

**ΠΛΗΡΗΣ ΟΔΗΓΟΣ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΣ ΓΙΑ ΤΙΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Α΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

Τάξη: Α΄ Λυκείου Προσανατολισμού

Πρόλογος

Οι ασκήσεις και τα θέματα που ακολουθούν έχουν επιλεγεί από διάφορα βιβλία, διαγωνίσματα, εξετάσεις, από έγκυρες ιστοσελίδες μαθηματικού ενδιαφέροντος και απευθύνονται κυρίως στους μαθητές που φοιτούν στην Α' Λυκείου τη σχολική χρονιά 2021-22 και οι οποίοι θα παρακαθήσουν στις εξετάσεις Α' Τετραμήνου που θα διεξαχθούν τον Ιανουάριο του 2022. Σκοπό έχουν να βοηθήσουν μαθητές καθώς και εκπαιδευτικούς ώστε να έχουν ένα πλήρη οδηγό προετοιμασίας. Όλες οι ασκήσεις έχουν επιλεγεί ώστε να εξυπηρετούν τους δείκτες του ΥΠΠΑΝ στο μάθημα των Μαθηματικών Προσανατολισμού της Α' Λυκείου.

Σε καμία περίπτωση οι ασκήσεις που ακολουθούν δεν μπορούν να υποκαταστήσουν το σχολικό βιβλίο της Α' Λυκείου το οποίο θεωρώ πως για σκοπούς μάθησης ή εξέτασης θα πρέπει να είναι το πρώτιστο καθώς εντός του σχολικού βιβλίου περιέχεται όλη η θεωρία την οποία οι μαθητές θα πρέπει να κατανοήσουν ώστε να μπορέσουν να ασχοληθούν με τη λύση ασκήσεων.

Ευχαριστώ από καρδιάς την ιστοσελίδα www.themata4all.com και τον υπεύθυνο της ιστοσελίδας κύριο Γιώργο Παπαλλά που για ακόμη μία φορά ανέλαβε την προώθηση του υλικού αυτού δωρεάν με σκοπό να φτάσει στα χέρια όσων περισσότερων μαθητών γίνεται.

Τάσος Ευαγόρου

Μαθηματικός

ΕΝΟΤΗΤΑ 1**ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ**

1. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ρίζες

α. $\sqrt{36}$ **β.** $\sqrt{16\beta^4}$ **γ.** $\sqrt{64\alpha^2}$ **δ.** $\sqrt[3]{27}$ **ε.** $\sqrt[3]{8x^3}, x \geq 0$

στ. $\sqrt{3^{202}}$ **ζ.** $\sqrt[3]{\frac{64}{125a^6}}$ **η.** $\sqrt[4]{2^7 + 2^7}$ **θ.** $\sqrt{4\alpha^2 - 4\alpha + 1}$

2. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

α. $x^3 = 8$ **β.** $x^2 = 25$ **γ.** $x^2 = \frac{25}{36}$ **δ.** $x^5 = -32$ **ε.** $3 - 2x^3 = 30$

3. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

α. $(2x + 1)^4 = 81$ **β.** $(2x + 1)^3 = -27$ **γ.** $(1 - 3x)^5 - 1 = 31$

4. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

α. $\sqrt[3]{3x - 2} = 4$ **β.** $\sqrt[5]{4x + 2} = 2$ **γ.** $1 - 3\sqrt{x} = -5$

5. Να κάνετε τις πράξεις και να γράψετε όσο πιο απλά γίνεται τις παρακάτω παραστάσεις

α. $A = \sqrt{18} - 3\sqrt{50} + 5\sqrt{72}$

β. $B = (2\sqrt{5} - 3)^2 + (2\sqrt{5} + 3)^2$

γ. $\Gamma = \sqrt{12} - 3\sqrt{18} + 5\sqrt{128}$

δ. $\Delta = (7 + 2\sqrt{3})^2 + (7 - 2\sqrt{3})^2$

6. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ρίζες:

α. $\sqrt{(3 - \sqrt{5})^2}$ **β.** $\sqrt{(\sqrt{7} - 2)^2}$ **γ.** $\sqrt{x - 6\sqrt{x} + 9}$

7. Να κάνετε τις πράξεις και να γράψετε όσο πιο απλά γίνεται:

$$\alpha. \sqrt[4]{\sqrt{5}}$$

$$\beta. \sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$$

$$\gamma. \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{8})$$

$$\delta. \sqrt[3]{(\sqrt{12} - \sqrt{3})^3}$$

8. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

$$\alpha. 8^{\frac{1}{3}}$$

$$\beta. 27^{-\frac{2}{3}}$$

$$\gamma. 32^{\frac{3}{5}}$$

$$\delta. 16^{-\frac{3}{2}}$$

$$\epsilon. \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\sigma\tau. \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}}$$

9. Να υπολογίσετε τον αριθμό $\left(\frac{25}{16}\right)^{-\frac{3}{2}}$ και ακολούθως να λύσετε την εξίσωση

$$(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{25}{16}$$

10. Να υπολογίσετε τον αριθμό $\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$ και ακολούθως να λύσετε την εξίσωση

$$(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{9}{4}$$

11. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

$$\alpha. x^{\frac{2}{3}} = 16$$

$$\beta. 3 \cdot (2x-1)^{\frac{1}{3}} = 12$$

$$\gamma. 2x^{-\frac{3}{2}} = 54$$

12. Να αποδείξετε ότι

$$\alpha. \sqrt{3} \cdot \sqrt{3-\sqrt{6}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{6}} = 3$$

$$\beta. \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2 = 16$$

13. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

$$\alpha. \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$\beta. \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\gamma. \frac{2}{\sqrt{3}-1}$$

$$\delta. -\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$\epsilon. \frac{1}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$$

$$\sigma\tau. \frac{2}{(2+\sqrt{3})^2}$$

14. Να αποδείξετε ότι:

α. $(1 - \sqrt{2})^{-1} + (\sqrt{2} + 1)^{-1} = 6$

β. $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1$

15. Αν $1 \leq x \leq 4$ να αποδείξετε ότι $-1 \leq 2x - 3 \leq 5$.

16. Αν $\alpha > 3$ και $\beta < 2$ να αποδείξετε ότι $3\alpha - 2\beta > 5$.

17. Αν $1 \leq x \leq 4$ να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{16 - 8x + x^2}$$

18. Αν $1 < x < 3$ και $-4 < y < -2$, να βρείτε το μικρότερο δυνατό διάστημα, στο οποίο ανήκουν οι πραγματικοί αριθμοί:

α. $x + y$ β. $x - 2y$ γ. $x \cdot y$ δ. $-\frac{3y}{2x}$ ε. y^2

19. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

20. Δίνεται ότι $A = 2x - 1$ και $B = 2y + 2$

α. Να λύσετε την εξίσωση $A^{\frac{3}{2}} + 3 = 30, \forall x \geq \frac{1}{2}$

β. Αν $1 < A < 13$ και $8 < B < 17$ να αποδείξετε ότι $1 < x < 7$ και $2 < y < 5$

21. Αν $2 < x < 5$ και $-3 < y < -1$ να βρείτε το μικρότερο δυνατό διάστημα, στο οποίο ανήκουν οι πραγματικοί αριθμοί:

α. x^2 β. y^2 γ. $\frac{y^2}{x^2}$ δ. $x^2 - 2x + y^2 + 4y$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2**ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ**

1. Να μετατρέψετε τις παρακάτω γωνίες σε ακτίνια

α. 30^0 β. 75^0 γ. -120^0 δ. 210^0 ε. 750^0 στ. 315^0

2. Να μετατρέψετε τις παρακάτω γωνίες σε μοίρες

α. $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$ β. $\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$ γ. $\frac{7\pi}{8} \text{ rad}$ δ. $7\pi \text{ rad}$

3. Δύο θετικές γωνίες $\alpha, \beta < 720^0$ βρίσκονται σε κανονική θέση και έχουν την ίδια τελική πλευρά. Αν το μέτρο της μίας είναι τριπλάσιο από το μέτρο της άλλης, να βρείτε τις γωνίες α και β .

4. Μία γωνία θ σε κανονική θέση έχει τελική πλευρά, η οποία περνά από το σημείο $A(-3,4)$. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ . ($\eta\mu\theta$, $\sigma\upsilon\nu\theta$, $\epsilon\varphi\theta$, $\sigma\varphi\theta$, $\tau\epsilon\mu\theta$, $\sigma\tau\epsilon\mu\theta$).

5. Να δώσετε τον ορισμό του τριγωνομετρικού κύκλου

6. Να βρείτε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών 123^0 και $\frac{15\pi}{8} \text{ rad}$.

7. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α με συντεταγμένες $(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13})$ βρίσκεται στην περιφέρεια του τριγωνομετρικού κύκλου. Αν επιπλέον η τελική πλευρά μίας γωνίας θ περνά από το σημείο Α, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ .

8. Να εξηγήσετε γιατί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{8}{7}$ είναι αδύνατη.

9. Να εξηγήσετε **γιατί δεν μπορεί** να συμβαίνει ταυτόχρονα για μία γωνία θ , $\eta\mu\theta = \frac{3}{4}$ και $\epsilon\varphi\theta = 1$.

10. Δίνεται η παράσταση $A = 1 - 4\sin x, x \in R$. Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων:

α. A

β. A^2

11. Αν $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να υπολογίσετε την παράσταση $A = \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \sigma\varphi\theta$

12. Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3}{5}$ και $270^\circ < \theta < 360^\circ$, να υπολογίσετε την παράσταση $A = \eta\mu\theta \cdot \varepsilon\varphi\theta$

13. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{\eta\mu 135^\circ \sigma\upsilon\nu 120^\circ + \sigma\upsilon\nu 135^\circ \sigma\upsilon\nu(-120^\circ)}{\varepsilon\varphi(-120^\circ) + \varepsilon\varphi 135^\circ}$$

14. Να απλοποιήσετε την παράσταση $B = \frac{\eta\mu(\pi-\omega) \cdot \varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2}-\omega)}{\varepsilon\varphi(\pi+\omega) \cdot \varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2}+\omega) \cdot \eta\mu(-\omega)}$.

15. Αν $x + y = 90^\circ$ να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \eta\mu^2 x + \eta\mu^2 y$

16. Αν $x = 1 + \eta\mu\theta, y = 1 - \sigma\upsilon\nu\theta, 0^\circ < \theta < 90^\circ$ και $x^2 + y^2 = 3$ να αποδείξετε ότι $\theta = 45^\circ$.

17. Να υπολογίσετε τη γωνία θ αν $0^\circ < \theta < 180^\circ$ και

$$\frac{\eta\mu(180^\circ-\theta)\varepsilon\varphi(90^\circ-\theta)\eta\mu(-\theta)}{\sigma\upsilon\nu(180^\circ+\theta)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

18. Να υπολογίσετε την γωνία θ , αν $0 < \theta < \pi, \theta \neq \frac{\pi}{2}$ και

$$\frac{\eta\mu(5\pi-\theta)\sigma\varphi(\frac{7\pi}{2}-\theta)\sigma\upsilon\nu(2\pi-\theta)}{\varepsilon\varphi(\pi+\theta)\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2}+\theta)\sigma\upsilon\nu(-\frac{\pi}{2}+\theta)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

19. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\alpha. \frac{(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2}{\eta\mu\theta} = \sigma\tau\epsilon\mu\theta + 2\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\beta. \frac{\sigma\varphi\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\varphi\theta - \sigma\upsilon\nu\theta} = 1 + \eta\mu\theta$$

$$\gamma. \frac{\sigma\upsilon\nu^3\omega}{\eta\mu\omega} + \frac{\varepsilon\varphi\omega}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega} = \sigma\varphi\omega$$

$$\delta. \frac{\eta\mu(\pi - \theta) + \varepsilon(-\theta) \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\tau\epsilon\mu(2\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(6\pi + \theta) \cdot \tau\epsilon\mu\left(\frac{7\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\tau\epsilon\mu\theta}{\varepsilon\varphi\theta + \sigma\varphi\theta}$$

$$\varepsilon. \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot [\sigma\varphi(-x) - \varepsilon\varphi(\pi - x)]}{2\eta\mu^2(\pi + x) - 1} = -1$$

$$\sigma\tau. \frac{(1 + \varepsilon\varphi\chi)^2}{\tau\epsilon\mu\chi} - 2\eta\mu\chi = \tau\epsilon\mu\chi$$

20. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) \eta\mu(2\pi + \theta) \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sigma\upsilon\nu(\theta - \pi)}$ και

$$B = (\eta\mu^2\theta - \sigma\upsilon\nu^2\theta)^2 + 4\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \sigma\upsilon\nu(\pi + \theta).$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. A=1 \text{ και } B = \eta\mu^2\theta$$

$$\beta. \text{ Αν } \frac{A}{B} \eta\mu\theta = -2, \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi, \text{ να βρείτε την τιμή της γωνίας } \theta.$$

21. Αν $\Gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu(270^\circ - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \alpha) \cdot \sigma\varphi(180^\circ - \alpha) \cdot \eta\mu(-\alpha)}{\tau\epsilon\mu(360^\circ - \alpha) \cdot \eta\mu(360^\circ + \alpha) \cdot \eta\mu(270^\circ - \alpha)}$ και

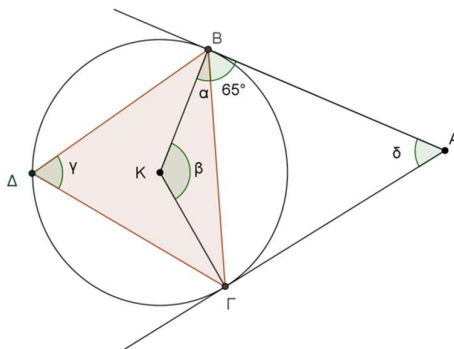
$$\Delta = \sigma\tau\epsilon\mu\alpha - \frac{\eta\mu\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}, \text{ να δείξετε ότι: } \frac{\Gamma}{\Delta} = -\eta\mu^2\alpha.$$

22. Αν $5\sigma\upsilon\nu^2x + 3\eta\mu^2x = 4$ και $90^\circ < x < 180^\circ$ να δείξετε ότι $\varepsilon\varphi^2x = 1$ και ακολούθως να βρείτε την γωνία x .

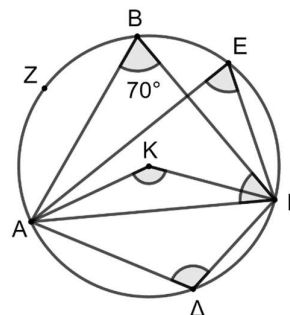
ΕΝΟΤΗΤΑ 3

ΚΥΚΛΟΣ

1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται κύκλος με κέντρο Κ και οι εφαπτομένες του από το σημείο Α. Αν η γωνία $\widehat{AB\Gamma} = 65^\circ$, να βρείτε τις γωνίες α , β , γ , δ και το μέτρο του τόξου $\widehat{B\Delta\Gamma}$.



2. Ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = B\Gamma$), είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, ρ) . Αν $\widehat{AB\Gamma} = 70^\circ$, να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών $\widehat{A\hat{E}\Gamma}$, $\widehat{A\hat{K}\Gamma}$, $\widehat{A\hat{\Delta}\Gamma}$, $\widehat{B\hat{\Gamma}A}$ και του τόξου AZB .
Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) .

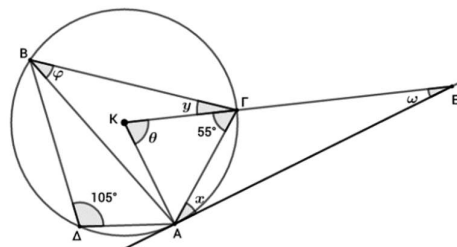
Αν ΑΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο

σημείο Α, τα σημεία Κ, Γ, Ε είναι

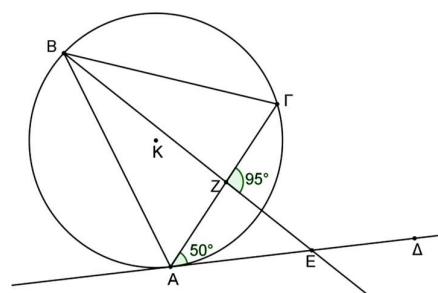
συνευθειακά, $\widehat{B\hat{\Delta}A} = 105^\circ$ και $\widehat{K\hat{\Gamma}A} = 55^\circ$,

να υπολογίσετε τις γωνίες:

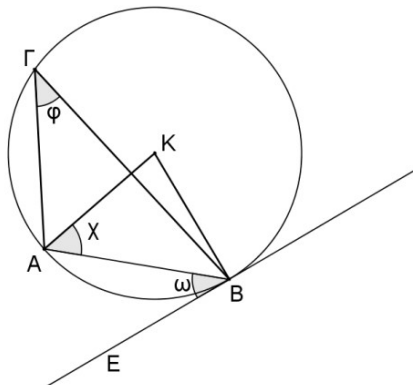
$$\widehat{A\hat{K}\Gamma} = \theta, \widehat{A\hat{B}\Gamma} = \varphi, \widehat{\Gamma\hat{A}E} = x, \widehat{B\hat{\Gamma}K} = y \text{ και } \widehat{\Gamma\hat{E}A} = \omega$$



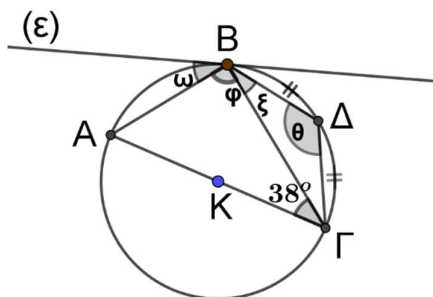
4. Δίνονται οι κύκλοι $(K, 6cm)$ και (Λ, x) . Αν $(KL) = 10cm$ να βρείτε την τιμή ή τις τιμές του x ώστε οι 2 κύκλοι:
- Να εφάπτονται εξωτερικά
 - Να εφάπτονται εσωτερικά
 - Να τέμνονται σε 2 σημεία
 - Να είναι ξένοι εσωτερικά
 - Να είναι ξένοι εξωτερικά
5. Να διατυπώσετε το θεώρημα χορδής εφαπτομένης.
6. Να αποδείξετε πως κάθε τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις απέναντι του γωνίες παραπληρωματικές.
7. Να αποδείξετε πως τα εφαπτόμενα ευθύγραμμα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου είναι ίσα.
8. Να βρείτε την τιμή του x έτσι ώστε οι κύκλοι $(K, 4cm)$ και $(\Lambda, 3x-3)$ με διάκεντρο $(KL) = 10cm$, να εφάπτονται εξωτερικά.
9. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (K, R) . Η AD είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A και η διχοτόμος της $\hat{A}B\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z .
 Αν $\hat{GAE} = 50^\circ$ και $\hat{GZE} = 95^\circ$ να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{GBZ}$ και $\hat{ZED}$ δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



10. Δίνεται κύκλος με κέντρο K και ακτίνα KB . Το μέτρο της γωνίας $K\hat{A}B = 70^\circ$ και η ευθεία BE είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B . Να υπολογίσετε τις γωνίες ϕ, χ, ω και το μέτρο του μικρού τόξου AB . (Αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας)



11. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) με διάμετρο AG και τα σημεία του B και Δ έτσι ώστε τα τόξα $\widehat{BA}, \widehat{\Delta\Gamma}$ να είναι ίσα και η γωνία $A\hat{\Gamma}B = 38^\circ$. Η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B . Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\omega}, \hat{\phi}, \hat{\theta}$ και $\hat{\xi}$



12. Δύο ίσοι κύκλοι τέμνονται στα σημεία A και B . Από το A φέρνουμε ευθεία που τέμνει τους δύο κύκλους στα σημεία Γ και Δ . Να δείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.
13. Δίνεται κύκλος (O, R) . Φέρουμε τη διάμετρο $B\Gamma$ και από το Γ την χορδή $\Gamma\Delta$ ώστε το τόξο $B\Delta = 60^\circ$. Στο σημείο Δ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου που τέμνει την προέκταση της διαμέτρου ΓB στο σημείο A . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

14. Δίνεται κύκλος (Κ), η εφαπτομένη (ε) σε ένα σημείο του Α και ένα σημείο Ρ της ε. Από το Ρ φέρουμε μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα Β και Γ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$ τέμνει τη χορδή ΒΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι $PD = PA$.
15. Δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο Α. Μία χορδή ΒΓ του μεγαλύτερου κύκλου εφάπτεται στο μικρότερο στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι η ΑΔ διχοτομεί τη γωνία ΒΑΓ.
16. Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά (ή εσωτερικά) στο σημείο Α και δύο ευθείες ε, ε' που διέρχονται από το Α τέμνουν τον ένα κύκλο στα σημεία Β, Β' και τον άλλο στα Γ και Γ' αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $BB' // \Gamma\Gamma'$.
17. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στο μέσο ενός από τα τόξα με χορδή ΑΒ κύκλου (Κ) είναι παράλληλη στη χορδή ΑΒ και αντίστροφα.
18. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α στους δύο κύκλους, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΔ διέρχεται από το Β.
19. Δύο κάθετες χορδές ΑΒ, ΓΔ κύκλου (Κ) τέμνονται στο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΡΜ του τριγώνου ΡΒΓ είναι κάθετη στην ΑΔ.

ΕΝΟΤΗΤΑ 4**ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ**

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε :

α. το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$ και

β. τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

β. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$

3. Δίνονται τα σημεία $A(-1,4)$ και $B(3,-6)$

α. Να βρείτε τη διανυσματική ακτίνα του σημείου A

β. Να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$

γ. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου του AB

δ. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$

ε. Να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι ομόρροπο του $\overrightarrow{AB}$

4. Πότε δύο διανύσματα θα λέγονται αντίθετα.

5. Πότε δύο διανύσματα θα λέγονται αντίρροπα.

6. Να αποδείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB δίνεται από τη σχέση $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$. Να υπολογίσετε:
- α. το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$
 - β. τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
 - γ. ένα μοναδιαίο διάνυσμα αντίρροπο του $\vec{\alpha}$
 - δ. την τιμή της παραμέτρου $k \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ να είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4-k \\ 5k \end{pmatrix}$
8. Δίνονται τα σημεία $A(3, -2)$, $B(-4, 5)$ και $\Gamma(-2, -3)$. Να βρείτε:
- α. Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG}$ και $\overrightarrow{BG}$
 - β. Την κλίση του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$
 - γ. Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{BG}$
 - δ. Ένα παράλληλο διάνυσμα με το $\overrightarrow{AG}$
 - ε. Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι αντίρροπο του $\overrightarrow{BG}$
 - στ. Τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{BM}$, όπου M το μέσον του AG
9. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$.
- α. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$.
 - β. Να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι αντίρροπο με το $\vec{u}$.
 - γ. Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u}$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\vec{\gamma}$.
10. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda - 2, \lambda)$ και $B(\lambda + 3, 2\lambda + 1)$. Αν το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχει συντελεστή διεύθυνση ίσο 1 να βρείτε τον αριθμό λ .
11. Να εξετάσετε κατά πόσο τα σημεία $A(2, 5)$, $B(-1, 2)$ και $\Gamma(3, 1)$ είναι συνευθειακά.
12. Να βρείτε το διάνυσμα που είναι αντίρροπο του $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ και έχει μήκος 4-πλάσιο του $\vec{\alpha}$.