

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ - ΟΔΗΓΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ - Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 8 ασκήσεις. Να λύσετε μόνο τις 6 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1 Δίνονται οι κύκλοι $(K, 4cm)$ και $(\Lambda, 7cm)$. Αν το μήκος της διακέντρου ΚΛ των δύο κύκλων ισούται με $11cm$, να βρείτε τη θέση τους.

Λυση:

$$\delta = K\Lambda = 11cm$$
$$R + \rho = 4 + 7 = 11cm$$

$\delta = R + \rho$ άρα οι κύκλοι **εφάπτονται εξωτερικά**.

A2 Αν $\sin x = \frac{5}{13}$ και $270^\circ < x < 360^\circ$, χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 26\eta\mu x - 10\epsilon\varphi x + 5\tau\epsilon\mu x.$$

Λυση:

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$\Rightarrow \eta\mu^2 x = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} \quad \text{τότε} \quad \eta\mu x = \pm \frac{12}{13}$$

Η τελική πλευρά της γωνίας x ανήκει στο τέταρτο τεταρτημόριο

$$(270^\circ < x < 360^\circ). \text{ Άρα το } \eta\mu x < 0 \quad \text{τότε} \quad \eta\mu x = -\frac{12}{13}$$

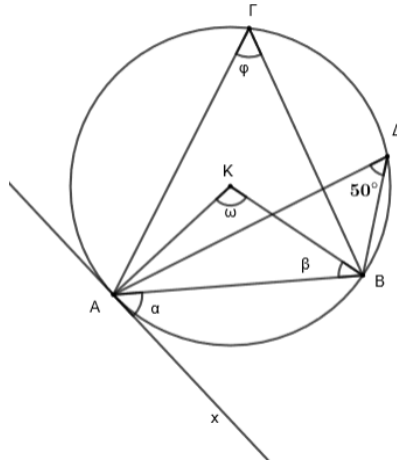
$$\epsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5} \quad \text{τότε} \quad \epsilon\varphi x = -\frac{12}{5}$$

$$\tau\epsilon\mu x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\frac{5}{13}} = \frac{13}{5} \quad \text{τότε} \quad \tau\epsilon\mu x = \frac{13}{5}$$

$$A = 26\eta\mu x - 10\epsilon\varphi x + 5\tau\epsilon\mu x = 26 \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) - 10 \cdot \left(-\frac{12}{5}\right) + 5 \cdot \left(\frac{13}{5}\right)$$
$$= -24 + 24 + 13$$

Τότε **A = 13**

- A3** Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K, ρ) . Αν η Ax εφαπτόμενη του κύκλου στο A και η γωνία $A\Delta B = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\varphi, \omega, \alpha, \beta$ δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



Λύση:

$$\alpha = 50^\circ \text{ (Θ. Χ. Ε)}$$

0,5+0,5

0,5+0,5

$$\varphi = \widehat{ADB} = 50^\circ \text{ (εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο AB)} \Rightarrow \varphi = 50^\circ$$

$$\omega = 2\varphi = 100^\circ \text{ (επίκεντρη γωνία διπλάσια της αντίστοιχης εγγεγραμμένης)}$$

$$\Rightarrow \omega = 100^\circ$$

0,5+0,5

Το τρίγωνο AKB είναι ισοσκελές ($KA = KB = \rho$)

$$\Rightarrow 2\beta + \omega = 180^\circ$$

1

$$\Rightarrow \beta = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ \Rightarrow \beta = 40^\circ$$

0,5

0,5

- A4** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) A = \sqrt{8} + 2\sqrt{18} - 3\sqrt{32} + \sqrt{50}$$

$$\beta) B = \frac{\sqrt{9\alpha^2\beta}}{\sqrt[3]{\alpha^6}}, \alpha > 0 \text{ και } \beta \geq 0$$

Λύση:

4 x 0,5

$$A = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{25} \cdot \sqrt{2}$$

$$A = 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \quad \text{τότε} \quad A = \sqrt{2} \quad 0,5$$

$$\beta) \quad B = \frac{\sqrt{9\alpha^2\beta}}{\sqrt[3]{\alpha^6}} = \frac{3\alpha\sqrt{\beta}}{\alpha^2} = \frac{3\sqrt{\beta}}{\alpha} \quad \text{τότε} \quad B = \frac{3\sqrt{\beta}}{\alpha} \quad 2,5$$

A5 Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sin(90^\circ + \omega) \cdot \tan(-\omega) \cdot \cos(180^\circ - \omega)}{\sin(180^\circ + \omega) \cdot \cos(360^\circ + \omega) \cdot \tan(360^\circ - \omega)} = -1$$

Λύση:

$$\frac{\sin(90^\circ + \omega) \cdot \tan(-\omega) \cdot \cos(180^\circ - \omega)}{\sin(180^\circ + \omega) \cdot \cos(360^\circ + \omega) \cdot \tan(360^\circ - \omega)} = \frac{(-\eta\mu\omega) \cdot \tau\epsilon\mu\omega \cdot (-\epsilon\varphi\omega)}{(-\eta\mu\omega) \cdot \epsilon\varphi\omega \cdot \tau\epsilon\mu\omega} = -1 \quad 6 \times 0,75$$

0,5

A6 Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = \alpha \text{ cm}$ και $B\Gamma = \beta \text{ cm}$.

Αν ισχύει ότι $2 < \alpha < 5$ και $3 < \beta < 7$ να δείξετε ότι:

α) για την τιμή του εμβαδού (E) του $AB\Gamma\Delta$, ισχύει $6 < E < 35$

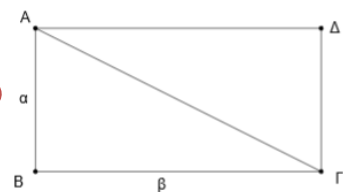
β) για την τιμή του μήκους της διαγώνιου (δ) του $AB\Gamma\Delta$, ισχύει

$$\sqrt{13} < \delta < \sqrt{74}$$

Λύση:

α) Εμβαδόν του ορθογωνίου $E = \alpha \cdot \beta$

$$\left. \begin{array}{l} 2 < \alpha < 5 \\ 3 < \beta < 7 \end{array} \right\} \Rightarrow 6 < \alpha \cdot \beta < 35$$



Τότε $6 < E < 35$

β) Η διαγώνιος του ορθογωνίου είναι $\delta = A\Gamma = \sqrt{(AB)^2 + (B\Gamma)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

$$\text{Τότε} \quad \left. \begin{array}{l} 2 < \alpha < 5 \Rightarrow 4 < \alpha^2 < 25 \\ 3 < \beta < 7 \Rightarrow 9 < \beta^2 < 49 \end{array} \right\} \Rightarrow 13 < \alpha^2 + \beta^2 < 74$$

$$\Rightarrow \sqrt{13} < \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < \sqrt{74}$$

$$\Rightarrow \sqrt{13} < \delta < \sqrt{74}$$

A7 Να αποδείξετε την ταυτότητα :

$$\left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{1 - \eta \mu \theta} \right) \cdot \sigma \varphi \theta = -1$$

Λύση:

$$\left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{1 - \eta \mu \theta} \right) \cdot \sigma \varphi \theta = \frac{1 - \eta \mu \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta \cdot (1 - \eta \mu \theta)} \cdot \sigma \varphi \theta =$$

$$= \frac{1 - \eta \mu \theta - (1 - \eta \mu^2 \theta)}{\sin \theta \cdot (1 - \eta \mu \theta)} \cdot \frac{\sin \theta}{\eta \mu \theta} = \frac{-\eta \mu \theta + \eta \mu^2 \theta}{\sin \theta \cdot (1 - \eta \mu \theta)} \cdot \frac{\sin \theta}{\eta \mu \theta} =$$

$$= \frac{\eta \mu \theta \cdot (\eta \mu \theta - 1)}{\sin \theta \cdot (1 - \eta \mu \theta)} \cdot \frac{\sin \theta}{\eta \mu \theta} = -1$$

A8 Να χαρακτηρίσετε με **Σωστό ή Λάθος** τους πιο κάτω ισχυρισμούς.

α	Η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$, $x \in R$ είναι περιοδική με περίοδο π .
β	Κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου.
γ	Αν α, β ομόσημοι αριθμοί και $\alpha < \beta$ τότε $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$.
δ	Ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$ για κάθε $\alpha \in R$.
ε	Αν $\eta \mu \theta > 0$ και $\sigma \varphi \theta < 0$ τότε η τελική πλευρά της γωνίας θ βρίσκεται στο 2 ^ο τεταρτημόριο.

Λύση

5 X 1

α	Λάθος
β	Λάθος
γ	Σωστό
δ	Λάθος
ε	Σωστό

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

**ΜΕΡΟΣ Β': Αποτελείται από 4 ασκήσεις. Να λύσετε μόνο τις 3 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

B1 Δίνεται ο αριθμός $\alpha = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

α) να υπολογίσετε την τιμή του α .

β) Αν $\alpha = 4$

i) να λύσετε την εξίσωση $32x^5 + \alpha x^2 = 0$

ii) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \alpha^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{\alpha^4} \cdot \sqrt[6]{\alpha^2}$

iii) να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2x - \alpha} + \sqrt{x^2 - \alpha} = 0$

Λύση

α) $\alpha = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{4}{2^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{4}{4-3} = 4$

β)

i) Αν $\alpha = 4$ τότε $32x^5 + 4x^2 = 0$

$4x^2(8x^3 + 1) = 0$ τότε

$4x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

ή $8x^3 + 1 = 0 \Rightarrow 8x^3 = -1 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$ τότε $x = -\frac{1}{2}$

Λύσεις της εξίσωσης: $x = 0$ ή $x = -\frac{1}{2}$

ii) Αν $\alpha = 4$ τότε $B = 4^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{4^4} \cdot \sqrt[6]{4^2}$

$B = 4^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{4^4} \cdot \sqrt[6]{4^2} = 2^{2 \cdot \frac{1}{3}} \cdot 2^{2 \cdot \frac{4}{3}} \cdot 2^{2 \cdot \frac{2}{6}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{8}{3} + \frac{2}{3}} = 2^{\frac{12}{3}} = 16$ τότε $B = 16$

iii) Αν $\alpha = 4$ τότε $\sqrt{2x - 4} + \sqrt{x^2 - 4} = 0$

Αφού $\sqrt{2x - 4} \geq 0$ και $\sqrt{x^2 - 4} \geq 0$ τότε

$\sqrt{2x - 4} = 0$ και $\sqrt{x^2 - 4} = 0$

$2x - 4 = 0$ και $x^2 - 4 = 0$

$2x = 4$ και $(x - 2)(x + 2) = 0$

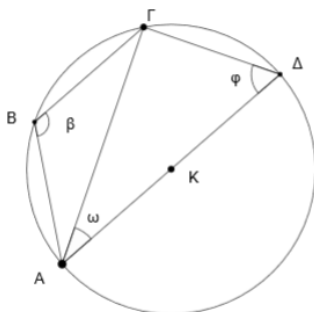
$x = 2$ και $x = 2$ ή $x = -2$

Λύση της εξίσωσης είναι η κοινή λύση των δύο δηλαδή $x = 2$

B2 α) Να αποδείξετε ότι κάθε κυρτό τετράπλευρο που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές.

β) Στον κύκλο (K, ρ) δίνεται AD διάμετρος και γωνία $\omega = 30^\circ$.

Να υπολογίσετε τις γωνίες φ, β και το μέτρο του τόξου $AB\Gamma$.

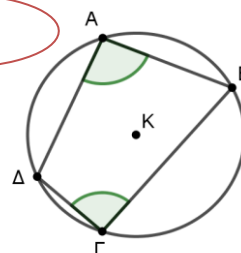


Λύση

α) Έστω εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$

Το μέτρο κάθε εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου τότε:

$$\begin{aligned} \widehat{DAB} &= \frac{\text{τόξο } \Delta\Gamma B}{2} \\ \widehat{D\Gamma B} &= \frac{\text{τόξο } \Delta AB}{2} \end{aligned} \Rightarrow \widehat{DAB} + \widehat{D\Gamma B} = \frac{\text{τόξο } \Delta\Gamma B + \text{τόξο } \Delta AB}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$



β)

Η γωνία $\angle A\Gamma\Delta = 90^\circ$ (εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο)

Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$:

$$\varphi + 30^\circ + 90^\circ = 180^\circ \quad (\text{άθροισμα γωνιών τριγώνου}) \quad \text{τότε } \varphi = 60^\circ$$

Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$:

$$\varphi + \beta = 180^\circ \quad (\text{απέναντι γωνίες εγγεγραμμένου τετράπλευρου παραπληρωματικές})$$

$$60^\circ + \beta = 180^\circ \quad \text{τότε } \beta = 120^\circ$$

$$\text{τόξο } AB\Gamma = 2 \cdot \varphi = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ \quad (\text{τόξο διπλάσιο αντίστοιχης εγγεγραμμένης})$$

$$\text{τότε } \text{τόξο } AB\Gamma = 120^\circ$$

B3 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\eta\mu(2\pi-\theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)}{\varepsilon\varphi(\pi+\theta)} + \frac{\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) \cdot \eta\mu(-\theta)}{\sigma\tau\epsilon\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} \quad \text{και} \quad B = \varepsilon\varphi\theta + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta}$$

α) Να δείξετε ότι :

i) η παράσταση A είναι ανεξάρτητη του θ

ii) $B = \tau\epsilon\mu\theta$

β) Αν $A = 1$ και $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ να συγκρίνετε τους αριθμούς A και B αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad A &= \frac{(-\eta\mu\theta) \cdot (-\sigma\upsilon\nu\theta)}{\varepsilon\varphi\theta} + \frac{(-\varepsilon\varphi\theta) \cdot (-\eta\mu\theta)}{\tau\epsilon\mu\theta} = \frac{\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}} + \frac{\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} \cdot \eta\mu\theta}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}} \\ &= \frac{\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu\theta} + \eta\mu^2\theta = \sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1 \end{aligned}$$

Αφού $A = 1$ τότε το A είναι ανεξάρτητο του θ .

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad B &= \varepsilon\varphi\theta + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta} = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta} = \frac{\eta\mu\theta \cdot (1+\eta\mu\theta) + \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta \cdot (1+\eta\mu\theta)} = \\ &= \frac{\eta\mu\theta + \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta \cdot (1+\eta\mu\theta)} = \frac{1+\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta \cdot (1+\eta\mu\theta)} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \tau\epsilon\mu\theta \end{aligned}$$

Τότε $B = \tau\epsilon\mu\theta$

β) $A = 1$ και

$B = \tau\epsilon\mu\theta$ με $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ τότε τελική πλευρά της γωνίας θ στο 4^ο

τεταρτημόριο άρα $0 < \sigma\upsilon\nu\theta < 1$ τότε $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} > 1$

$$\Rightarrow \tau\epsilon\mu\theta > 1 \Rightarrow B > 1$$

$$\Rightarrow B > A$$

B4 α) Να διατυπώσετε τον ορισμό του τριγωνομετρικού κύκλου.

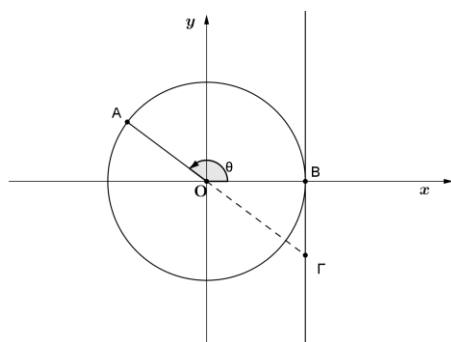
β) Δίνεται τριγωνομετρικός κύκλος (O, OA) , όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Η ευθεία $B\Gamma$ είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο B και το ευθύγραμμο τμήμα OG είναι προέκταση του AO . Το σημείο A έχει συντεταγμένες $A\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Να υπολογίσετε: i) το $\eta\mu\theta$

ii) το $\sigma\upsilon\nu\theta$

iii) την $\epsilon\varphi\theta$

iv) τις συντεταγμένες του σημείου Γ .



Λύση:

α) Τριγωνομετρικός κύκλος ονομάζεται ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με μία μονάδα. 2

β) Αφού η γωνία θ βρίσκεται στον τριγωνομετρικό κύκλο (O, OA) είναι προσανατολισμένη και ισχύουν:

i) $\eta\mu\theta = y_A = \frac{3}{5}$ 2

ii) $\sigma\upsilon\nu\theta = x_A = -\frac{4}{5}$ 2

iii) $\epsilon\varphi\theta = \frac{y_A}{x_A} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$ 2

iv) Η $B\Gamma$ αφού εφάπτεται του τριγωνομετρικού κύκλου στο $(1,0)$ τότε είναι ο άξονας εφαπτομένων

0,5

$x_B = x_\Gamma = 1$

και

0,5+0,5

$y_\Gamma = \epsilon\varphi\theta = -\frac{3}{4}$

τότε

$\Gamma = \left(1, -\frac{3}{4}\right)$

0,5