ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ (Τ.Ε.Ι.)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΙ

Ιούνιος 1999
Χρόνος: 2 ώρες 30 λεπτά

Από τα 6 ζητήματα να λύσετε τα 4.

Ζήτημα 1ο

α) Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης ημ $(2\chi + 30°)$ – συν $(\chi - 12°) = 0$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $2συν^2\chi - 5ημ\chi + 1 = 0$ που βρίσκονται στο διάστημα $0° \leq \chi < 360°$

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες

(ι) $\dfrac{συν2\beta - συν2\alpha}{ημ2\alpha + ημ2\beta} = εφ(\alpha - \beta)$ (ιι) συν4θσυν3θ – ημ8θημθ = συν5θσυν4θ

(Μονάδες 9)

Ζήτημα 2°

α) Να δείξετε ότι: $(ημ2θ+συν2θ)^2 + (ημ2θ-συν2θ)^2 - 2συν2θ = 4ημ^2 θ$ (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η τριγωνομετρική εξίσωση

ημ(θ+60°) = 2ημθ για $θ \neq 180^0κ+90°$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ μετασχηματίζεται στην εξίσωση $εφθ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ και ακολούθως να βρείτε η γενική ης λύση. (Μονάδες 8)

γ) (ι) Να δείξετε ότι $\dfrac{1-εφ^2θ}{1+εφ^2θ} = συν2θ$

(ιι) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα που αποδείξατε στο (ι), ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να δείξετε ότι: $\dfrac{1}{συν2θ} + εφ2θ = εφ(θ + 45°)$ και στη συνέχεια να βρείτε η γενική λύση ης εξίσωσης: $\dfrac{1}{συν2θ} + εφ2θ = εφ4θ$

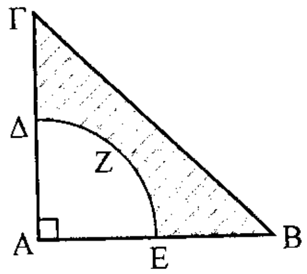
(Μονάδες 9)

Ζήτημα 3°

α) Κύβος και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχουν τον ίδιο όγκο. Η ακμή του κύβου είναι 6 cm και το ύψος του παραλληλεπιπέδου είναι 12 cm.
Αν η μία πλευρά της βάσης του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι διπλάσια της άλλης να βρείτε:
(ι). τον όγκο του κύβου
(ιι) τις διαστάσεις της βάσης του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου
ιιι) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κύβου και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. (Μονάδες 8)

(β) Η ακτίνα R και το ύψος υ ορθού κυκλικού κυλίνδρου ικανοποιούν τις σχέσεις R+υ=9 και υ>R. Αν το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι $E_K=40\pi$ cm^2, να βρείτε:
(ι) το μήκος της ακτίνας R και του ύψους υ του κυλίνδρου.
(ιι) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του κυλίνδρου. (Μονάδες 8)

γ)



Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\hat{A} = 90°$ και (ΑΒ)=(ΑΓ)=4α cm. Με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ΑΕ μήκους 2α cm γράψαμε το τόξο ΕΖΔ. Το σχήμα στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την πλευρά ΑΓ. Να βρείτε συναρτήσει του α το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται από το γραμμοσκιασμένο χωρίο.

(Μονάδες 9)

Ζήτημα 4ο

α) Ορθό τριγωνικό πρίσμα έχει βάση ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 2α cm και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $E_{\pi\alpha\rho} = 68\alpha^2\ cm^2$. Να βρείτε συναρτήσει. του α

(ι) το ύψος του πρίσματος

(ιι) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του πρίσματος

(ιιι) τον όγκο του πρίσματος

(Μονάδες 8)

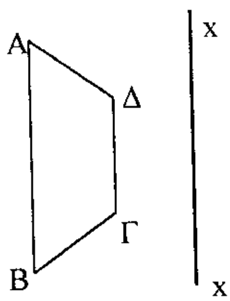
β) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 8cm και παράπλευρη ακμή $4\sqrt{5}$ cm. Να βρείτε:

(ι) το μήκος του ύψους υ και του παράπλευρου ύψους h της πυραμίδας.

(ιι) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.

(Μονάδες 8)

γ)



Στο σχήμα, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις (ΑΒ) = 4α cm, (ΓΔ) 2α cm και ύψος α cm. Το τραπέζιο στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα $\chi'\chi$ που είναι παράλληλος προς την πλευρά ΔΓ και απέχει από αυτή απόσταση α cm. Να βρείτε συναρτήσει του α το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.

(Μονάδες 9)

Ζήτημα 5^o

α) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 \left(5\chi^4 - \frac{3}{\chi^2} + 2\right) d\chi$ (Μονάδες 8)

β) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi = \frac{\chi^2 - 2\chi + 1}{\chi^2 + 1}$

(ι) Να δείξετε ότι $\frac{d\psi}{d\chi} = \frac{2\chi^2 - 2}{\left(\chi^2 + 1\right)^2}$

(ιι) Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατά της (μέγιστο και ελάχιστο)

(Μονάδες 8)

γ) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi = \chi^2 + 1$

(ι) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης στο σημείο Α αυτής που έχει τετμημένη $\chi=1$

(ιι) Η εφαπτομένη της καμπύλης σε σημείο $B(\chi_1,\psi_1)$ αυτής έχει συντελεστή κατεύθυνσης $\lambda=-\frac{1}{2}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β.

(Μονάδες 9)

ΖΗΤΗΜΑ 6ο

α) Αν $\psi=\chi^3+\frac{1}{\chi^3}$ να δείξετε ότι ισχύει: $\chi^2\frac{d^2\psi}{d\chi^2}+\chi\frac{d\psi}{d\chi}-9\psi=0$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το $\int\left(1+\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi\right)dx$ (Μονάδες 8)

γ) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi=\alpha\chi^2+\beta\chi+3$

(ι) Αν το σημείο Α(1,4) είναι τοπικό ακρότατο της καμπύλης να δείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=2$.

(ιι) Αφού βρείτε και τα σημεία τομής της καμπύλης με τους άξονες των συντεταγμένων να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

(ιιι) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα των χ.

(Μονάδες 9)