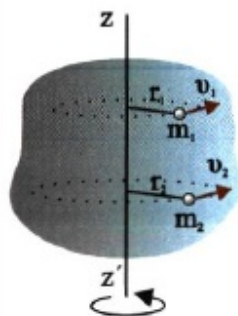


ΦΥΣΙΚΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ****2.1 ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ΛΟΓΩ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ - ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ.**

Θεωρήστε ένα στερεό σώμα να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα. Θεωρούμε το στερεό σώμα να αποτελείται από n υλικά σημεία με μάζες $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$. Τα υλικά σημεία εκτελούν γύρω από τον άξονα περιστροφής του στερεού κυκλική κίνηση με ακτίνες $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$. Τα κέντρα όλων των κυκλικών τροχιών βρίσκονται κατά μήκος αυτού του άξονα περιστροφής.



Η κινητική ενέργεια του στερεού, λόγω περιστροφικής κίνησης, είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών όλων των υλικών σημείων. Προκύπτει έτσι, η κινητική ενέργεια του στερεού λόγω περιστροφής:

$$E_{k(\pi)} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 + \frac{1}{2} m_3 u_3^2 + \dots \text{ ή }$$

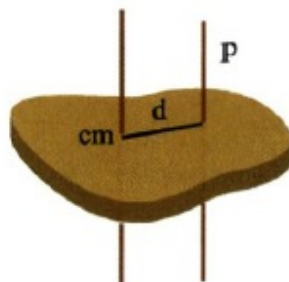
$$E_{k(\pi)} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_3 r_3^2 \omega^2 + \dots = \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots) \omega^2. \text{ Άρα,}$$

$$E_{k(\pi)} = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

όπου, $I = \sum_1^n m_i r_i^2$, είναι η ροπή αδράνειας του στερεού, ως προς τον άξονα περιστροφής.

Ονομάζουμε ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς κάποιο άξονα το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται το σώμα επί τα τετράγωνα των αποστάσεων τους από τον άξονα περιστροφής.

Μεταξύ της ροπής αδράνειας $I_{κ.μ.}$ ενός σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και της ροπής αδράνειας I_p ως προς οποιοδήποτε άλλο άξονα p , παράλληλο με τον πρώτο σε απόσταση d από αυτόν, υπάρχει μια απλή σχέση, γνωστή ως το θεώρημα παραλλήλων αξόνων ή θεώρημα Steiner.



Αν $I_{κ.μ.}$ είναι η ροπή αδράνειας ενός σώματος μάζας M , ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, η ροπή αδράνειάς του ως προς ένα άξονα που είναι παράλληλος και απέχει απόσταση d από τον πρώτο είναι ίση με το άθροισμα της ροπής αδράνειας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και του γινομένου της μάζας του σώματος επί το τετράγωνο της απόστασης d . Δηλαδή,

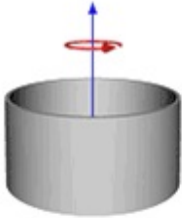
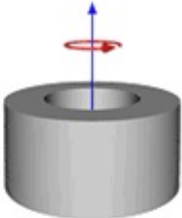
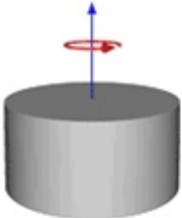
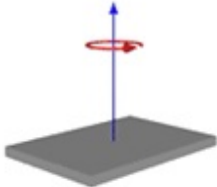
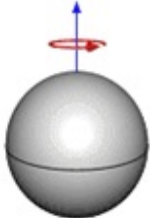
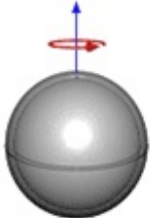
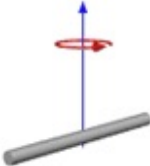
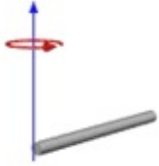
$$I_p = I_{κ.μ.} + Md^2$$

Η ροπή αδράνειας είναι μονόμετρο μέγεθος και εκφράζει το μέτρο της αδράνειας του στερεού σώματος ως προς τη μεταβολή της γωνιακής του ταχύτητας, κατά μήκος του άξονα στον οποίο υπολογίζεται και η ροπή αδράνειας.

Οι παράγοντες που επηρεάζουν τη ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος είναι η ίδια η μάζα του στερεού, ο άξονας, δηλαδή η θέση και ο προσανατολισμός του άξονα γύρω από τον οποίο θα υπολογιστεί η ροπή αδράνειας, ο τρόπος κατανομής της μάζας γύρω από τον άξονα δηλαδή αν περισσότερη μάζα είναι κοντά ή μακριά από τον άξονα ή αν η μάζα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη γύρω από τον άξονα, οι διαστάσεις του στερεού και το σχήμα του.

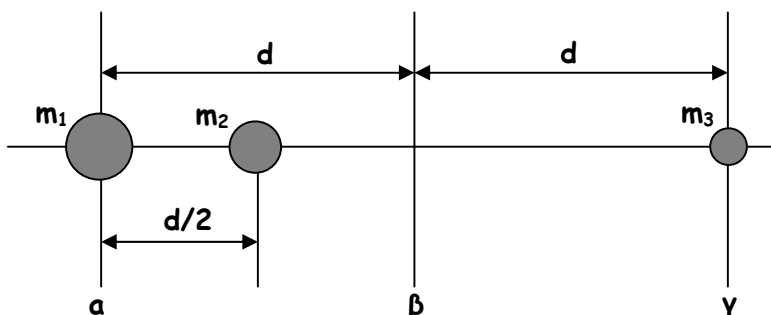
Για ένα σωματίδιο (υλικό σημείο) η ροπή αδράνειας ως προς κάποιο άξονα δίνεται από τη σχέση: $I = mr^2$, όπου r είναι η απόσταση του υλικού σημείου από τον άξονα.

Στον πίνακα δίνονται οι σχέσεις για τη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα που φαίνεται σε κάθε σχήμα, για διάφορα στερεά. Στις σχέσεις R είναι η ακτίνα της σφαίρας, του κυλίνδρου και του δακτυλιδιού, a και b είναι το μήκος και το πλάτος της επίπεδης λαμαρίνας, l είναι το μήκος της λεπτής ράβδους και M είναι η μάζα των στερεών.

			
$I = MR^2$	$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$	$I = \frac{1}{2}MR^2$	$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$
Λεπτό Δακτυλίδι	Χοντρό Δακτυλίδι	Συμπαγής Κύλινδρος	Επίπεδη Λαμαρίνα
			
$I = \frac{2}{5}MR^2$	$I = \frac{2}{3}MR^2$	$I = \frac{1}{12}M\ell^2$	$I = \frac{1}{3}M\ell^2$
Συμπαγής Σφαίρα	Κούφια Σφαίρα	Λεπτή Ράβδος	Λεπτή Ράβδος

Πρόβλημα 34

Στο σχήμα οι σφαίρες με μάζες $m_1 = 0,500 \text{ kg}$, $m_2 = 0,300 \text{ kg}$ και $m_3 = 0,200 \text{ kg}$ είναι σημειακές και βρίσκονται στην ίδια ευθείς γραμμή. Η απόσταση d στο σχήμα είναι $2,00 \text{ m}$.



(α) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος των τριών σφαιρών ως προς τον άξονα (i) α, (ii) β και (iii) γ.

(β) Να υπολογίσετε το κέντρο μάζας του συστήματος των τριών σφαιρών, ως προς το σημείο που βρίσκεται η μάζα m_1 .

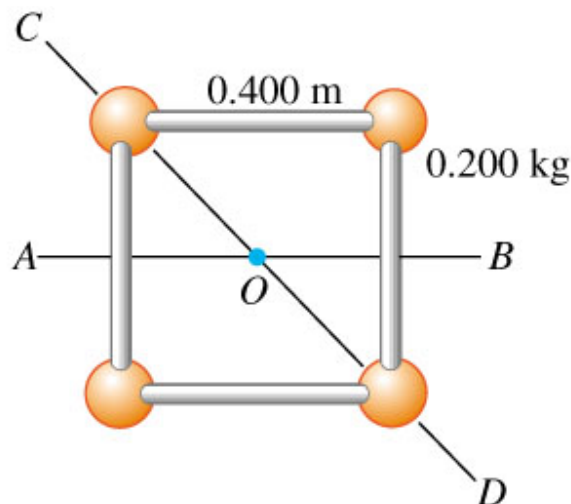
(γ) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος των τριών σφαιρών ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του συστήματος και κάθετα στην ευθεία που ενώνει τις τρεις σφαίρες.

(δ) να συγκρίνεται τις τιμές της ροπής αδράνειας ως προς τους άξονες α, β και γ με την τιμή της ροπής αδράνειας ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας και να εξαγάγετε ένα συμπέρασμα.

(Απάντηση: (α) (i) $3,50 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, (ii) $3,10 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, (iii) $10,7 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, (β) $1,10 \text{ m}$, (γ) $2,29 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$)

Πρόβλημα 35

Τέσσερις μικρές σφαίρες, οι οποίες θεωρούνται υλικά σημεία, έχει η καθεμία μάζα $0,200 \text{ kg}$ και βρίσκονται στις κορυφές τετραγώνου πλευράς $0,400 \text{ m}$ και συνδέονται με αβαρείς ράβδους, όπως δείχνει το σχήμα.



Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος των τεσσάρων σφαιρών:

(α) ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο O του τετραγώνου, κάθετα στο επίπεδο του τετραγώνου.

(β) ως προς τον άξονα που περνά από το σημείο που βρίσκεται μια από τις τέσσερις σφαίρες, κάθετα στο επίπεδο του τετραγώνου.

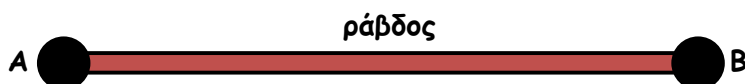
(γ) ως προς τον άξονα AB .

(δ) ως προς τον άξονα CD .

(Απάντηση: (α) $0,064 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, (β) $0,128 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, (γ) $0,032 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, (δ) $0,032 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$)

Πρόβλημα 36

Ένα σύστημα αποτελείται από δύο υλικά σημεία και μια λεπτή ράβδο σταθερής διατομής και σταθερής πυκνότητας. Τα υλικά σημεία Α και Β βρίσκονται στα άκρα της ράβδου όπως δείχνει το σχήμα. Το κάθε υλικό σημείο έχει μάζα 0,500 kg. Η ράβδος έχει μάζα 1,400 kg και μήκος 3,00 m.



(α) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του συστήματος κάθετα στη ράβδο.

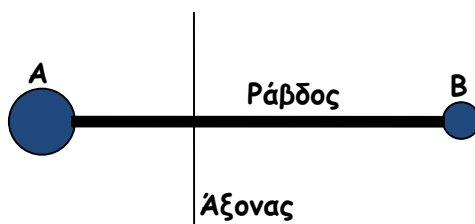
(β) Δίνεται ότι το σύστημα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου 0,20 rad/s γύρω από τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του συστήματος κάθετα στη ράβδο. (i) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του συστήματος λόγω της περιστροφής. (ii) Να υπολογίσετε το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των υλικών σημείων.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου μάζας m και μήκους ℓ , ως προς τον άξονα που περνά κάθετα στη ράβδο από το κέντρο μάζας της: $I_{κ.μ.} = \frac{1}{12} m\ell^2$.

(Απάντηση: (α) 3,3 kg·m², (β) (i) 0,066 J, (ii) 0,3 m/s)

Πρόβλημα 37

Ένα σύστημα αποτελείται από μια ομογενή λεπτή ράβδο και δύο υλικά σημεία, όπως δείχνει το σχήμα. Το σύστημα μπορεί να περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο, γύρω από τον κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του συστήματος. Η μάζα του υλικού σημείου Α είναι 0,50 kg και η μάζα του υλικού σημείου Β είναι 0,20 kg. Η ράβδος έχει μάζα 0,30 kg και μήκος 2,0 m.



(α) Να υπολογίσετε το κέντρο μάζας του συστήματος, ως προς το σημείο που βρίσκεται το υλικό σημείο Α.

(β) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος, ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του συστήματος, κάθετα στη ράβδο.

(γ) Δίνεται ότι το σύστημα περιστρέφεται γύρω από τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του συστήματος, κάθετα στη ράβδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου 2,00 rad/s.

Να υπολογίσετε:

(i) Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των υλικών σημείων.

(ii) Την κινητική ενέργεια των υλικών σημείων.

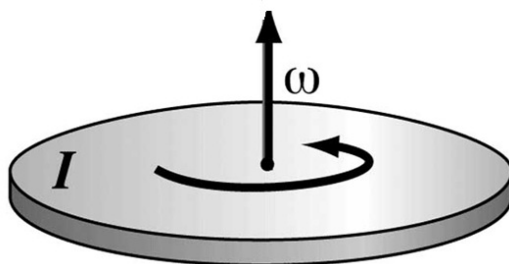
(iii) Την κινητική ενέργεια της ράβδου.

(iv) Την κινητική ενέργεια του συστήματος.

(Απάντηση: (α) 0,7 m, (β) 0,71 kg.m², (γ) (i) 1,4 m/s, 2,6 m/s, (ii) 0,49 J, 0,676 J, (iii) 0,254 J, (iv) 1,42 J)

Πρόβλημα 38

Ο δίσκος του σχήματος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου $0,600 \text{ rad/s}$ γύρω από τον άξονα συμμετρίας του. Η μάζα του δίσκου είναι $10,0 \text{ kg}$ και η ακτίνα του $50,0 \text{ cm}$. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2}MR^2$.



(α) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του δίσκου.

(β) Να υπολογίσετε το έργο της ροπής δύναμης που πρέπει να ασκηθεί στο δίσκο για να ελαττώσει τη γωνιακή ταχύτητα από την αρχική τιμή στην τιμή $0,2 \text{ rad/s}$.

(Απάντηση: (α) $0,225 \text{ J}$, (β) $0,200 \text{ J}$)

Πρόβλημα 39

Η ομογενής ράβδος στο σχήμα έχει μήκος ℓ , μάζα m και ροπή αδράνειας ως προς τον σταθερό άξονα που περνά από το άκρο της O , κάθετα στη ράβδο ίση με $I_{(O)} = \frac{1}{3}m\ell^2$. Αρχικά η ράβδος κρατείται κατακόρυφη.



Η ράβδος αφήνεται από την ηρεμία και περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από το σταθερό σημείο O .

(α) Να δείξετε ότι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου τη στιγμή που κτυπά στο οριζόντιο δάπεδο, δίνεται από τη σχέση $\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$.

(β) Να συγκρίνεται τους χρόνους που χρειάζονται τα εξής στερεά από τη στιγμή που αφήνονται από την ηρεμία να περιστραφούν από την κατακόρυφη θέση μέχρι τη στιγμή που κτυπούν στο δάπεδο:

(i) μια συμπαγής λεπτή ράβδος μάζας m και μήκους ℓ και μια συμπαγής λεπτή ράβδος μάζας $2m$ και μήκους ℓ .

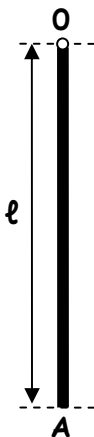
(ii) μια συμπαγής λεπτή ράβδος μάζας m και μήκους ℓ και μια συμπαγής λεπτή ράβδος μάζας m και μήκους 2ℓ .

(iii) μια συμπαγής λεπτή ράβδος μάζας $2m$ και μήκους ℓ και μια συμπαγής λεπτή ράβδος μάζας m και μήκους 2ℓ .

(γ) Να δείξετε ότι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου τη στιγμή που διαγράφει γωνία θ με την κατακόρυφο, δίνεται από τη σχέση $\omega = \sqrt{\frac{3g(1 - \sin\theta)}{\ell}}$.

Πρόβλημα 40

Η ομογενής ράβδος στο σχήμα έχει μήκος ℓ , μάζα m και ροπή αδράνειας ως προς τον σταθερό άξονα που περνά από το άκρο της O , κάθετα στη ράβδο ίση με $I_{(O)} = \frac{1}{3}m\ell^2$. Αρχικά η ράβδος κρατείται κατακόρυφη.

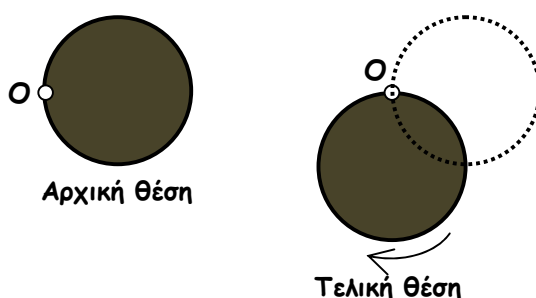


Δίνουμε στο άκρο A της ράβδου αρχική ταχύτητα με μέτρο u με διεύθυνση κάθετη στη ράβδο. Η ράβδος περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από το σταθερό σημείο O . Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της u για να μπορέσει η ράβδος να διαγράψει 180° δίνεται από τη σχέση $u_{\min} = \sqrt{6g\ell}$.

Πρόβλημα 41

Ο ομοιογενής δίσκος στο σχήμα, μάζας M και ακτίνας R , μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από τον οριζόντιο άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου και περνά από το σταθερό σημείο O που βρίσκεται στην περιφέρεια του δίσκου. Αρχικά ο δίσκος κρατείται ακίνητος ώστε η ευθεία που περνά από το O και το κέντρο μάζας του δίσκου να είναι οριζόντια. Ο δίσκος αφήνεται από την ηρεμία (χωρίς αρχική ταχύτητα) και περιστρέφεται χωρίς απώλειες μηχανικής ενέργειας. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον οριζόντιο άξονα που περνά κάθετα από το επίπεδο του δίσκου στο κέντρο μάζας του είναι

$$I_{\kappa.μ.} = \frac{1}{2}MR^2.$$

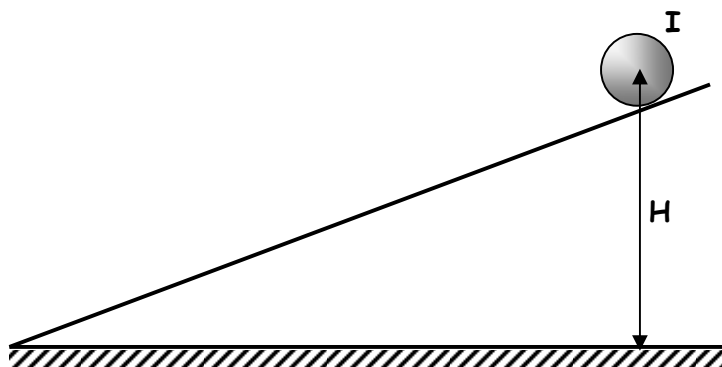


Να δείξετε ότι η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου έχει μέγιστο μέτρο που δίνεται από τη σχέση

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{4g}{3R}}.$$

Πρόβλημα 42

Ένα στερεό (σφαίρα, κύλινδρος, δακτυλίδι), μάζας m και ακτίνας R , αφήνεται από την κορυφή ενός κεκλιμένου επιπέδου να κυλίσει κατά μήκος του επιπέδου. Το στερεό φτάνει στη βάση του επιπέδου αφού διανύσει κατακόρυφα ύψος h . Η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής είναι I .



(α) Να δείξετε ότι το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του κέντρου μάζας του στερεού τη στιγμή που φτάνει στη βάση του επιπέδου δίνεται από τη σχέση $u = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{I}{R^2}}}$.

(β) Να δείξετε ότι το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας u είναι ανεξάρτητο είτε από τη μάζα είτε από την ακτίνα των στερεών: σφαίρα, κύλινδρος, δακτυλίδι.

(γ) Να συγκρίνεται τους χρόνους που χρειάζονται τα εξής στερεά για να φτάσουν από την κορυφή στη βάση του επιπέδου:

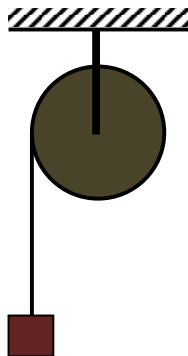
- (i) μια συμπαγής και μια κούφια σφαίρα.
- (ii) δύο συμπαγείς σφαίρες η μια από σίδηρο και η άλλη από ξύλο.
- (iii) ένα δακτυλίδι και ένας συμπαγής κύλινδρος.
- (iv) μια συμπαγής σφαίρα και ένας συμπαγής κύλινδρος.

Πρόβλημα 43

Στο σχήμα το σώμα μάζας m είναι στερεωμένο στο άκρο αβαρούς και μη ελαστικού νήματος και κρατείται αρχικά ακίνητο. Το νήμα τυλίγεται πολλές φορές γύρω από ένα στερεό σώμα (δίσκο, κύλινδρο ή σφαίρα) μάζας M και ακτίνας R . Αφήνουμε το σώμα να κινηθεί ελεύθερα.

Κατά την κίνηση του σώματος και την περιστροφή του δίσκου διατηρείται η μηχανική ενέργεια του συστήματος.

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής είναι I .



(α) Να δείξετε ότι το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σώματος όταν κινηθεί κατακόρυφα ύψος h (από το αρχικό σημείο που αφήνεται να κινηθεί ελεύθερα), δίνεται από τη σχέση

$$u = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{I}{R^2}}}.$$

(β) Να συγκρίνετε τα μέτρα της γραμμικής ταχύτητας του σώματος για το ίδιο ύψος h για τρία διαφορετικά στερεά: ένας δίσκος με ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής

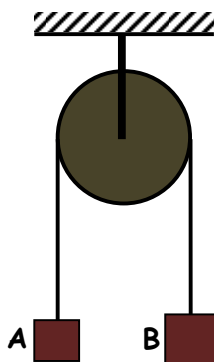
$I = \frac{1}{2}MR^2$, ένα δακτυλίδι με ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής $I = MR^2$ και

μία σφαίρα με ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής $I = \frac{2}{5}MR^2$.

Πρόβλημα 44

Στο σχήμα το σώμα Α μάζας m_1 και το σώμα Β μάζας m_2 είναι συνδεδεμένα με αβαρές και μη ελαστικό νήμα, μεγάλου μήκους, και κρατούνται αρχικά ακίνητα. Το νήμα τυλίγεται γύρω από ένα στερεό σώμα (τροχαλία, δακτυλίδι, κύλινδρο ή σφαίρα) μάζας M και ακτίνας R , που μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο της. Η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής είναι I . Αφήνουμε τα σώματα να κινηθούν ελεύθερα, από το ίδιο οριζόντιο επίπεδο, όπως δείχνει το σχήμα.

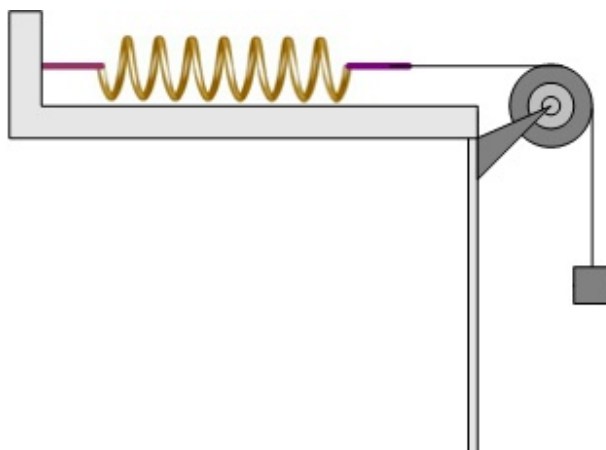
Κατά την κίνηση των σωμάτων διατηρείται η μηχανική ενέργεια.



(α) Να δείξετε ότι το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σωμάτων όταν θα απέχουν μεταξύ τους κατακόρυφο ύψος h , δίνεται από τη σχέση
$$u = \sqrt{\frac{(m_2 - m_1)gh}{m_2 + m_1 + \frac{I}{R^2}}}.$$

Πρόβλημα 45

Στο σχήμα το σώμα μάζας m είναι συνδεδεμένο στο άκρο αβαρούς και μη ελαστικού νήματος και κρατείται αρχικά ακίνητο. Το νήμα τυλίγεται γύρω από ένα στερεό σώμα (τροχαλία, κύλινδρο, δακτυλίδι ή σφαίρα) ακτίνας R και ροπή αδράνειας ως προς τον οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του I , το οποίο μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο. Η άλλη άκρη του νήματος συνδέεται στο ένα άκρο οριζόντιου αβαρούς ελατηρίου σταθεράς K , ενώ το άλλο άκρο είναι συνδεδεμένο σε σταθερό σημείο. Αφήνουμε το σώμα να κινηθεί ελεύθερα. Στο σύστημα διατηρείται η μηχανική ενέργεια.



(α) Να αναφέρετε τις μετατροπές ενέργειας που συμβαίνουν στο σύστημα κατά την πτώση του σώματος.

(β) Να δείξετε ότι το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σώματος όταν διανύσει κατακόρυφο

ύψος h από τη στιγμή που το αφήνουμε ελεύθερο, δίνεται από τη σχέση $u = \sqrt{\frac{h(2mg - Kh)}{m + \frac{I}{R^2}}}$.

(γ) Να εξηγήσετε

(i) Αν το μέτρο της ταχύτητας του σώματος αυξάνεται συνεχώς ή αν παίρνει μέγιστη οριακή τιμή.

(ii) γιατί υπάρχει ένα όριο στο μέγιστο ύψος που μπορεί να κατέλθει το σώμα.

(δ) Να δείξετε ότι η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου δίνεται από τη σχέση $\Delta x_{\max} = \frac{2mg}{K}$.

(ε) Να δείξετε ότι το μέγιστο μέτρο της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση

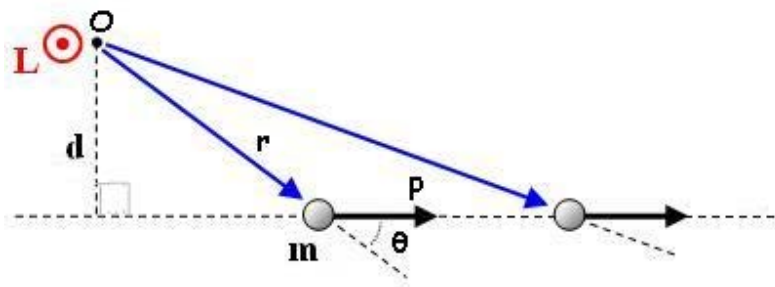
$$u = mg \sqrt{\frac{1}{K(m + \frac{I}{R^2})}}.$$

ΦΥΣΙΚΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ****2.2 ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΥΛΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ**

Η στροφορμή ενός υλικού σημείου, ως προς κάποιο σημείο αναφοράς O , κατά την κίνησή του στο χώρο ορίζεται, κάθε χρονική στιγμή, ως το εξωτερικό (διανυσματικό) γινόμενο της θέσης του επί την ορμή του, δηλαδή με τη σχέση $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Στη σχέση αυτή $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου ως προς το σημείο αναφοράς, O , και $\vec{p}$ είναι η ορμή του υλικού σημείου.

Όπως προκύπτει από τον ορισμό οι μονάδες μέτρησης της στροφορμής στο διεθνές σύστημα μονάδων S.I. είναι $[N.m.s]$ ή $[kg.m^2.s^{-1}]$.

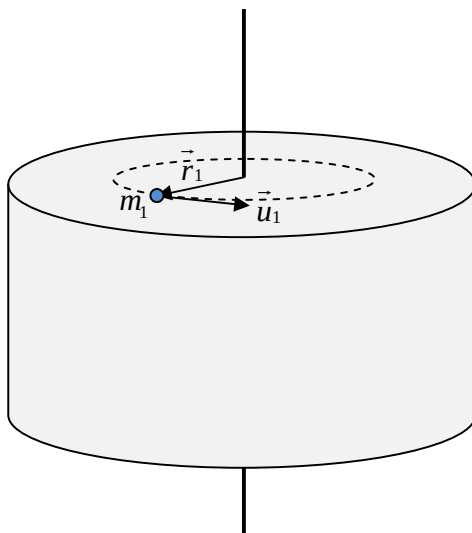
Σύμφωνα με τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου το μέτρο της στροφορμής δίνεται από τη σχέση $L = r p \sin \theta$, όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{r}$ και $\vec{p}$. Η διεύθυνση της στροφορμής είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τα δύο διανύσματα $\vec{r}$ και $\vec{p}$ και περνά από το σημείο αναφοράς O . Η φορά της στροφορμής καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού, όπως δείχνει το σχήμα. Αρχικά τα δάκτυλα του δεξιού χεριού τοποθετούνται ώστε να δείχνουν τη φορά του διανύσματος $\vec{r}$. Μετά τα δάκτυλα του δεξιού χεριού στρέφονται προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{p}$, κατά τη γωνία θ . Οπότε η φορά του διανύσματος της στροφορμής είναι η φορά του αντίχειρα του δεξιού χεριού.



Στην ειδική περίπτωση που το υλικό σημείο, μάζας m , εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με μέτρο της γραμμικής ταχύτητας u και ακτίνας της τροχιάς r , το μέτρο της στροφορμής L του υλικού σημείου ως προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, δίνεται από τη σχέση, $L = m u r$ και παραμένει σταθερό σε όλη τη διάρκεια της ομαλής κυκλικής κίνησης. Η διεύθυνση της στροφορμής είναι κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς στο κέντρο της και με φορά όπως βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Η διεύθυνση και η φορά της στροφορμής σε αυτή την περίπτωση ταυτίζεται με τη διεύθυνση και τη φορά της γωνιακής ταχύτητας του υλικού σημείου. Αν όμως επιλέξουμε άλλο σημείο αναφορά πλην του κέντρου της κυκλικής τροχιάς, τότε η στροφορμή του υλικού σημείου δεν είναι σταθερή και η κατεύθυνση της δεν συμπίπτει με την κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας.

2.3 ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Για τον προσδιορισμό της στροφορμής του στερεού σώματος, θεωρούμε το στερεό να αποτελείται από υλικά σημεία με μάζες $m_1, m_2, m_3 \dots m_k$. Κάθε υλικό σημείο του στερεού διαγράφει κυκλική κίνηση με το κέντρο της κυκλικής του τροχιάς να βρίσκεται πάνω στον άξονα περιστροφής. Άρα η στροφορμή κάθε υλικού σημείου ως προς το κέντρο της κυκλικής του τροχιάς έχει διεύθυνση τον άξονα περιστροφής.



Η στροφορμή του στερεού σώματος είναι το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών όλων των υλικών σημείων που αποτελούν το στερεό σώμα ως προς κάποιο σημείο αναφοράς. Παίρνοντας ως σημείο αναφοράς για τα υλικά σημεία το κέντρο της κυκλικής τους τροχιάς που για όλα τα υλικά σημεία βρίσκεται πάνω στον άξονα περιστροφής, τότε η στροφορμή του στερεού είναι κατά μήκος του άξονα περιστροφής στην ίδια φορά με τη γωνιακή ταχύτητα του στερεού. Άρα,

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_k = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 + \dots + \vec{r}_k \times \vec{p}_k$$

$$\vec{L} = m_1(\vec{r}_1 \times \vec{u}_1) + m_2(\vec{r}_2 \times \vec{u}_2) + \dots + m_k(\vec{r}_k \times \vec{u}_k)$$

$$\vec{L} = m_1(\vec{r}_1 \times \vec{\omega} \times \vec{r}_1) + m_2(\vec{r}_2 \times \vec{\omega} \times \vec{r}_2) + \dots + m_k(\vec{r}_k \times \vec{\omega} \times \vec{r}_k)$$

$$\vec{L} = m_1 r_1^2 \vec{\omega} + m_2 r_2^2 \vec{\omega} + \dots + m_k r_k^2 \vec{\omega} = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_k r_k^2) \vec{\omega}. \text{ Άρα,}$$

$\vec{L}_{\kappa.\mu.} = I_{\kappa.\mu.} \vec{\omega}$. Όπου $I_{\kappa.\mu.}$ είναι η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής του που περνά από το κέντρο μάζας του στερεού.

Η στροφορμή του στερεού που ορίζεται κατά μήκος που περνά από το κέντρο μάζας του ονομάζεται ιδιοστροφορμή (spin) του στερεού σώματος.

2.4 ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

Από τον ορισμό της στροφορμής υλικού σημείου ως προς κάποιο σημείο αναφοράς O , $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, παίρνοντας την πρώτη παράγωγο ως προς το χρόνο, έχουμε,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{u} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = 0 + \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}, \text{ ή } \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}.$$

Το εξωτερικό γινόμενο $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ είναι η ροπή της συνισταμένης εξωτερικής δύναμης στο υλικό σημείο ως προς το σημείο O , και η μεταβολή της στροφορμής $d\vec{L}$ έχει διεύθυνση και φορά την ίδια με τη διεύθυνση και τη φορά της ροπής της συνισταμένης εξωτερικής δύναμης. Άρα, η ροπή της συνισταμένης εξωτερικής δύναμης σε ένα υλικό σημείο, ως προς το σημείο αναφοράς O είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής, ως προς το χρόνο, ως προς το ίδιο σημείο αναφοράς.

Αν η ροπή της συνισταμένης εξωτερικής δύναμης στο στερεό σώμα ως προς τον άξονα περιστροφής είναι μηδέν τότε η στροφορμή $\vec{L}$ κατά μήκος του ιδίου άξονα διατηρείται σταθερή.

Μερικά παραδείγματα που εξηγούνται με το θεώρημα διατήρησης της στροφορμής είναι:

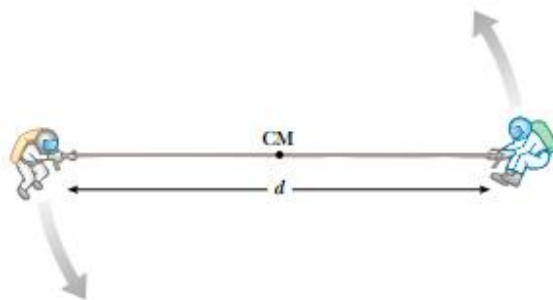
- (α) Η χορεύτρια στον πάγο η οποία κλείνει τα χέρια της για να ελαττώσει τη ροπή αδράνειας και να αυξήσει τη γωνιακή της ταχύτητα.
- (β) Ένας άνθρωπος που περιστρέφεται σε κάθισμα ανοιγοκλείνει τα χέρια, στα οποία κρατά βάρακια, αυξάνει και ελαττώνει τη ροπή αδράνειας με αποτέλεσμα να μειώνει και να αυξάνει αντίστοιχα τη γωνιακή του ταχύτητα.
- (γ) Ένας αθλητής καταδύσεων μαζεύει το σώμα του πριν πέσει στο νερό για να αυξήσει τη γωνιακή του ταχύτητα.
- (δ) Ένας οριζόντιος περιστρεφόμενος δίσκος πάνω στον οποίο κολλά ένα σώμα που πέφτει από κάποιο ύψος, ελαττώνει τη γωνιακή του ταχύτητα.

Πρόβλημα 46

Δύο αστροναύτες, ο καθένας με μάζα m , κρατούν ένα σχοινί, αμελητέας μάζας, και περιφέρονται γύρω από το κέντρο μάζας τους με σταθερή συχνότητα f_0 , όταν η απόσταση μεταξύ τους είναι d . Ο ένας από τους δύο αστροναύτες τραβά το σχοινί ώστε να ελαττώσει την απόσταση μεταξύ τους στην τελική τιμή $\frac{d}{2}$. Δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές στο σύστημα των δύο αστροναυτών.

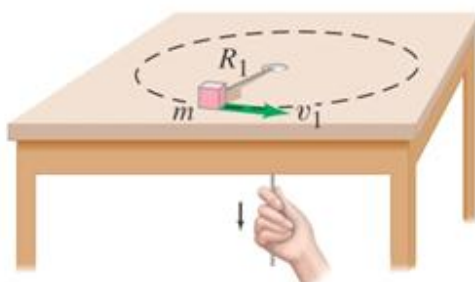
(α) Να αποδείξετε ότι η συχνότητα των αστροναυτών f όταν η απόσταση μεταξύ τους είναι $\frac{d}{2}$ είναι: $f = 4f_0$.

(β) Να δείξετε ότι η μεταβολή της κινητικής τους ενέργειας δίνεται από τη σχέση: $\Delta E = \frac{63}{4} m \pi^2 d^2 f_0^2$. Να εξηγήσετε που οφείλεται η μεταβολή αυτή.



Πρόβλημα 47

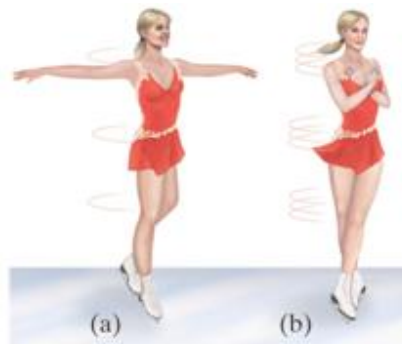
Το σώμα στο σχήμα, μάζας 400 g, συνδέεται στη μια άκρη αβαρούς και μη ελαστικού νήματος. Το νήμα περνά μέσα από μια μικρή τρύπα που βρίσκεται στην επιφάνεια ενός τραπεζιού και γίνεται κατακόρυφο. Δίνουμε μια ώθηση στο σφαιρίδιο ώστε να αποκτήσει ταχύτητα και ασκούμε δύναμη στην άλλη άκρη του νήματος, κατακόρυφα προς τα κάτω, η οποία ενεργεί ως κεντρομόλος δύναμη πάνω στο σώμα. Ως αποτέλεσμα το σώμα εκτελεί οριζόντια κυκλική κίνηση. Η κίνηση γίνεται χωρίς τριβές. Αρχικά η ακτίνα της τροχιάς είναι 50 cm και η γραμμική ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο 1,2 m/s. Αυξάνουμε το μέτρο της δύναμης που ασκούμε στην άκρη του νήματος και ελαττώνουμε έτσι την ακτίνα της τροχιάς διατηρώντας της σταθερή στα 20 cm.



- (α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σφαιριδίου, όταν η ακτίνα της τροχιάς είναι 20 cm.
- (β) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σφαιριδίου και να δικαιολογήσετε που οφείλεται.
- (γ) Καθώς το σώμα περιστρέφεται, κάποια στιγμή σπάζει το νήμα. Να εξηγήσετε αν θα αλλάξει και πώς η στροφορμή του σώματος.
- (Απάντηση: (α) 3,0 m/s, (β) +1,512 J)**

Πρόβλημα 48

Αρχικά η μαθήτρια, με τα χέρια ανοικτά, περιστρέφεται σε παγοδρόμιο, με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_1 γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της. Όταν η μαθήτρια φέρνει τα δύο χέρια της κοντά στον άξονα περιστροφής, το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας αυξάνεται σε ω_2 .



(α) Να εξηγήσετε την αύξηση του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας της μαθήτριας.

(β) Να εξηγήσετε πώς μεταβάλλεται η κινητική της ενέργειας της μαθήτριας και που οφείλεται η μεταβολή.

(γ) Δίνεται ότι $\omega_2 = 1,2\omega_1$. Δίνεται επίσης ότι η ροπή αδράνειας της μαθήτριας ως προς τον άξονα περιστροφής, όταν έχει τα χέρια ανοικτά είναι $0,24 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

Να υπολογίσετε την ροπή αδράνειας της μαθήτριας, ως προς τον άξονα περιστροφής, όταν έχει τα χέρια της κοντά στον άξονα.

(Απάντηση: (γ) $0,20 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$)

Πρόβλημα 49

Κατά την κατάδυση της αθλήτριας στο νερό να εξηγήσετε πώς αλλάζουν και γιατί (ή αν διατηρούνται σταθερά) τα εξής φυσικά μεγέθη, σε σχέση με την κατανομή της μάζας της γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της, όπως δείχνει η εικόνα:



- (α) Η στροφορμή της, ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της αθλήτριας.
- (β) Η ροπή αδράνειας της, ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της αθλήτριας.
- (γ) Η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής γύρω από τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας.

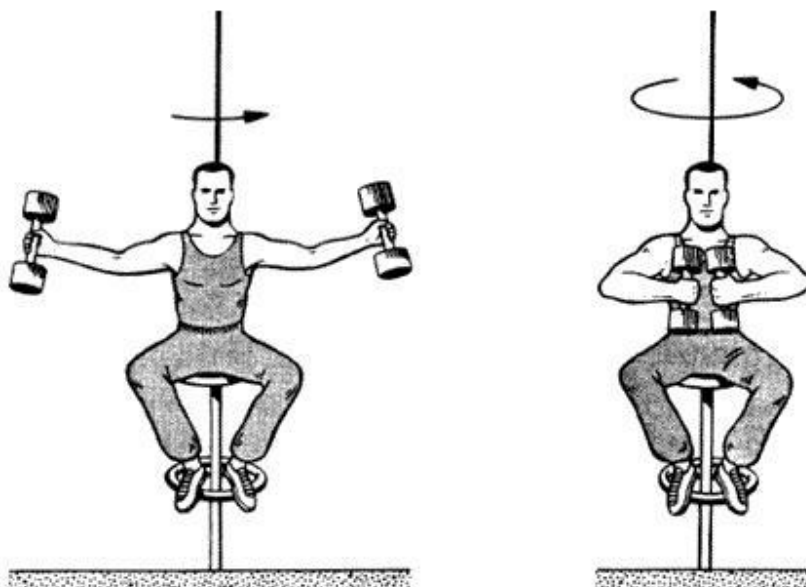
Πρόβλημα 50

Αρχικά ο άντρας στην εικόνα περιστρέφεται με τα χέρια ανοικτά με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $2,0 \text{ rad/s}$, χωρίς τριβές. Αρχικά η ροπή αδράνειας του συστήματος (άντρας, βαράκια και δίσκος), ως προς τον άξονα περιστροφής, είναι $65,0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Στη συνέχεια φέρνει τα χέρια πιο κοντά στον άξονα περιστροφής και η ροπή αδράνειας γίνεται $26,0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

(α) Να υπολογίσετε το μέτρο της νέας γωνιακής ταχύτητας περιστροφής.

(β) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος και να δικαιολογήσετε που οφείλεται.

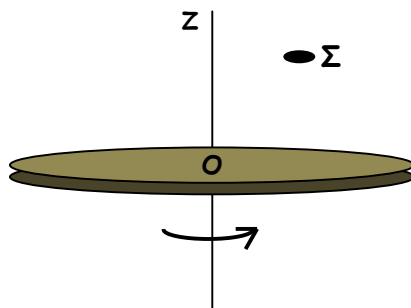
(γ) Στη συνέχεια ο άντρας ξαναφέρει τα χέρια ανοικτά όπως ήταν στην αρχική φάση. Καθώς περιστρέφεται ελευθερώνει τα βαράκια και φεύγουν από τα χέρια του. Να εξηγήσετε αν θα αλλάξει η γωνιακή του ταχύτητα και αν ναι πώς;



(Απάντηση: (α) $5,0 \text{ rad/s}$, (β) $+390 \text{ J}$)

Πρόβλημα 51

Ο ομοιογενής δίσκος στο σχήμα περιστρέφεται, χωρίς τριβές, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου $2,50 \text{ rad/s}$. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής είναι $2,00 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Ένα υλικό σημείο μάζας $0,500 \text{ kg}$ αφήνεται να πέσει ελεύθερα από κάποιο ύψος και κολλά πάνω στην επιφάνεια του δίσκου σε απόσταση $1,50 \text{ cm}$ από την περιφέρεια του δίσκου.



(α) Να εξηγήσετε γιατί ελαττώνεται το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου, λόγω της κρούσης.

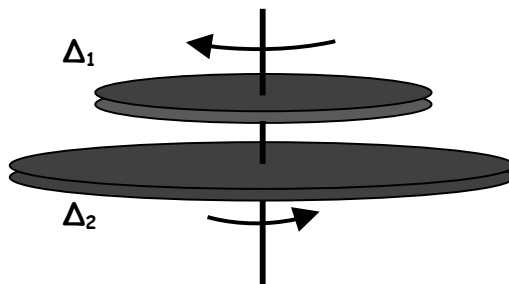
(β) Να υπολογίσετε το μέτρο της νέας γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του δίσκου.

(γ) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του δίσκου λόγω της κρούσης και να εξηγήσετε που οφείλεται η μεταβολή.

(Απάντηση: (β) $1,60 \text{ rad/s}$, (γ) $-3,69 \text{ J}$)

Πρόβλημα 52

Στο σχήμα οι δύο δίσκοι περιστρέφονται γύρω από τον κοινό άξονα συμμετρίας τους που περνά από τα κέντρα μάζας τους. Η ροπή αδράνειας των δύο δίσκων Δ_1 και Δ_2 , ως προς τον άξονα περιστροφής, είναι $1,5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ και $3,5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, αντίστοιχα.



Αρχικά οι δίσκοι περιστρέφονται, χωρίς τριβές, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο με αντίρροπες γωνιακές ταχύτητες. Τα μέτρα των γωνιακών ταχυτήτων των δύο δίσκων Δ_1 και Δ_2 είναι $5,0 \text{ rad/s}$ και $3,0 \text{ rad/s}$ αντίστοιχα.

Κάποια στιγμή ο δίσκος Δ_1 ολισθαίνει κατά μήκος του άξονα, χωρίς τριβές, και πέφτει πάνω στο δίσκο Δ_2 . Αμέσως μετά οι δύο δίσκοι αποκτούν κοινή γωνιακή ταχύτητα.

(α) Να εξηγήσετε ποια είναι η διεύθυνση και η φορά της κοινής γωνιακής ταχύτητας.

(β) Να υπολογίσετε το μέτρο της κοινής γωνιακής ταχύτητας.

(γ) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της περιστροφικής κινητικής ενέργειας του κάθε δίσκου ξεχωριστά. Να εξηγήσετε που οφείλεται η μεταβολή της περιστροφικής τους ενέργειας.

(Απάντηση: (β) $0,6 \text{ rad/s}$, (γ) $-18,48 \text{ J}$, $-15,12 \text{ J}$)

Πρόβλημα 53

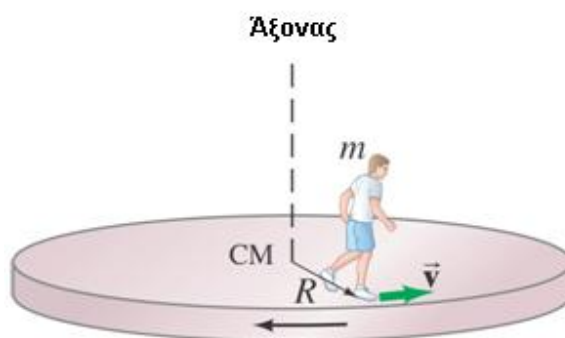
Στο σχήμα ο μαθητής μάζας $m = 70 \text{ kg}$ και ο ομοιογενής δίσκος ακτίνας $R = 4 \text{ m}$ είναι αρχικά ακίνητα. Ο δίσκος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής είναι $400 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Κάποια στιγμή ο μαθητής αρχίζει να περιφέρεται κυκλικά κατά μήκος της περιφέρειας του δίσκου και αποκτά σταθερή γραμμική ταχύτητα μέτρου $v = 2,0 \text{ m/s}$ ως προς το έδαφος, με τη φορά των δεικτών του ρολογιού (όπως βλέπουμε από πάνω). Ο μαθητής μπορεί να θεωρηθεί ως υλικό σημείο.

(α) Να εξηγήσετε γιατί ο δίσκος αρχίζει να περιστρέφεται, γύρω από τον άξονα, με φορά αντίρροπη από τη φορά περιστροφής του μαθητή.

(β) Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα του δίσκου.

(γ) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος (δίσκος - μαθητής) και να εξηγήσετε που οφείλεται η μεταβολή αυτή.

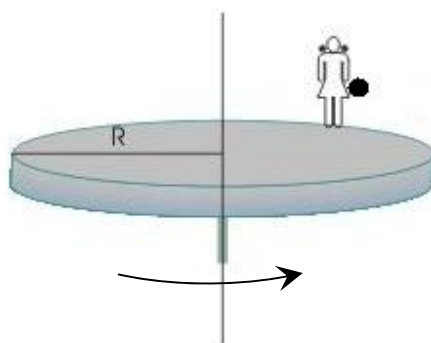
(δ) Να εξηγήσετε τι θα συμβεί στο μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου όταν ο μαθητής θα περιφέρεται σε κυκλική τροχιά μικρότερης ακτίνας από την αρχική αλλά με την ίδια σε μέτρο ταχύτητα και με την ίδια φορά.



(Απάντηση: (β) $1,4 \text{ rad/s}$, (γ) $+ 532 \text{ J}$)

Πρόβλημα 54

Η μαθήτρια στο σχήμα βρίσκεται στην περιφέρεια μιας πλατφόρμας ακτίνας R και κρατά στα χέρια της μια μπάλα. Η μάζα της μαθήτριας μαζί με την μπάλα είναι m . Το σύστημα (πλατφόρμα, μαθήτρια και μπάλα) περιστρέφεται οριζόντια χωρίς τριβές γύρω από τον κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο της πλατφόρμας με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_0 και με φορά κατακόρυφα προς τα πάνω. Η ροπή αδράνειας της πλατφόρμας ως προς τον άξονα περιστροφής είναι I .

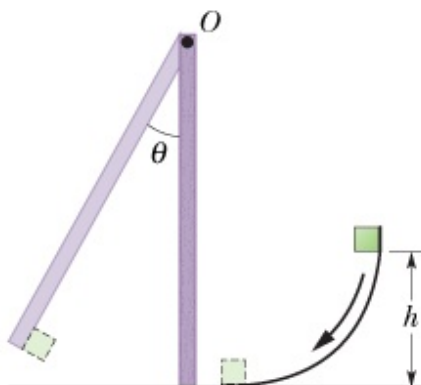


Να εξηγήσετε αν θα αλλάξει και πώς η γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας, στις εξής περιπτώσεις: Η μαθήτρια:

- (α) Ελευθερώνει την μπάλα και φεύγει ελεύθερα από τα χέρια της.
- (β) Ρίχνει την μπάλα με ακτινική διεύθυνση.
- (γ) Ρίχνει την μπάλα με εφαπτομενική διεύθυνση.
- (δ) Ρίχνει την μπάλα με αρχική ταχύτητα ως προς τη μαθήτρια κατακόρυφα προς τα πάνω.

Πρόβλημα 55

Ένα σώμα μάζας 2 kg αφήνεται να κινηθεί ελεύθερα σε τροχιά σχήματος τεταρτοκυκλίου, χωρίς τριβές, από ύψος $h = 1,8 \text{ m}$, όπως δείχνει το σχήμα. Το σώμα στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς του κτυπά και κολλά ακαριαία στο άκρο μιας κατακόρυφης ράβδου, αρχικά ακίνητης, μάζας $M = 3 \text{ kg}$ και μήκους $\ell = 2 \text{ m}$, η οποία μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα, σε κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές, γύρω από το άλλο άκρος της, O . Η ροπή αδράνειας της ράβδου, ως προς τον οριζόντιο άξονα που περνά από το O είναι $I = \frac{1}{3} M \ell^2$.



(α) Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.

(β) Να υπολογίσετε τη μέγιστη γωνία θ , σε σχέση με την κατακόρυφο, που διαγράφει η ράβδος με το σώμα, μετά την κρούση.

(Απάντηση: (α) $0,5 \text{ rad/s}$, (β) $11,88^\circ$)