ΚΥΠΡΙΑΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΘΕΜΑΤΑ ΚΥΠΡΙΑΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑΣ 2000 – 2005

Α΄, Β΄, Γ΄, ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΥ.Μ.Ε. 2006
www.cms.org.cy

> “Μηδείς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μου τήν στέγην, ἤγουν μηδείς ἄδικος παρεισερχέσθω τῇδε. Δίκαιον γάρ καί ἰσότης ἔστι ἡ Γεωμετρία”
>
> ***ΠΛΑΤΩΝΑΣ***

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Στασίνου 36, Γραφείο 102
Στρόβολος 2003
Λευκωσία, Κύπρος

Τηλ. 22378101 – Φαξ: 22379122

Email: cms@cms.org.cy

Ιστοσελίδα: www.cms.org.cy

Α΄, Β΄, Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ISBNset 9963-9068-0-X
ISBN 9963-9068-5-0

Επιμέλεια έκδοσης: Ανδρέας Φιλίππου – Γρηγόρης Μακρίδης

Εισαγωγή

Η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία έχει θέσει ως πρωταρχικό στόχο της την αναβάθμιση της μαθηματικής Παιδείας στην Κύπρο. Μια από τις δραστηριότητες που σχεδιάστηκε για το σκοπό αυτό είναι η Κυπριακή Μαθηματική Ολυμπιάδα. Για πρώτη φορά διοργανώθηκε τον Ιανουάριο του 2000 στα πλαίσια του Πρώτου Μεσογειακού Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας ως μέρος των εορτών για το έτος των Μαθηματικών όπως είχε ανακηρυχθεί από την ΟΥΝΕΣΚΟ. Η νέα αυτή Ολυμπιάδα επιτρέπει σε μαθητές από τη Δ' τάξη Δημοτικού έως τη Γ' τάξη Λυκείου να διαγωνισθούν την ίδια μέρα παγκύπρια.

Ο σκοπός της Κυπριακής Μαθηματικής Ολυμπιάδας είναι να ανακαλύψει και να ενθαρρύνει μαθητές της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με ανώτερο μαθηματικό ταλέντο, μαθητές που κατέχουν μαθηματική δημιουργικότητα και εφευρετικότητα, καθώς και ικανότητα στη χρήση των μαθηματικών. Η διατύπωση των προβλημάτων που προτείνονται για τις ολυμπιάδες διαφέρει κατά πολύ από τη στερεότυπη μορφή που δίνονται συνήθως. Η αναζήτηση απάντησης και απόδειξης απαιτούν όχι μόνο σχολικές γνώσεις αλλά πολύ περισσότερο κοινή λογική σκέψη, επινοητικότητα, ικανότητα στο συλλογισμό και την "μετάφραση" των ασυνήθιστων συνθηκών σε κατάλληλη μαθηματική γλώσσα. Σε πολλά προβλήματα ενώ τα δεδομένα και οι συνθήκες είναι πλήρως κατανοητά, παρουσιάζεται αδυναμία στο να βρούμε τον σωστό δρόμο για τον συλλογισμό ο οποίος θα μας δώσει τη λύση του προβλήματος, παρότι η λύση είναι μόνον λίγες γραμμές. Η "ανακάλυψη" ακριβώς αυτού του δρόμου συνιστά τη χαρά της μαθηματικής δημιουργίας.

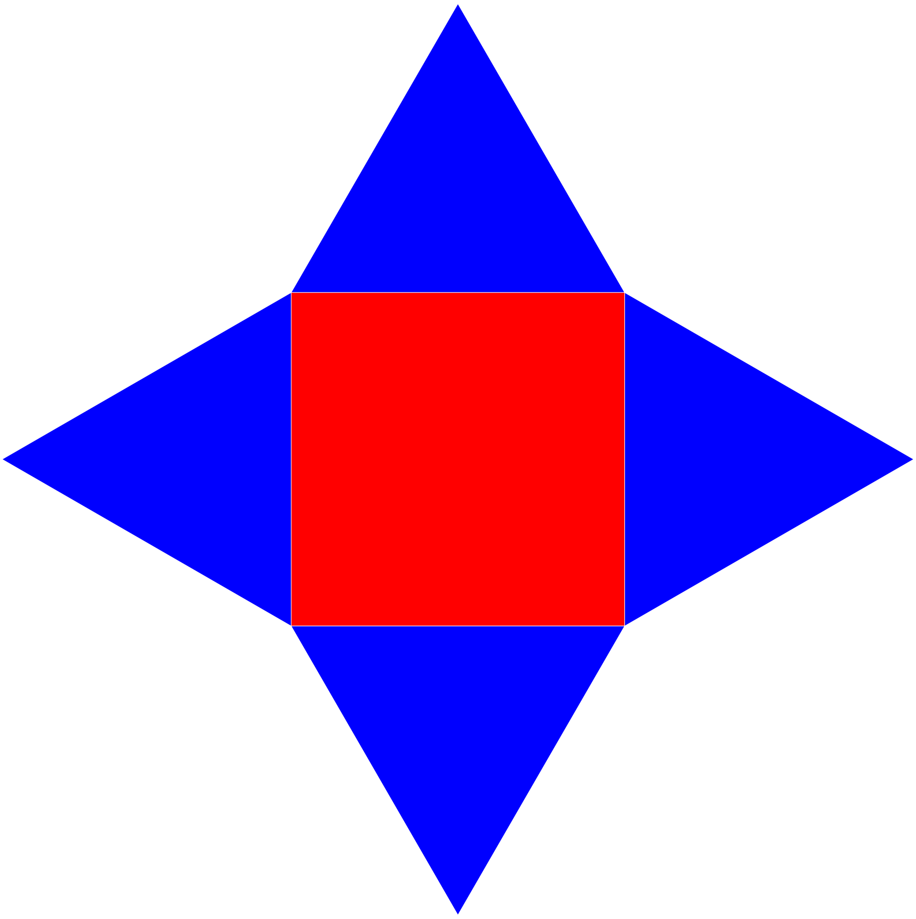
Τα δοκίμια είναι τύπου πολλαπλής επιλογής και βραβεύεται περίπου έξι τοις εκατό των διαγωνιζομένων με χρυσά, αργυρά και χάλκινα μετάλλια σε αναλογία 1:2:3.

Η παρούσα έκδοση εκδίδεται ως βοήθημα για τους μαθητές που σκοπεύουν να συμμετάσχουν σε μελλοντικές οργανώσεις της Κυπριακής Μαθηματικής Ολυμπιάδας. Η έκδοση περιέχει τα δοκίμια των έξι πρώτων Κυπριακών Μαθηματικών Ολυμπιάδων Α΄, Β΄, Γ΄ Λυκείου.

Ευχαριστίες πρέπει να δοθούν σε όλους τους εκπαιδευτικούς που βοήθησαν να γίνει αυτή η ιδέα πραγματικότητα αλλά ιδιαίτερα τα μέλη της επιτροπής Ολυμπιάδων που αφιλοκερδώς εργάστηκαν και θα εργάζονται πάρα πολλές ώρες από τον ελεύθερο χρόνο τους για την οργάνωση των Ολυμπιάδων.

Δρ. Γρηγόρης Μακρίδης

Πρόεδρος Διοικητικού Συμβουλίου ΚΥ.Μ.Ε



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

1η ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Ιανουάριος 2000 ΧΡΟΝΟΣ: 50 ΛΕΠΤΑ

Δοκίμιο για Α', Β', Γ' Λυκείου

Άσκηση 1. Η παράσταση $\dfrac{2}{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2}}}}$ ισούται με:

(Α) $\frac{2}{3}$ **(Β)** $\frac{5}{3}$ (Γ) $\frac{8}{5}$ **(Δ)** $\frac{12}{5}$ (Ε) $\frac{12}{7}$

Άσκηση 2. Δύο από τους παράγοντες της συνάρτησης $f\left(x\right)=x^3+ax+\beta$ είναι οι χ+1 και χ+2. Τα α και β ισούνται με:

(Α) α=-7, β=6 **(Β)** α=-7, β=-6 **(Γ)** α=3, β=-2 **(Δ)** α=-9, β=8 **(Ε)** α=7, β=6

Άσκηση 3.

3	α	β	Υ	δ	8	ε	ξ	η

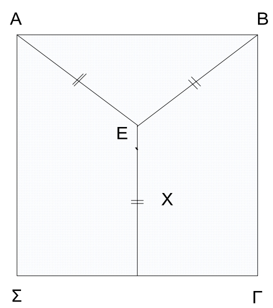
Στη πιο πάνω διάταξη καθένα από τα γράμματα αντιπροσωπεύει ένα ψηφίο και το άθροισμα οποιωνδήποτε τριών διαδοχικών ψηφίων είναι ίσο με 18. Το η παριστάνει το ψηφίο:

(Α) 3 **(Β)** 4 **(Γ)** 5 **(Δ)** 7 **(Ε)** 8

Άσκηση 4. Η σωστή διάταξη των αριθμών α=2^{55} β=3^{33}, γ=5^{22} είναι

(Α) α<β<γ **(Β)** α<γ<β **(Γ)** β<γ<α **(Δ)** β<α<γ **(Ε)** γ<β<α

Άσκηση 5. Στο σχήμα, το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με πλευρά 16 cm. Το χ ισούται με:



(Α) 8 cm **(Β)** 8,3 cm **(Γ)** 10 cm **(Δ)** $6\sqrt{3}$ cm **(Ε)** 12cm

Άσκηση 6. Το πλήθος των διαγωνίων ενός οκταγώνου είναι

(Α) 8 **(Β)** 12 **(Γ)** 16 **(Δ)** 20 (Ε) 28

Άσκηση 7. Το εμβαδά του τριγώνου που περικλείεται από τις ευθείες ($ε_1$): $ψ = 2χ+2$, ($ε_2$): $ψ = -\frac{2}{3}χ + 2$ και του άξονα των χ ισούται με:

(Α) 4 (Β) 6 (Γ) 7,5 (Δ) 16 (Ε) 32

Άσκηση 8. Οι τιμές του χ που επαληθεύουν την ανίσωση $\frac{x}{x-4} > 3$ είναι:

(Α) χ<6 (Β)χ<0ήχ>4 (Γ)4<χ<6 (Δ)χ<4ήχ>6 (Ε) 3 < χ < 6

Άσκηση 9. Ποσό £26 μοιράζεται σε τρία άτομα ανάλογα προς τους αριθμούς $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$. Το μικρότερο ποσό θα είναι:

(Α) £0,25 **(Β)** £3 **(Γ)** £6 **(Δ)** £6,50 **(Ε)** £13

Άσκηση 10. Ποιου αριθμού τα $\frac{2}{3}$ των $\frac{4}{5}$ είναι 120;

(Α) 64 **(Β)** 100 **(Γ)** 144 **(Δ)** 180 **(Ε)** 225

Άσκηση 11. Οι α, β, γ, και δ είναι ακέραιοι θετικοί αριθμοί με α > β > γ > δ. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $\frac{α}{β}$ είναι γ και το υπόλοιπο δ, τότε η διαίρεση $\frac{α}{γ}$ έχει:

(Α) πηλίκο γ, υπόλοιπο $\frac{δ}{γ}$ **(Β)** πηλίκο β, υπόλοιπο $\frac{δ}{γ}$ **(Γ)** πηλίκο δ, υπόλοιπο γ

(Δ) πηλίκο β, υπόλοιπο γ **(Ε)** πηλίκο β, υπόλοιπο δ

Άσκηση 12. Αν το χ αυξηθεί κατά 60% και το ψ ελαττωθεί κατά 40%, τότε το χψ θα

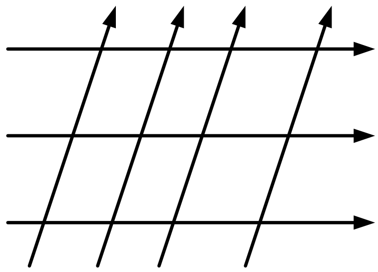
(Α) ελαττωθεί κατά 20% **(Β)** ελαττωθεί κατά 4% **(Γ)** αυξηθεί κατά 4%

(Δ) αυξηθεί κατά 10% **(Ε)** αυξηθεί κατά 20%

Άσκηση 13. Ορίζουμε ότι $\wp_χ = χ^2$ και $χ \otimes ψ = χ-2ψ$. Η τιμή του $\wp_7 \otimes \wp_3$ είναι:

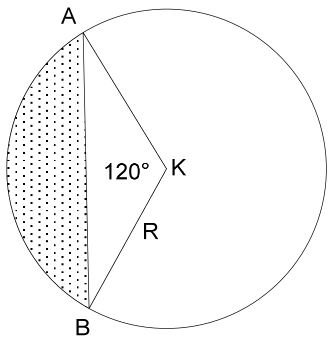
(Α) 1 **(Β)** 16 **(Γ)** 31 **(Δ)** 43 **(Ε)** 961

Άσκηση 14. Το σύνολο των παραλληλογράμμων που υπάρχουν στο σχήμα είναι:



(Α) 6 **(Β)** 7 **(Γ)** 11 **(Δ)** 18 **(Ε)** 24

Άσκηση 15. Το εμβαδά του κυκλικού τμήματος που φαίνεται στο σχήμα είναι:

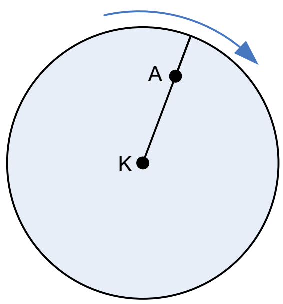


(Α) $\frac{\pi R^2}{12}$ **(Β)** $\frac{2\pi-3}{12}R^2$ **(Γ)** $\frac{4\pi-3}{12}R^2$ **(Δ)** $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{12}R^2$ **(Ε)** $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{12}R^2$

Άσκηση 16. Έμπορος αγόρασε χ κιλά μήλα και πλήρωσε £α. Αν τα πώλησε προς β σεντς το κιλό, το ποσοστιαίο κέρδος του ήταν:

(Α) $\frac{a-x\beta}{x}$ **(Β)** $\frac{x\beta-100}{a}$ **(Γ)** $\frac{x\beta-100a}{a}$ **(Δ)** $\frac{x\beta-a}{x}$ **(Ε)** $\frac{100x\beta-a}{100a}$

Άσκηση 17. Ο τροχός του σχήματος κάνει 300 στροφές το λεπτό. Το σημείο Α σε 1 δευτερόλεπτο θα κάνει στροφή.

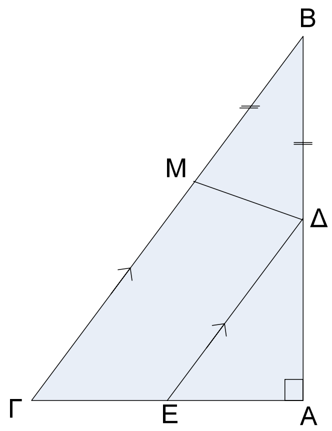


(Α) 5° **(Β)** 18° **(Γ)** 72° **(Δ)** 1080° **(Ε)** 1800°

Άσκηση 18. Ένα βιβλίο με ν σελίδες έχει πάχος β cm περιλαμβανομένων των εξώφυλλων, τα οποία έχουν πάχος γ cm το καθένα. Άλλο βιβλίο με 2ν σελίδες και παρόμοια εξώφυλλα θα έχει πάχος:

(A) 2β **(B)** 2(β-γ) **(Γ)** 2β-γ **(Δ)** 2(β-2γ) **(E)** 2β+γ

Άσκηση 19. Στο διπλανό σχήμα, το ΑΒΓ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο με $M\Gamma$ =90°, ΔΕ//ΒΓ και ΒΔ=ΒΜ. Η γωνιά ΜΔΕ ισούται με:



(A) 45° **(B)** 60° **(Γ)** 62,5° **(Δ)** 67,5° **(E)** 90°

Άσκηση 20. Αν $a=\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta+\gamma}}$, τότε β =

(A) $\dfrac{a^2\gamma}{1+a^2}$ **(B)** $\dfrac{a^2\gamma}{1-a^2}$ **(Γ)** $\dfrac{\gamma}{1+a^2}$ **(Δ)** $\dfrac{a\gamma^2}{1-a^2}$ **(E)** $\dfrac{a^2\gamma}{a^2-1}$

Άσκηση 21. Μείγμα 80 g, νερού και γλυκερίνης περιέχει 30% γλυκερίνη. Αν προσθέσω 40 g νερού στο μείγμα, τότε το ποσοστό της γλυκερίνης στο μείγμα θα γίνει:

(A) 20% **(B)** 24% **(Γ)** 25% **(Δ)** 30% **(E)** 35%

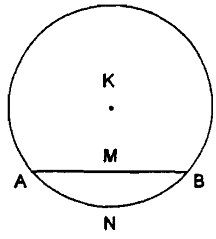
Άσκηση 22. Σε ένα εργοστάσιο εργάζονται α άνδρες και γ γυναίκες. Ο μέσος μισθός των ανδρών είναι £χ και των γυναικών £y. Ο μέσος μισθός όλων των εργαζομένων, ανδρών και γυναικών, είναι:

(A) $\dfrac{x+y}{2}$ **(B)** $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{\gamma}\right)$ **(Γ)** $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{\gamma}\right)$ **(Δ)** $\dfrac{ax+\gamma y}{a+\gamma}$ **(E)** $\dfrac{ax+\gamma y}{x+y}$

Άσκηση 23. Αν $f(x)=\dfrac{a}{x}$ όπου $a\neq 0$, τότε $f\left(f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=$

(A) α **(B)** α^2 **(Γ)** χ **(Δ)** $\dfrac{1}{x}$ **(E)** $\dfrac{a^2}{x}$

Άσκηση 24. Τα μέσα των χορδών του κύκλου (Κ, ΚΑ) που είναι κάθετες προς τη χορδή ΑΒ βρίσκονται πάνω:



(Α) στη χορδή ΑΒ

(Β) στη διάμετρο που είναι κάθετη στην ΑΒ

(Γ) στη διάμετρο που είναι παράλληλη προς την ΑΒ

(Δ) σε τόξο κύκλου που έχει κέντρο το μέσο Μ της ΑΒ

(Ε) σε τόξο κύκλου που έχει κέντρο το μέσο Ν του τόξου ΑΒ

Άσκηση 25. Έχω 14 μπάλες από τις οποίες οι 13 ζυγίζουν το ίδιο, ενώ η μια είναι ελαφρότερη από τις άλλες. Αν διαθέτω ζυγαριά με δύο πλάστιγγες, ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός ζυγισμάτων που χρειάζομαι να κάμω για να βρω στα σίγουρα την ελαφρότερη μπάλα:

(Α) 2 **(Β)** 3 **(Γ)** 4 **(Δ)** 7 **(Ε)** 13

Άσκηση 26. Αν το ν είναι ακέραιος θετικός αριθμός, τότε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $99^{2\nu} + 9$ είναι πάντοτε:

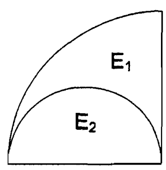
(Α) 0 **(Β)** 1 **(Γ)** 8

(Δ) ένας από τους αριθμούς 1, 3, 5, 7, ή 9 **(Ε)** ένας από τους αριθμούς 0, 2, 4, 6 ή 8

Άσκηση 27. Σε μια φωλιά υπάρχει ένα είδος εντόμων για τα οποία είναι γνωστό ότι κάθε μεσημέρι διπλασιάζονται σε αριθμό ενώ κατά τη διάρκεια της νύκτας πεθαίνουν 3 έντομα. Αν τη Δευτέρα το πρωί υπάρχουν 4 έντομα στη φωλιά, πόσα έντομα θα υπάρχουν το επόμενο Σάββατο το πρωί;

(Α) 5 **(Β)** 19 (Γ) 25 **(Δ)** 35 **(Ε)** 155

Άσκηση 28. Στο διπλανό σχήμα το τεταρτοκύκλιο χωρίζεται σε δύο μέρη από το ημικύκλιο που έχει διάμετρο την ακτίνα του τεταρτοκυκλίου. Ο λόγος των εμβαδών των δυο μέρων $\frac{E_1}{E_2}$ ισούται με:



(Α) $\frac{1}{2}$ **(Β)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(Γ)** 1 **(Δ)** $\sqrt{2}$ **(Ε)** 2

Άσκηση 29. Αν α<0 και β<0, ποια από τις πιο κάτω ισότητες είναι λανθασμένη;

(Α) $(\alpha\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu}\beta^{\nu}$ **(Β)** $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$ **(Γ)** $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$

(Δ) $\sqrt{(\alpha\beta)^2} = \alpha\beta$ **(Ε)** $\sqrt{\alpha^2} = -\alpha$

Άσκηση 30. Η παράσταση $\Pi = \left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ ισούται με:

(Α) $\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$ **(Β)** $\alpha\beta\gamma$ **(Γ)** $\frac{1}{\sqrt[\beta\gamma]{\alpha}}$ **(Δ)** $\sqrt[\beta\gamma]{\alpha}$ **(Ε)** $\frac{1}{\alpha^{\beta\gamma}}$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

2η ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Απρίλιος 2001 ΧΡΟΝΟΣ:60 ΛΕΠΤΑ

Δοκίμιο για Α', Β', Γ' Λυκείου

Άσκηση 1. Εάν ο αριθμός β είναι θετικός και $\alpha=-\beta$, ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι λάθος:

Α. $\alpha^2\beta>0$ **Β.** $\alpha+\beta=0$ **Γ.** $\alpha\beta<0$ **Δ.** $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=0$ **Ε.** $1+\frac{\alpha}{\beta}=0$

Άσκηση 2. Εάν το σημείο $(4,2)$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία $(\chi,4)$ και $(3,\psi)$, τότε το χ+ψ ισούται με:

Α. 5 **Β.** 6 **Γ.** 7 **Δ.** –7 **Β.** 0

Άσκηση 3. Εάν $\alpha\circ\beta=\frac{3}{\alpha\beta}$, τότε η παράσταση $\alpha\circ(\beta\circ\gamma)$ ισούται με:

Α. $\frac{3}{\alpha\beta\gamma}$ **Β.** $\frac{\alpha}{\beta\gamma}$ **Γ.** $\frac{\beta\gamma}{\alpha}$ **Δ.** $\frac{3\alpha\beta}{\gamma}$ **Ε.** $9\alpha\beta\gamma$

Άσκηση 4. Η λύση της ανίσωσης $\frac{2\chi^2-3\chi+4}{\chi^2+2}>1$, είναι:

Α. χ<1 ή χ>2 **Β.** χ<-2 ή χ>-1 **Γ.** 1<χ<2 **Δ.** –2<χ<-1 **Ε.** Τίποτε από τα προηγούμενα

Άσκηση 5. Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $(3\chi^2-12\chi+8)(\chi-5)=0$ ισούται με:

Α. –9 **Β.** 9 **Γ.** 10 **Δ.** 12 **Ε.** Τίποτε από τα προηγούμενα

Άσκηση 6. Εάν $f(\chi)=9^{\chi}$ τότε η παράσταση $f(\chi+1)-f(\chi)$ ισούται με:

Α. 9 **Β.** $f(\chi)$ **Γ.** $3f(x)$ **Δ.** $8f(\chi)$ **Ε.** $9f(\chi)$

Άσκηση 7. Η παράσταση $\left(\chi^{-1}-\psi^{-1}\right)^{-1}$ ισούται με:

Α. $-\dfrac{\chi\psi}{\chi-\psi}$ **Β.** $\chi+\psi$ **Γ.** $\chi-\psi$ **Δ.** $\dfrac{\psi-\chi}{\chi\psi}$ **Ε.** $\chi^{-2}-\psi^{-2}$

Άσκηση 8. Το πλήθος των ακεραίων λύσεων της ανίσωσης $\nu^2-7\nu+6\le 0$ είναι:

Α. 0 **Β.** 4 **Γ.** 5 **Δ.** 6 **Ε.** περισσότερες από 7

Άσκηση 9. Δίνεται η εξίσωση $x^2-14x+\mu=0$, όπου μ είναι θετικός ακέραιος. Αν οι ρίζες της εξίσωσης ρ_1,ρ_2 είναι θετικοί και διαφορετικοί πρώτοι αριθμοί, τότε η τιμή της παράστασης $\mathrm{K}=\left(\rho_1+\rho_2\right)^2+2\rho_1\cdot\rho_2$ ισούται με:

Α. 262 **Β.** 196 **Γ.** 210 **Δ.** 226 **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 10. Ο αριθμός $\sqrt{\left(4-\sqrt{18}\right)^2}$ είναι ίσος με:

Α. $4-3\sqrt{2}$ **Β.** $4+3\sqrt{2}$ **Γ.** 34 **Δ.** $3\sqrt{2}-4$ **Ε.** $-4-3\sqrt{2}$

Άσκηση 11. Η κλίση μιας ευθείας είναι μη μηδενική και ισούται με την τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας με τον y-άξονα Αν η ευθεία τέμνει τον x-άξονα στο α, τότε το α ισούται με:

Α. -1 **Β.** 2 **Γ.** $\dfrac{1}{2}$ **Δ.** -3 **Ε.** 5

Άσκηση 12. Εάν $f(\chi+3)=\dfrac{4}{2-\chi}$, τότε η συνάρτηση $f(x)$ ισούται με:

Α. $\dfrac{4}{5-\chi}$ **Β.** $\dfrac{4}{\chi-1}$ **Γ.** $\dfrac{\chi+5}{\chi-1}$ **Δ.** $\dfrac{4}{\chi-6}$ **Ε.** Τίποτα από τα προηγούμενα.

Άσκηση 13. Το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $\chi^2-\sigma\upsilon\nu\chi+2=0$ είναι:

Α. $\{-1\}$ **Β.** $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ **Γ.** $\left\{\sqrt{2}\right\}$ **Δ.** $\left\{2\sqrt{2}\right\}$ **Ε.** Τίποτε από τα προηγούμενα

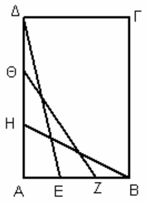
Άσκηση 14. Αν για να αγοράσουμε 25 ταχινόπιτες πρέπει να δώσουμε τόσες λίρες όσες ταχινόπιτες αγοράζουμε με μία λίρα ,τότε η μία ταχινόπιτα στοιχίζει:

Α. 25 σεντς **Β.** 15 σεντς **Γ.** 10 σεντς **Δ.** 20 σεντς **Ε.** 30 σεντς

Άσκηση 15. Δίνεται ένα κυρτό εικοσάγωνο $A_1A_2........A_{20}$.Ο αριθμός των διαγώνιων που ενώνουν τις κορυφές με άρτιους δείκτες (π.χ. A_2 A_4 , …) ισούται με:

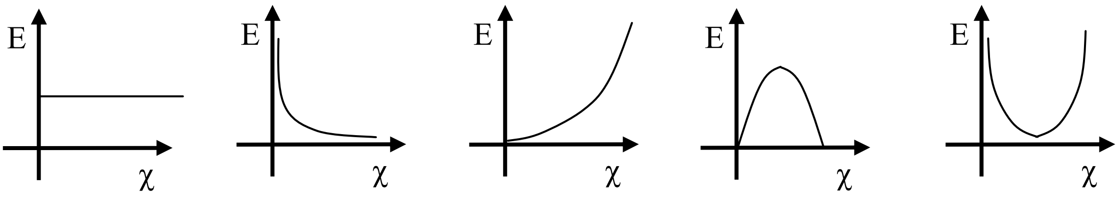
Α. 45 **Β.** 20 **Γ.** 65 **Δ.** 10 **Ε.** 40

Άσκηση 16. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $AE = EZ = ZB = 1$ και $AH = H\Theta = \Theta\Delta = \chi \geq 1$. Αν $BH \cdot \Delta E = \Theta Z^2$, το μήκος του ΑΔ ισούται με:



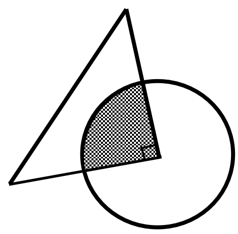
Α. $3\sqrt{3}$ **Β.** $3\sqrt{7}$ **Γ.** $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ **Δ.** $\sqrt{21}$ **Ε.** $3\sqrt{2}$

Άσκηση 17. Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο 26 cm. Το μήκος της μιας διάστασης του ισούται με χ cm. Η γραφική παράσταση του εμβαδού Ε, του ορθογωνίου, συναρτήσει του χ είναι:



Α. **Β.** **Γ.** **Δ.** **Ε.**

Άσκηση 18. Εάν το κέντρο του κύκλου με διάμετρο 4 είναι κορυφή ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα και το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής είναι $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του τριγώνου τότε η κάθετη πλευρά του τριγώνου ισούται με:



Α. 4 **Β.** $\sqrt{6}\pi$ **Γ.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ **Δ.** $\sqrt{6\pi}$ **Ε.** $\sqrt{3\pi}$

Άσκηση 19. Ο μικρότερος θετικός ακέραιος κ (κ>0) έτσι ώστε η παράσταση $(\kappa+1)+(\kappa+2)+\ldots+(\kappa+23)$ να είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού ισούται με:

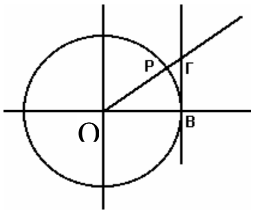
Α. 9 **Β.** 11 **Γ.** 13 **Δ.** 23 **Ε.** 29

Άσκηση 20. Δίνεται συνάρτηση $f : \chi \to \frac{1}{\chi^2}, \quad \chi \in \mathbb{R} - \{0\}$. Η παράσταση

$f\left(f\left(f\left(\chi\right)\right)\right)$ ισούται με:

Α. 16^2 **Β.** $\dfrac{1}{2^8}$ **Γ.** 2^{-4} **Δ.** 8^2 **Ε.** Τίποτε από τα προηγούμενα

Άσκηση 21. Στο σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ εφάπτεται του κύκλου ακτίνας 1 με κέντρο την αρχή Ο ορθοκανονικού συστήματος αξόνων. Εάν το ευθύγραμμο τμήμα ΟΓ τέμνει τον κύκλο στο σημείο $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ τότε το μήκος του τμήματος ΡΓ ισούται με:



Α. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **Β.** $\sqrt{3}-1$ **Γ.** $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$ **Δ.** 1 **Ε.** $\dfrac{3}{2}$

Άσκηση 22. Δίνεται το σύστημα $\begin{matrix} \chi-3=\chi\omega \\ \psi-1=\psi\omega \\ \chi^2+\psi^2=4 \end{matrix}$ Η θετική τιμή του ψ η οποία επαληθεύει τις εξισώσεις ισούται με:

Α. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ **Β.** $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$ **Γ.** $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ **Δ.** $\dfrac{4}{\sqrt{10}}$ **Ε.** $\dfrac{6}{\sqrt{10}}$

Άσκηση 23. Έστω f συνάρτηση που ορίζεται για $\mu,\nu \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε:

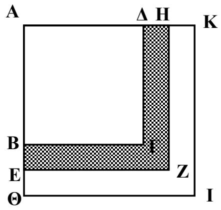
$(i)\ f(\mu)\in\mathbb{N}$, $(ii)\ f(2)=2$,

$(iii)\ f(\mu\nu)=f(\mu)\cdot f(\nu)$ $(iv)\ f(\mu)>f(\nu)$ όταν $\mu>\nu$

Η τιμή του f(3) ισούται με:

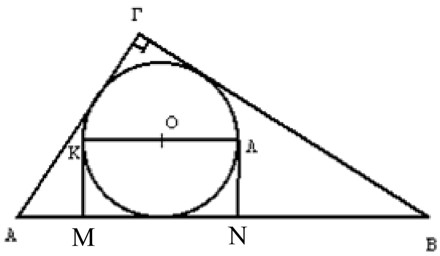
Α. 2 **Β.** 3 **Γ.** 4 **Δ.** 6 **Ε.** 16

Άσκηση 24. Οι πλευρές των τριών τετραγώνων ΑΒΓΔ, ΑΕΖΗ και ΑΘΙΚ στο διπλανό σχήμα, είναι ακέραιοι αριθμοί και το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας είναι 31. Αν ΒΕ=ΘΕ, το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΘΙΚ είναι:



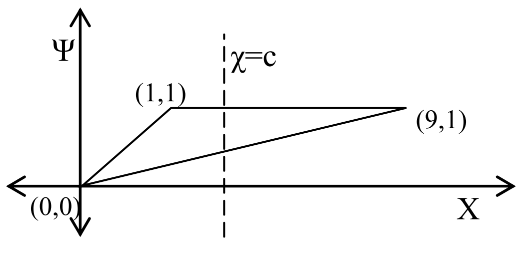
Α. 225 **Β.** 256 **Γ.** 289 **Δ.** 300 **Ε.** 961

Άσκηση 25. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο $\left(\hat{\Gamma}=90°\right)$ και ο κύκλος με κέντρο Ο είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο. Αν ΚΛ διάμετρος, $ΚΛ \,//\, ΑΒ$, $ΚΜ \perp ΑΒ$ και $ΛΝ \perp ΑΒ$, η γωνία $\widehat{ΜΓΝ}$ ισούται με:



Α. 30° **Β.** 60° **Γ.** 50° **Δ.** 45° **Ε.** 35°

Άσκηση 26. Η ευθεία $\chi = c$ τέμνει το τρίγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(1,1)$ *και* $(9,1)$ και το χωρίζει σε δύο μέρη. Εάν το εμβαδόν των δύο περιοχών στις οποίες χωρίζεται το αρχικό τριγώνου είναι ίσο, τότε η τιμή c ισούται με:



Α. $\frac{5}{2}$ **Β.** 3 **Γ.** $\frac{7}{2}$ **Δ.** $2\sqrt{3}$ **Ε.** $\sqrt{10}$

Άσκηση 27. Σε ένα διαγωνισμό Μαθηματικών πήραν μέρος 1000 μαθητές. Το δοκίμιο περιείχε 4 προβλήματα. Το πρώτο πρόβλημα απαντήθηκε σωστά από 900 ακριβώς μαθητές, το δεύτερο από 800, το τρίτο από 700 και το τέταρτο από 600. Κανένας από τους διαγωνιζόμενους δεν απάντησε σωστά και στα τέσσερα προβλήματα. Οι μαθητές που έλυσαν το τρίτο και το τέταρτο πρόβλημα πήραν μετάλλιο. Ο αριθμός των μαθητών που πήραν μετάλλιο ισούται με:

Α. 700 **Β.** 500 **Γ.** 300 **Δ.** 650 **Ε.** 200

Άσκηση 28. Δίνονται δύο ακολουθίες : $\alpha_\nu = \sqrt{123+\nu^2}$ και $\beta_\nu = \nu + 3$ όπου ν=1,2,3,… Έστω μ ο μικρότερος αριθμός έτσι ώστε $\alpha_\mu < \beta_\mu$ και ο κ είναι ο μεγαλύτερος αριθμός έτσι ώστε $\alpha_\kappa > \beta_\kappa + 1$. Η τιμή του $\mu + \kappa$ ισούται με:

Α. 25 **Β.** 30 **Γ.** 32 **Δ.** 33 **Ε.** 38

Άσκηση 29. Δίνονται οι συναρτήσεις $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ με $f_0(x) = \dfrac{1}{x-2}$ και

$f_{k+1}(x) = \dfrac{1}{1-f_k(x)}$ για κάθε k =0,1,2,…..,ν-1.Το $f_{2000}(2001)$ είναι:

Α. 2202 **Β.** 1999 **Γ.** –1998 **Δ.** 2001 **Ε.** -2000

Άσκηση 30. Το συνολικό άθροισμα των ψηφίων των αριθμών 2^{2001} και 5^{2001} είναι:

Α. 1999 **Β.** 2003 **Γ.** 4002 **Δ.** 6003 **Ε.** 2002

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

3η ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Απρίλιος 2002 ΧΡΟΝΟΣ: 60 ΛΕΠΤΑ

Δοκίμιο για Α', Β', Γ' Λυκείου

Άσκηση 1. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ=6 και ΒΓ=5. Αν Δ σημείο της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε ΒΔ = 1, το μήκος του ΑΔ είναι:

Α. $2\sqrt{5}$ **Β.** $4\sqrt{2}$ **Γ.** 4 **Δ.** $3\sqrt{3}$ **Ε.** 5

Άσκηση 2. Η παραβολή με εξίσωση $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ έχει κορυφή το σημείο (3,1) και περνά από το σημείο (2,0). Το γινόμενο $\alpha\beta\gamma$ ισούται:

Α. 60 **Β.** –60 **Γ.** 48 **Δ.** –48 **Ε.** Κανένα από προηγούμενα

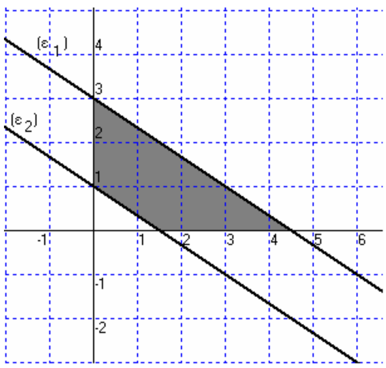
Άσκηση 3. Εάν $\sqrt{\frac{\chi}{\psi}\sqrt{\frac{\chi}{\psi}\sqrt{\frac{\chi}{\psi}}}} = \left(\frac{\chi}{\psi}\right)^{\alpha}$ τότε το α ισούται:

Α. $\frac{1}{8}$ **Β.** $\frac{1}{4}$ **Γ.** $\frac{3}{4}$ **Δ.** $\frac{3}{8}$ **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 4. Ο μεγάλος μαθηματικός De Morgan έζησε κατά τον 19ο αιώνα μ.χ. Στον τελευταίο χρόνο της ζωής του είπε: «ήμουν χ χρονών το έτος χ^2». Το έτος γέννησης του De Morgan ήταν:

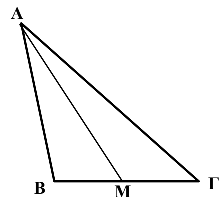
Α. 1806 **Β.** 1822 **Γ.** 1849 **Δ.** 1851 **Ε.** 1853

Άσκηση 5. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι ευθείες (ε_1): $\psi = -\frac{2}{3}\chi + 3$ και (ε_2): $\psi = -\frac{2}{3}\chi + 1$. Το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους είναι:



Α. 8   **Β**. $\frac{9}{2}$ **Γ**. $\frac{31}{4}$ **Δ**. 6   **Ε**. Κανένα από τα προηγούμενα.

Άσκηση 6. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 6, $\widehat{BAM} = 30^0$, ΑΜ διάμεσος, ΑΜ = 8. Το εμβαδόν του τριγώνου $\left(\overset{\Delta}{AM\Gamma}\right)$ ισούται:



Α. 24   **Β**. 7   **Γ**. 12   **Δ**. $3\sqrt{3}$ **Ε**. $4\sqrt{3}$

Άσκηση 7. Ο αριθμός $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ είναι ρίζα της συνάρτησης:

Α. $\chi^4+10\chi^2+1$ **Β**. $\chi^4-10\chi^2+1$ **Γ**. $\chi^4-2\chi^2+3$

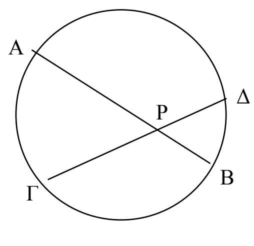
Δ. $\chi^4-10\chi^2+6$ **Ε**. $\chi^4-10\chi^2+10$

Άσκηση 8. Το σημείο Ρ ανήκει στην ευθεία ψ = 5χ +3. Το σημείο Σ έχει συντεταγμένες (3,–2). Αν Μ το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΡΣ, τότε το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία.

Α. $\psi=\frac{5}{2}\chi-\frac{7}{2}$ **Β**. $\psi=5\chi+1$ **Γ**. $\psi=-\frac{1}{5}\chi-\frac{7}{5}$

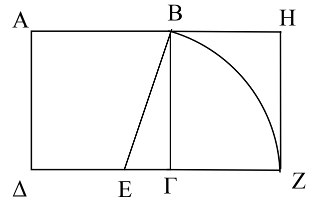
Δ. $\psi=\frac{5}{2}\chi+\frac{1}{2}$ **Ε**. $\psi=5\chi-7$

Άσκηση 9. Στο διπλανό κύκλο τα τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma}$ και $\overset{\frown}{B\Delta}$ έχουν μέτρα $\overset{\frown}{A\Gamma}=70°$, $\overset{\frown}{B\Delta}=20°$. Αν οι χορδές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο σημείο Ρ η γωνία $\widehat{\Gamma P B}$ ισούται:



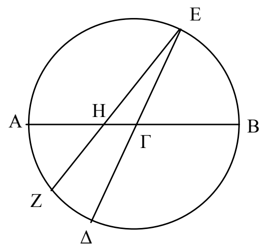
Α. 90°   **Β**. 135°   **Γ**. 140°   **Δ**. 150°   **Ε**. 175°

Άσκηση 10. Στο διπλανό σχήμα ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και ΒΕΖ κυκλικός τομέας μέσα στο ορθογώνιο ΑΗΖΔ. Εάν ΑΔ = 3 ΕΓ, ο λόγος των ευθυγράμμων τμημάτων ΔΖ και ΑΔ ισούται:



Α. 1   **Β**. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **Γ**. $\frac{2+\sqrt{10}}{3}$ **Δ**. $\frac{3+\sqrt{17}}{4}$ **Ε**. 2

Άσκηση 11. Στο διπλανό σχήμα ΑΒ, ΔΕ είναι διάμετροι στον κύκλο με κέντρο Γ, Ζ μέσο του τόξου ΑΔ, ΕΖ χορδή του κύκλου που τέμνει την ΑΒ στο σημείο Η. Αν $\widehat{ΒΓΕ} = 60^0$ η γωνία $\widehat{ΑΗΖ}$ ισούται:



Α. 45°   **Β**. 30°   **Γ**. 15°   **Δ**. 25°   **Ε**. Αδύνατο να υπολογιστεί

Άσκηση 12. Ένας ακέραιος αριθμός α διαιρούμενος με το 6 δίνει υπόλοιπο 5, ενώ διαιρούμενος με το 7 δίνει υπόλοιπο 4. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με το 42 είναι:

Α. 9   **Β**. 0   **Γ**. 28   **Δ**. 11   **Ε**. 12

Άσκηση 13. Αν οι αριθμοί μ,ν είναι περιττοί με μ > ν > 1 τότε για την εξίσωση $\chi^2 + 2\mu\chi + 2\nu = 0$ τι ισχύει από τα παρακάτω:

Α. Η διακρίνουσα είναι τέλειο τετράγωνο.

Β. Η εξίσωση έχει ρίζες άρρητες.

Γ. Η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Δ. Το άθροισμα των ριζών είναι περιττός αριθμός.

Ε. Το γινόμενο των ριζών είναι πρώτος αριθμός.

Άσκηση 14. Δύο γεωργοί θέλουν να μοιράσουν ένα δοχείο με 10 λίτρα λάδι, έχοντας μόνο βοηθητικά άδεια δοχεία των 5 lt και 3 lt, ώστε ο πρώτος να πάρει 9 lt και ο δεύτερος 1 lt. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός των δοκιμών για να το πετύχουν αυτό:

Α. 6   **Β**. 5   **Γ**. 4   **Δ**. 2   **Ε**. 3

Άσκηση 15. Αν για τη συνάρτηση $\psi = f(\chi),\ \chi \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι συνθήκες:

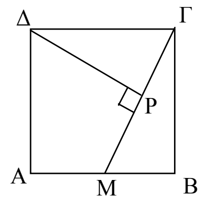
(α) για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \mathbb{R}$ με $\chi_1 \le \chi_2 \Rightarrow f(\chi_1) \ge f(\chi_2)$ και

(β) $f(3) = 2$

Τότε η λύση της ανίσωσης $\dfrac{[f(\chi)]^2 + 4}{4} \le f(\chi)$ είναι:

Α. χ = 3 **Β.** χ = 1 **Γ.** χ = 0 **Δ.** χ = 4 **Ε.** χ = 2

Άσκηση 16. Στο διπλανό σχήμα, ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, πλευράς 1. Εάν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ και ΔΡ ⊥ ΜΓ, τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΡ ισούται:



Α. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ **Β.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ **Γ.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **Δ.** 1 **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 17. Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(\chi) = \left(4 + \dfrac{1}{\chi^2}\right)\left(6 - \dfrac{1}{\chi^2}\right)$ ισούται:

Α. 24 **Β.** 10 **Γ.** 2 **Δ.** 25 **Ε.** 8

Άσκηση 18. Εάν $f(\chi) = \dfrac{\chi}{\chi + 3}$. Το πλήθος των τιμών του α για τις οποίες ισχύει $f(f(\alpha)) = \alpha$, και $f(\alpha) \ne \alpha$ ισούται:

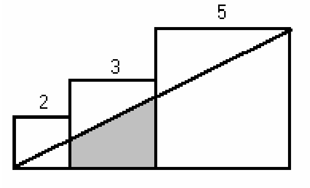
Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** 3 **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 19. Εάν $\alpha_1 = \dfrac{1}{1-\chi}$, $\alpha_2 = \dfrac{1}{1-\alpha_1}$, $\alpha_\nu = \dfrac{1}{1-\alpha_{\nu-1}}$ *για* $\nu \ge 2$, $\chi \ne 1$, $\chi \ne 0$

Το α_{2002} ισούται με:

Α. $\dfrac{1}{1-\chi}$ **Β.** χ **Γ.** –χ **Δ.** $\dfrac{\chi - 1}{\chi}$ **Ε.** $\dfrac{1}{\chi}$

Άσκηση 20. Δίνονται τρία τετράγωνα με διαστάσεις όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους ισούται:



Α. $\frac{21}{4}$ **Β.** $\frac{9}{2}$ **Γ.** 5 **Δ.** $\frac{15}{4}$ **Ε.** $\frac{25}{4}$

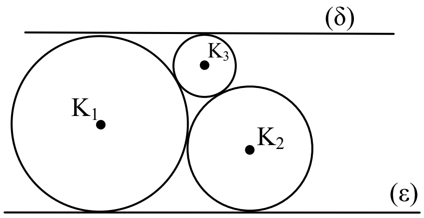
Άσκηση 21. Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ>ΓΔ, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ ισούται με το μισό της διαφοράς των βάσεων του και περνά από το σημείο τομής Ε των προεκτάσεων των μη παράλληλων πλευρών του τραπεζίου. Η γωνία $\widehat{AEB}$ ισούται:

Α. 130° **Β.** 90° **Γ.** 40° **Δ.** 30° **Ε.** 60°

Άσκηση 22. Εάν (χ,ψ) είναι λύση του συστήματος : $\begin{cases}\sqrt{\chi-\psi}=\chi+\psi-7\\ \sqrt{\chi+\psi}=\chi-\psi-1\end{cases}$ τότε η τιμή του ψ ισούται:

Α. $\frac{5}{2}$ **Β.** 4 **Γ.** $\frac{13}{2}$ **Δ.** 9 **Ε.** $\frac{13}{5}$

Άσκηση 23. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες (δ) και (ε) είναι παράλληλες, οι τρεις κύκλοι εφάπτονται ανά δύο, η ευθεία (δ) εφάπτεται στους κύκλους με κέντρα K_1, K_3 και η ευθεία (ε) εφάπτεται στους κύκλους με κέντρα K_1 , K_2 . Αν ο κύκλος με κέντρο K_2 έχει ακτίνα 9 και ο κύκλος με κέντρο K_3 έχει ακτίνα 4 η ακτίνα του κύκλου με κέντρο K_1 ισούται:



Α. 10,4 **Β.** 11 **Γ.** $8\sqrt{2}$ **Δ.** 12 **Ε.** $7\sqrt{3}$

Άσκηση 24. Εάν $\chi^3=1+\chi+\chi^2$, τότε το χ^8 είναι ίσο με:

Α. $1+2\chi+2\chi^2$ **Β.** $2+3\chi+4\chi^2$ **Γ.** $4+6\chi+7\chi^2$

Δ. $7+11\chi+13\chi^2$ **Ε.** $13+20\chi+24\chi^2$

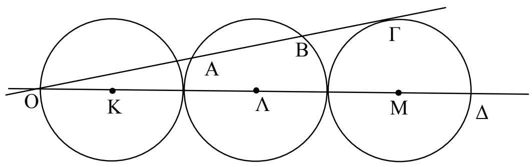
Άσκηση 25. Έστω $\chi=2^{2002}$. Το πλήθος των θετικών ακέραιων αριθμών που υπάρχουν ανάμεσα στους $\sqrt{\chi^2+2\chi+4}$ και $\sqrt{4\chi^2+2\chi+1}$ ισούται:

Α. 2^{2002} **Β.** $2^{2002}+1$ **Γ.** $2^{2002}-1$ **Δ.** $2^{2002}+2$ **Ε.** $2^{2002}-2$

Άσκηση 26. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ=10) και ΒΓ=12. Τα σημεία Σ και Ρ ανήκουν στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ έτσι ώστε ΒΣ:ΣΡ:ΡΓ=1:2:1. Τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ είναι το Ε και Ζ αντίστοιχα. Φέρνουμε τις καθέτους από τα σημεία Ε και Ρ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΣΖ που το τέμνουν στα Μ και Ν αντίστοιχα. Το μήκος του τμήματος ΜΝ ισούται:

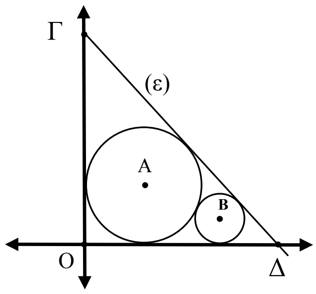
Α. $\frac{9}{\sqrt{13}}$ **Β.** $\frac{10}{\sqrt{13}}$ **Γ.** $\frac{11}{\sqrt{13}}$ **Δ.** $\frac{12}{\sqrt{13}}$ **Ε.** $\frac{5}{2}$

Άσκηση 27. Οι τρεις κύκλοι ακτίνας R εφάπτονται, και τα κέντρα ανήκουν στην ευθεία ΟΔ. Η ευθεία ΟΓ εφάπτεται του (Μ, R) και τέμνει τον κύκλο (Κ, R) στο σημείο Ο. Το μήκος της χορδής ΑΒ ισούται:



Α. $\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)R}{2}$ **Β.** $\frac{2R\sqrt{6}}{3}$ **Γ.** $\frac{13R}{8}$ **Δ.** $\frac{R\sqrt{65}}{5}$ **Ε.** $\frac{8R}{5}$

Άσκηση 28. Ο κύκλος με κέντρο Α και ακτίνα 3 εφάπτεται του θετικού ημιάξονα των τετμημένων και του θετικού ημιάξονα των τεταγμένων όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο κύκλος με κέντρο Β έχει ακτίνα 1 και εφάπτεται του θετικού ημιάξονα Χ και του κύκλου με κέντρο Α. Η ευθεία (ε) εφάπτεται και των δύο κύκλων. Η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα ΨΨ΄ ισούται:



Α. $3+6\sqrt{3}$ **Β.** $10+3\sqrt{2}$ **Γ.** $8\sqrt{3}$ **Δ.** $10+2\sqrt{3}$ **Ε.** $9+3\sqrt{3}$

Άσκηση 29. Για την συνάρτηση $\psi = f\left(\chi\right)$ ισχύει ότι για κάθε $\chi > 0$,

$f\left(2\chi - \frac{1}{2\chi}\right) = \left(2\chi + \frac{1}{2\chi}\right)^2$, τότε το $f\left(\frac{3}{2}\right)$ ισούται:

Α. $\frac{25}{4}$ **Β.** $\frac{9}{4}$ **Γ.** $\frac{1}{4}$ **Δ.** 6 **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 30. Το ψηφίο των μονάδων του γινομένου $\left(5^{34}+1\right)\left(5^{35}+1\right)\left(5^{36}+1\right)$ ισούται με:

Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** 5 **Ε.** 6

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

4η ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Απρίλιος 2003 ΧΡΟΝΟΣ: 60 ΛΕΠΤΑ

Δοκίμιο για Α', Β', Γ' Λυκείου

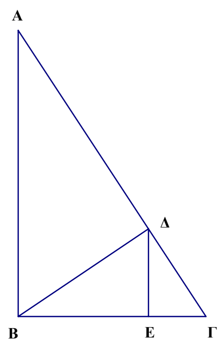
Άσκηση 1. Η τιμή της παράστασης $5^4+5^4+5^4+5^4+5^4$ είναι:

Α. 25^4 **Β.** 5^5 **Γ.** 25^3 **Δ.** 5^{20} **Ε.** 25^{20}

Άσκηση 2. Στο σύνολο των ακεραίων ορίζουμε την πράξη $(*)$: $\alpha * \beta = \alpha^3 - \beta$.
Η τιμή του $(2*2)*1$ είναι:

Α.215 **Β.**6 **Γ.** 7 **Δ.** 1024 **Ε.** 1

Άσκηση 3. Αν στο διπλανό σχήμα ΑΒΓ είναι ορθογώνιο τρίγωνο $(\angle \mathrm{B} = 90^o)$ με $(\angle \mathrm{A} = 30^o)$, ΑΒ=16 , $\mathrm{B\Delta} \perp \mathrm{A\Gamma}$ και $\mathrm{\Delta E} \perp \mathrm{B\Gamma}$ το μήκος του ΔΕ είναι:



Α. 8 **Β.** 4 **Γ.** 2 **Δ.** 1 **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 4. Η γραφική παράσταση της $y=(3x^3-5x^2+2x)\cdot(x^2+4)^2$ τέμνει τον άξονα των x σε:

Α.7 σημεία **Β.**5 σημεία **Γ.**3 σημεία **Δ.**0 σημεία **Ε.**4 σημεία

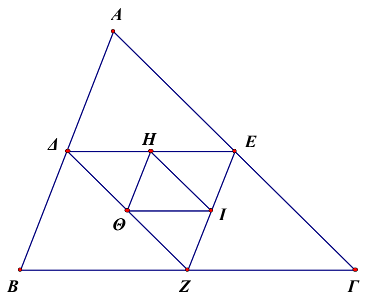
Άσκηση 5. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $y=f(x)$ με τύπο $f(x)=\dfrac{\sqrt{6-3x}}{x}$ είναι:

Α. $(-\infty,2]$ **Β.** $(-\infty,2)$ **Γ.** $(-\infty,0)\cup(0,2)$ **Δ.** $(-\infty,0)\cup(0,2]$ **Ε.** $[2,+\infty)$

Άσκηση 6. Η απόσταση της κορυφής της παραβολής $y=(x-1)^2+1$ από την αρχή των αξόνων είναι:

Α 1 **Β**. $\sqrt{2}$ **Γ**. $\frac{1}{2}$ **Δ**. 2 **Ε**. $2\sqrt{2}$

Άσκηση 7. Στο διπλανό σχήμα Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, ΔΕ, ΔΖ, ΖΕ αντίστοιχα. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 32, το εμβαδόν του τριγώνου ΗΘΙ είναι:



Α. 8 **Β**. 16 **Γ**. 4 **Δ**. 2 **Ε**. 1

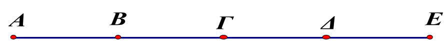
Άσκηση 8. Σε οικοδομικό συγκρότημα σχήματος κυρτού εξαγώνου οι πλευρές και οι διαγώνιές του είναι δρόμοι. Αν κάθε δρόμος πρέπει να φωτίζεται με μια τουλάχιστον λάμπα τότε για να φωτιστούν όλοι οι δρόμοι, χρειάζονται τουλάχιστον

Α. 5 λάμπες **Β**. 6 λάμπες **Γ**. 7 λάμπες **Δ**. 8 λάμπες **Ε**. 9 λάμπες

Άσκηση 9. Η παράσταση $\sqrt[3]{\frac{(\sqrt[3]{2}+1)^3(\sqrt[3]{2}-1)}{3}}$ ισούται:

Α.3 **Β**.1 **Γ**. $\frac{1}{3}$ **Δ**. $\frac{2}{3}$ **Ε**. 2

Άσκηση 10. Στο παρακάτω σχήμα ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=ΔΕ.



Αν n το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων που δημιουργούνται από τα σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε τότε ο πληθικός αριθμός του συνόλου Μ των μέσων των πιο πάνω ευθυγράμμων τμημάτων είναι:

Α.10 **Β**.5 **Γ**. 4 **Δ**. 7 **Ε**. 8

Άσκηση 11. Αν η κορυφή της παραβολής $y = x^2 + 6x + \mu$ βρίσκεται πάνω στον άξονα των x, η τιμή του μ είναι:

Α. 1 **Β**. 9 **Γ**.-9 **Δ**. 0 **Ε**. 6

Άσκηση 12. Αν για την συνάρτηση $y = f(x)$ ισχύει $(f(x))^{25} = 2x$ για κάθε $x \in R$

τότε το $\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)^{625}$ ισούται με:

Α. $2^{625}\cdot x$ **Β.** $2^{25}\cdot x$ **Γ.** $2^{26}\cdot x$ **Δ.** $625\cdot x$ **Ε.** $\left(2x\right)^{625}$

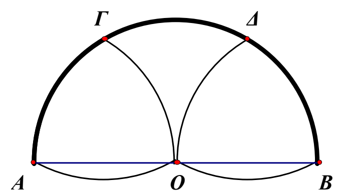
Άσκηση 13. Αν $\phi = 30^o$ η τιμή της παράστασης $\text{T}=\left(\eta\mu\phi+\sigma\upsilon\nu\phi\right)^2 - 2\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi$ είναι:

Α. $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **Β.** $1-\frac{\sqrt{3}}{4}$ **Γ.** -1 **Δ.** 0 **Ε.** 1

Άσκηση 14. Ο μεγαλύτερος από τους πιο κάτω αριθμούς είναι:

Α. 20^{50} **Β.** 6^{100} **Γ.** 3^{200} **Δ.** 2^{250} **Ε.** 4^{150}

Άσκηση 15. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ=8.Με κέντρα τα Α, Β και ακτίνα 4 γράφουμε τα τόξα ΓΟ και ΔΟ. Με κέντρα τα Γ, Δ και ακτίνα 4 γράφουμε τα τόξα ΑΟ και ΒΟ. Ο λόγος του εμβαδού του σκιασμένου μέρους προς το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι:



Α. $\frac{1}{2}$ **Β.** $\frac{1}{4}$ **Γ.** 1 **Δ.** $\frac{2}{3}$ **Ε.** $\frac{1}{3}$

Άσκηση 16. Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων η ευθεία $\varepsilon_1 : y = x-1$ τέμνει τους άξονες xx' και yy' στα σημεία Α και Β αντίστοιχα και η ευθεία $\varepsilon_2 : y = x+\kappa$ $(\kappa > 0)$ τέμνει τον άξονα yy' στο Γ. Η κάθετη στον άξονα xx' στο Α τέμνει την ε_2 στο Δ. Αν το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι 4, η τιμή του κ είναι:

Α. 2 **Β.** $\frac{1}{2}$ **Γ.** 5 **Δ.** $\frac{1}{3}$ **Ε.** 3

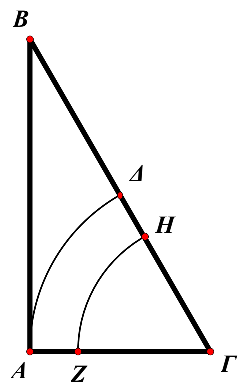
Άσκηση 17. Η τιμή της παράστασης $\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{6}\right)...\left(1+\frac{1}{47}\right)$ είναι:

Α. 6 **Β.** 12 **Γ.** 94 **Δ.** $\frac{1}{94}$ **Ε.** 47

Άσκηση 18. Αν $\text{T} = \sqrt{2000}+\sqrt{2003}$ και $\text{K} = \sqrt{2001}+\sqrt{2002}$ ισχύει:

Α. Τ>Κ **Β**. Τ<Κ **Γ**. Τ=Κ **Δ**. Τ= 2Κ **Ε**. Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 19. Στο σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α η γωνία Β=30° και ΒΓ=8.Το σκιασμένο χωρίο που είναι η διαφορά των κυκλικών τομέων ΓΑΔΓ και ΓΖΗΓ είναι $\frac{7\pi}{6}$.Το μήκος του ΑΖ είναι:



Α 7 **Β**.1 **Γ**. $\frac{7}{2}$ **Δ**. $\frac{1}{2}$ **Ε**. 2

Άσκηση 20. Το πάτωμα ενός δωματίου είναι τετράγωνο και καλύπτεται πλήρως με ν τετραγωνικά πλακίδια. Αν το πλήθος των πλακιδίων κατά μήκος των διαγωνίων είναι 43, τότε το ν ισούται:

Α.400 **Β**.172 **Γ**. 43^2 **Δ**. 484 **Ε**. Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 21. Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+3x+5=0$,τότε η τιμή της παράστασης $\mathrm{M}=\frac{\rho_1^2+5\rho_1+7}{\rho_1^2+7\rho_1+5}+\frac{\rho_2^2+5\rho_2+7}{\rho_2^2+7\rho_2+5}$ είναι:

Α. $\frac{10}{7}$ **Β**. $\frac{5}{3}$ **Γ**. $\frac{7}{10}$ **Δ**. $-\frac{7}{10}$ **Ε**. 15

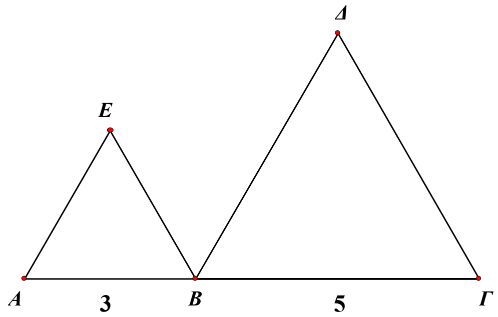
Άσκηση 22. Στον αριθμό $2003\alpha1\beta$ το β είναι το ψηφίο των μονάδων και το α το ψηφίο των εκατοντάδων. Το πλήθος των δυνατών τιμών των ζευγών (α,β) είναι:

Α.7 **Β**. 5 **Γ**. 4 **Δ**.1 **Ε**. 0

Άσκηση 23. Η τιμή του κλάσματος $\frac{1+3+5+....+999}{1001+1003+1005+.....+1999}$ είναι:

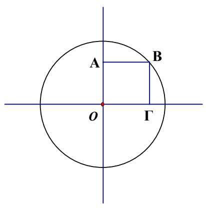
Α. $\frac{1}{3}$ **Β.** $\frac{1}{2}$ **Γ.** 10^{-3} **Δ.** $\frac{1}{9}$ **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 24. Στο σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΔΓ είναι ισόπλευρα με πλευρές ΑΒ=3, ΒΓ=5. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΓ είναι:



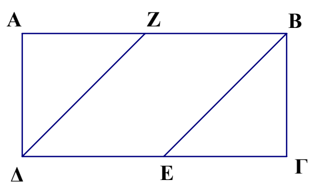
Α. $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ **Β.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ **Γ.** $\frac{49\sqrt{3}}{4}$ **Δ.** $\frac{28\sqrt{3}}{4}$ **Ε.** $\frac{15}{2}$

Άσκηση 25. Στο σχήμα $ΟΑ = ΟΓ = \sqrt{8}$. Το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας είναι:



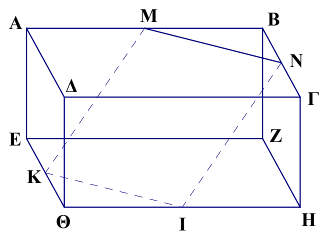
Α. 8π **Β**.16π **Γ**.2π-4 **Δ**. 8π-4 **Ε**. π+2

Άσκηση 26. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και ΒΕ, ΔΖ διχοτόμοι των γωνιών Β και Δ αντίστοιχα και ΒΓ=1. Αν ΒΕΔΖ είναι ρόμβος το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι:



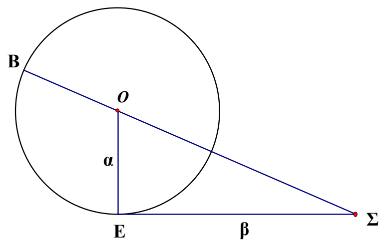
Α. 2 **Β**. $1+\sqrt{2}$ **Γ**. $\sqrt{2}-1$ **Δ**. $4+2\sqrt{2}$ **Ε**. $2+\sqrt{2}$

Άσκηση 27. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔΕΘΙΚ είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο διαστάσεων ΑΒ=8, ΒΓ=6 και ΑΕ=5. Αν Μ, Ν, Ι και Κ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ ,ΒΓ, ΘΗ και ΕΘ αντίστοιχα ,η περίμετρος του τετραπλεύρου ΜΝΙΚ είναι:



Α. $20\left(\sqrt{2}+1\right)$ **Β**. $10\left(\sqrt{2}+1\right)$ **Γ**. 20 **Δ**.$5\sqrt{2}+5$ **Ε**. $10\sqrt{2}+4$

Άσκηση 28. Δίνεται κύκλος $(\text{Ο},\alpha)$, ΟΕ ακτίνα του και ΣΕ εφαπτόμενο τμήμα.. Αν η ΣΑΒ είναι τέμνουσα που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και ΣΕ $=\beta$ η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2+2ax-x^2=0$ όπου $a,\beta\in R^+$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα ;



Α. ΣΟ **Β**. ΣΒ **Γ**. ΣΑ **Δ**. ΑΒ **Ε**. ΣΕ

Άσκηση 29. Η συνάρτηση $f(x)=[x]$ λέγεται «ακέραιο μέρος » και ορίζεται ως εξής: $\forall x\in R \quad f(x)=[x]$ είναι ο μέγιστος ακέραιος αριθμός ο οποίος είναι μικρότερος ή ίσος του x. [π.χ Αν $5\le x<6$ τότε $f(x)=[x]$=5].Αν $f(x)=x+[x]+\frac{1}{2}$ με $x\in[0,3)$,το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της f τις ευθείες x=0, x=3 και τον άξονα των x είναι:

Α. 9 **Β**. $9\frac{1}{2}$ **Γ**. $\frac{15}{2}$ **Δ**. $3\frac{1}{2}$ **Ε**. Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 30. Το πλήθος των ζευγών (x,y) των θετικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$ είναι:

Α. 2 **Β**. 1 **Γ**. 5 **Δ**. 4 **Ε**. 3

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

5η ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

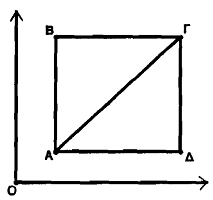
Απρίλιος 2004 ΧΡΟΝΟΣ: 60 ΛΕΠΤΑ

Δοκίμιο για Α', Β', Γ' Λυκείου

Άσκηση 1. Αν $2(\chi+y)(x-y)+(x-y)^2+(x+y)^2 = 16$ το χ^4 ισούται:

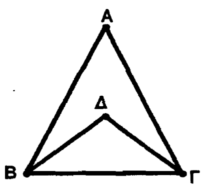
Α. 64 **Β.** 16 **Γ.** 4 **Δ.** 25 **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 2. Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς α .Αν $Α(1,\frac{1}{2})$ τότε η κλίση της ΑΓ είναι:



Α. $\frac{1}{2}$ **Β.** 2 **Γ.** 1 **Δ.** $\frac{1}{4}$ **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα.

Άσκηση 3. Στο σχήμα είναι ΑΒ=ΑΓ , ΔΒ=ΔΓ, ∠ΒΑΓ = 50°. ∠ΒΔΓ = 100°.Το μέτρο της γωνίας ∠ΑΒΔ είναι:

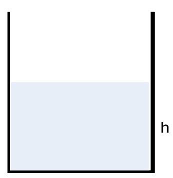


Α. 20° **Β.** 25° **Γ.** 50° **Δ.** 12,5° **Ε.** 40°

Άσκηση 4. Αν $x+y = 4$ και $\chi^2 + y^2 = \frac{25}{2}$ τότε η τιμή της παράστασης $\chi^3 + y^3$ είναι:

Α. 64 **Β.** $\frac{57}{2}$ **Γ.** $\frac{33}{2}$ **Δ.** 43 **Ε.** 50

Άσκηση 5. Άδειο κυλινδρικό δοχείο με ακτίνα βάσης 1 γεμίζει νερό με σταθερή ροή.



Η σχέση του ύψους h με τον όγκο V του νερού περιγράφεται από τον τύπο

Α. $V = \pi h + 5$ **Β**. $V = \pi h^2$ **Γ**. $V = \pi h$ **Δ**. $V = \dfrac{\pi}{h}$ **Ε**. $V = \pi$

Άσκηση 6. Η παραβολή $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ περνά από τα σημεία (0,6) , (-2,4) και (3,-2). Η τιμή του α+β+γ είναι:

Α. $\dfrac{24}{5}$ **Β**. $\dfrac{25}{5}$ **Γ**. $-\dfrac{1}{5}$ **Δ**. 5 **Ε**. Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 7. Αν α και β είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2+5x + 8 = 0$ τότε η εξίσωση με ρίζες $\dfrac{1}{a^2}$, $\dfrac{1}{\beta^2}$ είναι:

Α. $x^2 - 9x + 64 = 0$ **Β**. $x^2 - 9x - 64 = 0$ **Γ**. $64x^2 + 9x + 1 = 0$ **Δ.** $64x^2 - 9x + 1 = 0$ **Ε.** $64x^2 - 9x + 64 = 0$

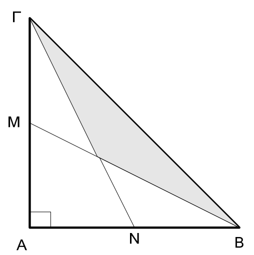
Άσκηση 8. Δίνεται η συνάρτηση / με τύπο $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2-\sqrt{1-x}}}$. Το πεδίο ορισμού της είναι:

Α. $(-\infty,1]$ **Β.** $[-3,1]$ **Γ**. $R-\{-3\}$ **Δ**. $(-3,1]$ **Ε**. $(-3,1)$

Άσκηση 9. Ένα κιβώτιο περιέχει 4 πράσινες ,6 λευκές και 10 κόκκινες σημαίες που χρησιμοποιήθηκαν για τον στολισμό ενός κτηρίου κατά τον εορτασμό του καρναβαλιού στην Λεμεσό .Οι σημαίες απομακρύνονταν τυχαία από το κιβώτιο και κρεμιόντουσαν .Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός σημαιών που πρέπει να κρεμαστούν για να είναι βέβαιο ότι τουλάχιστον δύο σημαίες από κάθε χρώμα έχουν κρεμαστεί.

Α. 6 **Β.** 10 **Γ**. 12 **Δ.** 14 **Ε**. 18

Άσκηση 10. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο (∠Α = 90°) με ΑΒ=ΑΓ= χ και Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Το εμβαδόν του σκιασμένου τριγώνου είναι:

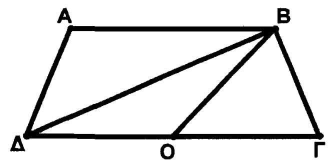


Α. $\dfrac{3x^2}{2}$ **Β**. $\dfrac{2x^2}{3}$ **Γ**. $\dfrac{x^2}{3}$ **Δ**. $\dfrac{x^2}{6}$ **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα.

Άσκηση 11. Αν $f(x-1) = -8x^2 + f^2(0) + 6$ και και $f(0) > 0$ το $f(2)$ ισούται

Α. -68 **Β**. -22 **Γ**. -62 **Δ.** 18 **Ε**. -26

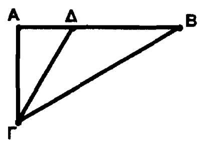
Άσκηση 12. Στο διπλανό ισοσκελές τραπέζιο ισχύει $BO = \frac{\Delta\Gamma}{2}$.(O μέσο της ΔΓ)



Τότε |∠ΒΑΔ-∠ΑΒΔ| είναι:

Α. 60° **Β.** 30° **Γ.** 100° **Δ.** 90° **Ε.** 105°

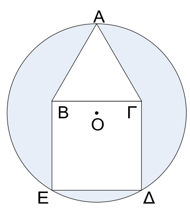
Άσκηση 13. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο (∠Α = 90°), ∠Β=30°.



Αν ΓΔ η διχοτόμος της ∠ΑΓΒ τότε ο λόγος $\frac{\Delta B}{\Delta A}$ είναι:

Α. 2 **Β.** $\frac{1}{2}$ **Γ.** 1 **Δ.** $\frac{2}{3}$ **Ε.** $\frac{3}{2}$

Άσκηση 14. Στο διπλανό σχήμα το πολύγωνο ΑΒΕΔΓ έχει τις κορυφές του Α, Ε, Δ πάνω σε κύκλο ακτίνας α.



Αν ΒΕΔΓ είναι τετράγωνο πλευράς α και ΑΒΓ ισόπλευρο τρίγωνο το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους είναι:

Α. $\pi\alpha^2 - \frac{4\alpha^2}{3}$ **Β.** $\frac{\pi\alpha^2}{3} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2} - \alpha^2$ **Γ.** $\frac{1}{4}\pi\alpha^2$

Δ. $\frac{a^2\left(4\pi - \sqrt{3} - 4\right)}{4}$ **Ε.** $\frac{\pi\alpha^2}{2}$

Άσκηση 15. Γνωρίζοντας ότι $x = 2 + \sqrt{3}$ είναι μία ρίζα της εξίσωσης χ^2 - 4χ+1 = 0 η τιμή της παράστασης $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 6x$: για $x = 2 + \sqrt{3}$ είναι:

Α. $-2+\sqrt{3}$ **Β.** $-3-\sqrt{3}$ **Γ.** 0 **Δ.** $1+\sqrt{3}$ **Ε.** $3-\sqrt{3}$

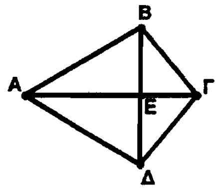
Άσκηση 16. Υποθέτουμε ότι P(χ) είναι πολυώνυμο και ισχύει $P(3x) = 27 \cdot P(x+1)$. τότε ο βαθμός του πολυωνύμου είναι:

Α. 9 **Β.** 2 **Γ.** 1 **Δ.** 3 **Ε.** 4

Άσκηση 17. Το άθροισμα όλων των τιμών του χ που ικανοποιεί την εξίσωση $\left(x^2-6x+6\right)^{x^2-4}=1$ είναι:

Α. 0 **Β.** 6 **Γ.** 7 **Δ.** 1 **Ε.**-5

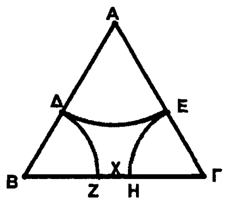
Άσκηση 18. Στο διπλανό τετράπλευρο έχουμε $\angle \mathrm{BA\Gamma} = \angle \mathrm{B\Delta\Gamma}$, $\mathrm{BE} \perp \mathrm{A\Gamma}$, $\mathrm{BE}=\mathrm{E\Delta}$ και $AE-E\Gamma=\sqrt{13}$.



Αν τα μήκη των διαγωνίων του ΑΒΓΔ είναι ακέραιοι αριθμοί το εμβαδόν του τετραπλεύρου είναι:

Α. 43 **Β.** 41 **Γ.** $\frac{41}{2}$ **Δ.** 42 **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 19. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α .Τα τόξα γράφτηκαν με κέντρα τα σημεία Α ,Β ,Γ. Αν ΑΔ=β



τότε το χ είναι:

Α. α-β **Β.** $\frac{a+\beta}{2}$ **Γ.** 2β-α **Δ.** α-2β **Ε.** 2α-β

Άσκηση 20. Αν ν είναι άρτιος αριθμός και ισχύει

$$\left[\frac{\left(-1^{\nu}\right)}{\alpha^x \cdot 2 \cdot 5^3+4}+\frac{\left(-1\right)^{\nu+1}}{\alpha^x \cdot 2 \cdot 5^3+6}\right]^{-1} \cdot \frac{1}{1003}=2004$$

με α, χ θετικοί ακέραιοι τότε η τιμή του α είναι:

Α. 10 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** 4 **Ε.** 5

Άσκηση 21. Αν $a=2^x$, $\beta=2^y$ και $a^y\cdot\beta^x=2^{2(x+y)}$ τότε $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ είναι:

Α. 2 **Β.** $\frac{1}{4}$ **Γ.** $\frac{1}{2}$ **Δ.** 1 **Ε.** $\sqrt{2}$

Άσκηση 22. Η τιμή της παράστασης $\sqrt[2004]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4008]{7+4\sqrt{3}}$ είναι:

Α. -1 **Β.** 1 **Γ.** 5 **Δ.** 3 **Ε.** 9

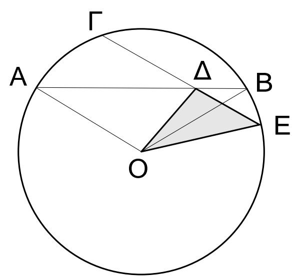
Άσκηση 23. Για πόσους ακέραιους α $(1 \le a \le 100)$ ο αριθμός $α^α$ είναι τετράγωνο κάποιου αριθμού;

Α. 5 **Β.** 50 **Γ.** 55 **Δ.** 54 **Ε.** 15

Άσκηση 24. Στο σπίτι της γιαγιάς υπάρχει ένα καλάθι με μήλα και αχλάδια. Όταν επισκέφτηκαν το σπίτι της γιαγιάς όλα τα εγγόνια της ,η γιαγιά τους πρόσφερε όλα τα φρούτα που είχε και κάθε παιδί πήρε το ίδιο πλήθος φρούτων χωρίς να δώσει σημασία τι είδος φρούτων πήρε το καθένα. Αν ο μεγαλύτερος εγγονός πήρε το $\frac{1}{8}$ των μήλων και το $\frac{1}{10}$ των αχλαδιών ,τα εγγόνια της γιαγιάς ήταν :

Α.7 **Β.** 8 **Γ.** 9 **Δ.** 10 **Ε.** 11

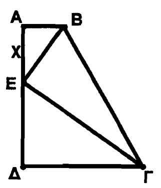
Άσκηση 25. Στο διπλανό σχήμα έχουμε ΑΔ=2, ΒΔ=1 και ΔΓ= $\sqrt{2}$.



Αν η γωνία ΟΑΔ είναι 30° το εμβαδόν του τριγώνου ΟΔΕ είναι:

Α. $\sqrt{3}$ **Β.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **Γ.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **Δ.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **Ε.** 1

Άσκηση 26. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο τραπέζιο ύψους 20 με παράλληλες πλευρές 8 και 12.



Αν $\angle ΒΕΓ = 90°$ τότε το χ=ΑΕ είναι:

Α. 4 **Β.** 1 **Γ.** $3\sqrt{2}$ **Δ.** 8 **Ε.** $2\sqrt{2}$

Άσκηση 27. Κάθε μέρα ο Αντώνης φεύγει από την προπόνηση του στο γήπεδο για το σπίτι του την ίδια ώρα με το ποδήλατο του. Αν τρέχει με ταχύτητα 20 Km/h φθάνει στο σπίτι του στις 18 h 30.Αν τρέχει με ταχύτητα 10Km/h φτάνει στο σπίτι του στις 19h 15. Με ποια ταχύτητα σε Km/h πρέπει να τρέχει για να φθάσει στο σπίτι του στις 19h;

Α. $17\frac{2}{3}$ **Β.** 15 **Γ.** $14\frac{1}{2}$ **Δ.** 12 **Ε.** $18\frac{3}{4}$

Άσκηση 28. Από τις παρακάτω διατάξεις η σωστή είναι

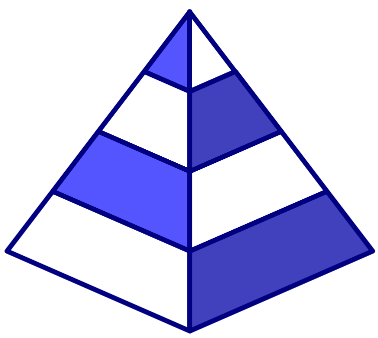
Α. $\sqrt[4]{2} > \sqrt[10]{5} > \sqrt[6]{3}$ **Β.** $\sqrt[6]{3} > \sqrt[4]{2} > \sqrt[10]{5}$ **Γ.** $\sqrt[4]{2} > \sqrt[6]{3} > \sqrt[10]{5}$ **Δ.** $\sqrt[10]{5} > \sqrt[4]{2} > \sqrt[6]{3}$ **Ε.** $\sqrt[10]{5} > \sqrt[6]{3} > \sqrt[4]{2}$

Άσκηση 29. Κλειστό γυάλινο κωνικό δοχείο περιέχει ποσότητα νερού. Όταν το δοχείο τοποθετηθεί σε οριζόντιο επίπεδο με την βάση του να βρίσκεται πάνω στο επίπεδο το ύψος του νερού είναι 1 cm.Αν τοποθετηθεί ανεστραμμένο ώστε η κορυφή του να είναι προς τα κάτω και η βάση του παράλληλη με το οριζόντιο επίπεδο το ύψος του νερού είναι 2 cm.Το ύψος του κωνικού δοχείου είναι

Α. $\frac{3+\sqrt{93}}{6}$ **Β.** 3 **Γ.** 6 **Δ.** $\frac{\sqrt{93}}{6}$ **Ε.** $2+\sqrt{3}$

Άσκηση 30. Η παράσταση $\left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{1}{3}}$ ισούται:

Α. $2\sqrt{5}$ **Β.** $\sqrt[3]{5}$ **Γ.** 1 **Δ.** 4 **Ε.** $4^{\frac{1}{3}}$



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

6η ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Απρίλιος 2005 ΧΡΟΝΟΣ: 60 ΛΕΠΤΑ

Δοκίμιο για Α', Β', Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Άσκηση 1. Αν $a = 2^{2005} + 2^{-2005}$ και $\beta = 2^{2005} - 2^{-2005}$ τότε η τιμή του $\alpha^2 - \beta^2$ είναι:

Α. 2 **Β.** 2^{2005} **Γ.** 4 **Δ.** $2 \cdot 2^{-2005}$ **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα

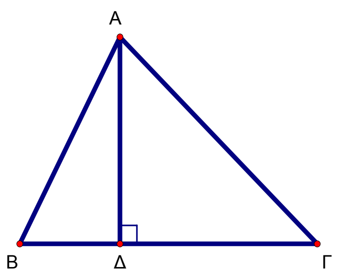
Άσκηση 2. Πόσα ζευγάρια θετικών ακεραίων (x, y) ικανοποιούν την εξίσωση $5x + 15y = 2004$.

Α. κανένα **Β.** τρία **Γ.** δυο **Δ.** τέσσερα **Ε.** ένα

Άσκηση 3. Αν $1 \le x \le 2$ τότε η τιμή της παράστασης $K = \left(\sqrt{x-1}\right)^2 + \sqrt{(x-2)^2}$ είναι:

Α. 3 **Β.** -3 **Γ.** 0 **Δ.** 2 **Ε.** 1

Άσκηση 4. Στο διπλανό σχήμα το ΑΔ>1 είναι ύψος και $(\text{ΑΒ}) = \sqrt{2}$, $(\text{ΒΓ}) = \sqrt{3}$, $\angle \Gamma = 45^0$.



Το ΑΔ είναι:

Α $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ **Β.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ **Γ.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **Δ.** $\frac{3}{2}$ **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 5. Το πλήθος των θετικών ακεραίων αριθμών που είναι μικρότεροι από το 2000 και δεν διαιρούνται ούτε με το 3,ούτε με το 5 είναι:

Α. 769 **Β.** 1065 **Γ.** 1067 **Δ.** 1069 **Ε.** 1070

Άσκηση 6. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί $\mathrm{N}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ (σε δεκαδική μορφή) ικανοποιούν όλες τις παρακάτω συνθήκες

(α) $2000 \leq \mathrm{N} < 4000$

(β) είναι πολλαπλάσιοι του 3 και του 5

(γ) β,γ πρώτοι αριθμοί με $\beta \leq \gamma$ και $\beta+\gamma$ άρτιος αριθμός .

Α. 18 **Β.** 36 **Γ.** 10 **Δ.** 48 **Ε.** 24

Άσκηση 7. Αν $\dfrac{y}{x}=\dfrac{3x+y-\omega}{6x-y-z}=\dfrac{y+\omega}{7y-x+z}$ με $x,y,z,\omega>0$, $6x \neq y+z$, $7y \neq x-z$ τότε η τιμή του $\dfrac{x}{y}$ είναι:

Α. $1/2$ **Β.** 2 **Γ.** $1/7$ **Δ.** 3 **Ε.** 5

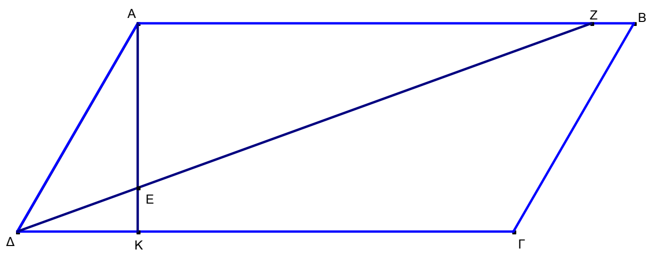
Άσκηση 8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{10}{\sqrt{x+2}-2}$.Το πεδίο ορισμού της είναι:

Α. $(-\infty,2]$ **Β.**$[0,2]$ **Γ.** $R-\{2\}$ **Δ.** $[-2,2)\cup(2,+\infty)$ **Ε.**$(-2,2)$

Άσκηση 9. Το κλάσμα $\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ είναι ίσο με

Α. $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ **Β.** $1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$ **Γ.** $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ **Δ.** $1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ **Ε.** $\dfrac{1}{3}\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

Άσκηση 10. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο με $\angle \mathrm{A\Delta\Gamma}=60^0$, $\angle \Gamma\Delta \mathrm{Z}=20^0$ και $\mathrm{AK}\perp\Delta\Gamma$.



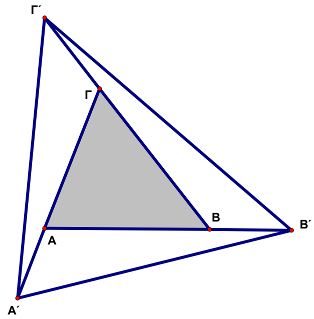
Ποιό από τα παρακάτω είναι σωστό

Α. $\mathrm{EZ}=2\mathrm{AK}$ **Β.** $\mathrm{AB}=2\mathrm{A}\Delta$ **Γ.** $\mathrm{EZ}=2\mathrm{A}\Delta$ **Δ.** $\mathrm{EZ}=\sqrt{3}\,\mathrm{A}\Delta$ **Ε.** $\Delta\mathrm{E}=2\mathrm{EK}$

Άσκηση 11. Αν $2f(x)-f\left(\dfrac{4x+2}{x-4}\right)=3x-1$, το $f(5)$ ισούται

Α. $\dfrac{1}{2}$ **Β.** 2005 **Γ.** -1 **Δ.** 4 **Ε.** 31

Άσκηση 12. Οι πλευρές ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ προεκτείνονται κατά $ΑΑ' = \dfrac{1}{2}ΓΑ$, $ΒΒ' = \dfrac{1}{2}ΑΒ$ και $ΓΓ' = \dfrac{1}{2}ΒΓ$.



Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 1 ,τότε το εμβαδόν του τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ είναι:

Α. 2 **Β.** $\dfrac{3}{2}$ **Γ.** 3 **Δ.** $\dfrac{13}{4}$ **Ε.** 4

Άσκηση 13. Η κυρτή επιφάνεια ορθού κώνου είναι 3.Αν η απόσταση του κέντρου της βάσης από μια γενέτειρά του είναι d ,τότε ο όγκος του είναι:

Α. $2d$ **Β.** d **Γ.** d^3 **Δ.** $\dfrac{d}{3}$ **Ε.** $3d$

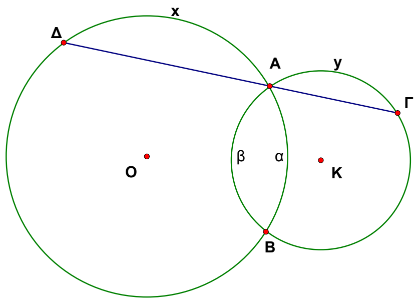
Άσκηση 14. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα 6 και διάμετρος ΑΒ. Στην ακτίνα ΟΒ παίρνουμε σημείο Γ ,ώστε ΟΓ=2 .Χορδή ΕΖ περνά από το Γ και $\angle ΕΓΒ = 60^0$. Το μήκος του ΕΖ είναι :

Α. 10 **Β.** $\sqrt{6}$ **Γ.** $4\sqrt{3}$ **Δ.** $2\sqrt{33}$ **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 15. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α,β $(\alpha \neq \beta)$ ισχύουν $\alpha^2 = 2\beta + 15$ και $\beta^2 = 2\alpha + 15$,τότε η τιμή του γινομένου $\alpha\beta$ είναι :

Α. -9 **Β.** 30 **Γ.** 15 **Δ.** 7,5 **Ε.** -11

Άσκηση 16. Στο διπλανό σχήμα τα τόξα α, β έχουν άθροισμα 120^0.



Το $x+y$ ισούται με

Α. 90^0 **Β.** 150^0 **Γ.** 100^0 **Δ.** 120^0 **Ε.** 240^0

Άσκηση 17. Σε παραλληλόγραμμο με πλευρές 4 και 7 η διαφορά των διαγώνιων είναι 2. Τότε το άθροισμα των διαγώνιων του είναι:

Α. 11 **Β.** 16 **Γ.** 28 **Δ.** 12 **Ε.** 14

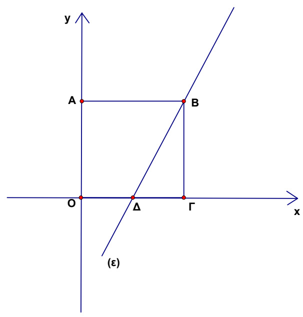
Άσκηση 18. Ένα σωληνάριο περιέχει $154cm^3$ οδοντόπαστας. Αν πιέσουμε το σωληνάριο, ώστε να αδειάσει τελείως και η μορφή της οδοντόπαστας που βγαίνει είναι κυλινδρική με κάθετη διατομή διαμέτρου $7mm$, τότε το μήκος της οδοντόπαστας είναι (δίνεται $\pi = \frac{22}{7}$):

Α. $2m$ **Β.** $0{,}5m$ **Γ.** $3m$ **Δ.** $4m$ **Ε.** $3{,}5m$

Άσκηση 19. Ν είναι ένας πενταψήφιος θετικός ακέραιος. Ένας εξαψήφιος ακέραιος Ρ κατασκευάζεται με την προσθήκη του ψηφίου 1 στο τέλος του Ν και ένας άλλος εξαψήφιος Q κατασκευάζεται με την προσθήκη του ψηφίου 1 στην αρχή του Ν. Αν ο Ρ είναι τριπλάσιος του Q ,τότε ο Ν είναι :

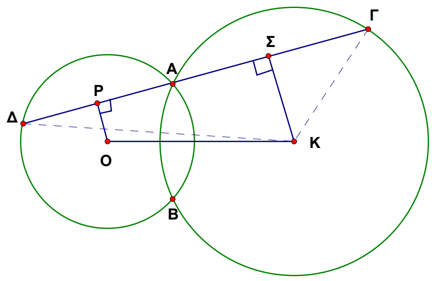
Α. 34587 **Β.** 42857 **Γ.** 13867 **Δ.** 31287 **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 20. Το ΑΒΓΟ είναι τετράγωνο πλευράς 1 και το Δ είναι το μέσον του ΟΓ. Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι :



Α. $x+y=1$ **Β.** $x+y=\frac{1}{2}$ **Γ.** $y=2x$ **Δ.** $2x+y=1$ **Ε.** $y=2x-1$

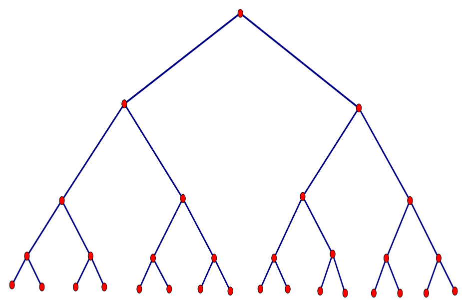
Άσκηση 21. Δυο κύκλοι (Ο, ρ) και (Κ,2ρ) τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από το Α φέρνουμε την ΓΑΔ και ΚΣ $\perp$ ΓΑ , ΟΡ $\perp$ ΑΔ.



Αν ΚΣ = 2 ΟΡ ,ο λόγος των εμβαδών του τετράπλευρου ΟΚΣΡ προς του τριγώνου ΓΚΔ είναι:

Α. 2 **Β.** $3/2$ **Γ.** $3/4$ **Δ.** 1 **Ε.** $1/2$

Άσκηση 22. Η Ομόνοια και ο Απόλλωνας είναι μεταξύ των 16 ομάδων που προκρίθηκαν σε ένα ευρωπαϊκό τουρνουά ποδοσφαίρου. Θεωρώντας ότι όλες οι ομάδες είναι εξίσου πιθανόν να νικήσουν σε κάθε αγώνα που παίζουν, πόσο πιθανόν είναι να αγωνιστούν μεταξύ τους οι δυο κυπριακές ομάδες, αν ο τρόπος οργάνωσης του τουρνουά είναι αυτός που φαίνεται στο σχήμα

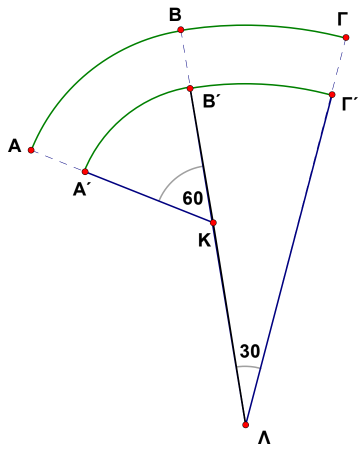


Α. $7/8$ **Β.** $1/2$ **Γ.** $1/4$ **Δ.** $1/8$ **Ε.** $1/16$

Άσκηση 23. Το γινόμενο των ψηφίων ενός τετραψήφιου αριθμού είναι 90. Πόσοι τέτοιοι αριθμοί υπάρχουν

Α. 24 **Β.** 45 **Γ.** 60 **Δ.** 30 **Ε.** 36

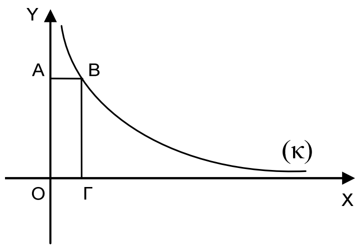
Άσκηση 24. Μια στροφή ενός δρόμου πλάτους *5m* σε όλο της το μήκος, έχει κατασκευαστεί ως εξής: τα τμήματα AB , $A'B'$ είναι τόξα ομόκεντρων κύκλων με κέντρο το K ,ενώ τα τμήματα $B\Gamma$,$B'\Gamma'$ είναι τόξα ομόκεντρων κύκλων με κέντρο το σημείο Λ (σχήμα).



Αν $\angle AKB = 60^0$ και $\angle B\Lambda\Gamma = 30^0$,τότε η διαφορά της εσωτερικής διαδρομής $A'B'\Gamma'$ από την εξωτερική $AB\Gamma$ είναι :

A. $5\pi\ m$ **B.** $\frac{5\pi}{2}\ m$ **Γ.** *10 m* **Δ.** *2 m* **E.** $\pi\ m$

Άσκηση 25. Η καμπύλη (κ) έχει εξίσωση $xy = c^2$ και το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΟ είναι 16. Η τιμή του c είναι :

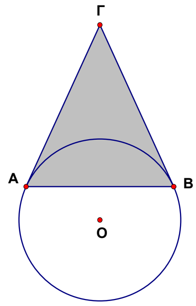


A. ± 4 **B.** 2 **Γ.** 4 **Δ.** 16 **E.** $\sqrt{2}$

Άσκηση 26. Τρίγωνο ΑΒΓ έχει κορυφές Α(0,3) ,Β(4,0) ,Γ(x,5) με $0 < x < 4$. Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι 8 ,τότε το x ισούται :

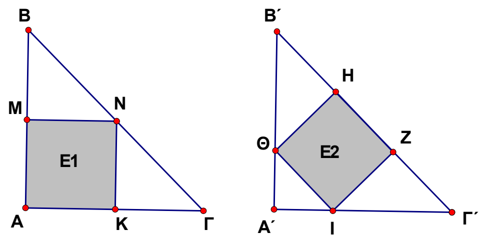
A. 1 **B.** $4/3$ **Γ.** 2 **Δ.** 3 **E.** $8/3$

Άσκηση 27. Δίνεται κύκλος (O,R) και χορδή ΑΒ=2α . Αν ΓΑ ,ΓΒ εφαπτόμενα τμήματα, το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι :



Α.	Β.	Γ.	Δ.	Ε.
$4\alpha R$	$\frac{5\alpha^3}{R}$	$10\alpha^2$	$\frac{\alpha^3}{\sqrt{R^2-\alpha^2}}$	Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 28. Τα τρίγωνα ΑΒΓ ,Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα, τα ΜΝΚΑ , ΘΗΖΙ είναι τετράγωνα και Β΄Η=ΗΖ=ΖΓ΄. Αν $E_1=\alpha^2$,τότε ο λόγος $\frac{E_1}{E_2}$ είναι:



Α. 1 **Β.** $9/8$ **Γ.** $8/9$ **Δ.** $3/4$ **Ε.** $3/2$

Άσκηση 29. Ένας σκιέρ ανεβαίνει με το τελεφερίκ τη χιονοδρομική πίστα με σταθερή ταχύτητα $4\, km/h$ και κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα $24\, km/h$. Αν η χιονοδρομική πίστα έχει το ίδιο μήκος με τη διαδρομή που ακολουθεί το τελεφερίκ και αγνοήσουμε το χρόνο παραμονής στην κορυφή της πίστας, τότε η μέση ταχύτητα της συνολικής διαδρομής (άνοδος – κάθοδος) σε km/h είναι:

Α. 14 **Β.** $48/7$ **Γ.** 10 **Δ.** 7 **Ε.** $52/7$

Άσκηση 30. Η τιμή της παράστασης $K=2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$ είναι:

Α. $-1/2$ **Β.** $\sqrt{2}$ **Γ.** 1 **Δ.** $1/2$ **Ε.** $\sqrt{2}/2$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

7^{η} ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Απρίλιος 2006 **ΧΡΟΝΟΣ: 60 ΛΕΠΤΑ**

Δοκίμιο για Α', Β', Γ' Λυκείου

1. Μια γαλακτοβιομηχανία, σε ποσότητα γάλακτος με 4% λιπαρά προσθέτει ποσότητα γάλακτος με 1% λιπαρά και παράγει 1200 κιλά γάλα με 2% λιπαρά.

Η ποσότητα γάλακτος με 1% λιπαρά, που προστέθηκε είναι (σε κιλά)

Α. 1000 Β. 600 Γ. 800 Δ. 120 Ε. 480

2. Αν $\alpha * \beta = \alpha^2 - \beta^2 \quad \forall \alpha, \beta \in R$ τότε η τιμή της παράστασης

$K = \left[\left(1+\sqrt{3}\right)*2\right]*\sqrt{3}$ είναι

Α. 3 Β. 0 Γ. $\sqrt{3}$ Δ. 9 Ε. 1

3. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \sqrt{4+2x}$ είναι

Α. $(-2,+\infty)$ Β. $[0,+\infty)$ Γ. $[-2,+\infty)$ Δ. $[-2,0]$ Ε. R

4. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \alpha x^2 + 9x + \dfrac{81}{4\alpha}$, $\alpha \neq 0$.

Ποιο από τα παρακάτω ισχύει για τη γραφική παράσταση της f

Α. τέμνει τον άξονα των x Β. εφάπτεται στον άξονα των y Γ. εφάπτεται στον άξονα των x Δ. έχει ελάχιστο σημείο Ε. έχει μέγιστο σημείο

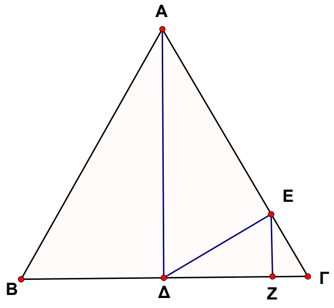
5. Αν α, β είναι ακέραιοι μεγαλύτεροι του 1 και ισχύει $\alpha^7 = \beta^8$, τότε η μικρότερη δυνατή τιμή του $\alpha + \beta$ είναι

Α. 384 Β. 2 Γ. 15 Δ. 56 Ε. 512

6. Η τιμή της παράστασης $K = \sqrt{19+8\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ είναι

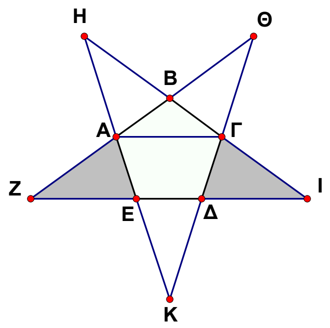
Α. 4 Β. $4\sqrt{3}$ Γ. $12+4\sqrt{3}$ Δ. -2 Ε. 2

7. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο και $ΑΔ \perp ΒΓ$, $ΔΕ \perp ΑΓ$, $ΕΖ \perp ΒΓ$.
Αν $ΕΖ = \sqrt{3}$, η πλευρά του ΑΒΓ είναι



Α. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ Β. 8 Γ. 4 Δ. 3 Ε. 9

8. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔΕ είναι κανονικό πεντάγωνο και Ζ,Η,Θ,Ι,Κ σημεία τομής των προεκτάσεων των πλευρών του.
Αν το εμβαδόν του «αστεροειδούς» ΑΗΒΘΓΙΔΚΕΖΑ είναι 1, τότε το εμβαδόν του τετράπλευρου ΑΓΙΖ είναι



Α. $\dfrac{2}{3}$ Β. $\dfrac{1}{2}$ Γ. $\dfrac{3}{7}$ Δ. $\dfrac{3}{10}$ Ε. Κανένα από τα προηγούμενα

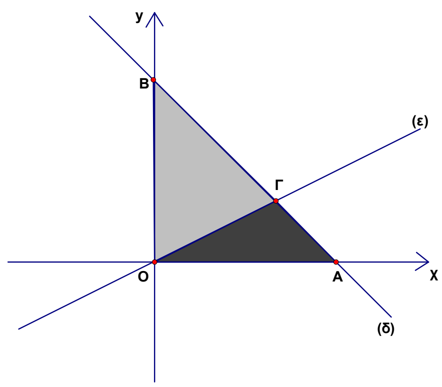
9. Αν $x = \sqrt[3]{4} - 1$ και $y = \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{3}$, τότε ποιο από τα παρακάτω ισχύει

Α. $x = y$ Β. $x < y$ Γ. $x = 2y$ Δ. $x > y$ Ε. Κανένα από τα προηγούμενα

10. Αν $2^x = 15$ και $15^y = 256$, το γινόμενο xy ισούται με

Α. 7 Β. 3 Γ. 1 Δ. 8 Ε. 6

11. Οι ευθείες (ε): $x - 2y = 0$ και (δ): $x + y = 4$ τέμνονται στο σημείο Γ. Αν η ευθεία (δ) τέμνει τους ημιάξονες Οx και Οy στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τότε ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΓ προς το εμβαδόν του τριγώνου ΟΒΓ είναι



Α. $\dfrac{1}{3}$ Β. $\dfrac{2}{3}$ Γ. $\dfrac{3}{5}$ Δ. $\dfrac{1}{2}$ Ε. $\dfrac{4}{9}$

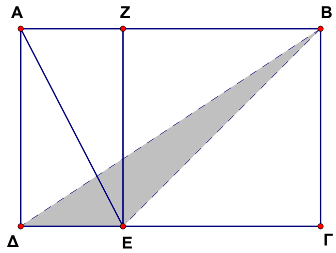
12. Αν $f(\alpha,\beta)=\begin{cases}\alpha & \text{με } \alpha=\beta \\ f(\alpha-\beta,\beta) & \text{με } \alpha>\beta \\ f(\beta-\alpha,\alpha) & \text{με } \alpha<\beta\end{cases}$, τότε η τιμή του $f(28,17)$ είναι

Α. 8 Β. 0 Γ. 11 Δ. 5 Ε. 1

13. Το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $10^{2006}-2006$ είναι

Α. 18006 Β. 20060 Γ. 2006 Δ. 18047 Ε. Κανένα από τα προηγούμενα

14. Ένας μικρός κήπος ΑΒΓΔ, σχήματος ορθογωνίου χωρίζεται σε ένα ορθογώνιο ΑΖΕΔ και ένα τετράγωνο ΖΒΓΕ, έτσι ώστε $\text{ΑΕ}=2\sqrt{5}\,m$ και το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΕ να είναι $4\,m^2$. Το εμβαδόν του κήπου είναι



Α. $24\,m^2$ Β. $20\,m^2$ Γ. $16\,m^2$ Δ. $32\,m^2$ Ε. $10\sqrt{5}\,m^2$

15. Η παράσταση: $\dfrac{1}{2+\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}+\dfrac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{13}}+\dfrac{1}{\sqrt{13}+4}$ ισούται με

Α. $\dfrac{3}{4}$ Β. $\dfrac{3}{2}$ Γ. $\dfrac{2}{5}$ Δ. $\dfrac{1}{2}$ Ε. $\dfrac{2}{3}$

16. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-2\kappa x+2\mu=0$, τότε $\dfrac{1}{x_1},\dfrac{1}{x_2}$ είναι ρίζες της εξίσωσης

Α. $x^2-2\kappa^2 x+2\mu^2=0$

Β. $x^2-\dfrac{\kappa}{\mu}x+\dfrac{1}{2\mu}=0$

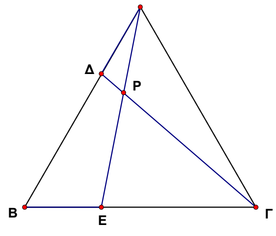
Γ. $x^2-\dfrac{\mu}{\kappa}x+\dfrac{1}{2\mu}=0$

Δ. $2\mu x^2-\kappa x+1=0$

Ε. $2\kappa x^2-2\mu x+1=0$

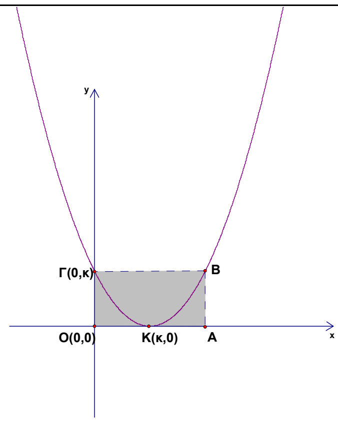
17. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α και $\text{ΑΔ}=\text{ΒΕ}=\dfrac{\alpha}{3}$.

Το μέτρο της γωνίας $\angle\text{ΓΡΕ}$ είναι



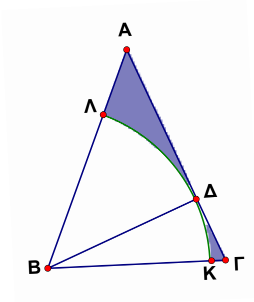
Α. 60^0 Β. 50^0 Γ. 40^0 Δ. 45^0 Ε. 70^0

18. Η παραβολή του διπλανού σχήματος έχει κορυφή το σημείο Κ(κ,0) και τέμνει τον ημιάξονα Οy στο σημείο Γ(0,κ). Αν το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΑΒΓ είναι 8, τότε η εξίσωση της παραβολής είναι



Α. $y=\frac{1}{2}(x+2)^2$ Β. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ Γ. $y=x^2+2$ Δ. $y=x^2-2x+1$ Ε. $y=x^2-4x+4$

19. Στο σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma = \sqrt{2}$ και $\angle A = 45^0$. Αν ΒΔ ύψος του τριγώνου και ο κυκλικός τομέας ΒΛΔΚΒ ανήκει στον κύκλο (Β,ΒΔ), το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας που βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο και έξω από τον κυκλικό τομέα είναι ίσο με



Α. $\frac{4\sqrt{3}-\pi}{6}$ Β. $4\left(\sqrt{2}-\frac{\pi}{3}\right)$ Γ. $\frac{8\sqrt{2}-3\pi}{16}$ Δ. $\frac{\pi}{8}$ Ε. Κανένα από τα προηγούμενα

20. Για την ακολουθία $f:\mathrm{N}\to R$ ισχύει $f(n)=f(n-1)-f(n-2), \forall n\geq 3$.

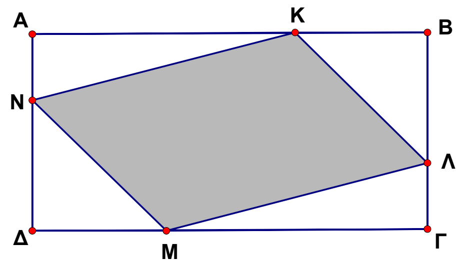
Αν $f(1)=f(2)=1$, τότε το $f(3n)$ ισούται με

Α. 3 Β. -3 Γ. 2 Δ. 1 Ε. 0

21. Κυρτό πολύγωνο έχει ν πλευρές και 740 διαγώνιους. Τότε το ν ισούται με

Α. 30 Β. 40 Γ. 50 Δ. 60 Ε. Κανένα από τα προηγούμενα

22. Το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν βρίσκονται στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα ώστε $\frac{AK}{KB}=\frac{B\Lambda}{\Lambda\Gamma}=\frac{\Gamma M}{M\Delta}=\frac{\Delta N}{NA}=2$. Αν E_1 το εμβαδόν του ΚΛΜΝ και E_2 το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ο λόγος $\frac{E_1}{E_2}$ ισούται με



Α. $\frac{5}{9}$ Β. $\frac{1}{3}$ Γ. $\frac{9}{5}$ Δ. $\frac{3}{5}$ Ε. Κανένα από τα προηγούμενα

23. Από 21 μαθητές που επέλεξαν Μαθηματικά, Φυσική, Χημεία, δεν υπάρχει μαθητής που επέλεξε μόνο ένα μάθημα. Αν ο αριθμός των μαθητών που επέλεξαν μόνο Μαθηματικά και Χημεία είναι τετραπλάσιος από τον αριθμό αυτών που επέλεξαν μόνο Μαθηματικά και Φυσική και ο αριθμός των μαθητών που επέλεξαν μόνο Φυσική και Χημεία είναι τριπλάσιος από τον αριθμό αυτών που επέλεξαν και τα 3 μαθήματα, τότε ο αριθμός των μαθητών που επέλεξαν και τα 3 μαθήματα είναι

Α. 0 Β. 5 Γ. 2 Δ. 4 Ε. 1

24. Το πλήθος των διαιρετών του αριθμού 2006 είναι

Α. 3 Β. 4 Γ. 8 Δ. 5 Ε. 6

25. Με τα μουσικά όργανα κιθάρα, μπουζούκι και βιολί θα σχηματίσουμε 4μελή ορχήστρα στην οποία θα υπάρχουν 2 τουλάχιστον διαφορετικά όργανα. Το πλήθος τέτοιων ορχηστρών είναι

Α. 12 Β. 15 Γ. 11 Δ. 14 Ε. 13

26. Το μέγιστο πλήθος των σημείων τομής τριών διαφορετικών κύκλων και μιας ευθείας είναι

Α. 9 Β. 10 Γ. 11 Δ. 12 Ε. Κανένα από τα προηγούμενα

27. Στο ανάπτυγμα του $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^4$ υπάρχει όρος που δεν περιέχει το x.

Ο όρος αυτός έχει τιμή

Α. 2 Β. 6 Γ. 4 Δ. 10 Ε. 12

28. Σε ισοσκελές αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φ είναι το μέτρο των οξειών γωνιών του και ΑΒ = ΑΓ = α . Αν Δ το ίχνος του ύψους από την κορυφή Β του τριγώνου, το ΓΔ είναι ίσο με

Α. $\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\varphi)$ Β. $\dfrac{\alpha(1-\sigma\upsilon\nu 2\varphi)}{2}$ Γ. $\alpha(1+\sigma\upsilon\nu 2\varphi)$ Δ. $2\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\varphi)$ Ε. $\alpha(1+\eta\mu 2\varphi)$

29. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ με $f(n)=\begin{cases} n+1 & ,\text{αν } n \text{ περιττός} \\ n^2 & ,\text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$.

Η τιμή του $f(f(f(3)))$ είναι

Α. 27 Β. 81^2 Γ. 128 Δ. 64 Ε. 256

30. Αν $x=2^{100}$, $y=3^{75}$, $z=5^{50}$, τότε ποιο από τα παρακάτω είναι ορθό

Α. $x<y<z$ Β. $x<z<y$ Γ. $y<z<x$ Δ. $y<x<z$ Ε. Κανένα από τα προηγούμενα

<u>ΚΥΠΡΙΑΚΗ   ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ</u>

<u>Οδηγίες προς τους Διαγωνιζόμενους</u>

ΧΡΟΝΟΣ : 60 Λεπτά

Μα συμπληρώσετε προσεκτικά το φύλλο απαντήσεων, επιλέγοντας μόνο μία απάντηση για κάθε ερώτηση. Η συμπλήρωση να γίνει με μαύρισμα στο αντίστοιχο κυκλάκι.

Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 4 μονάδες. Για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρείται 1 μονάδα.

Απάντηση σε άσκηση με μαύρισμα σε περισσότερα από ένα κυκλάκια θεωρείται λανθασμένη. Επειδή η διόρθωση θα γίνει ηλεκτρονικά, οποιοδήποτε σημάδι ή σβήσιμο καθιστά την απάντηση λανθασμένη.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το χώρο δίπλα από τις ασκήσεις για βοηθητικές πράξεις.

Συστήνεται όπως σημειώνετε τις απαντήσεις στο ειδικό έντυπο απαντήσεων στα τελευταία πέντε λεπτά της εξέτασης *αφού* βεβαιωθείτε ότι οι απαντήσεις είναι τελικές.

Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

7η Κυπριακή Μαθηματική Ολυμπιάδα, 9 Απριλίου 2006

Κωδικός μαθητή

7110134

Στοιχεία μαθητή

Όνοματεπώνυμο : XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Σχολείο: XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Τάξη : XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Κέντρο Εξέτασης : XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Αίθουσα Εξέτασης :XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

1.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ	16.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ
2.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ	17.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ
3.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ	18.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ
4.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ	19.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ
5.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ	20.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ
6.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ	21.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ
7.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ	22.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ
8.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ	23.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ
9.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ	24.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ
10.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ	25.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ
11.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ	26.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ
12.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ	27.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ
13.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ	28.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ
14.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ	29.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ
15.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ	30.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓖ	Ⓓ	Ⓔ

Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

7η Κυπριακή Μαθηματική Ολυμπιάδα, 9 Απριλίου 2006

Κωδικός μαθητή

7 1 1 0 1 3 4

Στοιχεία μαθητή

Όνοματεπώνυμο : XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

____

Σχολείο: XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Τάξη : XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Κέντρο Εξέτασης : XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Αίθουσα Εξέτασης :XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

1.		Β	Γ	Δ	Ε	Σωστό	16.	Α	Β	Γ	Δ	Ε
2.	Α		Γ	Δ	Ε		17.	Α	Β	Γ	Δ	Ε
3.	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Λάθος	18.	Α	Β	Γ	Δ	Ε
4.	Α		Γ	Δ	Ε		19.	Α	Β	Γ	Δ	Ε
5.	Α	Β	Γ	Δ	Ε		20.	Α	Β	Γ	Δ	Ε
6.	Α	Β	Γ	Δ	Ε		21.	Α	Β	Γ	Δ	Ε
7.	Α		Γ		Ε		22.	Α	Β	Γ	Δ	Ε
8.	Α	Β	Γ	Δ	Ε		23.	Α	Β	Γ	Δ	Ε
9.	Α	Β	Γ	Δ	Ε		24.	Α	Β	Γ	Δ	Ε
10.	Α	Β	Γ	Δ	Ε		25.	Α	Β	Γ	Δ	Ε
11.	Α	Β	Γ	Δ	Ε		26.	Α	Β	Γ	Δ	Ε
12.	Α	Β	Γ	Δ	Ε		27.	Α	Β	Γ	Δ	Ε
13.	Α	Β	Γ	Δ	Ε		28.	Α	Β	Γ	Δ	Ε
14.	Α	Β	Γ	Δ	Ε		29.	Α	Β	Γ	Δ	Ε
15.	Α	Β	Γ	Δ	Ε		30.	Α	Β	Γ	Δ	Ε

Θέματα Κυπριακής Μαθηματικής Ολυμπιάδας 2000 - 2005

Α΄, Β΄, Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ISBNset 9963-9068-0-X

ISBN 9963-9068-5-0