ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: **Τετάρτη, 25 Ιουνίου 2003**

7.30 π.μ. – 10.30 π.μ.

ΤΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

   $x = t^3 + 4t, \quad y = 6t^2, \quad t \in R.$

   Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με $t = 1$. $(12x - 7\psi - 18 = 0)$

2. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος εφάπτεται του άξονα των y στο σημείο A(0, 2) και έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία $y = 2x$.
   $(x^2 + \psi^2 - 2x - 4\psi + 4 = 0)$

3. Να δείξετε ότι η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της καμπύλης $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln x}$.

4. Οι βαθμοί δέκα μαθητών σε ένα διαγώνισμα είναι:

   10, 12, x, 18, 13, y, 15, 18, 10, 10 .

   (α) Αν ο μέσος όρος των βαθμών είναι 13 και ο βαθμός y είναι διπλάσιος του x, να βρείτε τους x και y. $(x = 8, \ \psi = 16)$

   (β) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση της κατανομής, με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων. $(3{,}41)$

5. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

(α) Να δείξετε ότι $\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 7\mathbf{I} = \mathbf{0}$, όπου $\mathbf{I}$ ο μοναδιαίος 2 x 2 πίνακας και $\mathbf{0}$ ο μηδενικός 2 x 2 πίνακας.

(β) Να δείξετε ότι $7\mathbf{A}^{-1} = 4\,\mathbf{I} - \mathbf{A}$

(γ) Να βρείτε τον πίνακα $\mathbf{X}$ για τον οποίο ισχύει η σχέση

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 14 \\ 0 & -7 & 21 \end{pmatrix}$. $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

6. Το 75% του πληθυσμού μιας πόλης διαβάζει την εφημερίδα Α, το 65% διαβάζει την Α αλλά όχι τη Β και το 20% δεν διαβάζει καμιά από τις Α και Β. Παίρνουμε τυχαία ένα άτομο από τον πληθυσμό. Να βρείτε την πιθανότητα:

(α) Να διαβάζει και τις δύο εφημερίδες. $\frac{10}{100}$

(β) Να διαβάζει τη Β αλλά όχι την Α. $5/100$

(γ) Να διαβάζει την Α δεδομένου ότι διαβάζει τη Β. $2/3$

7. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4\alpha x$, $\alpha > 0$. Φέρουμε την εστιακή χορδή ΑΒ κάθετη στον άξονα των x.

(α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων (ε_1) και (ε_2) της παραβολής στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. $y = x + \alpha$ $\quad y = -x - \alpha$

(β) Να δείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες μεταξύ τους και να βρείτε το σημείο τομής τους Σ. $(-\alpha, 0)$

(γ) Το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή και τις δύο εφαπτόμενες στρέφεται κατά π γύρω από τον άξονα των x. Αν ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι 18π cm^3, να βρείτε την τιμή του α. $(\alpha = 3)$

8. Αν η γραφική παράσταση της f(x) παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία Α(5, 2) και Β(8,1) και η $f''(x)$ είναι συνεχής στο R, να δείξετε ότι

$$\int_5^8 x f''(x)\,dx = 1 .$$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & -x \\ 1 & -x & 1 \\ 3 & 2x & -2 \end{vmatrix}$.

(α) Να δείξετε ότι $f(x) = 5 - 5x^2$.

(β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x+1}{\sqrt{5f(3x)}}dx$. $\left(-\frac{1}{45}\sqrt{1-9x^2}+\frac{1}{15}\text{τοξημ}(3x)+c\right.$

10. (α) Αν $Μ_ν$ είναι οι μεταθέσεις ν διαφορετικών αντικειμένων, να δείξετε ότι:

$Μ_ν - Μ_{ν-1} = (ν-1)Μ_{ν-1}, \quad ν \geq 3.$

(β) Να δείξετε ότι: $2 + 2Μ_2 + 3Μ_3 + \ldots + (ν-1)\, Μ_{ν-1} = Μ_ν$.

<u>**ΜΕΡΟΣ Β΄:**</u> **Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες**

1. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{4x}{x^2+4}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, το σημείο τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, την ασύμπτωτη και να κάνετε τη γραφική της παράσταση. $\left(x \in \mathbb{R},\ (0,0),\ (-2,-1)\ min\right.$ $max\ (2,1))$

(β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) που ενώνει τα ακρότατα της καμπύλης περνά από την αρχή των αξόνων.

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και την ευθεία (ε). $(4\ln 2 - 2)$

2. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$ και το σημείο της Μ (τεμθ, εφθ), $0 \leq θ < 2π$, $θ \neq \frac{π}{2}, \frac{3π}{2}$. Το σημείο Κ είναι η προβολή του σημείου Μ πάνω στον άξονα των y. Προεκτείνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΚΜ προς το μέρος του Μ και στην προέκταση παίρνουμε σημείο Λ τέτοιο, ώστε (ΜΛ) = (ΚΜ).

Αν Α και Α΄ είναι οι κορυφές της υπερβολής (Α η κορυφή στο θετικό ημιάξονα των x) και Σ το σημείο τομής των ευθειών ΑΛ και Α΄Κ, να δείξετε ότι η εξίσωση του σχήματος στο οποίο ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του Σ είναι $y^2 = -2x - 1$.

3. Ευθεία (ε) περνά από το σταθερό σημείο Α(α,α), α>0 και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Οx και Oy στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα (Ο η αρχή των αξόνων). Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος S=(ΟΓ) + (ΟΔ). (4α)

4. (α) Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος είναι $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ και $P(\alpha)=\frac{1}{10}$, $P(\beta)=\frac{1}{5}$, $P(\gamma)=\frac{2}{5}$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα P(δ). $\left(3/10\right)$

   (β) Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{0, 1, 2, ..., 13\}$ ενός πειράματος και $P(\kappa) = \frac{\kappa(\kappa+1)}{1000}$, $\kappa = 1,2, ..., 13$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα P(0). $\left(\frac{9}{100}\right)$

5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $u = \pi - x$, να δείξετε ότι:

$$\int_0^\pi x f(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\eta\mu x)dx.$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi \frac{x\eta\mu^3 x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$. $\left(= \frac{\pi^2}{2} - \pi\right)$

---------------------ΤΕΛΟΣ---------------------