

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2011

**Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ**

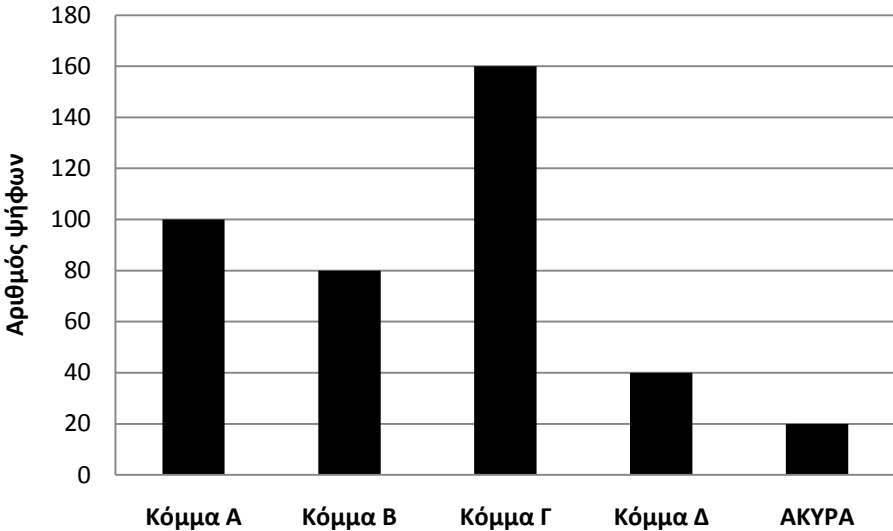
**Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Δευτέρα 6 Ιουνίου 2011
10:30 – 13:30**

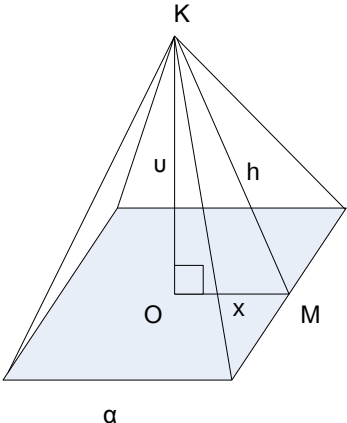
ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄:

1.	Ένας μαθητής πήρε το Α΄ τετράμηνο στα μαθήματα ειδικότητας, τους πιο κάτω βαθμούς : 14, 17, 19, 12, 16, 18. Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών του. <u>ΛΥΣΗ</u> $\bar{x} = \frac{14 + 17 + 19 + 12 + 16 + 18}{6} = \frac{96}{6} = 16$	
2.	Δίνεται κύβος με ακμή 7cm. Να βρείτε: (α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του, και (β) τον όγκο του. <u>ΛΥΣΗ</u> (α) $E_{ολ} = 6\alpha^2 = 6 \cdot 7^2 = 294 \text{ cm}^2$ (β) $V = \alpha^3 = 7^3 = 343 \text{ cm}^3$	
3.	Ένας έμπορος πούλησε ένα αυτοκίνητο αξίας €8500 με κέρδος 20%. Να βρείτε τη τιμή πώλησης του αυτοκινήτου. <u>ΛΥΣΗ</u> $8500 \cdot \frac{20}{100} = €1700 \text{ κέρδος}$ $8500 + 1700 = €10200 \text{ τιμή πώλησης}$ ή $8500 \cdot \frac{120}{100} = €10200 \text{ τιμή πώλησης}$	

4.	Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(0, 2)$ και ακτίνα $R=4$. <u>ΛΥΣΗ</u> $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ $(x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$ $x^2 + (y - 2)^2 = 16$	
5.	Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης "ΔΡΟΜΟΣ". <u>ΛΥΣΗ</u> Ο Ο Δ Ρ Μ Σ $M_6^e = \frac{6!}{2!} = 360$	
6.	Ρίχνουμε ένα ζάρι μια φορά. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων : A: «Η ένδειξη να είναι περιττός αριθμός». B: «Η ένδειξη να είναι αριθμός μεγαλύτερος του 4». <u>ΛΥΣΗ</u> $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A = \{1, 3, 5\}$ $B = \{5, 6\}$ $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	

7.	Το πιο κάτω ραβδόγραμμα παρουσιάζει τα αποτελέσματα των βουλευτικών εκλογών του 2011 σε μια ορεινή κοινότητα της Κύπρου.  Αν ψήφισαν όλοι οι εγγεγραμμένοι ψηφοφόροι της κοινότητας, να βρείτε: (α) τον αριθμό των εγγεγραμμένων ψηφοφόρων, (β) το κόμμα που πήρε τους περισσότερους ψήφους, και (γ) το ποσοστό (%) των άκυρων ψηφοδελτίων. <u>ΛΥΣΗ</u> (α) $100+80+160+40+20=400$ (β) Το κόμμα Γ (γ) Το ποσοστό των άκυρων ψηφοδελτίων είναι: $\frac{20}{400} \cdot 100\% = 5\%$	
8.	Να βρείτε τη γενική λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης : $\varepsilon\varphi(x + 20^\circ) = 1$. <u>ΛΥΣΗ</u> $\varepsilon\varphi(x+20^\circ) = 1$ $\varepsilon\varphi(x+20^\circ) = \varepsilon\varphi 45^\circ$ $x+20^\circ = 180^\circ\kappa + 45^\circ, \kappa \in \mathbb{Z}$ Γενική λύση: $x = 180^\circ\kappa + 25^\circ, \kappa \in \mathbb{Z}$	

9.	Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y = 14 \end{cases}$ <u>ΛΥΣΗ</u> $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y = 14 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 + y = 14 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 + (2 - x) = 14 \end{cases} \Rightarrow$ $x^2 + 2 - x - 14 = 0$ $x^2 - x - 12 = 0$ $(x - 4)(x + 3) = 0$ $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = -2 \quad (x, y) = (4, -2)$ $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = 5 \quad (x, y) = (-3, 5)$	
10	Δίνεται κανονική τετραγωνική πυραμίδα με όγκο $V = 400 \text{ cm}^3$ και ύψος $u = 12 \text{ cm}$. Να βρείτε: (α) το μήκος της ακμής της βάσης της πυραμίδας, (β) το παράπλευρο ύψος (h) της πυραμίδας, και (γ) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας. <u>ΛΥΣΗ</u> (α) $V = \frac{E_{\beta} \cdot u}{3}$ $400 = \frac{E_{\beta} \cdot 12}{3}$ $4 \cdot E_{\beta} = 400$ $E_{\beta} = 100 \text{ cm}^2$ $\alpha^2 = 100$ $\alpha = 10 \text{ cm}$	

$$\begin{aligned}
 (\beta) \quad OM &= 10 : 2 = 5 \text{ cm} \\
 h^2 &= u^2 + (OM)^2 \\
 h^2 &= 12^2 + 5^2 \\
 h^2 &= 144 + 25 \\
 h^2 &= 169 \Rightarrow h = 13 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\gamma) \quad E_{\pi} &= \frac{\Pi_{\beta} \cdot h}{2} \\
 E_{\pi} &= \frac{4\alpha \cdot 13}{2} \\
 E_{\pi} &= \frac{40 \cdot 13}{2} \\
 E_{\pi} &= 260 \text{ cm}^2 \\
 E_{\text{ολ}} &= E_{\pi} + E_{\beta} \\
 E_{\text{ολ}} &= 260 + 100 = 360 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

ΜΕΡΟΣ Β΄:

1. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των λογοτεχνικών βιβλίων που έχουν διαβάσει οι μαθητές ενός τμήματος κατά τη διάρκεια της περσινής σχολικής χρονιάς στο μάθημα των Νέων Ελληνικών.

Αριθμός βιβλίων (x_i)	1	2	3	4
Αριθμός μαθητών (f_i)	12	9	6	3

Να βρείτε:

- (α) τον αριθμό των μαθητών του τμήματος,
- (β) την επικρατούσα τιμή (x_{ε}) των παρατηρήσεων,
- (γ) τη μέση τιμή ($\bar{x}$) των παρατηρήσεων, και
- (δ) την τυπική απόκλιση (σ) των παρατηρήσεων.

ΛΥΣΗ

(α) $12 + 9 + 6 + 3 = 30$ μαθητές

(β) $x_{\varepsilon} = 1$

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i (x_i - \bar{x})^2$
1	12	12	-1	1	12
2	9	18	0	0	0
3	6	18	1	1	6
4	3	12	2	4	12
	30	60			30

$$(\gamma) \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{60}{30} = 2$$

$$(\delta) \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{v}} = \sqrt{\frac{30}{30}} = 1$$

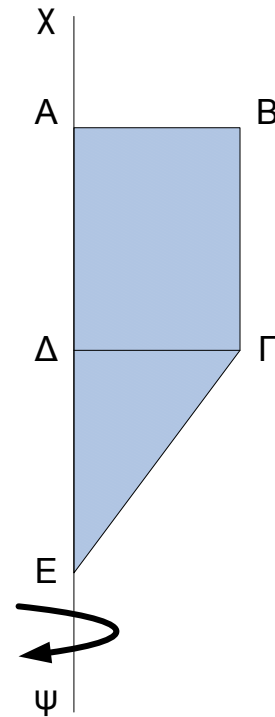
2.

Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το ΔΓΕ ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{\Delta} = 90^\circ$). Δίνονται $AB = 6\text{ cm}$, $B\Gamma = 8\text{ cm}$ και $\Gamma E = 10\text{ cm}$.

Το σχήμα ΑΒΓΕ κάνει πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα χψ.

Να βρείτε:

- (α) τον όγκο του στερεού που παράγεται, και
- (β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.



ΛΥΣΗ

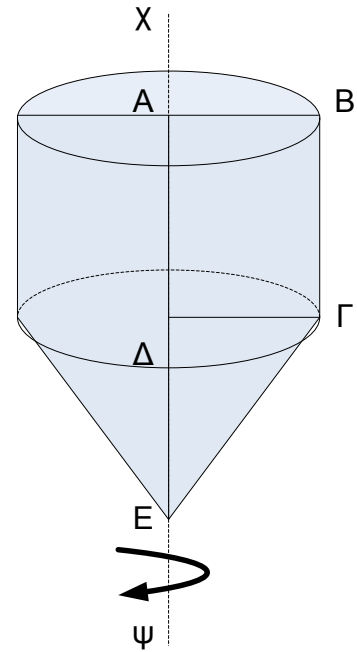
$$(\Delta E)^2 = (\Gamma E)^2 - (\Gamma \Delta)^2$$

$$(\Delta E)^2 = 10^2 - 6^2$$

$$(\Delta E)^2 = 100 - 36$$

$$(\Delta E)^2 = 64$$

$$\Delta E = 8 \text{ cm}$$



Στοιχεία κυλίνδρου

$$R = 6 \text{ cm}$$

$$u = 8 \text{ cm}$$

Στοιχεία κώνου

$$R = 6 \text{ cm}$$

$$\lambda = 10 \text{ cm}$$

$$u = 8 \text{ cm}$$

$$(\alpha) \quad V_{\text{ολ}} = V_{\text{κυλίνδρου}} + V_{\text{κώνου}}$$

$$V_{\text{ολ}} = \pi R^2 \cdot u_{\text{κυλ.}} + \frac{\pi R^2 \cdot u_{\text{κών.}}}{3}$$

$$= \pi 6^2 \cdot 8 + \frac{\pi 6^2 \cdot 8}{3}$$

$$= 288\pi + 96\pi$$

$$V_{\text{ολ}} = 384\pi \text{ cm}^3$$

$$(\beta) \quad E_{\text{ολ}} = E_{\text{AB}} + E_{\text{BΓ}} + E_{\text{ΓΕ}}$$

$$E_{\text{ολ}} = E_{\text{βάσης κυλίνδρου}} + E_{\text{κυρτής κυλίνδρου}} + E_{\text{κυρτής κώνου}}$$

$$E_{\text{ολ}} = \pi R^2 + 2\pi R u + \pi R \lambda$$

$$= \pi \cdot 6^2 + 2\pi \cdot 6 \cdot 8 + \pi \cdot 6 \cdot 10$$

$$= 36\pi + 96\pi + 60\pi$$

$$= 192\pi \text{ cm}^2$$

3.	Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$. (i) Να βρείτε τις πιθανότητες: (α) $P(A')$ (β) $P(A \cup B)$ (γ) $P(A - B)$ (ii) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα. <u>ΛΥΣΗ</u> (i) (α) $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ (β) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{10} + \frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ (γ) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ (ii) $\left. \begin{aligned} P(A) \cdot P(B) &= \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{25} \\ P(A \cap B) &= \frac{1}{10} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B) \\ &\text{Άρα A, B δεν είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα} \end{aligned}$	
4.	(α) Να βρείτε το ολοκλήρωμα : $\int (x^5 - 2x) dx$. (β) Αν $y = 2x + \eta \mu x$ να δείξετε ότι : $\frac{d^2 y}{dx^2} + y - 2x = 0$. <u>ΛΥΣΗ</u> (α) $\int (x^5 - 2x) dx = \frac{x^6}{6} - x^2 + c$ (β) $y = 2x + \eta \mu x$ $\frac{dy}{dx} = 2 + \sigma \upsilon \nu x$	

	$\frac{d^2y}{dx^2} = -\eta\mu x$ $\frac{d^2y}{dx^2} + y - 2x = -\eta\mu x + 2x + \eta\mu x - 2x = 0$	
5.	Πισίνα, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με μήκος 12m, πλάτος 6m και ύψος 2m, θα επενδυθεί με μονωτικό υλικό. Η εταιρεία που ανέλαβε να επενδύσει με μονωτικό υλικό τα τοιχώματα και τον πυθμένα της πισίνας, χρεώνει για την αγορά του μονωτικού υλικού €15 το τετραγωνικό μέτρο και για την τοποθέτηση του €12 το τετραγωνικό μέτρο. (α) Να βρείτε πόσα τετραγωνικά μέτρα μονωτικού υλικού θα χρειαστούν. (β) Αν η εταιρεία θέλει να κερδίσει 25% πάνω στη συνολική τιμή χρέωσης της μόνωσης (αγορά και τοποθέτηση), να βρείτε πόσο θα στοιχίσει η μόνωση της πισίνας. <u>ΛΥΣΗ</u> (α) $E_{ολ} = E_{\text{πυθμένα}} + E_{\text{τοιχωμάτων}}$ $E_{ολ} = 12 \cdot 6 + 2 \cdot 12 \cdot 2 + 2 \cdot 6 \cdot 2$ $E_{ολ} = 72 + 48 + 24$ $E_{ολ} = 144\text{m}^2$ Θα χρειαστούν 144m^2 μονωτικό υλικό. (β) $\text{Κόστος μόνωσης} = (15 + 12) \cdot 144$ $= 27 \cdot 144$ $= €3888$ Συνολική χρέωση $3888 \cdot \frac{25}{100} = 972 \text{ κέρδος}$ $3888 + 972 = €4860$ ή $3888 \cdot \frac{125}{100} = €4860$ Η μόνωση της πισίνας Θα στοιχίσει € 4860.	