ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2011

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τρίτη, 31/5/2011
8:30 – 11:30

| |
|---|
| ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ<br>Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο<br>που αποτελείται από δυο (2) σελίδες. |

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u> Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int\left(6\chi^4-2\sqrt{\chi}\right)d\chi$.

2. Δίνεται ο κύκλος: $\chi^2+\psi^2-6\chi+8\psi+9=0$.
   a) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και το μήκος της ακτίνας του κύκλου.
   b) Να γράψετε παραμετρικές εξισώσεις για τον πιο πάνω κύκλο.

3. Δίνεται ο πίνακας: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

   a) Να δείξετε ότι ο αντίστροφος πίνακας του Α είναι: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

   b) Να βρείτε τον πίνακα: $B=2A-3A^{-1}$.

4. Να δώσετε τον ορισμό της οριζόντιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης $f$, ορισμένης στο $R$.

   Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ με τύπο: $f(\chi)=\dfrac{\alpha\chi+5}{2\chi-\beta}$, $\alpha,\beta\in R$, έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $\psi=1$ και κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $\chi=-2$, να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha$ και $\beta$.

5. Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα του ιδίου δειγματικού χώρου Ω με: $P(A') = \frac{3}{4}$, $P(A/B) = \frac{1}{4}$ και $P(B/A) = \frac{1}{2}$, να υπολογίσετε τις πιθανότητες: $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ και $P(A' \cap B')$, και να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.

6. Δίνεται η λέξη "ΦΑΕΙΝΗ". Να βρείτε:
   a) πόσοι είναι όλοι οι αναγραμματισμοί της πιο πάνω λέξης, και
   b) σε πόσους από αυτούς τους αναγραμματισμούς **δεν** περιέχεται η λέξη "ΝΕΑ".

7. α) Να δώσετε τον ορισμό της έλλειψης.
   β) Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση: $\frac{\chi^2}{9} + \frac{\psi^2}{4} = 1$ και εστίες Ε και Ε΄.
   Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της έλλειψης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε την περίμετρο του τριγώνου ΤΔΕ, αν η ΤΔ είναι εστιακή χορδή που περνά από την Ε΄.

8. Δίνεται η συνάρτηση: $f(\chi) = \frac{2}{\chi}$, $\chi > 0$. Έστω Α το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f$, τον άξονα των χ και τις ευθείες με εξισώσεις $\chi = 1$ και $\chi = e^2$. Να βρείτε την ευθεία $\chi = \lambda$ η οποία χωρίζει το χωρίο Α σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

9. Δίνεται συνάρτηση: $f(\chi) = \alpha\chi^3 + \beta\chi^2 + \gamma\chi + \delta$, $\chi \in R$ και $\alpha \neq 0$. Αν η συνάρτηση $f$ έχει τοπικά ακρότατα για $\chi = \chi_1$ και $\chi = \chi_2$, $\chi_1 < \chi_2$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f$ έχει σημείο καμπής για $\chi = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$.

10. Δίνεται ο κύκλος: $\chi^2 + \psi^2 = 9$ και σημείο του $A(\chi_1, \psi_1)$.
    a) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Α είναι: $\chi_1\chi + \psi_1\psi = 9$.
    b) Έστω ότι $B(\chi_2, \psi_2)$ είναι ένα άλλο σημείο του κύκλου. Αν οι εφαπτόμενες του κύκλου στα Α και Β τέμνονται στο σημείο $M(\chi_0, \psi_0)$, να δείξετε ότι η εξίσωση της χορδής ΑΒ είναι: $\chi_0\chi + \psi_0\psi = 9$.
    c) Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του σημείου Μ αν η χορδή ΑΒ περνά από το σημείο $\Delta(1, 2)$.

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u> Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η καμπύλη (Κ) με παραμετρικές εξισώσεις: $\chi = \dfrac{3t}{t^3+1}$ και $\psi = \dfrac{3t^2}{t^3+1}$, $t \in R$.

   a) Αν $f(t)$ είναι η απόσταση τυχαίου σημείου της καμπύλης (Κ) από την ευθεία $(\varepsilon): \chi + \psi + 1 = 0$, να δείξετε ότι: $f(t) = \dfrac{(t+1)^2}{\sqrt{2}\left(t^2 - t + 1\right)}$, $t \in R$.

   b) Δίνεται η συνάρτηση: $\psi = \dfrac{(\chi+1)^2}{\chi^2 - \chi + 1}$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτές της, να κάνετε την γραφική της παράσταση.

2. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $\chi\psi = 1$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης $(\varepsilon)$ της υπερβολής που άγεται από το σημείο $B(4, 0)$.

   Η εφαπτομένη $(\varepsilon)$ τέμνει το θετικό ημιάξονα των ψ στο σημείο Γ. Από τυχαίο σημείο Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ φέρουμε τις κάθετες στους άξονες των συντεταγμένων και σχηματίζουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΟΗΜΔ, όπου Ο η αρχή των αξόνων και ΟΗ, ΟΔ βρίσκονται πάνω στους άξονες.
   Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να είναι μέγιστο.

3. Δίνεται συνάρτηση $f: R \to (0, +\infty)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύουν: $f'(2) = 0$, $f(0) = 1$ και $\dfrac{1}{2}\int_0^2 \chi \cdot f''(\chi)\,d\chi + \dfrac{3}{2}\int_0^2 f'(\chi)\,d\chi = 3$.

   a) Να δείξετε ότι: $f(2) = 4$.

   b) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = f(\chi)$, όπου $f$ η πιο πάνω συνάρτηση, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int_0^2 \frac{f'(\chi)}{f^2(\chi) + 5f(\chi) + 6}\,d\chi$.

4. Ένα δοχείο περιέχει 5 μαύρες και 3 λευκές μπάλες. Παίρνω τυχαία μια μπάλα από το δοχείο.

   Αν η μπάλα είναι μαύρη, την επανατοποθετώ στο δοχείο και επίσης τοποθετώ ακόμη 2 λευκές μπάλες στο δοχείο.

   Αν η μπάλα είναι λευκή, την επανατοποθετώ στο δοχείο και επίσης τοποθετώ ακόμη μια μαύρη και μια λευκή μπάλα στο δοχείο.

   Στη συνέχεια παίρνω τυχαία μια δεύτερη μπάλα από το δοχείο.

   a) Να βρείτε την πιθανότητα η δεύτερη μπάλα που πήρα να είναι λευκή.
   b) Αν η δεύτερη μπάλα που πήρα είναι λευκή, ποια η πιθανότητα η πρώτη μπάλα που πήρα να είναι μαύρη;
   c) Αν τη δεύτερη φορά, αντί να πάρω μια μπάλα παίρνω τυχαία δύο μπάλες ταυτόχρονα, ποια η πιθανότητα οι δυο μπάλες να έχουν το ίδιο χρώμα;

5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(\chi)=\chi\ln\chi-\chi+1,\ \chi\in(0,+\infty)$.

   a) Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\chi\to0^+} f(\chi)$.
   b) Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $\chi^\chi \geq e^{\chi-1}$ για κάθε $\chi>0$.
   c) Να αποδείξετε ότι: $e\int_\alpha^\beta \chi^\chi\, d\chi \geq e^\beta - e^\alpha$ με $0<\alpha<\beta$.

------ Τ Ε Λ Ο Σ   Ε Ξ Ε Τ Α Σ Η Σ ------

## ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

### 1. Στατιστική

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(\chi_i - \overline{\chi})^2}{\nu}} \quad \text{ή} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} f_i(\chi_i - \overline{\chi})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} f_i \chi_i^2}{\nu} - \overline{\chi}^2}, \quad \text{όπου} \quad \nu = \sum_{i=1}^{\kappa} f_i$$

### 2. Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A\sigma\upsilon\nu B \pm \sigma\upsilon\nu A\eta\mu B \ , \quad \sigma\upsilon\nu(A \pm B) = \sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A\eta\mu B$$

$$2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha-\beta) + \eta\mu(\alpha+\beta), \quad 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$$

$$2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta), \quad \eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha, \ \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad t = \varepsilon\varphi\alpha$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} \qquad \eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu\frac{A-B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu\frac{B-A}{2}\eta\mu\frac{A+B}{2}$$

**Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων:**

| | Σε μοίρες | Σε ακτίνια |
|---|---|---|
| $\eta\mu\chi = \eta\mu\alpha$ | $\chi = 360^0\kappa + \alpha$ ή<br>$\chi = 360^0\kappa + 180^0 - \alpha, \ \kappa \in Z$ | $\chi = 2\kappa\pi + \alpha$ ή<br>$\chi = 2\kappa\pi + \pi - \alpha, \ \kappa \in Z$ |
| $\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\alpha$ | $\chi = 360^0\kappa \pm \alpha, \ \kappa \in Z$ | $\chi = 2\kappa\pi \pm \alpha, \ \kappa \in Z$ |
| $\varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi\alpha$ | $\chi = 180^0\kappa + \alpha, \ \kappa \in Z$ | $\chi = \kappa\pi + \alpha, \ \kappa \in Z$ |

### 3. Γεωμετρία

| | | |
|---|---|---|
| *Ορθό Πρίσμα* | $E_\pi = \Pi_\beta \cdot \upsilon$ | $V = E_\beta \cdot \upsilon$ |
| *Κανονική Πυραμίδα* | $E_\pi = \frac{1}{2}\Pi_\beta \cdot h$ | $V = \frac{E_\beta . \upsilon}{3}$ |
| *Κύλινδρος* | $E_\kappa = 2\pi R\upsilon$ | $V = \pi R^2\upsilon$ |
| *Κώνος* | $E_\kappa = \pi R\lambda$ | $V = \frac{\pi R^2\upsilon}{3}$ |
| *Κόλουρος Κώνος* | $E_\kappa = \pi(R+\rho)\lambda$ | $V = \frac{\pi\upsilon}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2)$ |

## 4. Αναλυτική Γεωμετρία

Απόσταση δυο σημείων $A(\chi_1,\psi_1)$ και $B(\chi_2,\psi_2)$: $d=\sqrt{(\chi_2-\chi_1)^2+(\psi_2-\psi_1)^2}$

Απόσταση σημείου $A(\chi_1,\psi_1)$ από ευθεία $A\chi+B\psi+\Gamma=0$: $d=\dfrac{|A\chi_1+B\psi_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Έλλειψη $\dfrac{\chi^2}{\alpha^2}+\dfrac{\psi^2}{\beta^2}=1$, $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$, $\alpha>\beta$ Εστίες $(\pm\gamma,0)$, Διευθετούσες $\chi=\pm\dfrac{\alpha}{\varepsilon}$,

Εκκεντρότητα $\varepsilon=\dfrac{\gamma}{\alpha}$

## 5. Παράγωγοι

$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$, $\dfrac{d\psi}{d\chi}=\dfrac{d\psi}{du}\cdot\dfrac{du}{d\chi}$

$(\eta\mu\chi)'=\sigma\upsilon\nu\chi$, $(\sigma\upsilon\nu\chi)'=-\eta\mu\chi$, $(\varepsilon\varphi\chi)'=\tau\varepsilon\mu^2\chi$, $(\ln\chi)'=\dfrac{1}{\chi}$

## 6. Ολοκληρώματα

$\int \tau\varepsilon\mu\chi\, d\chi=\ln|\tau\varepsilon\mu\chi+\varepsilon\varphi\chi|+c$ $\int \sigma\tau\varepsilon\mu\chi\, d\chi=\ln\left|\varepsilon\varphi\dfrac{\chi}{2}\right|+c$

$\int\dfrac{d\chi}{\sqrt{\alpha^2-\chi^2}}=\tau o\xi\eta\mu\dfrac{\chi}{\alpha}+c$ $\int\dfrac{d\chi}{\alpha^2+\chi^2}=\dfrac{1}{\alpha}\tau o\xi\varepsilon\varphi\dfrac{\chi}{\alpha}+c$

## 7. Απλός τόκος: $T=\dfrac{K\cdot E\cdot X}{100}$