

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2014

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Δευτέρα, 02/06/2014

8:00 – 11:00

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ
Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο
που αποτελείται από δυο (2) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄ **Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.**
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x - \frac{\pi}{2}}$

2. (α) Δίνεται ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Να αναφέρετε
τότε ορίζεται ο αντίστροφος πίνακας του B.

(β) Αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, να δείξετε ότι $A^{-1} = A - 4I$, όπου I
ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας.

3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{1+4x^2} \right) dx$

4. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της
συνάρτησης $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2 + 2$, $x > 0$ να έχει σημείο καμπής
το σημείο A(1,3).

5. Ένας υπάλληλος εργάζεται σ' ένα ξενοδοχείο μόνο πέντε μέρες την εβδομάδα.
- (α) Πόσες διαφορετικές επιλογές έχει ως προς τις μέρες που θα εργαστεί, αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στην επιλογή του.
- (β) Σε πόσες από αυτές τις επιλογές ο υπάλληλος θα εργαζόταν το πολύ μια μέρα από το Σαββατοκύριακο .
- 6 Δίνεται ο κύκλος (K) με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 80 = 0$
- Να βρείτε:
- (α) Το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.
- (β) Τις τιμές του α ($\alpha \in \mathbb{R}$) ώστε ο κύκλος (K) να αποκόπτει χορδή μήκους 16 μονάδων από την ευθεία $3x - 4y = \alpha$
7. Σ' ένα σχολείο φοιτούν 400 παιδιά. Από αυτά τα 250 είναι κορίτσια. Το 60% των κοριτσιών και το 20% των αγοριών ασχολούνται στον ελεύθερό τους χρόνο με το χορό.
- (α) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα παιδί, ποια η πιθανότητα να ασχολείται με το χορό.
- (β) Αν το παιδί που έχει επιλεγεί ασχολείται με το χορό, ποια η πιθανότητα να είναι αγόρι.
8. (α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.
- (β) Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(a) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = c$

9. Δίνεται η παραβολή $\psi^2=4\chi$ και το σημείο της $P(t^2,2t)$, $t \in \mathbb{R}-\{0\}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο P δίνεται από την εξίσωση (ε): $\psi t = \chi + t^2$

(β) Το χωρίο που περικλείεται από την εφαπτομένη (ε) , την παραβολή και τον άξονα $\psi'\psi$, περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα $\chi'\chi$ και παράγει όγκο $V(t)$. Αν $V(t) = \frac{16\pi}{3}$ κ.μ. , να υπολογίσετε τις τιμές του t.

10. Δίνεται η έλλειψη $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$, $\alpha > \beta > 0$. Ισοσκελές τρίγωνο BZH ,

(BZ=BH) , εγγεγραμμένο στην έλλειψη, έχει κορυφές στο B(0,β) και στα μεταβλητά σημεία της έλλειψης Z και H. Αν Θ είναι σημείο του επιπέδου τέτοιο ώστε το τετράπλευρο BZHΘ είναι παραλληλόγραμμο, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των κορυφών Z και H για τις οποίες το εμβαδόν του παραλληλογράμμου BZHΘ γίνεται μέγιστο.

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄ Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα μονοτονίας και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, να την παραστήσετε γραφικά.

2. Δίνεται η λέξη «ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ».

(α) (i) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης.

(ii) Αν επιλεγεί στη τύχη ένας από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A: “ο αναγραμματισμός να περιέχει τα τρία Α συνεχόμενα”

B: “ο αναγραμματισμός να περιέχει τα τρία Α συνεχόμενα και τα δυο Τ σε μη διαδοχικές θέσεις”

(β) Να βρείτε πόσες λέξεις μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας τέσσερα από τα γράμματα της λέξης «ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ».

3. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = \frac{1}{2}$$

(α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

(β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta, 0 < \alpha < \beta$, τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{x^3}{f(x)}, x \neq 0 \text{ και τον άξονα } x'x \text{ είναι } E = \frac{(\beta - \alpha) \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + 3)}{3}$$

4. Δίνεται η έλλειψη $\frac{\chi^2}{9} + \frac{\psi^2}{4} = 1$, και σημείο $P(3\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta)$ πάνω σε αυτή.
- (α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο P είναι $2\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \chi + 3\eta\mu\theta \cdot \psi = 6$
- (β) Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο P τέμνει τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ .
- (γ) Στα σημεία Γ και Δ φέρουμε ευθείες κάθετες στους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο T . Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου T , καθώς το σημείο P κινείται πάνω στην έλλειψη.
- (δ) Αν K και Λ είναι τα μέσα των χορδών PA' και PB' αντίστοιχα, όπου τα σημεία A' και B' είναι οι κορυφές της έλλειψης με συντεταγμένες $A'(-3, 0)$ και $B'(0, -2)$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου P ώστε η ευθεία $K\Lambda$ να είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο P .
5. (α) Δίνεται η συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(\chi) = 2 + 2\chi - \ln\chi$.
- (i) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης.
- (ii) Να αποδείξετε ότι $\frac{\ln\chi}{2} < 1 + \chi, \quad \forall \chi \in (0, +\infty)$
- (β) Αν $f(\chi) = \int_0^{\ln\chi} \frac{e^t t^2}{1+e^t} dt, \quad \chi \in [1, +\infty)$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $t = -u$ να αποδείξετε ότι
- $$f(\chi) - f\left(\frac{1}{\chi}\right) \leq \frac{2}{3} \cdot (\ln\chi)^2 \cdot (1+\chi)$$

----- Τ Ε Λ Ο Σ Ε Ξ Ε Τ Α Σ Η Σ -----

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

1. Στατιστική

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^v (\chi_i - \bar{\chi})^2}{v}} \quad \text{ή} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^K f_i (\chi_i - \bar{\chi})^2}{v}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^K f_i \chi_i^2}{v} - \bar{\chi}^2}, \quad \text{όπου} \quad v = \sum_{i=1}^K f_i$$

2. Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A \sin B \pm \sin A \eta\mu B, \quad \sin(A \pm B) = \sin A \sin B \mp \eta\mu A \eta\mu B$$

$$2\eta\mu\alpha \sin\beta = \eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta), \quad 2\sin\alpha \sin\beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$

$$2\eta\mu\alpha \eta\mu\beta = \sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta), \quad \eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sin\alpha, \quad \sin 2\alpha = \sin^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sin 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1 + \sin 2\alpha}{2}$$

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \sin 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad t = \epsilon\phi\alpha$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}, \quad \eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sin \frac{A+B}{2}$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}, \quad \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{B-A}{2} \eta\mu \frac{A+B}{2}$$

Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων:

	Σε μοίρες	Σε ακτίνια
$\eta\mu\chi = \eta\mu\alpha$	$\chi = 360^\circ\kappa + \alpha$ ή $\chi = 360^\circ\kappa + 180^\circ - \alpha, \kappa \in \mathbb{Z}$	$\chi = 2\kappa\pi + \alpha$ ή $\chi = 2\kappa\pi + \pi - \alpha, \kappa \in \mathbb{Z}$
$\sin\chi = \sin\alpha$	$\chi = 360^\circ\kappa \pm \alpha, \kappa \in \mathbb{Z}$	$\chi = 2\kappa\pi \pm \alpha, \kappa \in \mathbb{Z}$
$\epsilon\phi\chi = \epsilon\phi\alpha$	$\chi = 180^\circ\kappa + \alpha, \kappa \in \mathbb{Z}$	$\chi = \kappa\pi + \alpha, \kappa \in \mathbb{Z}$

3. Γεωμετρία

Ορθό Πρίσμα	$E_\pi = \Pi_\beta \cdot u$	$V = E_\beta \cdot u$
Κανονική Πυραμίδα	$E_\pi = \frac{1}{2} \Pi_\beta \cdot h$	$V = \frac{E_\beta \cdot u}{3}$
Κύλινδρος	$E_\kappa = 2\pi R u$	$V = \pi R^2 u$
Κώνος	$E_\kappa = \pi R \lambda$	$V = \frac{\pi R^2 u}{3}$
Κόλουρος Κώνος	$E_\kappa = \pi (R + \rho) \lambda$	$V = \frac{\pi u}{3} (R^2 + R\rho + \rho^2)$

4. Αναλυτική Γεωμετρία

Απόσταση δυο σημείων $A(\chi_1, \psi_1)$ και $B(\chi_2, \psi_2)$: $d = \sqrt{(\chi_2 - \chi_1)^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2}$

Απόσταση σημείου $\Sigma(\chi_1, \psi_1)$ από ευθεία $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$: $d = \frac{|A\chi_1 + B\psi_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Έλλειψη: $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$, $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, $\alpha > \beta$ Εστίες: $(\pm\gamma, 0)$, Διευθετούσες: $\chi = \pm \frac{\alpha}{\varepsilon}$,

Εκκεντρότητα: $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$

5. Παράγωγοι

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \quad \frac{d\psi}{d\chi} = \frac{d\psi}{du} \cdot \frac{du}{d\chi}$$

$$(\eta\mu\chi)' = \sigma\upsilon\nu\chi, \quad (\sigma\upsilon\nu\chi)' = -\eta\mu\chi, \quad (\varepsilon\varphi\chi)' = \tau\epsilon\mu^2\chi, \quad (\ln\chi)' = \frac{1}{\chi}$$

6. Ολοκληρώματα

$$\int \tau\epsilon\mu\chi \, d\chi = \ln|\tau\epsilon\mu\chi + \varepsilon\varphi\chi| + c \quad \int \sigma\tau\epsilon\mu\chi \, d\chi = \ln\left|\varepsilon\varphi\frac{\chi}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{d\chi}{\sqrt{\alpha^2 - \chi^2}} = \tau\omicron\xi\eta\mu\frac{\chi}{\alpha} + c \quad \int \frac{d\chi}{\alpha^2 + \chi^2} = \frac{1}{\alpha} \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\frac{\chi}{\alpha} + c$$

$$7. \text{ Απλός τόκος: } T = \frac{K \cdot \varepsilon \cdot X}{100}$$