ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ (Τ.Ε.Ι.)

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Τ.Ε.Ι.

22 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

1. α)

$$\frac{\sigma\upsilon\nu2\alpha - \sigma\upsilon\nu4\alpha}{\sigma\upsilon\nu2\alpha + \sigma\upsilon\nu4\alpha} = \frac{2\eta\mu\frac{2\alpha+4\alpha}{2}\cdot\eta\mu\frac{4\alpha-2\alpha}{2}}{2\sigma\upsilon\nu\frac{2\alpha+4\alpha}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\alpha-4\alpha}{2}}$$

$$= \frac{2\eta\mu3\alpha\eta\mu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu3\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

$$= \varepsilon\varphi3\alpha\cdot\varepsilon\varphi\alpha$$

β)

$$\varepsilon\varphi^2 2\chi - 3 = 0$$

$$\varepsilon\varphi^2 2\chi = 3 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi2\chi = \pm\sqrt{3}$$

i) εφ2χ=$\sqrt{3}$

εφ2χ=εφ60^0

2χ=180^oκ+60^0

χ=90^0κ+30^0 , κ=0, ±1, ±2, …

ii) εφ2χ=-$\sqrt{3}$

εφ2χ=εφ(-60^o)

2χ=180^oκ-60^o

χ=90^oκ-30^o , κ=0, ±1, ±2, …

2. α)	ημ(2χ+60°)=συν(90°+χ) ημ(2χ+60°)=-ημχ ημ(2χ+60°)=ημ(-χ) i) $2\chi+60°=360°\kappa-\chi$ $3\chi=360°\kappa-60°$ $\chi=120°\kappa-20°$, $\kappa\in z$ $\kappa=1 \Rightarrow \chi=100°$ $\kappa=2 \Rightarrow \chi=220°$ $\kappa=3 \Rightarrow \chi=340°$ ii) $2\chi+60°=360°\kappa+180°+\chi$ $\chi=360°\kappa+120°$, $\kappa\in z$ $\kappa=0 \Rightarrow \chi=120°$
β)	5ημ^{2}α+3συνα-5=0 5(1-συν^{2}α)+3συνα-5=0 5-5συν^{2}α+3συνα-5=0 συνα(5συνα-3)=0 συνα=0 απορ. διότι 0° 〈 α 〈 90° $5συνα=3\Rightarrow συνα=\frac{3}{5}$ $\Rightarrow ημα=+\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$ Α=ημ2α+συν2α=2ημασυνα+2συν^{2}α-1 $=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}+2\left(\frac{3}{5}\right)^2-1$ $=\frac{24}{25}+2\cdot\frac{9}{25}-1=\frac{17}{25}$

3.

Πρώτος τρόπος

συν^2(α+β)+συν^2(α-β)-συν2ασυν2β=

$$=\frac{1+συν2(α+β)}{2}+\frac{1+συν2(α-β)}{2}-συν2ασυν2β$$

$$=\frac{1+συν2(α+β)+1+συν2(α-β)-2συν2ασυν2β}{2}$$

$$=\frac{2+συν2(α+β)+συν2(α-β)-\left[συν(2α+2β)+συν(2α-2β)\right]}{2}$$

$$=\frac{2+συν(2α+2β)+συν(2α-2β)-συν(2α+2β)-συν(2α-2β)}{2}$$

$$=\frac{2}{2}=1$$

Δεύτερος τρόπος

συν^2(α+β)+συν^2(α-β)-συν2ασυν2β=

$$=\frac{1+συν2(α+β)}{2}+\frac{1+συν2(α-β)}{2}-συν2ασυν2β$$

$$=\frac{2+2συν\frac{2(α+β)+2(α-β)}{2}\cdot συν\frac{2(α+β)-2(α-β)}{2}-2συν2ασυν2β}{2}$$

$$=\frac{2+2συν2ασυν2β-2συν2ασυν2β}{2}$$

$$=\frac{2}{2}=1$$

Τρίτος τρόπος

συν^2(α+β)+συν^2(α-β)-συν2ασυν2β=

=(συνα· συνβ-ημαημβ)^2+(συνασυνβ+ημαημβ)^2-συν2ασυν2β

=συν^{2}ασυν^{2}β+ημ^{2}α ημ^{2}β-2ημα ημβ συνα συνβ+συν^{2}ασυν^{2}β+ημ^{2}αημ^{2}β
+2ημαημβσυνασυνβ-συν2ασυν2β

=2συν^{2}ασυν^{2}β+2ημ^{2}αημ^{2}β-συν2ασυν2β

=2συν^{2}ασυν^{2}β+2(1-συν^{2}α)(1-συν^{2}β)-(2συν^{2}α-1)(2συν^{2}β-1)

=2συν^{2}ασυν^{2}β+2-2συν^{2}α-2συν^{2}β+2συν^{2}ασυν^{2}β-4συν^{2}ασυν^{2}β
+2συν^{2}α+2συν^{2}β-1

=2-1=1

4. α)	$\dfrac{9!}{3!2!}=30240$
β)	$\dfrac{7!}{2!}=2520$
γ)	$\dfrac{8!}{3!}=6720$
5 α)	5!=120
β)	4!2!=48
γ)	3!2!2!=24
6.	$N(\Omega)=\dbinom{8}{4}=\dfrac{8!}{4!4!}=70$ $N(A)=\dbinom{3}{3}\dbinom{5}{1}=5$ $\Rightarrow P(A)=\dfrac{5}{70}=\dfrac{1}{14}$ $N(B)=\dbinom{3}{2}\dbinom{5}{2}=3\cdot\dfrac{5!}{2!3!}=30$ $\Rightarrow P(B)=\dfrac{30}{70}=\dfrac{3}{7}$ $N(\Gamma)=\dbinom{3}{1}\dbinom{5}{3}+\dbinom{3}{2}\dbinom{5}{2}+\dbinom{3}{3}\dbinom{5}{1}=65$ $\Rightarrow P(\Gamma)=\dfrac{65}{70}=\dfrac{13}{14}$ ή $P(\Gamma)=1-P(\Gamma')=1-\dfrac{\binom{5}{4}}{70}=1-\dfrac{5}{70}=\dfrac{65}{70}=\dfrac{13}{14}$

7. α)

i) Η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί στο βαθμό Δ είναι:

$360^o-(80^o+60^o+30^o+90^o)=360^o-260^o=100^o$

100^o 200

360^o X

$$X=\frac{200\cdot 360}{100}=720 \text{ μαθητές}$$

ii) Βαθμός Α: $\frac{60^o\cdot 720}{360^o}=120$ μαθητές

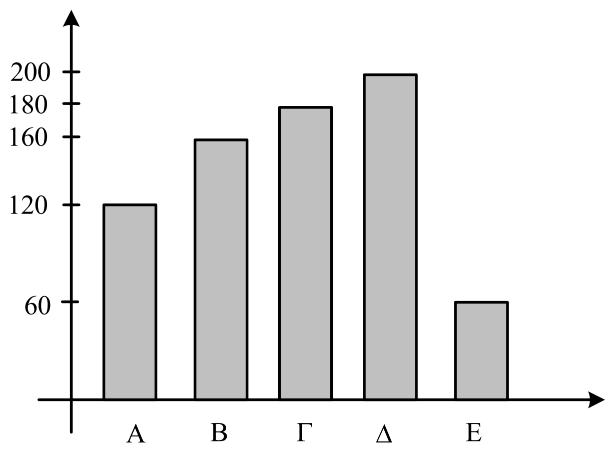
Βαθμός Β: $\frac{80^o}{360^o}\cdot 720=160$ μαθητές

Βαθμός Γ: $\frac{90^o}{360^o}\cdot 720=180$ μαθητές

Βαθμός Δ: $\frac{100^o}{360^o}.720=200$ μαθητές

Βαθμός Ε: $\frac{30^o}{360^o}\cdot 720=60$ μαθητές

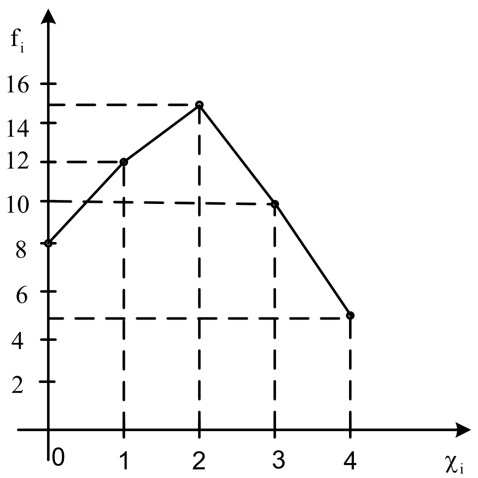
Βαθμός	f_i
Α	120
Β	160
Γ	180
Δ	200
Ε	60



8. α)

Αριθμός παιδιών x_i	Αριθμός Οικογενειών f_i
0	8
1	12
2	15
3	10
4	5
	$\Sigma f_i=50$

β)



γ) 15 οικογένειες έχουν από 2 παιδιά

δ) 35 οικογένειες έχουν το πολύ από 2 παιδιά

ε) $\frac{10}{50} \cdot 100 = 20$ % έχουν από 3 παιδιά

9. α) **<u>Πρώτος τρόπος</u>**

Έστω x η μέση τιμή των βαθμών των αγοριών.

$\frac{16.12 + 10x}{22}$ =15 $\Rightarrow$

10x +192=330 $\Rightarrow$

10x =138 $\Rightarrow$ x =13,8

<u>Δεύτερος τρόπος</u>

Σ=22.15=330

$Σ_K$=12.16=192

$Σ_A$=330-192=138

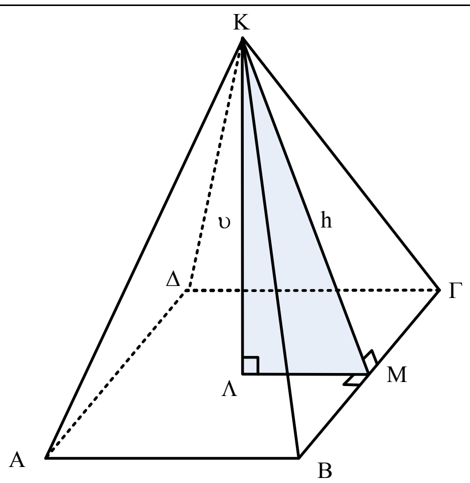
$x = \frac{138}{10} = 13{,}8$

β) i) x , ψ,10,11

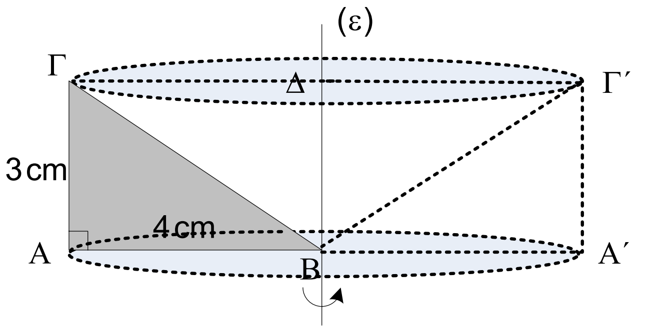
$x_δ$= 9 $\Rightarrow \frac{\psi + 10}{2} = 9 \Rightarrow \psi = 8$

$\bar{x} = \psi \Rightarrow \frac{x + 8 + 10 + 11}{4} = 8$

$\Rightarrow x + 29 = 32 \Rightarrow x = 3$

	ii) $\sigma = \sqrt{\dfrac{(3-8)^2 + (8-8)^2 + (10-8)^2 + (11-8)^2}{4}}$ $\Rightarrow\ \sigma = \sqrt{\dfrac{25+0+4+9}{4}} = \sqrt{\dfrac{38}{4}} = 3{,}08$
10α) β)	Έστω χ η ακμή του κύβου τότε $\chi^3=64 \Rightarrow \chi = 4$ m $E_{κυβ.}=6\chi^2=6\cdot4^2=96$ m^2. Έστω γ το ύψος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου $E_{ορθ.\ παρ.}=2E_{κύβ.}$ $\Rightarrow \cancel{2}(3\cdot4+3γ+4γ)=\cancel{2}\cdot96$ $\Rightarrow$ 7γ+12=96 $\Rightarrow$ γ=12 m V= α.β.γ $\Rightarrow$ V= 3.4.12= 144 m^3 .
11 γ) δ)	 α) $υ=\dfrac{2}{3}α$ $V=48 \Rightarrow \dfrac{1}{3}α^2.υ=48$ $\Rightarrow \dfrac{1}{3}α^2.\dfrac{2}{3}.α=48$ $\Rightarrow α^3= 216 \Rightarrow α=6$ cm β) $υ=\dfrac{2}{3}.6 = 4$ cm $E_β=α^2 \Rightarrow E_β=36$ cm^2 Από το τρίγωνο ΚΛΜ : $h^2= υ^2+ (ΛΜ)^2$ $h^2= 4^2+ 3^2 \Rightarrow h= 5$ cm $E_{ολ.}= E_π+E_β = \dfrac{4ah}{2} + E_β$ $\Rightarrow E_{ολ}= 12.5+36 \Rightarrow E_{ολ.}= 96$ cm^2

12



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 \Rightarrow (ΒΓ)^2 = 9+16 = 25 \Rightarrow (ΒΓ) = 5$ cm.

$E_{ΑΒ} = π(ΑΒ)^2 = π.4^2 = 16π$ cm^2.

$E_{ΑΓ} = 2π(ΑΒ)(ΑΓ) = 2π.4.3 = 24π$ cm^2

$E_{ΒΓ} = π\,(ΓΔ)(ΒΓ) = π\,.4.5 = 20π$ cm^2

$E_{ολ.} = 16π+24π+20π = 60π$ cm^2

$V_{Ζητ.} = V_{Κυλ.} - V_{Κών.}$

$V_{Κυλ.} = π(ΑΒ)^2(ΑΓ) = π\,.4^2.3 = 48π$ cm^3.

$V_{Κών.} = \frac{1}{3}π.(ΓΔ)^2(ΔΒ) = \frac{1}{3}.π.16.3 = 16π$ cm^3.

$V_{Ζητ.} = 48π - 16π = 32π$ cm^3.

13

$$\frac{R.υ.E}{2(R+υ)} = \frac{R.υ.(2πR^2 + 2πR.υ)}{2(R+υ)}$$

$$= \frac{R.υ.\cancel{2}πR\cancel{(R+υ)}}{\cancel{2}\cancel{(R+υ)}} =$$

$$= πR^2 \cdot υ$$

$$= V$$

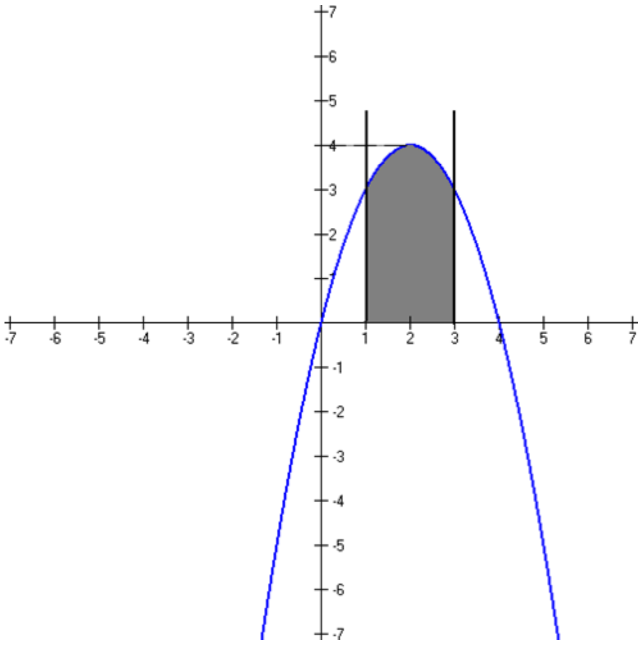
14

α)

$$\int\left(\frac{1}{9} - \sqrt{x} + \frac{1}{x^3}\right)dx = \int\frac{1}{9}dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{-3}dx$$

$$= \frac{x}{9} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^{-2}}{-2} + c$$

$$= \frac{x}{9} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2x^2} + c$$

β)	$\int 2\eta\mu 5x.\sigma\upsilon\nu 3x dx = \int[\eta\mu(5x+3x)+\eta\mu(5x-3x)]dx$ $= \int(\eta\mu 8x+\eta\mu 2x)dx$ $= -\frac{1}{8}\sigma\upsilon\nu 8x - \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x + c$
γ)	$\int \eta\mu^2 x.\sigma\upsilon\nu^3 x dx = \int \eta\mu^2 x.\sigma\upsilon\nu^2 x \sigma\upsilon\nu x dx$ $= \int \eta\mu^2 x.(1-\eta\mu^2 x)\sigma\upsilon\nu x dx$ $= \int \eta\mu^2 x.\sigma\upsilon\nu x dx - \int \eta\mu^4 x.\sigma\upsilon\nu x dx$ $= \frac{\eta\mu^3 x}{3} - \frac{\eta\mu^5 x}{5} + c$
15 α)	i) Για x=0 $\Rightarrow$ ψ=0 Για ψ=0 $\Rightarrow$ $4x-x^2=0$ $\Rightarrow$ x(4-x)=0 $\Rightarrow$ x=0 , x=4 Τα σημεία τομής με τους άξονες είναι : (0,0) και (4,0) iii) ψ΄=4-2x Ψ΄=0 $\Rightarrow$ x=2 ψ΄΄= -2< 0 $\Rightarrow$ (2,4) μέγιστο
β)	

γ) $E=\int_1^3 (4x-x^2)dx$

$=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^3$

$=(18-9)-(2-\frac{1}{3})$

$=7+\frac{1}{3}=\frac{22}{3}$ τετ. μονάδες

16α) Για $x=3 \Rightarrow ψ=3^2-3\cdot3+2=2$

$\Rightarrow A(3,2)$ ανήκει στην (κ)

β) $ψ'=2x-3$

$λ_{εφ.}=2\cdot3-3=3$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $ψ-2=3(x-3) \Rightarrow 3x-ψ=7$

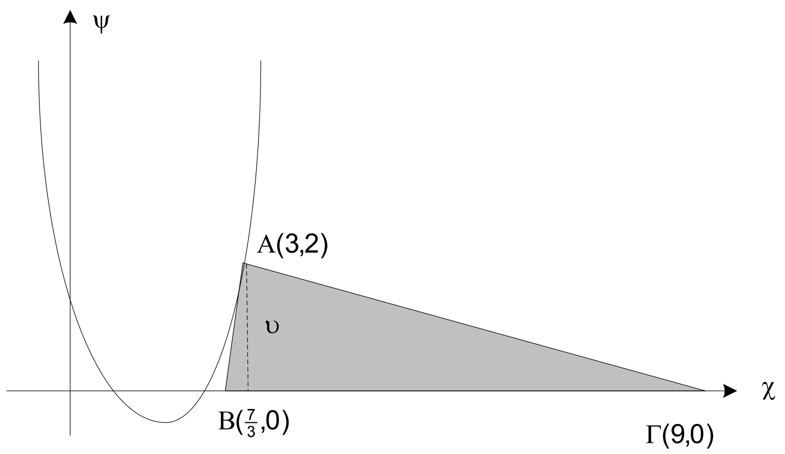
$λ_{καθ.}=-\frac{1}{3}$

Η εξίσωση της κάθετης είναι: $ψ-2=-\frac{1}{3}(x-3) \Rightarrow x+3ψ=9$

γ) $\left.\begin{matrix}3x-ψ=7\\ ψ=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow x=\frac{7}{3} \Rightarrow B\left(\frac{7}{3},0\right)$

$\left.\begin{matrix}x+3ψ=9\\ ψ=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow x=9 \Rightarrow Γ(9,0)$

$(ΒΓ)=9-\frac{7}{3}=\frac{20}{3}$ μονάδες



$E_{ΑΒΓ}=\frac{1}{2}(ΒΓ)υ=\frac{1}{2}\cdot\frac{20}{3}\cdot2=\frac{20}{3}$ τετ. μονάδες