

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ**Διάρκεια εξέτασης: **Τρεις (3) ώρες****ΜΕΡΟΣ Α΄:** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int (6x^2 - 7)dx$.
- 2) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών αναγραμματισμών της λέξης ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με Δ και έχουν όλα τα Α μαζί;
- 3) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{τοξ εφ} x}{e^{2x} - 1}$.
- 4) Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y + \lambda = 0$ έχει ακτίνα $R=2$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου και την τιμή του λ .
- 5) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $x^2 - y^3 + xy - 5 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της $(2,1)$.
- 6) Η συνάρτηση f με εξίσωση $f(x) = ax^3 + bx^2 + x - 1$ έχει σημείο καμπής το σημείο $A(-1,2)$. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και b .
- 7) Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν: $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ και $P(A|B) = \frac{1}{5}$. Να δείξετε ότι $P(B) = \frac{5}{12}$ και να υπολογίσετε τις πιθανότητες: $P(A \cup B)$, $P(B-A)$ και $P(B|A')$.
- 8) Δίνονται οι πίνακες $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ και $\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Να βρείτε τον πίνακα $\mathbf{\Delta}$ που ορίζεται από τη σχέση $\mathbf{\Delta} = \frac{1}{9}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - 3\mathbf{\Gamma})$ και να δείξετε ότι $\mathbf{\Delta}^{-1} = \mathbf{\Delta}$.
- 9) Με τη χρήση του μετασχηματισμού $u = \sqrt{6 - 2x}$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 x\sqrt{6 - 2x} dx$.
- 10) (α) Να γράψετε τον ορισμό της παραβολής.
(β) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο $E(-1,1)$ και διευθετούσα την ευθεία $4y - 3x = 0$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) Δίνεται η συνάρτηση $y = (x-1)^2 e^x$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης, να κάνετε τη γραφική της παράσταση.
- 2) Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\alpha > \beta > 0$, και σημείο της $M(\alpha \sin \theta, \beta \cos \theta)$ με $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Αν η εφαπτομένη της έλλειψης στο M τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο P και τον άξονα Oy στο σημείο Γ , ενώ η κάθετη αυτής στο σημείο M τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο Σ , να δείξετε ότι:

$$(i) \frac{\alpha^2}{(OP)^2} + \frac{\beta^2}{(O\Gamma)^2} = 1.$$

$$(ii) (OP)(O\Sigma) = \alpha^2 \varepsilon^2, \text{ όπου } \varepsilon \text{ η εκκεντρότητα της έλλειψης.}$$

- 3) Η μεγάλη βάση ενός ισοσκελούς τραπεζίου έχει μήκος $(2x+2)$ μέτρα, ενώ κάθε μια από τις υπόλοιπες τρεις πλευρές του έχει μήκος 2 μέτρα. Να βρείτε την τιμή του x ώστε το τραπέζιο να έχει μέγιστο εμβαδόν.
- 4) Ένα δοχείο Δ_1 περιέχει 3 λευκές και 5 μαύρες μπάλες. Παίρνουμε τυχαία 4 μπάλες από το Δ_1 και τις τοποθετούμε στο κενό δοχείο Δ_2 . Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: «το Δ_2 περιέχει μόνο μαύρες μπάλες».

B: «το Δ_2 περιέχει ακριβώς 2 λευκές μπάλες».

Γ: «το Δ_2 περιέχει τουλάχιστον 2 λευκές μπάλες».

Στη συνέχεια, από το Δ_2 παίρνουμε 2 μπάλες. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου:

E: «και οι δύο μπάλες είναι λευκές».

- 5) Να δείξετε ότι $\int \frac{\eta \mu x}{(1 + \sigma \upsilon \nu x)^2} dx = \frac{1}{1 + \sigma \upsilon \nu x} + C$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή του

ολοκληρώματος $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \eta \mu x}{(1 + \sigma \upsilon \nu x)^2} dx$.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ**ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ**Διάρκεια εξέτασης: **Τρεις (3) ώρες****ΜΕΡΟΣ Α΄:** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1) Να υπολογίσετε τον όγκο κύβου ακμής 7 cm.
- 2) Έμπορος πωλεί τα ψυγεία του με έκπτωση 15% πάνω στην τιμή που αναγράφεται στο κάθε ένα. Πόσα θα πληρώσει ο αγοραστής για ένα ψυγείο στο οποίο αναγράφεται τιμή £1040;
- 3) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ. Πόσοι από τους αναγραμματισμούς αυτούς αρχίζουν και τελειώνουν με Σ;
- 4) Σε ένα πείραμα τύχης ρίχνουμε ένα ζάρι μια φορά.
 - (α) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος.
 - (β) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου A: «ή ένδειξη του ζαριού είναι μεγαλύτερη του 2».
- 5) Ποιο κεφάλαιο τοκίζόμενο με απλό τόκο προς 5,25% για 4 χρόνια δίνει τόκο £3465;
- 6) Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου και

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cup B) = \frac{2}{3}, \quad \text{να υπολογίσετε τις πιθανότητες:}$$

- (α) $P(A')$
 - (β) $P(A \cap B)$
 - (γ) $P(B - A)$
- 7) Η μέση τιμή του βάρους των 20 μαθητών μιας τάξης είναι 60 kg. Αν από την τάξη φύγουν 3 μαθητές με βάρος 62 kg ο καθένας και έρθει ένας άλλος μαθητής με βάρος 48 kg, να υπολογίσετε τη νέα μέση τιμή του βάρους των μαθητών της τάξης.
 - 8) Η γενέτειρα ενός κώνου σχηματίζει με το ύψος του γωνία 30° και η ακτίνα της βάσης του είναι 3 cm. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του κώνου.
 - 9) Ο κάθε ένας από τους 540 μαθητές ενός Λυκείου συμμετέχει σε ένα από τους 4 όμιλους του σχολείου του όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

Να υπολογίσετε:

- (α) τον αριθμό των μαθητών που συμμετέχουν στον Αθλητικό όμιλο.
- (β) τον αριθμό των μαθητών που συμμετέχουν στο Λαογραφικό όμιλο, αν αυτοί είναι κατά 30 λιγότεροι από τους μαθητές που συμμετέχουν στο Μουσικό όμιλο.
- (γ) το ποσοστό των μαθητών που συμμετέχουν στο Λαογραφικό όμιλο.

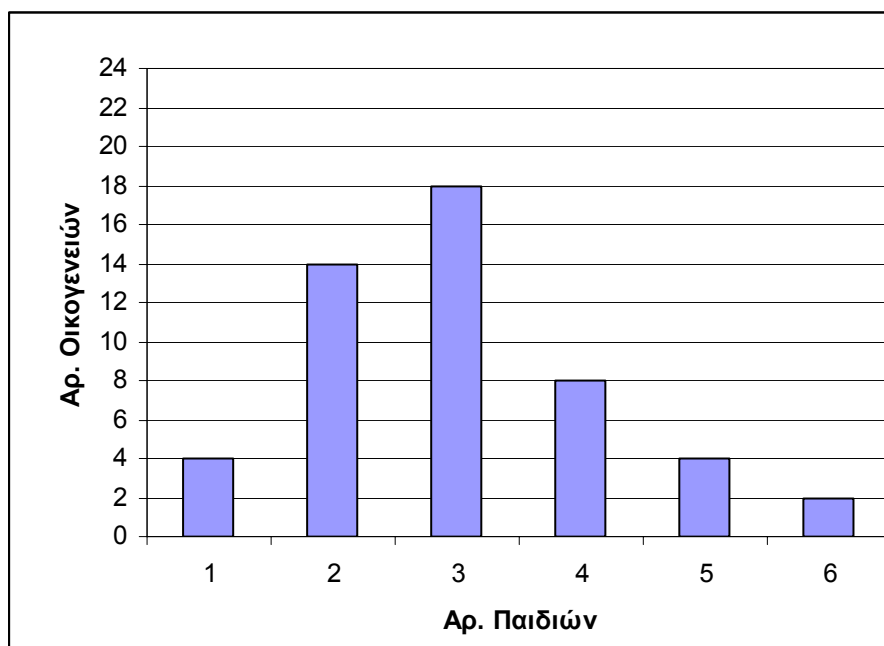


10) Κάποιος ταξιδεύει με μέση ταχύτητα 100 km/h και χρειάζεται 114 λεπτά για να καλύψει την απόσταση μεταξύ δύο πόλεων Α και Β. Να υπολογίσετε:

- (α) την απόσταση μεταξύ των δύο πόλεων.
- (β) πόσο περισσότερο χρόνο θα χρειαζόταν για να καλύψει την απόσταση αυτή αν έτρεχε με ταχύτητα 95 km/h.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) Να υπολογίσετε το πλήθος των τετραψήφιων αριθμών που είναι μικρότεροι του 4000 και που μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας τα ψηφία 0,1,2,3,4,5,6 χωρίς επανάληψη. Αν πάρω στην τύχη ένα από τους τετραψήφιους αριθμούς που σχηματίστηκαν, να υπολογίσετε την πιθανότητα ο αριθμός αυτός να τελειώνει σε 3.
- 2) Το παράπλευρο ύψος κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι 12 cm και σχηματίζει με τη βάση της γωνία 60° . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.
- 3) Σε μια έρευνα καταμετρήθηκε ο αριθμός των παιδιών που είχε κάθε μια από 50 οικογένειες και τα αποτελέσματα φαίνονται στο πιο κάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων.



- (α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων για την κατανομή αυτή.
 - (β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του αριθμού των παιδιών.
 - (γ) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση της πιο πάνω κατανομής.
 - (δ) Να βρείτε τον αριθμό των οικογενειών που έχουν τουλάχιστο 3 παιδιά.
 - (ε) Αν επιλεγεί στην τύχη μια από τις οικογένειες της έρευνας, να υπολογίσετε την πιθανότητα να έχει το πολύ 3 παιδιά.
- 4) Από μια ομάδα 10 καθηγητών, από τους οποίους 6 είναι Φιλολόγοι και 4 είναι Μαθηματικοί, θα επιλεγεί μια τετραμελής επιτροπή.
 - (α) Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί η επιτροπή αυτή αν:
 - (i) δεν υπάρχει περιορισμός στην ειδικότητα.
 - (ii) στην επιτροπή θα συμμετέχουν 3 Φιλολόγοι και 1 Μαθηματικός.
 - (β) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Α: «στην επιτροπή συμμετέχουν τουλάχιστον 3 Μαθηματικοί»

- 5) Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο με πλευρά 8 cm και το $\Delta\Gamma Z$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ και $\Gamma Z = 6$ cm. Το γραμμοσκιασμένο σχήμα $ABZ\Delta$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα xy παράλληλο με την $A\Delta$ και σε απόσταση 2 cm από αυτή. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.

