ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 8**
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: **Τετάρτη, 3 Ιουλίου 2002**
7:30 – 10:30

Το δοκίμιο αποτελείται από πέντε (5) σελίδες.

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις του μέρους Α βαθμολογείται με 5 μονάδες και κάθε μια από τις 5 ασκήσεις του μέρους Β βαθμολογείται με 10 μονάδες.

<u>ΜΕΡΟΣ Α</u>

1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-\sigma\upsilon\nu x-3x}{x^2-\eta\mu 2x+2x}$. Απ. 5

2. Αν $\alpha_\kappa=\begin{vmatrix}1 & \kappa & 0\\ 0 & 1 & 6\\ \kappa & 1 & \kappa\end{vmatrix}$ να βρείτε το άθροισμα $\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa$. Απ. $\dfrac{\nu(4\nu^2+7\nu-9)}{2}$

3. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\text{Τοξημ}2x+\text{Τοξσυν}\left(2\sqrt{3}\,x\right)=\frac{\pi}{2}.$$

$x=0$ δεκτή
$x=\frac{1}{4}$ δεκτή
$x=-\frac{1}{4}$ δεκτή

4. Πρόκειται να κατασκευασθεί δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ανοικτή στο πάνω μέρος της, που να έχει όγκο $10\ m^3$. Η δεξαμενή πρέπει να έχει μήκος διπλάσιο από το πλάτος της. Το υλικό κατασκευής της βάσης της κοστίζει £1 το τετραγωνικό μέτρο ενώ το υλικό κατασκευής των παράπλευρων εδρών κοστίζει £$1\frac{1}{15}$ το τετραγωνικό μέτρο.

   (α) Να εκφράσετε το κόστος κατασκευής της δεξαμενής ως συνάρτηση του πλάτους x της βάσης της. $2x^2+\frac{32}{x}$
   (β) Να βρείτε τις διαστάσεις που πρέπει να έχει η βάση της δεξαμενής ώστε το κόστος κατασκευής να είναι ελάχιστο. 2m και 4m
   (γ) Να βρείτε αυτό το ελάχιστο κόστος. £24

.../2

5. Στο ανάπτυγμα του $(3+2x)^{\nu}$, $\nu \in N$, ο λόγος του συντελεστή του x^2 προς το συντελεστή του x^3 είναι $\frac{3}{4}$.

Να βρείτε:

(α) Την τιμή του ν. $\nu=8$

(β) Το συντελεστή του x^5 στο ίδιο ανάπτυγμα. 48384

6. Σε μια ερώτηση ενός διαγωνίσματος πολλαπλής εκλογής, δίνονται 4 απαντήσεις από τις οποίες μόνο η μία είναι σωστή. Ο μαθητής Μ ή γνωρίζει τη σωστή απάντηση ή απαντά στην τύχη. Η πιθανότητα να γνωρίζει ο μαθητής τη σωστή απάντηση είναι $\frac{3}{5}$.

Αν ο μαθητής Μ απάντησε σωστά την ερώτηση να βρείτε την πιθανότητα να γνώριζε τη σωστή απάντηση.
(Να θεωρήσετε ότι αν ο μαθητής γνωρίζει τη σωστή απάντηση τότε απαντά σωστά.) $P(\Gamma/I)=6/7$

7. Δίνεται ο μετασχηματισμός με πίνακα

$$M=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

(α) Να δείξετε ότι ο μετασχηματισμός Μ απεικονίζει την καμπύλη $x^2-y^2=1$ σε μια υπερβολή (κ) και να βρείτε την εξίσωση αυτής της υπερβολής. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών, τις συντεταγμένες των εστιών, την εκκεντρότητα και τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής (κ). $A(3,0)$, $A'(-3,0)$, $E(\sqrt{13},0)$, $E'(-\sqrt{13},0)$, $e=\frac{\sqrt{13}}{3}$ $y=\pm\frac{2}{3}x$

8.(α) Να δείξετε ότι:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha\eta\mu x}{\beta+\alpha\sigma\upsilon\nu x}\right)=\frac{\alpha^2-\beta^2}{(\beta+\alpha\sigma\upsilon\nu x)^2}+\frac{\beta}{\beta+\alpha\sigma\upsilon\nu x}, \quad \text{όπου } \alpha,\ \beta \neq 0.$$

(β) Θέτοντας $t=\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$ να δείξετε ότι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{5+4\sigma\upsilon\nu x}=\frac{2}{3}\text{Τοξεφ}\frac{1}{3}.$$

(γ) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(5+4\sigma\upsilon\nu x)^2}. \quad =\frac{10}{27}\text{τοξεφ}\frac{1}{3}-\frac{4}{45}$$

.../3

9. Δίνεται η παραβολή $y^2=4\alpha x$, $\alpha>0$ και σημείο $P(\alpha\rho^2, 2\alpha\rho)$ αυτής με $\rho>0$.

(α) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο P έχει εξίσωση: $x-\rho y+\alpha\rho^2=0$.

(β) Αν η κάθετη της παραβολής στο σημείο P τέμνει ξανά την παραβολή στο σημείο $T(\alpha t^2, 2\alpha t)$ να δείξετε ότι ισχύει $\rho^2+\rho t+2=0$.

(γ) Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Τ τέμνει τον άξονα των x στο σημείο Δ και τον άξονα των y στο σημείο Γ ενώ η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο P τέμνει τον άξονα των x στο σημείο B και τον άξονα των y στο σημείο Α. Αν $E_{OA\Delta}$ και $E_{OB\Gamma}$ είναι τα εμβαδά των τριγώνων ΟΑΔ και ΟΒΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

(i) $E_{OA\Delta} > E_{OB\Gamma}$.

(ii) $\lim\limits_{\rho\to+\infty} \dfrac{E_{OA\Delta}}{E_{OB\Gamma}} = 1$.

10. Δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Από σημείο Τ(4συνθ, 3ημθ) αυτής, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, φέρουμε ευθεία κάθετη στον άξονα των x που τέμνει ξανά την έλλειψη στο σημείο P και ευθεία κάθετη στον άξονα των y που τέμνει ξανά την έλλειψη στο σημείο Σ.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΡΣ είναι 3xημθ+4yσυνθ=0.

(β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης (κ) της έλλειψης στο σημείο Τ(4συνθ, 3ημθ) είναι:

(κ) : 4xημθ – 3yσυνθ=7ημθσυνθ.

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής της ευθείας ΡΣ και της κάθετης (κ) και να αναφέρετε το είδος της καμπύλης.

$$\frac{x^2}{\left(\frac{28}{25}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{21}{25}\right)^2}=1$$

.../4

ΜΕΡΟΣ Β

1. Δίνεται η συνάρτηση $y=\dfrac{3x+2}{x(x-2)}$.

   (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες και να κάμετε τη γραφική της παράσταση.

   (β) Έστω ότι Ε είναι το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y=\dfrac{3x+2}{x(x-2)}$, τον άξονα των x και τις ευθείες x=3 και x=4. Αν Ε=lnα να βρείτε την τιμή του α. $\alpha=12$

2. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): \vec{r}=(-6\vec{i}+2\vec{j})+\lambda(2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k})$

   και το επίπεδο $(\Pi): \vec{r}\cdot(-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})=8$.

   (α) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) βρίσκεται πάνω στο επίπεδο (Π).

   (β) Η ευθεία (ζ) περνά από την αρχή Ο των αξόνων και τέμνει κάθετα την ευθεία (ε) στο σημείο Ν. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ν. $N(-4,1,3)$

   (γ) Να βρείτε στη μορφή $\vec{r}\cdot\vec{n}=d$, την εξίσωση του επίπεδου που περιέχει το σημείο Ο και την ευθεία (ε). $\vec{r}\cdot(3\vec{i}+9\vec{j}+\vec{k})=0$

3. Δίνονται οι κύκλοι:

   $\kappa_1: x^2+y^2-25=0$

   $\kappa_2: x^2+y^2-50x+225=0$

   (α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κάθε κύκλου. $K_1(0,0)$ $R_1=5$ $K_2(25,0)$ $R_2=20$

   (β) Να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α και να βρείτε τις συντεταγμένες του Α. $A(5,0)$

   (γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε): -3x+4y=25 είναι κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων και να βρείτε τα σημεία Β και Γ στα οποία η ευθεία (ε) εφάπτεται των κύκλων (κ_1) και (κ_2) αντίστοιχα. $B(-3,4)$ $\Gamma(13,16)$

   (δ) Το μικτόγραμμο τρίγωνο που περικλείεται από το τόξο ΒΑ του κύκλου (κ_1), το τόξο ΑΓ του κύκλου (κ_2) και το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα των x. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή αυτή.

   $V=\dfrac{1600\pi}{3}$ κ.μ.

.../5

4. Δίνεται η διαφορική εξίσωση $\dfrac{dy}{dx} - y\varepsilon\varphi x = -y^2\sigma\upsilon\nu x$.

   (α) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $u = \dfrac{1}{y}$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε στη μορφή y=f(x) την ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης για την οποία y=1 όταν x=0. $y = \dfrac{\tau\varepsilon\mu x}{x+1}$

   (β) Αν $x \in (-1, 1)$, να βρείτε τους τρεις πρώτους όρους του αναπτύγματος Maclaurin της ειδικής λύσης y=f(x). $1 - x + \frac{3}{2}x^2 + \cdots$

5. Δίνεται η συνάρτηση $y=e^{2x}\,\eta\mu(x+\alpha)$ και η γωνία β για την οποία ισχύει $\sigma\varphi\beta=2$ και $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$.

   Να αποδείξετε ότι:

   (i) $\dfrac{d^\nu y}{dx^\nu} = \dfrac{e^{2x}}{\eta\mu^\nu\beta}\eta\mu(x+\alpha+\nu\beta)$, ν=1,2,3, ...

   (ii) $\eta\mu\alpha + \dfrac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{1!\eta\mu\beta}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{\eta\mu(\alpha+2\beta)}{2!\eta\mu^2\beta}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + \dfrac{\eta\mu(\alpha+3\beta)}{3!\eta\mu^3\beta}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^3 + \cdots = e^\pi\sigma\upsilon\nu\alpha$.

---------------ΤΕΛΟΣ---------------