ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

# ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
# ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 4**

Ημερομηνία: **Παρασκευή, 30 Ιουνίου 2000**

Ώρα: **7.30 π.μ. – 10.30 π.μ.**

**ΤΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ**

## ΜΕΡΟΣ Α΄

**Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Αν $y = 3e^{2x} - 5e^{-2x}$ να δείξετε ότι:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0$$

2. Κάποιος αγόρασε ένα αυτοκίνητο και ακολούθως το πούλησε προς £2 990 κερδίζοντας έτσι 15% πάνω στην τιμή αγοράς. Να βρείτε πόσα το αγόρασε.

2600//

3. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον εβδομαδιαίο μισθό σε λίρες των 20 υπαλλήλων μιας βιομηχανίας. Να βρείτε τη μέση τιμή $\overline{x}$ και την τυπική απόκλιση **σ** των παρατηρήσεων.

| Μισθός $x_i$ | Αριθμός υπαλλήλων $f_i$ |
|---|---|
| 60 | 3 |
| 80 | 5 |
| 110 | 6 |
| 120 | 4 |
| 140 | 2 |

$\overline{x} = 100$

$\sigma = 24,7$

4. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία $y=-x$ και περνά από τα σημεία τομής των κύκλων:

$$x^2+y^2-2x+10y-24=0$$
$$x^2+y^2+2x+2y-8=0$$

$x^2+y^2+6x-6y+8=0$

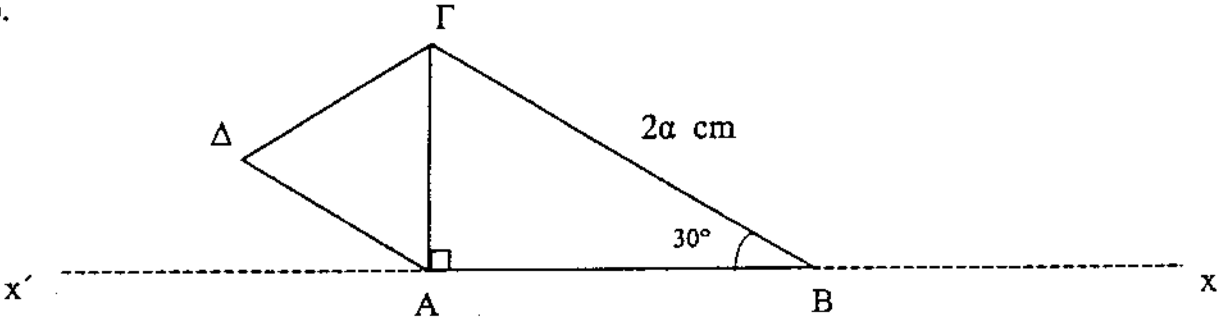
5. Δίνεται η διαφορική εξίσωση:

$$x^2y\frac{dy}{dx}=\ln x$$

α) Να βρείτε τη γενική της λύση. $y^2/2=-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+c$ , $\frac{y^2}{2}=-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+3$

β) Να βρείτε την ειδική της λύση για την οποία $y=2$, όταν $x=1$.

6.




Στο πιο πάνω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\hat{A}=90^\circ$, $\hat{B}=30^\circ$ και (ΒΓ) = 2α cm και το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισόπλευρο.

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα x΄x που περιέχει την πλευρά ΑΒ. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται. $V=\frac{7\pi a^3\sqrt{3}}{12}cm^3$

7. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\,\text{Τοξσυν}\,x=\text{Τοξημ}\,x$$

$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ δεκτη

$x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ απορ.

8. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

α) Να βρείτε τους πίνακες $A^2$ και $A^{20}$. $A^2=7I$ $A^{20}=7^{10}\cdot I$

β) Αν $A^{20}+\mu\cdot A^4+7\nu\cdot I=(0)$, όπου $\mu,\nu\in R$, I είναι ο μοναδιαίος πίνακας 2 x 2, και (0) ο μηδενικός πίνακας 2 x 2, να δείξετε ότι ισχύει:

$$7\mu+\nu=-7^9$$

9. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4\alpha x$ και $P(\alpha\rho^2, 2\alpha\rho)$ σημείο πάνω σ' αυτή.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο P είναι:
$$\rho y = x + \alpha\rho^2$$

β) Η εφαπτομένη της παραβολής στο P τέμνει τον άξονα των y στο σημείο T. Από το σημείο P φέρνουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τον άξονα των y. Αν E είναι η εστία της παραβολής και η ευθεία TE τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο H, να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου H. $ay^2 = x(a-x)^2$

10. Δίνονται τα ψηφία 0, 3, 4, 5, 6, 7.
Να βρείτε πόσους άρτιους αριθμούς μεγαλύτερους του 50 000 μπορούμε να σχηματίσουμε, αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων. 504

**ΜΕΡΟΣ Β΄**

**Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 5 ασκήσεις του μέρους αυτού βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, το ακρότατο, τις ασύμπτωτες και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

β) Το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x}$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \alpha + 1$, $\alpha > 2$ είναι $E = 1 + \ln\frac{3}{2}$.

Να βρείτε την τιμή του α. $a = 3$

2. Γεωργός θέλει να κατασκευάσει δεξαμενή νερού χωρητικότητας 10 000 $m^3$, που να έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου ανοιχτού στο πάνω μέρος και του οποίου η βάση να είναι τετράγωνο πλευράς x m. Αν το κόστος κατασκευής είναι για μεν τη βάση £5 το τετραγωνικό μέτρο, ενώ για τα πλάγια τοιχώματα £2 το τετραγωνικό μέτρο,

α) να δείξετε ότι το κόστος κατασκευής $y$ είναι:

$$y = 5x^2 + \frac{80\,000}{x}$$

β) να βρείτε τις διαστάσεις που πρέπει να έχει η δεξαμενή ώστε το κόστος κατασκευής να είναι ελάχιστο.

$x = 20\,m$
$v = 25\,m$

3. α) Να βρείτε το $\int \frac{2x-1}{4x^2+9}dx$ $= \frac{1}{4}\ln(4x^2+9) - \frac{1}{6}\text{τοξεφ}\frac{2x}{3} + c$

β) Να βρείτε στη μορφή $y = f(x)$ τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$x\frac{dy}{dx} - y = \frac{x^2(2x-1)}{4x^2+9} \quad , \ x > 0$$

$y = \frac{x}{4}\ln(4x^2+9) - \frac{x}{6}\text{τοξεφ}\frac{2x}{3} +$

4. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $xy = c^2$. Τα σημεία $P(cp, \frac{c}{p})$ και $T(ct, \frac{c}{t})$ κινούνται πάνω στην υπερβολή έτσι ώστε το μήκος της χορδής $PT$ να έχει σταθερό μήκος $\kappa$. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του μέσου $M$ της χορδής $PT$ βρίσκεται πάνω στη γραμμή με εξίσωση:

$$4(xy-c^2)(x^2+y^2) = \kappa^2 xy$$

5. Ένας καθηγητής της Φυσικής Αγωγής τοποθετεί μια ομάδα $\nu$ μαθητών σε ευθεία γραμμή.

α) Αν δύο από αυτούς είναι αδέλφια, να βρείτε συναρτήσει του $\nu$, την πιθανότητα $P_1$ του ενδεχομένου τα δύο αδέλφια <u>να μη στέκονται</u> το ένα δίπλα στο άλλο.

β) Να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό μαθητών που χρειάζονται, ώστε να είναι $P_1 > \frac{3}{4}$.

γ) Αν $\nu \leq 365$, να βρείτε συναρτήσει του $\nu$, την πιθανότητα $P_2$ του ενδεχομένου η ομάδα των $\nu$ μαθητών να περιέχει τουλάχιστον δύο άτομα που να έχουν τα γενέθλιά τους την ίδια ημέρα του χρόνου. (Να θεωρήσετε ότι ο χρόνος έχει 365 ημέρες).

α) $1 - \frac{2}{\nu}$

β) $\nu = 9$

γ) $1 - \frac{365!}{365^{\nu}(365-\nu)!}$ ή $1 - \frac{\Delta_{\nu}}{\delta_{\nu}^{365}}$

**– ΤΕΛΟΣ –**