ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ
ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 8**
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Πέμπτη, 29 Ιουνίου 2000
7.30 π.μ. - 10.30 π.μ.

Το δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις σελίδες.

<u>ΜΕΡΟΣ Α</u>

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις του μέρους αυτού βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το συντελεστή του x^{10} στο ανάπτυγμα του διωνύμου $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^8$, $x\neq 0$. 28

2. Η συνάρτηση $y=\alpha x+\beta \ln x$ έχει ακρότατο το σημείο A(1,2). Να βρείτε τις τιμές των α και β και να χαρακτηρίσετε το είδος του ακροτάτου. $a=2,\ \beta=-2$
$Min(1,2)$

3. Δίνεται ο κύκλος (κ): $x^2+y^2-2x+4y=0$. Να βρείτε:

i) Το μήκος της ακτίνας του και τις συντεταγμένες του κέντρου του. $R=\sqrt{5}\quad K(1,-2)$

ii) Τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου (κ) που είναι παράλληλες προς την ευθεία (ε): $x+2y=5$. $x+2y+8=0,\ x+2y-2=0$

4. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$.

i) Να δείξετε ότι $A^2=I$, όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας 2x2.

ii) Να βρείτε τον πίνακα M για τον οποίο ισχύει $A^{2001}\cdot M=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

$M=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 9 & -1\end{pmatrix}$

5. Δίνεται η λέξη ΑΜΑΛΓΑΜΑ. Να βρείτε:

i) Το πλήθος των αναγραμματισμών της. Πόσοι από αυτούς τους αναγραμματισμούς έχουν όλα τα Α συνεχόμενα; 840, 60, 43

ii) Το πλήθος των αναγραμματισμών που μπορούμε να σχηματίσουμε, χρησιμοποιώντας, κάθε φορά, 3 από τα γράμματα της λέξης ΑΜΑΛΓΑΜΑ.

6. Δίνεται η καμπύλη $y = e^x$. Να βρείτε:

i) Την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της Α(0, 1). $y = x + 1$

ii) Τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη, την εφαπτομένη της καμπύλης στο Α και την ευθεία x=1, γύρω από τον άξονα Ox.

$V = \frac{\pi}{6}(3e^2 - 17)$

7. Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$x\frac{dy}{dx} + 2y = 3x + \eta\mu x$. $y = x - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x^2} + \frac{c}{x^2}$

8. Το 40% των ατόμων μιας ομάδας έχουν άδεια οδηγού μοτοσικλέτας ενώ το 45% δεν έχουν άδεια οδηγού αυτοκινήτου. Η πιθανότητα να έχει κάποιο άτομο της ομάδας άδεια οδηγού αυτοκινήτου, δεδομένου ότι έχει άδεια οδηγού μοτοσικλέτας, είναι 0,375. Να βρείτε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

i) Β: Να έχει κάποιο άτομο της ομάδας και τις δυο άδειες οδηγού. $p(B) = \frac{15}{100}$

ii) Γ: Να έχει κάποιο άτομο της ομάδας άδεια οδηγού αυτοκινήτου αλλά όχι άδεια οδηγού μοτοσικλέτας. $p(\Gamma) = \frac{40}{100}$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_{\sigma\upsilon\nu x}^{x} \frac{dt}{1+t^2}$.

i) Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$ της συνάρτησης. $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}$

ii) Να βρείτε τους τρεις πρώτους όρους του αναπτύγματος της f(x) σε σειρά Maclaurin. $f(x) = -\frac{\pi}{4} + x + \frac{x^2}{4} + \cdots$

(Macl. από πρώτες αρχές.)

10. Δίνεται η καμπύλη (κ): $y^2=x$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της καμπύλης στο σημείο της A(1, 1). $(\varepsilon)\ x-2y+1=0$

ii) Να βρείτε την εικόνα (κ_1) της (κ) και την εικόνα (ε_1) της (ε) κάτω από το μετασχηματισμό που δίνεται από τον πίνακα $M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. $\kappa_1:\ y_1^2=x_1-2y$

iii) Να δείξετε ότι η (ε_1) είναι εφαπτομένη της (κ_1). $\varepsilon_1:\ x_1-4y_1+1=0$

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>

Να απαντήσετε σε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 5 ασκήσεις του μέρους αυτού βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x+2}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τις ασύμπτωτες και τα ακρότατά της.

ii) Να κάμετε τη γραφική της παράσταση.

iii) Να γράψετε το σύνολο των ακέραιων τιμών που δε λαμβάνει το $-8,-7,-6,-5,-4,-3$

κλάσμα $\dfrac{x^2-x-2}{x+2}$ για τιμές του x στο πεδίο ορισμού του.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y=f(x)$, την πλάγια ασύμπτωτή της και τους άξονες Ox και Oy. $E=\frac{1}{2}+4\ln 2$

2. Δίνονται οι ημιευθείες (ε_1): $y=\dfrac{x}{2}$, $x\geq 0$ και (ε_2): $y=-\dfrac{x}{2}$, $x\geq 0$.

Πάνω στην (ε_1) παίρνουμε σημείο A και πάνω στην (ε_2) σημείο B τέτοια ώστε το εμβαδό του τριγώνου OAB να ισούται με 2 τετρ. μονάδες (O η αρχή των αξόνων).

i) Να δείξετε ότι το μέσο M του ευθύγραμμου τμήματος AB βρίσκεται πάνω σε κλάδο υπερβολής της οποίας να βρείτε την εξίσωση. $x^2-4y^2=4,\ x\geq 0$

ii) Να αναφέρετε, δικαιολογώντας την απάντησή σας, τη σχέση των ημιευθειών (ε_1) και (ε_2) με την υπερβολή.

$y=\frac{x}{2}$, $y=-\frac{x}{2}$ ασύμπτωτες

3. Δίνεται η διαφορική εξίσωση: $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2y=2x+2$.

i) Να βρείτε τη γενική λύση της. $y=(A\sigma\upsilon\nu x+B\eta\mu x)e^{-x}+x$

ii) Να βρείτε την ειδική λύση της, $y=f_1(x)$, για την οποία $y=1$ και $\frac{dy}{dx}=0$ όταν x=0. $f_1(x)=x+e^{-x}\sigma\upsilon\nu x$

iii) Αν $f_2(x)=e^{-x}\eta\mu x+x$ να αποδείξετε ότι $|f_1(x)-f_2(x)|\le\sqrt{2}e^{-x}$ και να βρείτε την τιμή του ορίου $A=\lim_{x\to\infty}[f_1(x)-f_2(x)]$. $\Rightarrow 0$

4. Δίνεται η καμπύλη $y_\alpha=\frac{1}{\alpha}(-x^2+2x)$, $\alpha>0$, $0\le x\le 2$.

i) Να κάμετε πρόχειρο διάγραμμα της καμπύλης.

ii) Αν $\kappa\in N$ να βρείτε το εμβαδό E_κ που περικλείεται μεταξύ των καμπυλών $y_{2\kappa-1}$ και $y_{2\kappa+1}$. $E_\kappa=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2\kappa-1}-\frac{1}{2\kappa+1}\right)$

iii) Να βρείτε το $\sum_{\kappa=1}^{\nu}E_\kappa$, $\nu\in N$. Να δείξετε ότι η σειρά $\sum_{\kappa=1}^{\infty}E_\kappa$ συγκλίνει και να βρείτε την τιμή της. $4/3$

5. Δίνονται τα σημεία Α(2, 0, 0), Β(2, 2, 0), Γ(0, 2, 0), Δ(1, 1, 3) και Ο η αρχή των αξόνων.

i) Να βρείτε τη διανυσματική εξίσωση της ευθείας ΒΔ. $\vec{r}=2\vec{i}+2\vec{j}+\lambda(-\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k})$

ii) Να δείξετε ότι η ΒΔ τέμνει τον άξονα Oz και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ε της τομής τους. $E(0,0,6)$

iii) Να δείξετε ότι τα επίπεδα xOz, yOz, xOy, ΑΒΔ και ΓΒΔ σχηματίζουν πυραμίδα με βάση το τετράπλευρο ΟΑΒΓ.
Στη συνέχεια να βρείτε τον όγκο της πυραμίδας. $V=8\ u.c$

iv) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ΒΔ με το επίπεδο της βάσης της πυραμίδας. $\sigma\upsilon\nu\theta=\sqrt{\frac{2}{11}}$

ΤΕΛΟΣ