

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2015

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τρίτη, 26 Μαΐου 2015
8:00 – 11:00

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΛΥΣΕΙΣ- ΜΟΝΑΔΕΣ

1.	Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών: 7, 8, 7, 9, 6, 10, 12, 9, 5, 7 Λύση: $\bar{x} = \frac{7+8+7+9+6+10+12+9+5+7}{10} = \frac{80}{10} = 8$	2+2+1
2.	Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y = 2x^4 - 3x^2 + 8$ Λύση: $\frac{dy}{dx} = 8x^3 - 6x$	2+2+1
3.	Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και το μήκος της ακτίνας του κύκλου με εξίσωση $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 64$ Λύση: $Κ(2, 3), \quad R = \sqrt{64} = 8$	3+2
4.	Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-16}$ Λύση: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-16} = \frac{4-4}{4^2-16} = \frac{0}{0} \text{ Απροσδιόριστη Μορφή}$ $\text{De L'Hospital} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)'}{(x^2-16)'} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{2x} = \frac{1}{8}$	1 1+2+1

5.	Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 (4x^3 - 2x) dx$ Λύση: $\int_1^3 (4x^3 - 2x) dx = \left[\frac{4x^4}{4} - \frac{2x^2}{2} \right]_1^3 = [x^4 - x^2]_1^3 = (3^4 - 3^2) - (1^4 - 1^2) = 72$	2+1+1 +1												
6.	Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΨΕΥΔΑΙΣΘΗΣΗ. Πόσοι από αυτούς έχουν τα δύο Σ σε συνεχόμενες θέσεις; Λύση: $M_{11}^{\epsilon} = \frac{11!}{2!2!} = 9979200$ $M_9^{\epsilon} = \frac{10!}{2!} = 1814400$	3 2												
7.	Να βρείτε το σημείο καμπής της συνάρτησης $y = 3x^3 - 9x^2 + 5x - 2$ Λύση: $\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 18x + 5$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 18x - 18$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ $18x - 18 = 0$ $x = 1$ <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>+1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y''</td><td>-</td><td>○</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td></tr></table> Σ.Κ. (1,-3) Για $x=1 \Rightarrow y = 3 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 2 \Rightarrow y = -3$ Σ.Κ. (1, -3)	x	$-\infty$	+1	$+\infty$	y''	-	○	+	y				0,5 0,5 0,5 0,5 2 1
x	$-\infty$	+1	$+\infty$											
y''	-	○	+											
y														

8.	Δίνονται τα ψηφία 2, 3, 4, 5, 6. (α) Να βρείτε το πλήθος των τριψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν με τα πιο πάνω ψηφία αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων. (β) Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω τριψήφιους αριθμούς διαιρούνται με το πέντε. Λύση: (α) <table><tr><td>Φάσεις</td><td>Ε</td><td>Δ</td><td>Μ</td></tr><tr><td>Τρόποι</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td></tr></table> $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ αριθμοί (β) <table><tr><td>Φάσεις</td><td>Ε</td><td>Δ</td><td>Μ</td></tr><tr><td>Τρόποι</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr></table> $3 \cdot 4 \cdot 1 = 12$ αριθμοί	Φάσεις	Ε	Δ	Μ	Τρόποι	5	4	3	Φάσεις	Ε	Δ	Μ	Τρόποι	3	4	1	3 2
Φάσεις	Ε	Δ	Μ															
Τρόποι	5	4	3															
Φάσεις	Ε	Δ	Μ															
Τρόποι	3	4	1															
9.	Το πιο κάτω κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει τις προτιμήσεις των 480 μαθητών μιας Τεχνικής Σχολής σε επιλεγόμενα μαθήματα. Να βρείτε: (α) Πόσοι μαθητές επέλεξαν το μάθημα της Ξυλογλυπτικής. (β) Το ποσοστό (%) των μαθητών που επέλεξαν το μάθημα της Πληροφορικής. Λύση: (α) $\frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 480 = 120$ (β) $360^\circ - (90^\circ + 75^\circ + 60^\circ) = 135^\circ$ $\frac{135^\circ}{360^\circ} \cdot 100\% = 37,5\%$	 2 1 2																

10.	Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Να βρείτε τις πιθανότητες: (α) $P(A')$ (β) $P(A \cup B)$ (γ) $P(A/B)$ Λύση: (α) $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ (β) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$ (γ) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$	2 2 1
-----	---	---

ΜΕΡΟΣ Β΄:

1.

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4}$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες της συνάρτησης και στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση:

(α) Πεδίο ορισμού: $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$ Π.Ο. $\mathbb{R} - \{-2, +2\}$

(β) Σημεία τομής με τους άξονες:

$$\text{Αν } x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

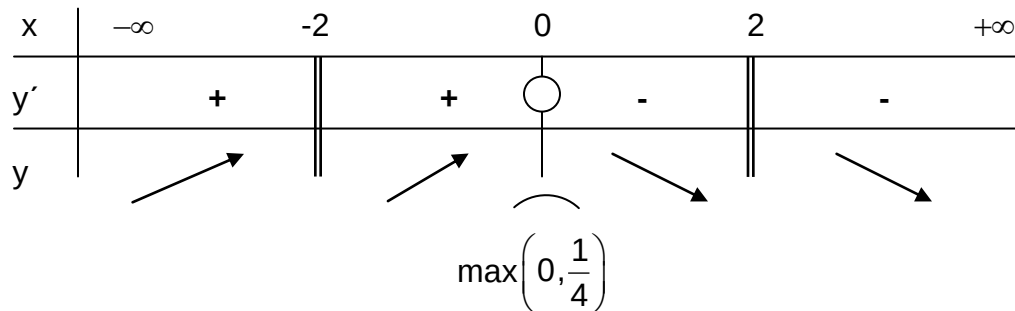
$$\text{Αν } y = 0 \Rightarrow 4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

Άρα τέμνει τους άξονες στα σημεία $\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, \frac{1}{4}\right)$

(γ) Τοπικά ακρότατα και μονοτονία:

$$y' = \frac{8x \cdot (x^2 - 4) - (4x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{8x^3 - 32x - 8x^3 + 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-30x}{(x^2 - 4)^2} \quad x \neq \pm 2$$

$$y' = 0 \Rightarrow -30x = 0 \Rightarrow x = 0$$



Αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2)$ και $(-2, 0]$

Φθίνουσα στα διαστήματα $[0, 2)$ και $(2, +\infty)$

(δ) **Ασύμπτωτες**

Κατακόρυφη ασύμπτωτη:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4} = \frac{15}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4} = \frac{15}{0^-} = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4} = \frac{15}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4} = \frac{15}{0^-} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = -2 \text{ Κ.Α.}$$

0,5

1

1+0,5

2

3

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4} &= \frac{15}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4} &= \frac{15}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 2 \text{ K.A.}$$

Οριζόντια ασύμπτωτη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \text{A.M.}$$

Εφαρμόζω De L'Hospital

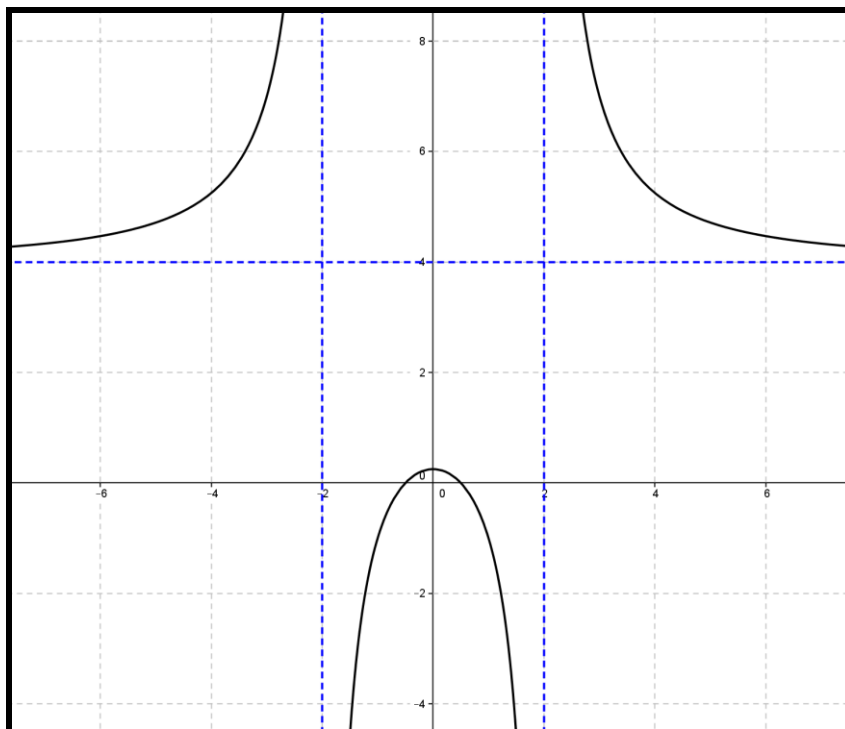
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(4x^2 - 1)'}{(x^2 - 4)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{2x} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \text{A.M.}$$

Εφαρμόζω De L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4x^2 - 1)'}{(x^2 - 4)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{2x} = 4$$

$\Rightarrow y = 4 \text{ O.A.}$



2. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των μαθητών της Γ΄ τάξης κατά τμήμα σε μια Τεχνική Σχολή.

Αριθμός Μαθητών (x_i)	10	16	17	18	20
Αριθμός Τμημάτων (f_i)	1	2	2	3	2

Να βρείτε:

- (α) Την επικρατούσα τιμή (x_ε) των παρατηρήσεων.
 (β) Τη διάμεσο (x_δ) των παρατηρήσεων.
 (γ) Τη μέση τιμή ($\bar{x}$) των παρατηρήσεων.
 (δ) Την τυπική απόκλιση (σ) των παρατηρήσεων.

Λύση:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
10	1	10	-7	49	49
16	2	32	-1	1	2
17	2	34	0	0	0
18	3	54	1	1	3
20	2	40	3	9	18
	10	170			72

(α) $x_\varepsilon = 18$

(β) $x_\delta = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{17 + 18}{2} = 17,5$

(γ) $\bar{x} = \frac{170}{10} = 17$

(δ) $\sigma = \sqrt{\frac{72}{10}} = \sqrt{7,2} \approx 2,683$

4

1

2

1

2

3.	Η συνάρτηση με τύπο $y = ax^3 - bx^2 + 3$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $\Sigma(-2,7)$. (α) Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β. (β) Αν $\alpha = 1$ και $\beta = -3$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης στο σημείο της με $x = -3$. Λύση: (α) $\frac{dy}{dx}\Big _{x=-2} = 0 \Rightarrow 3ax^2 - 2bx\Big _{x=-2} = 0 \Rightarrow 3a \cdot 4 + 4\beta = 0 \Rightarrow 12a + 4\beta = 0 \Rightarrow 3a + \beta = 0$ (1) $y = ax^3 - bx^2 + 3$ στο $\Sigma(-2,7) \Rightarrow 7 = -8a - 4\beta + 3 \Rightarrow -8a - 4\beta = 4 \Rightarrow 2a + \beta = -1$ (2) Από (1) και (2): $\left. \begin{matrix} 3a + \beta = 0 \\ 2a + \beta = -1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} -3a - \beta = 0 \\ 2a + \beta = -1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1$ Από (1): $3a + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -3$ (β) $y = x^3 + 3x^2 + 3 \Rightarrow$ $x = -3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow (-3,3)$ $\lambda_{\text{εφ}} = \frac{dy}{dx}\Big _{x=-3} = 3x^2 + 6x\Big _{x=-3} = 9$ Εξίσωση Εφαπτομένης στο $(-3,3)$: $y - 3 = 9(x + 3) \Rightarrow -9x + y = 30$	2 2 2 1 3
----	--	--

4.	Σε ένα κιβώτιο υπάρχουν δέκα αντικείμενα: 1 άσπρη μπάλα, 2 πράσινες μπάλες, 3 άσπροι κύβοι και 4 πράσινοι κύβοι. Παίρνουμε τυχαία δύο αντικείμενα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: Α: «Και τα δύο αντικείμενα να είναι μπάλες». Β: «Μόνο ένα αντικείμενο να είναι πράσινο». Γ: «Το πολύ ένα αντικείμενο να είναι άσπρος κύβος». Λύση: $P(A) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{7}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$ $P(B) = \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{6 \cdot 4}{45} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$ $P(\Gamma) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{1} + \binom{3}{0} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{3 \cdot 7 + 21}{45} = \frac{42}{45} = \frac{14}{15}$	3 3 4
5.	Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = \sqrt{x^2 - 5}$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int 9x \cdot \sqrt{x^2 - 5} \, dx$ Λύση: $u = \sqrt{x^2 - 5} \Rightarrow u^2 = x^2 - 5 \Rightarrow 2u \, du = 2x \, dx \Rightarrow u \, du = x \, dx$ $\int 9x \cdot \sqrt{x^2 - 5} \, dx = \int 9u \cdot u \, du = 9 \int u^2 \, du = 9 \frac{u^3}{3} + c = 3u^3 + c = 3(\sqrt{x^2 - 5})^3 + c$	2+2 2+2+2