

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΤΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: **Τετάρτη, 23 Ιουνίου 2004**

7.30 π.μ. - 10.30 π.μ.

ΤΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄: **Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x=t^2-2$ και $y=\frac{t^3}{3}-t$, $t>0$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με $t=3$.

2. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Να δείξετε ότι $A^2 = A$ και να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση $A^{11} + \lambda I = B$, όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας 2×2 .

3. Μεταξύ 200 μαθητών οι 120 έχουν καλό βαθμό στα Μαθηματικά, οι 160 έχουν καλό βαθμό στα Ελληνικά και οι 100 έχουν καλό βαθμό και στα δύο μαθήματα. Αν επιλέξω ένα μαθητή στην τύχη να υπολογίσετε την πιθανότητα να έχει καλό βαθμό:
- (α) τουλάχιστον στο ένα από τα δύο μαθήματα.
 - (β) στα Ελληνικά αλλά όχι στα Μαθηματικά.
 - (γ) στα Ελληνικά δεδομένου ότι δεν έχει καλό βαθμό στα Μαθηματικά.

4. Αν η μέση τιμή των διαδοχικών ακέραιων αριθμών $1, 2, 3, 4, \dots, n$ είναι 4 να βρείτε:
- (α) το n .
 - (β) την τυπική απόκλιση σ της κατανομής των αριθμών αυτών.

5. Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν με τα ψηφία 2, 3, 4, 5, 8 αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου; Πόσοι από τους αριθμούς αυτούς περιέχουν το ψηφίο 3 και όχι το 5;

6. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(1, -2)$ ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 17 = 0$.

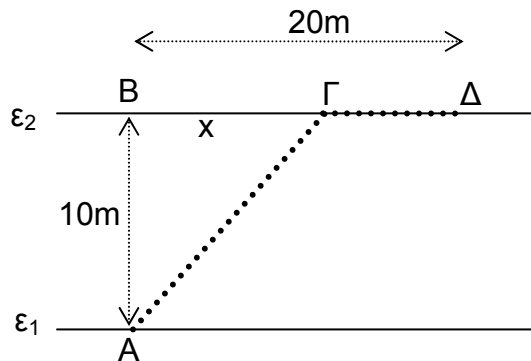
7. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \frac{5dx}{(x+1)(4x^2+1)}$.
8. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των y , του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση $y = x^2 + 1$, την εφαπτομένη της στο σημείο $(2,5)$ και τον άξονα των y .
9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^\alpha - \alpha x + 10$, $x > 0$ και $0 < \alpha < 1$. Να δείξετε ότι η $f(x)$ έχει τοπικό ακρότατο στο $x=1$ και να το χαρακτηρίσετε.
10. Δίνονται τα σταθερά σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(-\alpha, 0)$, $\alpha > 0$ και το μεταβλητό σημείο $M(x,y)$. Να βρείτε την εξίσωση του σχήματος πάνω στο οποίο βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του M για τον οποίο το γινόμενο των κλίσεων των ευθειών MA και MB ισούται με κ , $\kappa \neq 0$. Να βρείτε για ποιες τιμές του κ το σημείο M κινείται πάνω σε έλλειψη.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 2}$.
- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τις εξισώσεις των ασυμπτώτων, τις συντεταγμένες των τοπικών ακροτάτων, τα σημεία τομής με τους άξονες και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.
- (β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 2}$, τον άξονα των x και την ευθεία $x = e + 2$.
2. Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 4\alpha x$, $\alpha > 0$ με εστία E και M τυχαίο σημείο της διαφορετικό από το $O(0,0)$. Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο M τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα.
- (α) Να δείξετε ότι η BE είναι η μεσοκάθετη του AM .
- (β) Αν Z είναι το σημείο του άξονα $x'x$ για το οποίο $AE = EZ$, να δείξετε ότι η ZM είναι η κάθετη της παραβολής στο σημείο M .
- (γ) Από το σημείο B φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ που τέμνει την ευθεία OM στο σημείο P . Να βρεθεί η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του σημείου P .
3. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 και παίρνουμε n σημεία $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ πάνω στην ε_1 και $n+1$ σημεία $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n+1}$ πάνω στην ε_2 .

- (α) Να βρείτε το πλήθος των τριγώνων που έχουν κορυφές τρία από τα πιο πάνω σημεία.
- (β) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα τρίγωνο από τα πιο πάνω, ποια η πιθανότητα το τρίγωνο αυτό να έχει δύο κορυφές στην ε_2 ;
- (γ) Αν η προηγούμενη πιθανότητα είναι $\frac{10}{19}$ να βρείτε το n .

4.



Στο σχήμα, οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες όχθες ποταμού πλάτους $AB=10m$. Εργοστάσιο βρίσκεται στο σημείο A της ε_1 ενώ στο σημείο Δ της ε_2 , με $B\Delta=20m$, βρίσκεται ηλεκτροπαραγωγός σταθμός ο οποίος θα πρέπει να ενωθεί με το εργοστάσιο μέσω καλωδίου. Μέρος του καλωδίου θα είναι υποβρύχιο (απόσταση $ΑΓ$) και μέρος υπόγειο (απόσταση $ΓΔ$). Το κόστος της υποβρύχιας καλωδίωσης είναι $\pounds 5/m$ και της υπόγειας καλωδίωσης είναι $\pounds 3/m$. Να βρείτε την απόσταση $B\Gamma=x$ ώστε το συνολικό κόστος της καλωδίωσης να είναι το ελάχιστο δυνατόν και να βρείτε το ελάχιστο κόστος.

5. (α) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x = 0$.
- (β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $f(x) = \int_x^1 t^2 (\ln t)^2 dt$.
- (γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

----- ΤΕΛΟΣ -----