1. $\left(\chi^2+\dfrac{1}{\chi}\right)^8$, $\quad T_{\kappa+1}=\dbinom{8}{\kappa}\left(\chi^2\right)^{8-\kappa}\left(\dfrac{1}{\chi}\right)^{\kappa}=\dbinom{8}{\kappa}\chi^{16-3\nu}$ $\Rightarrow 16-3\kappa=10 \Rightarrow \kappa=2$

άρα ο συντελεστής του χ^{10} είναι $\dbinom{8}{2}=\mathbf{28}$

2. $\psi=\alpha\chi+\beta\ln\chi$, $A(1,2) \Rightarrow \psi(1)=2 \Rightarrow 2=\alpha+\beta\cancel{\ln 1}^{0} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha=2}$

$\dfrac{d\psi}{d\chi}=\alpha+\dfrac{\beta}{\chi}$ ακρότατο στο $\chi=1 \Rightarrow 0=\alpha+\beta \Rightarrow 0=2+\beta \Rightarrow \beta=-2$

$\dfrac{d^2\psi}{d\chi^2}=-\dfrac{\beta}{\chi^2}$ στο $\chi=1 \Rightarrow$ $\dfrac{d^2\psi}{d\chi^2}=-\dfrac{-2}{1^2}=2>0$ άρα έχουμε <u>min</u> στο Α

3. (κ): $\chi^2+\psi^2-2\chi+4\psi=0 \Rightarrow g=-1, f=2, c=0$, $K(-g,-f) \Rightarrow K(1,-2)$

$R=\sqrt{g^2+f^2-c} \Rightarrow R=\sqrt{1+4} \Rightarrow R=\sqrt{5}$

Οι εφαπτόμενες του κύκλου που είναι παράλληλες προς την $\chi+2\psi=5$ έχουν τη μορφή $\chi+2\psi=m$.

Η διακρίνουσα του συστήματος $\begin{cases}\chi+2\psi=m\\ \chi^2+\psi^2-2\chi+4\psi=0\end{cases}$ πρέπει να είναι 0.

$\Rightarrow (m-2\psi)^2+\psi^2-2(m-2\psi)+4\psi=0 \Rightarrow 5\psi^2+4(2-m)\psi+m^2-2m=0 \overset{\Delta=0}{\Rightarrow}$

$16(2-m)^2+20(m^2-2m)=0 \Rightarrow 4(2-m)(m+8)=0 \Rightarrow m=2$ ή $m=-8$

άρα η ζητούμενες εξισώσεις είναι $\begin{matrix}\chi+2\psi=2\\ \chi+2\psi=-8\end{matrix}$.

4. i) $\mathbf{A^2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$

ii) $\mathbf{A}^{2001} \cdot \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left((\mathrm{A}^2)^{1000} \cdot \mathrm{A}\right) \cdot \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left((\mathrm{I})^{1000} \cdot \mathrm{A}\right) \cdot \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$(\mathbf{I \cdot A}) \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A \cdot M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{M} = \mathrm{A}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{M} =$

$\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$

5. (i) α) $\frac{8!}{4! \cdot 2!} = 840$ β) $\frac{5!}{2!} = 60$

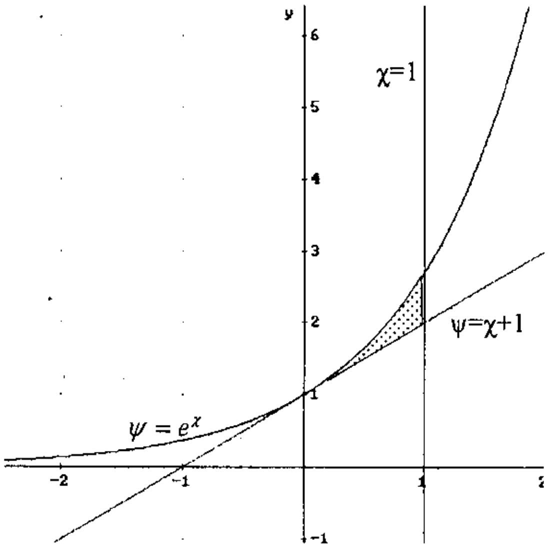
(ii) Αν χρησιμοποιήσω 3Α έχω 1 τρόπο αναγραμματισμού

Αν χρησιμοποιήσω 2Α ή 2Μ και ένα άλλο γράμμα έχω $\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1} = 18$ τρόπους αναγραμματισμού.

Αν χρησιμοποιήσω 3 διαφορετικά γράμματα έχω $\binom{4}{3} \cdot 3! = 24$ τρόπους αναγραμματισμού

Σύνολο: **43 τρόποι**

6. $\psi = e^{\chi} \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = e^{\chi}$ στο $\chi = 0 \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = 1 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = 1 \Rightarrow$



εξίσωση εφαπτομένης $(\psi-1)=1(\chi-0)$

$\Rightarrow \psi - 2 = \chi \Rightarrow \boldsymbol{\psi = \chi + 1}$

$$V = \pi \int_0^1 \left[e^{2\chi} - (\chi+1)^2\right] d\chi \Rightarrow$$

$$= \pi \left[\frac{e^{2\chi}}{2} - \frac{(\chi+1)^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \pi \left[\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(3e^2 - 17\right)$$

7. $\chi \frac{d\psi}{d\chi} + 2\psi = 3\chi + \eta\mu\chi, \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} + \frac{2}{\chi}\psi = 3 + \frac{\eta\mu\chi}{\chi}$ (1)

παράγοντας ολοκλήρωσης $\mathrm{I} = e^{\int \frac{2d\chi}{\chi}} = e^{2\ln\chi} = \chi^2$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \chi^2 \frac{d\psi}{d\chi} + 2\chi\psi = 3\chi^2 + \chi\eta\mu\chi \Rightarrow \psi\chi^2 = \int(3\chi^2 + \chi\eta\mu\chi)d\chi \Rightarrow$$

$$\psi\chi^2 = \chi^3 + \int\chi\eta\mu\chi\, d\chi \Rightarrow \psi\chi^2 = \chi^3 + \int\chi\, d(-\sigma\upsilon\nu\chi)$$

$$\psi\chi^2 = \chi^3 - \chi\sigma\upsilon\nu\chi + \int\sigma\upsilon\nu\chi\, d\chi \Rightarrow \psi\chi^2 = \chi^3 - \chi\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi + C \Rightarrow$$

$$\psi = \chi - \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\chi} + \frac{\eta\mu\chi}{\chi^2} + \frac{C}{\chi^2}$$

8. Μ: ενδεχόμενο να έχει κάποιος άδεια μοτοσικλέτας
Α: ενδεχόμενο να έχει κάποιος άδεια αυτοκινήτου
$P(M) = 0{,}4$, $P(A') = 0{,}45$, $P(A/M) = 0{,}375$
$P(A) = 1 - P(A') \Rightarrow P(A) = 1 - 0{,}45 \Rightarrow P(A) = 0{,}55$
(i) $P(B) = P(A \cap M) = P(A/M) \cdot P(M) = (0{,}375) \cdot (0{,}4) = 0{,}15$
(ii) $P(\Gamma) = P(A - M) = P(A) - P(A \cap M) = 0{,}55 - 0{,}15 = 0{,}40$

9. $$f(\chi) = \int_{\sigma\upsilon\nu\chi}^{\chi} \frac{dt}{1+t^2} = [\tau o\xi\varepsilon\varphi t]_{\sigma\upsilon\nu\chi}^{\chi} = \tau o\xi\varepsilon\varphi\chi - \tau o\xi\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu\chi)$$

i) $$f'(\chi) = \frac{1}{1+\chi^2} + \frac{\eta\mu\chi}{1+\sigma\upsilon\nu^2\chi}$$

ii) $$f''(\chi) = \frac{-2\chi}{(1+\chi^2)^2} + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi(1+\sigma\upsilon\nu^2\chi) + 2\sigma\upsilon\nu\chi\,\eta\mu^2\chi}{(1+\sigma\upsilon\nu^2\chi)^2}$$

$$f(0) = -\frac{\pi}{4}, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = \frac{1}{2}. \Rightarrow \boxed{f(\chi) = -\frac{\pi}{4} + \chi + \frac{\chi^2}{4} + \dots}$$

10. (i) $\psi^2 = \chi \Rightarrow 2\psi \cdot \psi' = 1 \overset{A(1,1)}{\Rightarrow} \lambda_{\varepsilon\varphi} = \frac{1}{2}$.

Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $A(1,1)$: $\psi - 1 = \frac{1}{2}(\chi - 1) \Rightarrow \boxed{2\psi = \chi + 1}$

(ii) $$\begin{pmatrix}\chi'\\ \psi'\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}\chi\\ \psi\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\chi\\ \psi\end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix}\chi'\\ \psi'\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\chi\\ \psi\end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi'\\ \psi'\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\chi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\chi' - 2\psi'\\ \psi'\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\chi = \chi' - 2\psi'\\ \psi = \psi'\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\kappa_1 : (\psi')^2 = \chi' - 2\psi' \Rightarrow \underline{\psi^2 = \chi - 2\psi}\\ \varepsilon_1 : 2\psi' = \chi' - 2\psi' + 1 \Rightarrow 4\psi' = \chi' + 1 \Rightarrow \underline{4\psi = \chi + 1}\end{array}$$

Το σύστημα $$\left.\begin{array}{l}\psi^2 - 2\psi = \chi\\ 4\psi - 1 = \chi\end{array}\right\} \Rightarrow \psi^2 - 2\psi = 4\psi + 1 \Rightarrow \psi^2 - 2\psi + 1 = 0 \Rightarrow (\psi - 1)^2 = 0$$

$\Rightarrow$ ψ=1 έχει μόνο μια λύση (Δ=0) $\Rightarrow$ (ε_1) εφαπτομένη της (κ_1).

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. (i) $f(x) = \dfrac{\chi^2 - \chi - 2}{\chi + 2}$, Πεδίο ορισμού: $\chi \in \mathbb{R} - \{-2\}$

Τομές με άξονες: $\chi=0 \Rightarrow \psi=-1 \Rightarrow (0,-1)$

$\psi=0 \Rightarrow \chi^2 - \chi - 2 = 0 \Rightarrow \chi=-1,\ \chi=2 \Rightarrow (-1,0)\ ,\ (2,0)$

Κατακόρυφη ασύμπτωτη: $\chi = -2$, Πλάγια ασύμπτωτη: $\psi = \chi - 3$

$$\begin{array}{r|l} \chi^2 - \chi - 2 & \underline{\chi + 2} \\ \underline{-\chi^2 - 2\chi} & \chi - 3 \\ -3\chi - 2 & \\ \underline{3\chi + 6} & \\ 4 & \end{array}$$

$$\Rightarrow\ f(\chi) = \frac{\chi^2 - \chi - 2}{\chi+2} = \chi - 3 + \frac{4}{\chi + 2}$$

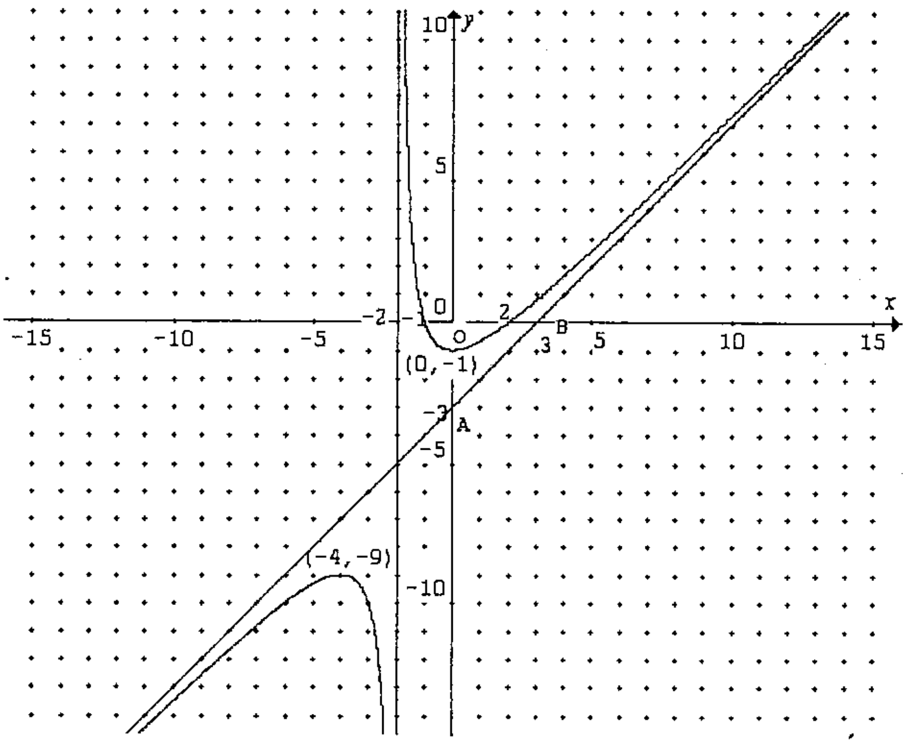
$$f'(\chi) = \frac{\chi^2 + 4\chi}{(\chi + 2)^2} = 0 \Rightarrow \chi = 0 \text{ ή } \chi = -4\ ,\ \chi \neq -2$$

χ	-∞		-4		-2		0		+∞
f′(χ)		+	0	−	‖	−	0	+	
f(χ)		↗		↘	‖	↘		↗	

$\chi = -4 \Rightarrow \psi_{max} = -9 \Rightarrow \max(-4,-9)$

$\chi = 0 \Rightarrow \psi_{min} = -1 \Rightarrow \min(0,-1)$

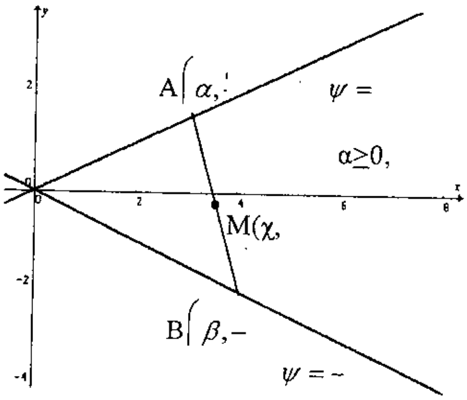
(ii) {-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8}



(iii) $E = E_{\hat{AOB}} + \int_0^2 \left(\chi - 3 + \frac{4}{\chi+2}\right) d\chi = \frac{9}{2} + \left[\frac{\chi^2}{2} - 3\chi + 4\ln|\chi+2|\right]_0^2 =$

$\frac{9}{2} + 2 - 6 - 4\ln 4 - 4\ln 2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} + 4\ln 2$ τ.μ.

2. $M(\chi,\psi) = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta}{4}\right)$



$E_{OAB} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \frac{\alpha}{2} & 1 \\ \beta & -\frac{\beta}{2} & 1 \end{vmatrix}\right| = 2$

$\Rightarrow \left|-\frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\alpha\beta}{2}\right| = 4 \Rightarrow |\alpha\beta| = 4 \Rightarrow \alpha\beta = 4 \quad (\alpha\beta \geq 0)$

$$\left.\begin{array}{l} \chi = \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \psi = \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \alpha\beta = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} \alpha+\beta = 2\chi & \\ \underline{\alpha-\beta = 4\psi} & \\ 2\alpha = 2\chi + 4\psi & \Rightarrow \alpha = \chi + 2\psi \\ 2\beta = 2\chi - 4\psi & \Rightarrow \beta = \chi - 2\psi \end{array}$$

$\overset{\alpha\beta=4}{\Rightarrow} (\chi+2\psi)\cdot(\chi-2\psi) = 4 \Rightarrow \chi^2 - 4\psi^2 = 4$ Επειδή $\chi \geq 0$, έχω ένα σκέλος υπερβολής. Οι δύο ευθείες $\psi = \pm\frac{\chi}{2}$ γράφονται $\chi^2 - 4\psi^2 = 0$ και συμπίπτουν με τις ασύμπτωτες τις υπερβολής.

3. $\frac{d^2\psi}{d\chi^2} + 2\frac{d\psi}{d\chi} + 2\psi = 2\chi + 2 \quad (1)$

(i) $m^2 + 2m + 2 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = 1 \pm i \Rightarrow \psi_\sigma = e^{-\chi}(A\sigma\upsilon\nu\chi + B\eta\mu\chi)$

$\psi_\varepsilon = \Gamma\chi + \Delta \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = \Gamma, \quad \frac{d^2\psi}{d\chi^2} = 0$

$\Rightarrow 0 + 2\Gamma + 2(\Gamma\chi + \Delta) = 2\chi + 2 \Rightarrow \Gamma = 1, \ \Delta = 0$

$\Rightarrow \psi_\varepsilon = \chi$. Η γενική λύση: $\psi = \psi_\sigma + \psi_\varepsilon \Rightarrow \boxed{\psi = e^{-\chi}(A\sigma\upsilon\nu\chi + B\eta\mu\chi) + \chi} \quad (2)$

(ii) για $\chi=0$, $\psi=1 \overset{(2)}{\Rightarrow} A=1$

$$\frac{d\psi}{d\chi}=-e^{-\chi}\mathrm{A}\sigma\upsilon\nu\chi+\mathrm{B}\eta\mu\chi+e^{-\chi}\left(-\mathrm{A}\eta\mu\chi+\mathrm{B}\sigma\upsilon\nu\chi\right)+1 \quad , \quad \chi=0,\ \frac{d\psi}{d\chi}=0 \Rightarrow$$

$$-\mathrm{A}+\mathrm{B}+1=0 \overset{\mathrm{A}=1}{\Rightarrow} \mathrm{B}=0 \Rightarrow \text{ ειδική λύση: } \boxed{\psi=e^{-\chi}\sigma\upsilon\nu\chi+\chi}$$

(iii) $f_1(\chi)=e^{-\chi}\sigma\upsilon\nu\chi+\chi, \quad f_2(\chi)=e^{-\chi}\eta\mu\chi+\chi$

$$|\psi_1-\psi_2|=e^{-\chi}\left|\sigma\upsilon\nu\chi-\eta\mu\chi\right|=e^{-\chi}\left|\sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\chi\right)\right|$$

$$=e^{-\chi}\left|2\sigma\upsilon\nu\frac{\chi+\frac{\pi}{2}+\chi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\cancel{\chi}-\frac{\pi}{2}-\cancel{\chi}}{2}\right|=e^{-\chi}\left|2\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right|=e^{-\chi}\sqrt{2}\left|\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

Επειδή $-1\le\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\le1,\ \forall\chi\in\mathbb{R}, \Rightarrow -1\cdot e^{-\chi}\sqrt{2}\le e^{-\chi}\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\le 1\cdot e^{-\chi}\sqrt{2}$

$$\Rightarrow -e^{-\chi}\sqrt{2}\le e^{-\chi}\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\le e^{-\chi}\sqrt{2}\Rightarrow\left|e^{-\chi}\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\right|\le e^{-\chi}\sqrt{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left|f_1(\chi)-f_2(\chi)\right|\le e^{-\chi}\sqrt{2}} \ (3)$$

$$\mathrm{A}=\lim_{\chi\to\infty}\left[f_1(\chi)-f_2(\chi)\right]$$

$$(3)\Rightarrow\left|f_1(\chi)-f_2(\chi)\right|\le e^{-\chi}\sqrt{2}\Rightarrow -e^{-\chi}\sqrt{2}\le f_1(\chi)-f_2(\chi)\le e^{-\chi}\sqrt{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\chi\to\infty}\left(-e^{-\chi}\sqrt{2}\right)\le\lim_{\chi\to\infty}\left[f_1(\chi)-f_2(\chi)\right]\le\lim_{\chi\to\infty}\left(e^{-\chi}\sqrt{2}\right)\Rightarrow\ 0\le\lim_{\chi\to\infty}\left[f_1(\chi)-f_2(\chi)\right]\le0$$

$$\Rightarrow \lim_{\chi\to\infty}\left[f_1(\chi)-f_2(\chi)\right]=0$$

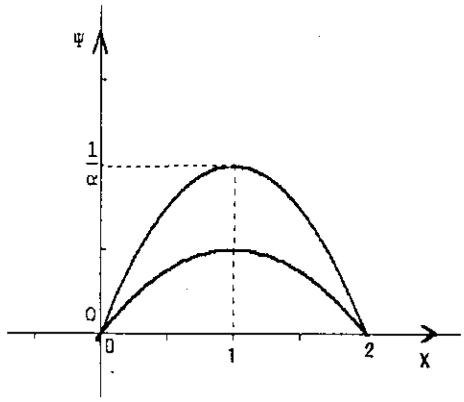
4. (i) $\psi_\alpha=\frac{1}{\alpha}\left(-\chi^2+2\chi\right)$, $\alpha>0,\ 0\le\chi\le2$.

$\psi=0\Rightarrow -\chi^2+2\chi=0\Rightarrow \chi(2-\chi)=0\Rightarrow$

$\chi=0$ ή $\chi=2\Rightarrow (0,0)\ ,\ (2\ ,0)$

$\frac{d\psi_\alpha}{d\chi}=\frac{1}{\alpha}(-2\chi+2)=0 \Rightarrow \chi=1$,

$\frac{d^2\psi}{dx^2}=-\frac{2}{a}<0\Rightarrow \max\left(1,\frac{1}{a}\right)$



(ii) $E_\kappa = \int_0^2 (\psi_{2\kappa-1} - \psi_{2\kappa+1}) d\chi = \int_0^2 \left(\frac{1}{2\kappa-1} - \frac{1}{2\kappa+1}\right)(-\chi^2 + 2\chi) d\chi =$

$$= \left(\frac{1}{2\kappa-1} - \frac{1}{2\kappa+1}\right)\left[-\frac{\chi^3}{3} + \chi^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2\kappa-1} - \frac{1}{2\kappa+1}\right)$$

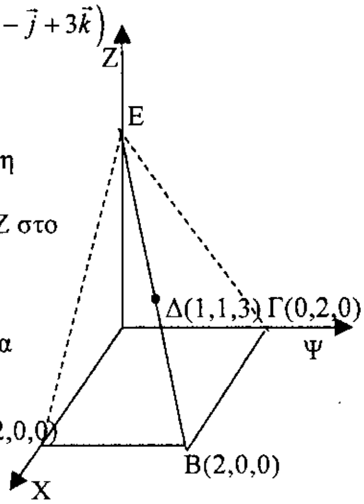
(iii) $\sum_{\kappa=1}^{\nu} \mathrm{E}_\kappa = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2\kappa-1} - \frac{1}{2\kappa+1}\right)\right] = \frac{4}{3}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{1}{2\kappa-1} - \frac{1}{2\kappa+1}\right)$

$$= \frac{4}{3}\left(1 - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \ldots + \cancel{\frac{1}{2\nu-1}} - \frac{1}{2\nu+1}\right) = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{2\nu+1}\right)$$

$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \mathrm{E}_\kappa = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\kappa=1}^{\nu} \mathrm{E}_\kappa = \lim_{\nu\to\infty} \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{2\nu+1}\right) = \frac{4}{3}$. Άρα η σειρά συγκλίνει.

5.

i) ΒΔ: $\overline{\mathrm{B\Delta}}(-1,-1,3)$, Β(2,2,0) $\Rightarrow \vec{r} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \lambda\left(-\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\right)$



ii) Η ευθεία ΟΖ έχε εξίσωση $\vec{r} = \mu\vec{k}$

Το σύστημα $\chi = 2 - \lambda$, $\psi = 2 - \lambda$, $\psi = 2 - \lambda$ έχει λύση

λ = 2, μ =6 άρα η ευθεία ΒΔ συναντά τον άξονα ΟΖ στο

σημείο Ε(0,0,6)

iii) Το σημείο Ε βρίσκεται πάνω στον άξονα ΟΖ άρα

βρίσκεται και πάνω στα επίπεδα ΧΟΖ, ΨΟΖ.

Το σημείο Ε βρίσκεται πάνω στην ευθεία ΒΔ άρα

βρίσκεται και πάνω στα επίπεδα ΑΒΔ, ΓΒΔ. Το σημείο Ε είναι εκτός του επιπέδου ΧΟΨ. Άρα το Ε είναι κορυφή της πυραμίδας Ε.ΟΑΒΓ με βάση πάνω στο ΧΟΨ. Το ΟΑΒΓ είναι τετράγωνο με πλευρά 2 μον. $\Rightarrow$ $E_{OAB\Gamma}$ = 4 τετρ. μον.

ΟΕ ⊥ (ΟΑΒΓ) $\Rightarrow$ άρα (ΟΕ) = 6 μον. είναι το ύψος της πυραμίδας .

$V = \frac{1}{3} E_B \cdot \upsilon = \frac{1}{3} 4 \cdot 6$ =8 κυβ. μονάδες.

iv) $\sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu\widehat{\mathrm{OBE}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{BE}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{44}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$