

ΛΥΚΕΙΟ ΛΙΝΟΠΕΤΡΑΣΦΥΣΙΚΗ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΠΑΓΚΟΣΜΙΑ ΕΛΞΗ - ΔΟΥΡΥΦΟΡΟΙ4.1 ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΓΚΟΣΜΙΑΣ ΕΛΞΗΣΝόμος της παγκόσμιας έλξης του Newton.

Ο Ισαάκ Νεύτωνας (Newton) (1642-1727) διετύπωσε τον περίφημο **Νόμο της παγκόσμιας έλξης** όπου σύμφωνα με αυτόν:

- Οι ελκτικές δυνάμεις μεταξύ δύο ουρανίων σωμάτων είναι ανάλογες του γινομένου των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογες του τετραγώνου της μεταξύ των κέντρων μάζας τους απόστασης.

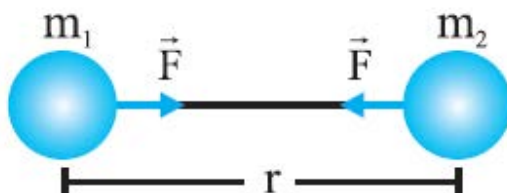
Ο παραπάνω νόμος εκφράζεται με τη μαθηματική σχέση:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Όπου F είναι η ελκτική δύναμη σε Νιούτον, G είναι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, m_1 και m_2 οι μάζες αδράνειας των δύο σωμάτων σε χιλιόγραμμα, και r είναι η μεταξύ τους απόσταση σε μέτρα.

Η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, G , έχει τιμή ίση με (σε μονάδες SI)

$$G = 6,6743 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$



Με τον πιο πάνω νόμο δόθηκε η φυσική εξήγηση των προηγηθέντων νόμων του Κέπλερ, οι οποίοι με τη σειρά τους προέκυψαν από τις παρατηρήσεις του Τύχο Μπράχε (1546-1601). Όμως προς χάριν του νόμου αυτού ο Νεύτων θεωρήθηκε "πατέρας της ουράνιας μηχανικής". Η δύναμη αυτή παίζει σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη του σύμπαντος, καθώς αυτή είναι η αιτία που:

- Η Γη περιφέρεται γύρω από τον ήλιο
- Υπάρχουν οι παλιρροϊκές δυνάμεις που προκαλούν και το φαινόμενο της παλίρροιας.
- Οι γαλαξίες συγκρούονται μεταξύ τους στο σύμπαν.

Η πιο πάνω σχέση για το νόμο της παγκόσμιας έλξης εφαρμόζεται για δύο σημειακές μάζες ή για δύο σώματα σε σχήμα σφαίρας. Οι πλανήτες, οι φυσικοί δορυφόροι και τα αστέρια είναι ουράνια σώματα όπου η πιο πάνω σχέση εφαρμόζεται, εφόσον αυτά τα σώματα είτε είναι σφαιρικά είτε μπορούν να θεωρηθούν σφαιρικά, όπως ο πλανήτης Γη που έχει σχήμα σχεδόν σφαιρικό. Ονομάζουμε τη δύναμη παγκόσμιας έλξης σε ένα σώμα από ένα πλανήτη βάρος.

Οι Νόμοι του Κέπλερ

Πολύ πριν τον Νεύτωνα, οι αστρονόμοι κατέγραφαν τις κινήσεις των πλανητών και έθεταν ερωτήματα για το ποιους νόμους υπακούουν.

Το αίνιγμα το "έλυσε" ο Κέπλερ (1571-1630), αναλύοντας τα λεπτομερή στοιχεία που είχε συγκεντρώσει ο δάσκαλός του Τύχο Μπράχε (1546-1601). Κατά τον Κέπλερ, οι κινήσεις των πλανητών περιγράφονται με τρεις Νόμους:

- **Πρώτος Νόμος:** Κάθε πλανήτης διαγράφει ελλειπτική τροχιά γύρω από τον Ήλιο, με τον Ήλιο να βρίσκεται σε μία από τις εστίες της έλλειψης.
- **Δεύτερος Νόμος:** Καθώς ο πλανήτης περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο, η νοητή ακτίνα που ενώνει τον Ήλιο με τον πλανήτη, σαρώνει σε ίσους χρόνους ίσα εμβαδά. Συνεπώς, η ταχύτητα του πλανήτη είναι μεγαλύτερη όταν αυτός βρίσκεται κοντά στον Ήλιο.
- **Τρίτος Νόμος:** Αν T είναι ο χρόνος μια πλήρους περιφοράς του πλανήτη γύρω από τον Ήλιο και R ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς του, τότε τα ποσά T^2 και R^3 είναι ανάλογα.

Το βαρυτικό πεδίο

Το βαρυτικό πεδίο είναι ένα μοντέλο που χρησιμοποιείται στη φυσική για να εξηγήσει πώς λειτουργεί η βαρύτητα στο σύμπαν. Στην αρχική της σύλληψη, η βαρύτητα ήταν μια δύναμη μεταξύ σημειακών μαζών. Μετά τον Νεύτωνα, ο Λαπλάς προσπάθησε να μοντελοποιήσει την βαρύτητα ως ένα είδος δυναμικού πεδίου ή ρευστού, και από τον 19ο αιώνα οι ερμηνείες για την βαρύτητα αντιλαμβάνονταν στο πλαίσιο πεδίων, παρά μιας σημειακής έλξης.

Στο μοντέλο πεδίου, σε αντίθεση με την αμοιβαία έλξη μεταξύ των σωματιδίων, τα σωματίδια παραμορφώνουν τον χωροχρόνο εξ αιτίας της μάζας τους, και αυτή η παραμόρφωση είναι αυτή που αντιλαμβανόμαστε εμείς ως «δύναμη». Στην πραγματικότητα η δύναμη σε αυτό το μοντέλο δεν υφίσταται, απλώς η ύλη αντιδρά στην καμπύλωση του χωροχρόνου.

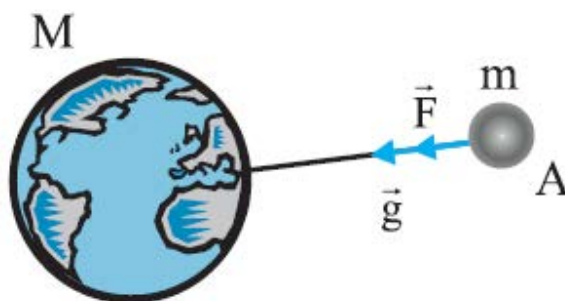
Βαρυτικά πεδία στην Κλασική Μηχανική

Στην κλασική μηχανική, το πεδίο δεν είναι μια πραγματική οντότητα, αλλά μόνο ένα επιστημονικό μοντέλο που χρησιμοποιείται για να περιγράψει τα αποτελέσματα της βαρύτητας. Το πεδίο μπορεί να καθοριστεί χρησιμοποιώντας τον νόμο της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα. Καθορίζοντάς το με αυτόν τον τρόπο, το βαρυτικό πεδίο γύρω από ένα απλό σωματίδιο είναι ένα διανυσματικό πεδίο, σε κάθε σημείο του οποίου αντιστοιχεί ένα διάνυσμα με κατεύθυνση προς το σωματίδιο. Η ένταση του πεδίου σε κάθε σημείο υπολογίζεται με τον νόμο της παγκόσμιας έλξης και εκφράζει τη δύναμη ανά μονάδα μάζας ενός οποιουδήποτε αντικείμενου σε αυτό το σημείο στον χώρο. Το πεδίο γύρω από περισσότερα του ενός σωματίδια είναι απλώς το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων κάθε σωματιδίου ξεχωριστά. Ένα σημειακό αντικείμενο σε ένα τέτοιο πεδίο δέχεται - βάσει της αρχής της επαλληλίας- μια δύναμη που είναι ίση με τη συνισταμένη όλων των δυνάμεων που δέχεται από κάθε πεδίο ξεχωριστά.

Ένταση βαρυτικού πεδίου

Η ένταση, $\vec{g}$, σε ένα σημείο βαρυτικού πεδίου, ονομάζουμε το φυσικό διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο ίσο με το πηλίκο του μέτρου της δύναμης παγκόσμιας έλξης, που ασκείται σε ένα σώμα μάζας m που βρίσκεται σε απόσταση r από το κέντρο της πηγής βαρύτητας, προς τη μάζα M του σώματος που δημιουργεί το βαρυτικό πεδίο. Η φορά της έντασης είναι η ίδια με τη φορά της δύναμης παγκόσμιας έλξης. Ο ορισμός δίνεται από τη μαθηματική σχέση:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}.$$



Βάσει του ορισμού, το μέτρο της έντασης του βαρυτικού πεδίου έχει μονάδες επιτάχυνσης (δύναμη ανά μονάδα μάζας), και εξαρτάται τόσο από τη μάζα M του σώματος που δημιουργεί το βαρυτικό πεδίο, όσο και από την απόσταση r από τη θέση αυτού, σύμφωνα με τη σχέση

$g = G \frac{M}{r^2}$. Η σχέση αυτή προκύπτει αν αντικαταστήσουμε το μέτρο της δύναμης παγκόσμιας

έλξης από το νόμο του Νεύτωνα, στη σχέση ορισμού της έντασης. Αν η πηγή της βαρύτητας είναι ένα ουράνιο σώμα σε σχήμα σφαιρικό ακτίνας R , τότε η πιο πάνω σχέση ισχύει για τιμές

$r \geq R$. Όταν $r = R$, προκύπτει η σχέση $g_0 = G \frac{M}{R^2}$, η οποία δίνει το μέτρο της έντασης στην

επιφάνεια του ουράνιου σώματος. Σε ύψος h από την επιφάνεια του ουράνιου σώματος η ένταση έχει μέτρο $g_h = G \frac{M}{(R+h)^2}$. Μπορούμε έτσι να έχουμε τη σχέση $g_h = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 g_0$.

Όταν $r < R$, το βαρυτικό πεδίο οφείλεται στη μάζα M' του ουράνιου σώματος με ακτίνα r . Αν υποθέσουμε ότι το σώμα είναι σφαιρικό και έχει σταθερή πυκνότητα, τότε έχουμε τη σχέση

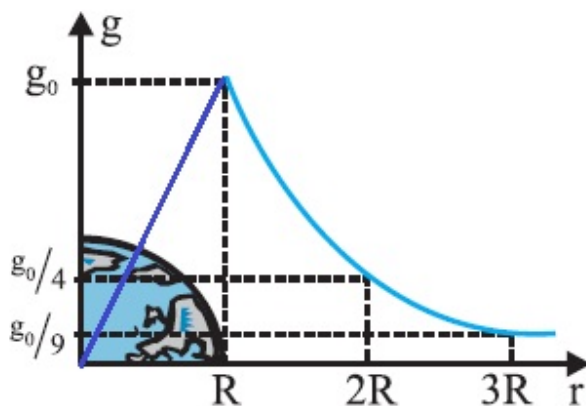
$$d = \frac{M}{V} \Rightarrow \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M'}{\frac{4}{3}\pi r^3}. \text{ Άρα, } M' = M\left(\frac{r}{R}\right)^3. \text{ Η ένταση σε απόσταση } r < R \text{ είναι}$$

$$g_{r < R} = G \frac{M'}{r^2} \Rightarrow g_{r < R} = G \frac{M}{R^3} r. \text{ Άρα, η ένταση του βαρυτικού πεδίου είναι μηδέν στο κέντρο του σώματος και αυξάνεται ανάλογα με την απόσταση από το κέντρο μέχρι την επιφάνειά του.}$$

Μεταβολή της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης.

Η ένταση g του πεδίου βαρύτητας της Γης μεταβάλλεται:

- (1) με το γεωγραφικό πλάτος (αυξάνεται από τον ισημερινό προς τους πόλους, λόγω του σχήματος της γης η οποία είναι πεπλατυσμένη στους πόλους),
- (2) ελαττώνεται με την αύξηση του ύψους πάνω από την επιφάνεια της γης και
- (3) ελαττώνεται με την αύξηση του βάθους κάτω από την επιφάνεια της γης, μέχρι να μηδενιστεί στο κέντρο της γης. Η γραφική παράσταση δίνει το μέτρο της έντασης του βαρυτικού πεδίου σε σχέση με την απόσταση από το κέντρο της Γης.



Πρόβλημα 139

Η μάζα ενός αστροναύτη στη Γη είναι 80 Kg. Αν η ένταση του βαρυτικού πεδίου στην επιφάνεια της Σελήνης είναι το $1/6$ αυτής που έχουμε στην επιφάνεια της Γης, εξηγήστε (α) πόση θα είναι η μάζα του αστροναύτη στην Σελήνη; (β) Πόσο θα είναι το βάρος του στην επιφάνεια της Σελήνης;

Πρόβλημα 140

Το βάρος ενός ανθρώπου στην επιφάνεια της Γης είναι 780 N. Να υπολογίσετε το βάρος του ανθρώπου σε ύψος $2R$ πάνω από την επιφάνεια της Γης. (Όπου R είναι η ακτίνα της Γης).

Πρόβλημα 141

Να υπολογίσετε το ύψος πάνω από την επιφάνεια της Γης στο οποίο το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης γίνεται ίσο με το $1/16$ του μέτρου της έντασης στην επιφάνεια της Γης.

Πρόβλημα 142

Θεωρήστε το σύστημα της Γης με τη σελήνη. Θεωρήστε τη μάζα της Γης να είναι 80 φορές μεγαλύτερη εκείνης της Σελήνης και την απόσταση μεταξύ Γης και Σελήνης αν είναι 60 φορές την ακτίνα της Γης.

Να υπολογίσετε την απόσταση από τη Γη του σημείο πάνω στην ευθεία που ενώνει τη Γη με τη σελήνη, όπου η ένταση του πεδίου βαρύτητας για το σύστημα Γης-Σελήνης είναι μηδέν.

**Πρόβλημα 143**

Ένας πλανήτης έχει διπλάσια μάζα από τη Γη. Η ακτίνα του πλανήτη αυτού είναι η μισή της ακτίνας της Γης. Να προσδιορίσετε το λόγο του μέτρου της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια του πλανήτη αυτού προς το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης.

Πρόβλημα 144

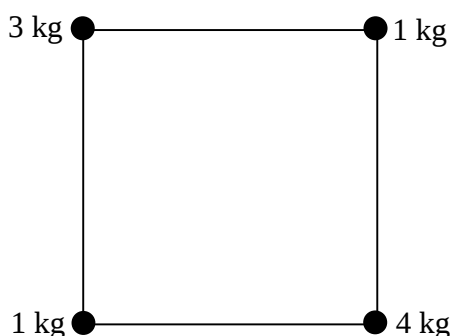
Ένας πλανήτης έχει διπλάσια πυκνότητα από την πυκνότητα της Γης. Η ακτίνα του πλανήτη αυτού είναι η μισή της ακτίνας της Γης. Να προσδιορίσετε το λόγο του μέτρου της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια του πλανήτη αυτού προς το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης.

Πρόβλημα 145

Αν η Γη, κατά την δημιουργία της, αποκτούσε τριπλάσια ακτίνα και διπλάσια μέση πυκνότητα από αυτές που έχει τώρα, πόση θα ήταν η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της; Δίνεται η τιμή του μέτρου της έντασης της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g_0 = 9,81 \text{ N/kg}$.

Πρόβλημα 146

Τέσσερα σημειακά σώματα κρατούνται ακίνητα στις τέσσερις κορυφές ενός τετραγώνου πλευράς 2 m, όπως δείχνει το σχήμα.



Να υπολογίσετε τη συνισταμένη βαρυτική δύναμη που ασκείται στο σώμα των 3 kg που οφείλεται στα άλλα τρία σώματα.

Πρόβλημα 147

Να υπολογίσετε το μέτρο της βαρυτικής δύναμης που ασκείται από τη Γη σε ένα αστροναύτη μάζας 80 kg που βρίσκεται σε ύψος ίσο με 2,5 φορές την ακτίνα της Γης. (Δίνεται $g_0 = 9,81 \text{ N/kg}$).

Πρόβλημα 148

Το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια ενός πλανήτη είναι 3,4 N/kg. Η μάζα του πλανήτη είναι $7,2 \times 10^{22} \text{ kg}$. Να υπολογίσετε την ακτίνα του πλανήτη.

Πρόβλημα 149

Η ένταση του πεδίου βαρύτητας σε ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης είναι 60% της αντίστοιχης τιμής πάνω στην επιφάνεια της Γης. Να υπολογίσετε το ύψος h . (Δίνεται η ακτίνα της Γης 6400 km).

(Απ. 1862 km)

Πρόβλημα 150

Η ελκτική βαρυτική δύναμη μεταξύ δύο σωμάτων Α και Β ίσης μάζας το καθένα, τοποθετημένα σε απόσταση d μεταξύ τους, έχει μέτρο 30 N. Αντικαθιστούμε το σώμα Α με ένα τρίτο σώμα Γ διπλάσιας μάζας από το Α και το φέρουμε σε απόσταση $d/2$ από το σώμα Β. Να υπολογίσετε το μέτρο της ελκτικής βαρυτικής δύναμης μεταξύ των σωμάτων Β και Γ.

(Απ. 240 N)

Πρόβλημα 151

Η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης έχει μέτρο 10 N/kg. Να υπολογίσετε το μέτρο της έντασης στην επιφάνεια ενός δευτέρου πλανήτη του οποίου η μάζα και η ακτίνα είναι 6 φορές των αντίστοιχων τιμών της Γης.

(Απ. 1,67 N/kg)

ΛΥΚΕΙΟ ΛΙΝΟΠΕΤΡΑΣΦΥΣΙΚΗ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΠΑΓΚΟΣΜΙΑ ΕΛΞΗ - ΔΟΡΥΦΟΡΟΙ4.2 ΔΟΡΥΦΟΡΟΙΠρόβλημα 152

Η περίοδος της περιφοράς της Σελήνης γύρω από τη Γη είναι 27,3 μέρες και η μέση ακτίνα της τροχιάς της είναι $3,8 \times 10^5$ km. Η ακτίνα της Γης είναι 6380 km. Να υπολογίσετε το ύψος της περιφοράς ενός τεχνητού δορυφόρου της Γης με περίοδο 14,0 μέρες.

Πρόβλημα 153

Ένας δορυφόρος έχει μάζα 5850 kg και εκτελεί κυκλική τροχιά σε ύψος $4,1 \times 10^5$ m πάνω από την επιφάνεια ενός πλανήτη. Η περίοδος του δορυφόρου είναι 2 ώρες. Η ακτίνα του πλανήτη είναι $4,15 \times 10^6$ m. Να υπολογίσετε το βάρος του δορυφόρου όταν βρίσκεται στην επιφάνεια του πλανήτη.

Πρόβλημα 154

Το όρος Έβερεστ είναι το ψηλότερο βουνό της οροσειράς των Ιμαλαΐων και η κορυφή του το υψηλότερο σημείο της Γης. Βρίσκεται μεταξύ Νεπάλ και Θιβέτ, σε γεωγραφικές συντεταγμένες 28° Β, 87° Α. Η κορυφή του βρίσκεται σε ύψος 8,848 μέτρα. Να υπολογίσετε το μέτρο της οριζόντιας ταχύτητας που πρέπει να έχει ένα σώμα που βάλλεται από την κορυφή του Έβερεστ, για να περιφέρεται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη.

Πρόβλημα 155

Δίνεται η περίοδος της Σελήνης γύρω από τη Γη ίση με 27,3 d και η ακτίνα της τροχιάς της Σελήνης ίση με $3,84 \times 10^8$ m. Να υπολογίσετε

(α) την ακτίνα της τροχιάς ενός γεωστατικού δορυφόρου.

(β) τη μάζα της Γης.

Πρόβλημα 156

Ένας τεχνητός δορυφόρος της Γης μάζας 300 kg περιφέρεται σε κυκλική τροχιά σε ύψος 200 km πάνω από την επιφάνεια της Γης.

Να υπολογίσετε (α) το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του δορυφόρου (β) την περίοδο περιφοράς (γ) την κινητική του ενέργεια.

(Δίνεται η μάζα της Γης 6×10^{24} kg και η ακτίνα της Γης 6400 km).

(Απ. (α) $3,04 \times 10^3$ m/s, (β) $10621,56$ s)

Πρόβλημα 157

Η απόσταση μεταξύ του Ήλιου και της Γης είναι $1,5 \times 10^{11} \text{ m}$ και η μάζα του Ήλιου είναι $2,0 \times 10^{30} \text{ Kg}$.

Να υπολογίσετε το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας με την οποία η Γη κινείται γύρω από τον Ήλιο.