ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 4**
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: **Πέμπτη, 4 Ιουλίου 2002**
7.30΄ π.μ. – 10.30΄ π.μ.

Το δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $\left.\begin{array}{l} x = t^3 - 1 \\ y = t^5 + 1 \end{array}\right\}, \; t \in R$

   Να βρείτε τις $\dfrac{dy}{dx}$ και $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. $\quad \dfrac{5t^2}{3} \quad t' \quad \dfrac{10}{9t}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x-\alpha}{x^2-3x+2}$, $\quad x \in R - \{1, 2\}, \quad \alpha \in R$.

   Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η συνάρτηση έχει τοπικό ακρότατο στο $x = 0$. $\quad a = 2/3$

3. Να λύσετε την εξίσωση $\text{Τοξεφ}\dfrac{\pi}{x+1} + \text{Τοξεφ}\dfrac{1}{1+2x} = \dfrac{\pi}{4}$, $\quad x > 0$. $\quad x=-1$ απορ. $\quad x=\pi$ δεκτή

4. Να βρείτε, στη μορφή $y=f(x)$, τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

   $\dfrac{dy}{dx} = e^{-y}\, \text{ημ}x \; \text{ημ}2x$. $\quad y = \ln\left|\frac{2}{3}\text{ημ}^3 x + c\right|$

5. Οι έδρες ενός κύβου είναι αριθμημένες με τους αριθμούς 1, 1, 1, 2, 2, 3.

   (α) Ρίχνουμε τον κύβο 3 φορές. Να βρείτε την πιθανότητα το άθροισμα των τριών ενδείξεων να είναι 5. $\quad P(\alpha) = \frac{7}{24}$

   (β) Ρίχνουμε τον κύβο διαδοχικά μέχρι να βρούμε άρτια ένδειξη. Να βρείτε την πιθανότητα αυτό να συμβεί στην τρίτη ρίψη. $\quad P(\beta) = \frac{4}{27}$

/2..

6. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(α) Να δείξετε ότι $A^2 = A$.

(β) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in R$ για την οποία ισχύει η σχέση $A^5 + \lambda I = B$, όπου I ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας. $\lambda = 3$

7. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ύψος u cm και ακμή βάσης α cm που συνδέονται με τη σχέση $3u + 4\alpha = 24$.
Να υπολογίσετε το ύψος και την ακμή της βάσης της πυραμίδας ώστε ο όγκος της να είναι ο μέγιστος δυνατός. $u = \frac{8}{3}$

8. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 + 2x - 7 = 0$ και η παραβολή $y^2 = 4x$.

(α) Να βρείτε το σημείο τομής τους Α που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο. $A(1,2)$

(β) Να δείξετε ότι οι δύο καμπύλες τέμνονται ορθογώνια στο Α.

(γ) Το χωρίο που περικλείεται από τις δύο καμπύλες και το θετικό ημιάξονα των y στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των x. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται. $V = \frac{11}{3}\pi$ κ.μ.

9. Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = e^x$, την ευθεία $y = e$ και τον άξονα των y χωρίζεται από την ευθεία $y = \lambda x + 1$, $\lambda \in R$, σε δύο ισεμβαδικά μέρη. Να υπολογίσετε την τιμή του λ. $\lambda = (e-1)^2$

10. Στην τιμή κόστους εισαγωγής ενός συγκεκριμένου αυτοκινήτου προστίθεται πρώτα ο εισαγωγικός δασμός και έπειτα το κέρδος του εισαγωγέα. Στο ποσό που προκύπτει προστίθεται ο ΦΠΑ και έτσι διαμορφώνεται το ποσό που πληρώνει ο αγοραστής.

Μέχρι το τέλος Ιουνίου ο συντελεστής για τον εισαγωγικό δασμό ήταν 90% και για τον ΦΠΑ 10%. Το κέρδος του εισαγωγέα ήταν £1000 και η τιμή του αυτοκινήτου για τον αγοραστή ήταν £9460.

Από την 1η Ιουλίου ο συντελεστής του εισαγωγικού δασμού έγινε 55% και του ΦΠΑ 13%, ενώ το κόστος εισαγωγής και το κέρδος του εισαγωγέα παρέμειναν τα ίδια. Να υπολογίσετε τη νέα τιμή του αυτοκινήτου για τον αγοραστή. £8136

.../3..

ΜΕΡΟΣ Β΄

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 5 ασκήσεις βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$.

   (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. Στη συνέχεια να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τις εξισώσεις των ασυμπτώτων και το ακρότατο της καμπύλης $y = f(x)$ και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

   (β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = f(x)$ και τον άξονα των x. $E=\left(2-\frac{3}{2}\ln 3\right)$ τ.μ

2. Να βρείτε πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ μπορούν να σχηματιστούν.

   Παίρνουμε στην τύχη ένα αναγραμματισμό. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

   Α: Ο αναγραμματισμός να αρχίζει και να τελειώνει με "Ε". $P(A)=\frac{1}{12}$

   Β: Ο αναγραμματισμός να έχει το ένα "Ε" στο μέσο, δεδομένου ότι αρχίζει και τελειώνει με "Ε". $P(B)=\frac{1}{7}$

3. Δίνεται η υπερβολή $xy=c^2$ και σημείο της $P\left(cp,\ \dfrac{c}{p}\right)$ στο πρώτο τεταρτημόριο. Η εφαπτομένη της στο P τέμνει τον άξονα των y στο σημείο Α. Η κάθετή της στο P τέμνει τον άξονα των x στο Β και τον άξονα των y στο Γ. Να βρείτε:

   (α) Την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

   (β) Την τιμή του p για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου ΡΑΓ ισούται με $\dfrac{17c^2}{2}$.

(α) $2c^2x\psi=c^4-\psi^4$

(β) $p=2$

.../4

4. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $u = e^y$, να δείξετε ότι η διαφορική

εξίσωση $x\dfrac{dy}{dx} + x + 1 = x\,e^{x-y}$ μετασχηματίζεται στη

$x\dfrac{du}{dx} + (x+1)\,u = x\,e^x$.

Στη συνέχεια να βρείτε τη γενική λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης.

$y = \ln\left[\frac{1}{2}e^x - \frac{e^x}{4x} + \frac{c\,e^{-x}}{x}\right]$

5. Δίνεται το ολοκλήρωμα $I(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}\,dx$ με $\alpha, \beta \in R^+$.

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \dfrac{1}{u}$, ή με οποιοδήποτε

άλλο τρόπο, να δείξετε ότι $I(\alpha, \beta) = I\left(\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}\right)$. Στη συνέχεια να

δείξετε ότι $I\left(\dfrac{1}{\alpha}, \alpha\right) = 0$.

------ ΤΕΛΟΣ ------