοξεφ} x + x^2$ $= (1+x^2) \cdot [x \text{Τοξεφ} x] + x^2 = (1+x^2) \cdot y + x^2$	
7. Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΑΡΙΘΜΟΙ. Πόσοι από αυτούς έχουν όλα τα σύμφωνα μαζί; α) $\frac{7!}{2!} = 2520$ β) $\frac{5!}{2!} \cdot 3! = 360$	
8. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \eta \mu^2 5x \sigma \upsilon \nu 3x \, dx$ $\begin{aligned} \int \eta \mu^2 5x \sigma \upsilon \nu 3x \, dx &= \int \frac{1 - \sigma \upsilon \nu 10x}{2} \sigma \upsilon \nu 3x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\sigma \upsilon \nu 3x - \sigma \upsilon \nu 10x \cdot \sigma \upsilon \nu 3x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sigma \upsilon \nu 3x \, dx - \frac{1}{4} \int (\sigma \upsilon \nu 13x + \sigma \upsilon \nu 7x) \, dx \\ &= \frac{1}{6} \eta \mu 3x - \frac{1}{52} \eta \mu 13x - \frac{1}{28} \eta \mu 7x + c \end{aligned}$	

9. Το χωρίο B, περικλείεται από την καμπύλη $y=3\alpha x^2$, $\alpha>0$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$. Ο όγκος που παράγεται από πλήρη περιστροφή του χωρίου B γύρω από τον άξονα των x είναι $\frac{2511\pi}{5}$ κυβικές μονάδες.



- α) Να δείξετε ότι η καμπύλη είναι η $y=9x^2$
 β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου B.

$$\begin{aligned} \alpha) V &= \pi \int_1^2 9\alpha^2 x^4 dx = \pi \left[9\alpha^2 \frac{x^5}{5} \right]_1^2 \\ &= \pi \left[9\alpha^2 \cdot \frac{32}{5} - 9\alpha^2 \cdot \frac{1}{5} \right] = \frac{279\alpha^2}{5} \pi \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{279\alpha^2}{5} \pi = \frac{2511}{5} \pi \Rightarrow \alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3 \quad (\alpha > 0) \Rightarrow y = 9x^2$$

$$\begin{aligned} \beta) E &= \int_1^2 9x^2 dx = \left[9 \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = [3x^3]_1^2 \\ &= 3 \cdot 8 - 3 \cdot 1 = 21 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

10. Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ενός κύβου είναι $6 \text{ cm}^3/\text{sec}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της επιφάνειας του κύβου κατά τη χρονική στιγμή που η ακμή του κύβου είναι ίση με 3 cm .

$$V = \alpha^3 \Rightarrow \frac{dV}{d\alpha} = 3\alpha^2 \Rightarrow \frac{dV}{dt} \cdot \frac{dt}{d\alpha} = 3\alpha^2 \Rightarrow 6 \cdot \frac{dt}{d\alpha} = 3\alpha^2 \Rightarrow \frac{dt}{d\alpha} = \frac{\alpha^2}{2}$$

$$E = 6\alpha^2 \Rightarrow \frac{dE}{d\alpha} = 12\alpha \Rightarrow \frac{dE}{dt} \cdot \frac{dt}{d\alpha} = 12\alpha \Rightarrow \frac{dE}{dt} \cdot \frac{\alpha^2}{2} = 12\alpha \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{24}{\alpha}$$

$$\text{Αν } \alpha = 3 \text{ cm} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{24}{3} = 8 \text{ cm}^2/\text{sec}$$

ΜΕΡΟΣ Β

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες και τις εξισώσεις των ασυμπτωτών της.
 β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία της και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της.
 γ) Να κάμετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης
 δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο της με $x = 2$.

α) Π.Ο. $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Αν $x=0 \Rightarrow y = -1$ (0, -1)

Δεν τέμνει τον άξονα των x

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty \Rightarrow x=1 \text{ Κ.Α}$$

ομοίως $x = -1$ Κ.Α

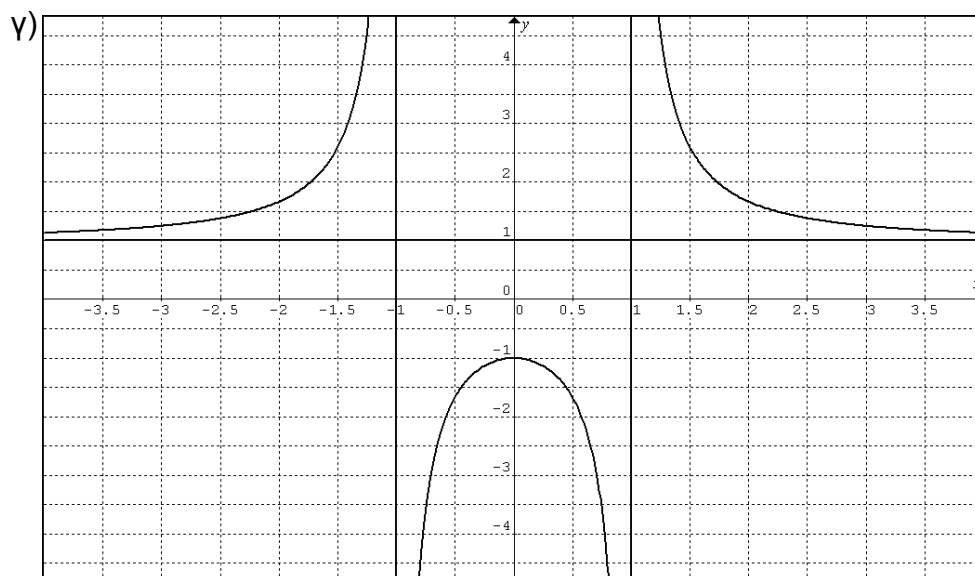
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ Ο. Α.}$$

$$\beta) f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+	-	-
$f(x)$	↗		T.M.	↘	↘

Τοπικό Μέγιστο (0, -1)



δ) Αν $x=2 \Rightarrow y=\frac{5}{3}$ $\Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = \frac{-4.2}{(2^2-1)^2} = \frac{-8}{9} \Rightarrow$ εξ. Εφαπτομένης $y-\frac{5}{3} = -\frac{8}{9}(x-2) \Rightarrow 8x+9y=31$	
2. α) Να δείξετε ότι $\eta\mu 8x + \eta\mu 6x = 2\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - 7x)$ β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu 4x + \sigma\upsilon\nu 2x = \eta\mu 8x + \eta\mu 6x$ για τις οποίες $x \in [0^\circ, 90^\circ]$ α) Α.Μ. $= \eta\mu 8x + \eta\mu 6x = 2\eta\mu 7x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 2\sigma\upsilon\nu(90^\circ - 7x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = \text{Β.Μ.}$ β) $\sigma\upsilon\nu 4x + \sigma\upsilon\nu 2x = \eta\mu 8x + \eta\mu 6x \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu \frac{4x+2x}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{4x-2x}{2} = 2\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - 7x)$ $\Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 2\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - 7x) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x [\sigma\upsilon\nu 3x - \sigma\upsilon\nu(90^\circ - 7x)] = 0$ $\Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 90^\circ \Rightarrow x = 360^\circ k \pm 90^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ή $\sigma\upsilon\nu 3x = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - 7x) \Rightarrow 3x = 360^\circ k \pm (90^\circ - 7x)$ $\Rightarrow 3x = 360^\circ k + 90^\circ - 7x \Rightarrow 10x = 360^\circ k + 90^\circ \Rightarrow x = 36^\circ k + 9^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ή $3x = 360^\circ k - 90^\circ + 7x \Rightarrow -4x = 360^\circ k - 90^\circ \Rightarrow x = -90^\circ k + 22,5^\circ, k \in \mathbb{Z}$ Αν $k=0$ $x = 90^\circ, x = 9^\circ, x = 22,5^\circ$ Αν $k=1$ $x = 45^\circ, \text{ Αν } k=2 \quad x = 81^\circ$	
3. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \frac{\eta\mu^3 x}{2 + \sigma\upsilon\nu x}$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $\sigma\upsilon\nu x = u$ $\sigma\upsilon\nu x = u \Rightarrow -\eta\mu x dx = du$ $\Rightarrow \int \frac{\eta\mu^3 x}{2 + \sigma\upsilon\nu x} dx = \int \frac{\eta\mu^2 x \cdot \eta\mu x}{2 + \sigma\upsilon\nu x} dx = - \int \frac{(1-u^2)}{2+u} du$ $= \int \frac{u^2 - 1}{2+u} du = \int \left(u - 2 + \frac{3}{2+u} \right) du$ $= \frac{u^2}{2} - 2u + 3 \ln 2+u + c$ $= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{2} - 2\sigma\upsilon\nu x + 3 \ln 2 + \sigma\upsilon\nu x + c$	

4. Δίνονται οι κύκλοι $K_1: x^2+y^2-6x-8y+21=0$ και $K_2: x^2+y^2=9$ με κέντρα Λ και M αντίστοιχα.
 α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι K_1, K_2 εφάπτονται εξωτερικά
 β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου K_3 που έχει διάμετρο την ΛM .
 γ) Να δείξετε ότι ο κύκλος K_3 αποκόπτει από τον άξονα των y χορδή ίση με 4 μονάδες.

α) $K_1: \Lambda(3, 4)$, $R_1 = \sqrt{9+16-21} = \sqrt{4} = 2$ μ.

$K_2: M(0, 0)$ $R_2=3$ μ.

$(\Lambda M) = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow R_1 + R_2 = (\Lambda M) \Rightarrow$ εφάπτονται εξωτερ.

β) $x_{\text{μεσου}} = \frac{x_{\Lambda} + x_M}{2} = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}$, $y_{\text{μεσου}} = \frac{y_{\Lambda} + y_M}{2} = \frac{4+0}{2} = 2$

Κέντρο του K_3 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ και $R = \frac{5}{2}$ μ. $\Rightarrow c = \frac{9}{4} + 4 - \frac{25}{4} = 0$

Εξίσωση κύκλου $K_3: x^2+y^2-3x-4y=0$

γ) Αν $x=0 \Rightarrow y^2-4y=0 \Rightarrow y=0$ και $y=4 \Rightarrow$ χορδή = 4 μονάδες

5. Να βρείτε στη μορφή $y=f(x)$ τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x \ln x \frac{dy}{dx} + y = x^2 e^x$$

$$x \ln x \frac{dy}{dx} + y = x^2 e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x \ln x} = \frac{x e^x}{\ln x}$$

$$I(x) = e^{\int \frac{1}{x \ln x} dx} = e^{\ln(\ln x)} = \ln x$$

$$\Rightarrow \ln x \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x \ln x} \cdot \ln x = \frac{x e^x}{\cancel{\ln x}} \cancel{\ln x}$$

$$\Rightarrow \ln x \cdot y = \int x e^x dx = \int x d(e^x) \\ = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

$$\Rightarrow y = \frac{x \cdot e^x - e^x + c}{\ln x}$$