

Προτεινόμενες Λύσεις Β' Τεύχους
Γ Λυκείου Κατεύθυνσης

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Οι ακόλουθες προτάσεις λύσεων αφορούν το 'Τεύχος Β' του νέου βιβλίου της Γ' Λυκείου κατεύθυνσης (έκδοση 2018-αναθεώρηση 2019)' όπως αυτό έχει αναρτηθεί στην ιστοσελίδα του Υπουργείου Παιδείας, Πολιτισμού, Αθλητισμού και Νεολαίας της Κύπρου

<http://mathm.schools.ac.cy/index.php/el/yliko/didaktiko-yliko>

Στην ίδια ιστοσελίδα, υπάρχουν απαντήσεις των ασκήσεων αυτών, από τις οποίες όμως απουσιάζουν υποδείξεις για τις Θεωρητικές (αποδεικτικές) ασκήσεις (οι χωρίς αναζήτηση αριθμητικού αποτελέσματος) και κατεπέκτασιν, υποδείξεις για τις ασκήσεις 'Εμπλουτισμού', αφού οι πλείστες από αυτές είναι αποδεικτικές.

Οι λύσεις αυτές αντανakλούν την προσωπική ενασχόληση του συγγραφέα με το αντικείμενο και δίνονται για χάρην πληρότητας **και μόνο** (για την αντιπαραβολή λύσεων, άντληση ιδεών).

Η επικοινωνία με διάφορους ιστότοπους για ανάρτηση των λύσεων απέβη άκαρπη, καθόσον είτε αυτές (θα) έπρεπε να εξυπηρετούν ορισμένους διαφημιστικούς σκοπούς είτε να προέρχονται από επίσημους φορείς.

Αυτό όμως δεν έχει νόημα γιατί αφενός μεν οι λύσεις αυτές είναι 'open-access' και αφετέρου, όπως είθισται να γίνεται στο εξωτερικό, λύσεις και παιδαγωγικές προσεγγίσεις προτείνονται από πολλούς μη-κρατικούς φορείς. Δυστυχώς όμως, δε μου δόθηκε η ευκαιρία για περαιτέρω εξηγήσεις και αποσαφηνίσεις και ως εκ τούτου:

Λύσεις, αναθεωρήσεις και εναλλακτικές λύσεις θα αναρτώνται (για ελεύθερη χρήση) στον ακόλουθο σύνδεσμο:

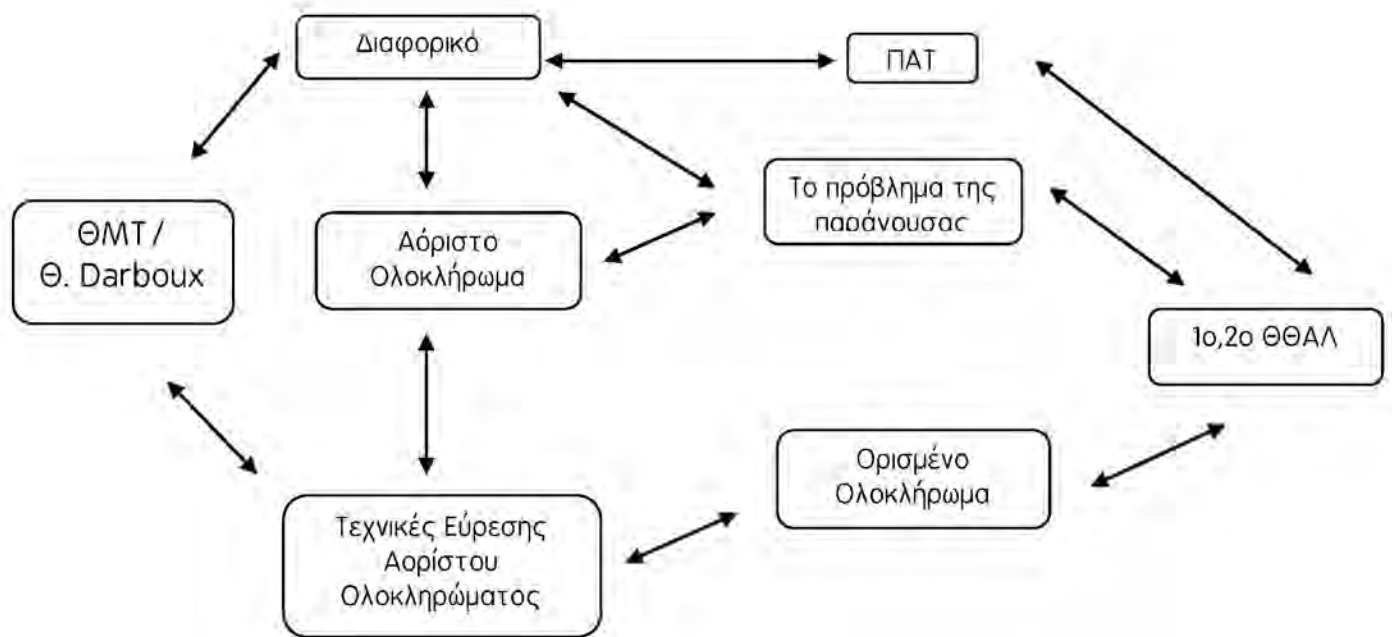
<https://sites.google.com/view/ioakim-ioannis/home>

Σχόλια και παρατηρήσεις με σκοπό τη βελτίωσή τους μπορούν να σταλούν στην ηλεκτρονική διεύθυνση

yiannisioa@hotmail.com

- ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ -

Μέρος Ι - Αόριστο Ολοκλήρωμα	6
Δραστηριότητες σελ. 12 (Ενότητα 4: Ανάλυση κλάσματος σε άθροισμα απλών κλασμάτων).....	7
Δραστηριότητες σελ. 14 (Ενότητα 3: Διαφορικό συνάρτησης)	7
Δραστηριότητες σελ. 20 (Ενότητα 4: Ορισμός αόριστου ολοκληρώματος)	7
Δραστηριότητες σελ. 25 (Ενότητα 5: Κανόνες ολοκλήρωσης)	8
Δραστηριότητες σελ. 30 (Ενότητα 6: Μέθοδοι ολοκλήρωσης)	9
Δραστηριότητες σελ. 34 (Ενότητα 6.2: Τυποποίηση βασικών μορφών ολοκληρωμάτων).....	11
Δραστηριότητες σελ. 38 (Ενότητα 6.3: Ολοκλήρωση κατά παράγοντες)	13
Δραστηριότητες σελ. 41 (Ενότητα 6.4: Ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων)	15
Δραστηριότητες σελ. 45 (Ενότητα 6.5: Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις)	17
Δραστηριότητες σελ. 51 (Ενότητα 6.6: Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων).....	19
Δραστηριότητες σελ. 54 (Ενότητα 6.7: Ολοκληρώματα αναγωγικού τύπου)	22
Δραστηριότητες σελ. 56 (Ενότητα 6.8: Προβλήματα Αρχικών Τιμών	23
Δραστηριότητες σελ. 57-59 (Ενότητας)	25
Δραστηριότητες σελ. 60 (Εμπλουτισμού)	35
 Μέρος ΙΙ - Αθροίσματα & Σειρές Πραγματικών Αριθμών	 37
Δραστηριότητες σελ. 67 (Ενότητα 4.1: Ιδιότητες του Σ-συμβολισμού).....	38
Δραστηριότητες σελ. 75 (Ενότητα 4.4: Ειδικά Αθροίσματα)	40
Δραστηριότητες σελ. 80 (Ενότητα 4.5: Μέθοδοι υπολογισμού του Αθροίσματος μιας Σειράς).....	42
Δραστηριότητες σελ. 81 (Ενότητας)	45
Δραστηριότητες σελ. 82 (Εμπλουτισμού)	47
 Μέρος ΙΙΙ - Ορισμένο Ολοκλήρωμα και Εφαρμογές	 49
Δραστηριότητες σελ. 92 (Ορισμός Ορισμένου Ολοκληρώματος)	50
Δραστηριότητες σελ. 96 (Ιδιότητες Ορισμένου Ολοκληρώματος)	51
Δραστηριότητες σελ. 107-110 (1ο Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού)	52
Δραστηριότητες σελ. 121-123 (Εφαρμογές Ορισμένου Ολοκληρώματος)	59
Δραστηριότητες σελ. 135-136 (Υπολογισμός όγκου στερεού εκ περιστροφής).....	65
Δραστηριότητες σελ. 137-140 (Ενότητας)	69
Δραστηριότητες σελ. 141 (Εμπλουτισμού)	81



Μέρος Ι - Αόριστο Ολοκλήρωμα

Δραστηριότητες σελ. 12 (Ενότητα 4: Ανάλυση κλάσματος σε άθροισμα απλών κλασμάτων)

1. (α) $\frac{x+1}{(x-2)(x-1)} = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}$
- (β) $\frac{8x^2 - 19x + 2}{(x+2)(x-1)(x-4)} = \frac{3}{x-4} + \frac{4}{x+2} + \frac{1}{x-1}$
- (γ) $\frac{x+4}{x^2-3x+2} = \frac{x+4}{(x-2)(x-1)} = \frac{6}{x-2} - \frac{5}{x-1}$
- (δ) $\frac{5x+7}{2x^2+5x+2} = \frac{5x+7}{(2x+1)(x+2)} = \frac{3}{2x+1} + \frac{1}{x+2}$
- (ε) $\frac{3x+2}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$
- (στ) $\frac{3x-1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x}$
- (ζ) $\frac{5x^2+4x-7}{(x-3)(x+2)^2} = \frac{3}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{2}{x-3}$
- (η) $\frac{5x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{3}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2+1}$
- (θ) $\frac{3x^2+7x+2}{(x+1)(x^2+2x+5)} = \frac{1}{2} \left(\frac{7x+9}{x^2+2x+5} - \frac{1}{x+1} \right)$
- (ι) $\frac{3x^2+x+2}{x^3-1} = \frac{3x^2+x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x}{x^2+x+1} + \frac{2}{x-1}$
- (ια) $\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right)$
- (ιβ) $\frac{x^2+5}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{x^2+5}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{x^2+5}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{6}{(x-1)^2} \right)$
- (ιγ) $\frac{x^3-7x^2-13x-15}{x^2-2x-3} = x-5-10 \frac{2x+3}{x^2-2x-3} = x-5-10 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{9}{x-3} + \frac{1}{x+1} \right) = x-5-\frac{5}{2} \left(\frac{9}{x-3} + \frac{1}{x+1} \right)$
- (ιδ) $\frac{2x^3-9x^2+7x+7}{x^2-5x+6} = 2x-1 + \frac{1}{x^2-5x+6} = 2x-1 + \frac{1}{(x-3)(x-2)} = 2x-1 + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$

Δραστηριότητες σελ. 14 (Ενότητα 3: Διαφορικό συνάρτησης)

1. (α) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1 \Rightarrow df(x) = (3x^2 - 5x + 1)' dx = (6x - 5)dx$
- (β) $g(x) = \ln(x+2) \Rightarrow dg(x) = (\ln(x+2))' dx = \left(\frac{1}{x+2} \right) dx$
- (γ) $h(x) = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow dh(x) = \left(\sqrt{x^2+1} \right)' dx = \left(\frac{x}{x^2+1} \right) dx$
- (δ) $k(x) = (7-2x^3)^4 \Rightarrow dk(x) = ((7-2x^3)^4)' dx = [-24x^2(7-2x^3)^3]dx$

Δραστηριότητες σελ. 20 (Ενότητα 4: Ορισμός αόριστου ολοκληρώματος)

1. Η υπόθεση $\int f(x) dx = F(x) + c$ μας λέει ότι η F είναι μια αντιπαράγωγος της f , δηλ. $F' \equiv f$. Από το σχήμα βλέπουμε ότι $f(-3) = f(1) = f(2) = 0$ και αρα τα κρίσιμα σημεία της F' είναι τα $x = -3, 1, 2$. Για $x = -3, 2$ έχει ελάχιστο και για $x = 1$ μέγιστο.

2. (α) Είναι $\int 6(2x+1)^2 dx = (2x+1)^3 + c$ αφού $[(2x+1)^3 + c]' = 3(2x+1)'(2x+1)^2 = 6(2x+1)^2$

(β) Είναι

$$\int x \eta \mu x dx = \eta \mu x - x \sigma \upsilon \nu x + c \text{ αφού}$$

$$[\eta \mu x - x \sigma \upsilon \nu x + c]' = \sigma \upsilon \nu x = x \eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x + x \eta \mu x = \eta \mu x - x \sigma \upsilon \nu x$$

3. Είναι

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad & \int 2x dx = x^2 + c \\
 & \text{αφού } \left(\frac{x^2}{2} + c\right)' = 2x \\
 (\beta) \quad & \int 4x^4 dx = 4\frac{x^5}{5} + c \\
 & \text{αφού } \left(4\frac{x^5}{5} + c\right)' = 4x^4 \\
 (\gamma) \quad & \int e^x dx = e^x + c \\
 & \text{αφού } (e^x + c)' = e^x \\
 (\delta) \quad & \int \sin x dx = -\cos x + c \\
 & \text{αφού } (-\cos x + c)' = \sin x \\
 (\epsilon) \quad & \int (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 dx = \int (\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x) dx = \int (1 + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x) dx = \int (1 + \eta\mu(2x)) dx \\
 & = x - \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu(2x) + c = x - \sigma\upsilon\nu^2 x + c, \text{ αφού } \left(x - \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu(2x) + c\right)' = 1 + \eta\mu(2x)
 \end{aligned}$$

Δραστηριότητες σελ. 25 (Ενότητα 5: Κανόνες ολοκλήρωσης)

1.

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad & \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c & (\beta) \quad & \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} + c & (\gamma) \quad & \int x^{\frac{3}{4}} dx = \frac{4x^{\frac{7}{4}}}{7} + c \\
 (\delta) \quad & \int \frac{1}{u^4} du = -\frac{1}{3u^3} + c & (\epsilon) \quad & \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c & (\sigma\tau) \quad & \int \frac{2}{\sqrt[3]{u}} du = 3 \cdot u^{\frac{2}{3}} + c \\
 (\zeta) \quad & \int (u^2 - 3u + 1) du = \int u^2 du - 3 \int u du + \int du = \frac{u^3}{3} - 3 \cdot \frac{u^2}{2} + u + c \\
 & \int (x + 2\sqrt{x} - \pi) dx = \int x dx + 2 \int \sqrt{x} dx - \pi \int dx = \frac{x^2}{2} + 2 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \pi x + c \\
 (\eta) \quad & = \frac{x^2}{2} + 4 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - \pi x + c \\
 (\theta) \quad & \int \left(e^x + ex + \frac{e}{x}\right) dx = \int e^x dx + e \int x dx + e \int \frac{1}{x} dx = e^x + e \frac{x^2}{2} + \ln|x| + c \\
 (\iota) \quad & \int (u - 5)^2 du = \int (u^2 - 10u + 25) du = \int u^2 du - 10 \int u du + 25 \int du = \frac{u^3}{3} - 10 \frac{u^2}{2} + 25u + c \\
 & = \frac{u^3}{3} - 5u^2 + 25u + c \\
 (\iota\alpha) \quad & \int 2u(u^2 - 3) du = 2 \int (u^3 - 3u) du = 2 \left(\int u^3 du - 3 \int u du \right) = 2 \frac{u^4}{4} - 3u^2 + c = \frac{u^4}{2} - 3u^2 + c \\
 (\iota\beta) \quad & \int \sqrt{x}(x - 2) dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x}\right) dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx - 2 \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - 2 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + c \\
 (\iota\gamma) \quad & \int \left(\frac{u^4 - 5u^3 + 3u}{u^2}\right) du = \int \left(\frac{u^4}{u^2} - 5\frac{u^3}{u^2} + \frac{3}{u}\right) du = \int \left(u^2 - 5u + \frac{3}{u}\right) du = \int u^2 du - 5 \int u du + 3 \int \frac{du}{u} \\
 & = \frac{u^3}{3} + 5 \frac{u^2}{2} + 3 \ln|u| + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (ιδ) \quad & \int \left(\frac{3x - x^2 + 2x^3}{x^3} \right) dx = \int \left(\frac{3x}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} + 2 \frac{x^3}{x^3} \right) dx = \int \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} + 2 \right) dx = 3 \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x} dx + 2 \int dx \\
 & = -\frac{3}{x} - \ln|x| + 2x + c \\
 (ιε) \quad & \int (\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta) d\theta = \int \eta\mu\theta d\theta - \int \sigma\upsilon\nu\theta d\theta = -\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta + c \\
 (ιοστ) \quad & \int (3\theta - \tau\epsilon\mu\theta^2\theta) d\theta = 3 \int \theta d\theta - \int \tau\epsilon\mu\theta^2\theta d\theta = 3 \frac{\theta^2}{2} - \epsilon\varphi\theta + c \\
 (ιζ) \quad & \int \left(\frac{1}{1+x^2} - 2x \right) dx = \int \frac{dx}{1+x^2} dx - \int (2x) dx = \tau\omicron\xi\epsilon\varphi x - x^2 + c \\
 (ιη) \quad & \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\tau\omicron\xi\eta\mu x + c
 \end{aligned}$$

2. (Αφού για κάθε τιμή των παραμέτρων κ και λ οι συναρτήσεις $x \mapsto \kappa x^{\kappa-2}$ και $x \mapsto 3x^5 + c$ είναι συνεχείς) έχουμε ($\kappa \neq 1$):

$$\int \lambda x^{\kappa-2} dx = 3x^5 + c \Leftrightarrow \lambda x^{\kappa-2} = (3x^5 + c)' \Leftrightarrow \lambda x^{\kappa-2} = 15x^4 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 15 \\ \kappa - 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 15, \quad \kappa = 6$$

Δραστηριότητες σελ. 30 (Ενότητα 6: Μέθοδοι ολοκλήρωσης)

$$\begin{aligned}
 1. (α) \quad & \int \sqrt{6+x} dx = \int \sqrt{6+x} d(6+x) = \frac{2}{3} (6+x)^{\frac{3}{2}} + c \\
 (β) \quad & \int \sigma\upsilon\nu(3x) dx = \frac{1}{3} \int \sigma\upsilon\nu(3x) d(3x) = \frac{1}{3} \eta\mu(3x) + c \\
 (γ) \quad & \int (2x-7)^{80} dx = \frac{1}{2} \int (2x-7)^{80} d(2x-7) = \frac{1}{2 \times 81} (2x-7)^{81} + c = \frac{1}{162} (2x-7)^{81} + c \\
 (δ) \quad & \int x \sigma\upsilon\nu(x^2+1) dx = \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu(x^2+1) d(x^2+1) = \frac{1}{2} \eta\mu(x^2+1) + c \\
 (ε) \quad & \int \eta\mu\theta (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)^3 d\theta = - \int (-\eta\mu\theta) (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)^3 d\theta = - \int (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)^3 d(1 + \sigma\upsilon\nu\theta) \\
 & = -\frac{1}{4} (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)^4 + c \\
 (στ) \quad & \int x e^{1-3x^2} dx = -\frac{1}{6} \int (1-3x^2)' e^{1-3x^2} dx = -\frac{1}{6} e^{1-3x^2} + c \\
 (ζ) \quad & \int x^2 \sqrt{x-1} dx = \int ((x-1)^2 + 2x-1) \sqrt{x-1} dx = \int (x-1)^2 \sqrt{x-1} dx + 2 \int x \sqrt{x-1} dx - \int \sqrt{x-1} dx \\
 & = \int (x-1)^{\frac{5}{2}} dx + 2 \int (x-1+1) \sqrt{x-1} dx - \int \sqrt{x-1} dx \\
 & = \int (x-1)^{\frac{7}{2}} dx + 2 \int (x-1) \sqrt{x-1} dx + \int \sqrt{x-1} dx \\
 & = \frac{2}{7} (x-1)^{\frac{7}{2}} + 2 \int (x-1)^{\frac{3}{2}} dx + \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{7} (x-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5} (x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} + c
 \end{aligned}$$

Διαφορετικά, θέτοντας $u = x-1 \Rightarrow u+1 = x$ και $dx = du$.

$$\begin{aligned} \text{(η)} \quad \int \frac{x}{\sqrt{x-2}} dx &= \int \frac{x-2+2}{\sqrt{x-2}} dx = \int \frac{x-2}{\sqrt{x-2}} dx + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \int \sqrt{x-2} d(x-2) + 2 \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{2}{3} (x-2)^{\frac{3}{2}} + 4\sqrt{x-2} + c \end{aligned}$$

Διαφορετικά, θέτοντας $u = x - 2 \Rightarrow u + 2 = x$ και $dx = du$.

$$\begin{aligned} \text{(θ)} \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx &= 2 \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} d\sqrt{x} = 2 \int \frac{1+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} d\sqrt{x} = 2 \int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} d\sqrt{x} - 2 \int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \\ &= 2 \int d\sqrt{x} - 2 \ln(\sqrt{x}+1) = 2\sqrt{x} - 2 \ln(\sqrt{x}+1) + c \end{aligned}$$

Διαφορετικά, θέτοντας $u = \sqrt{x} + 1$ ή $u = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} \text{(ι)} \quad \int \frac{x^3}{(x^2+2)^3} dx &= \int \frac{x^2}{(x^2+2)^3} d(x^2+2) = \int \frac{x^2+2-2}{(x^2+2)^3} d(x^2+2) = \int \frac{x^2+2}{(x^2+2)^3} d(x^2+2) - 2 \int \frac{d(x^2+2)}{(x^2+2)^3} \\ &= \int \frac{d(x^2+2)}{(x^2+2)^2} + \frac{1}{2(x^2+2)} = -\frac{1}{2(x^2+2)} + \frac{1}{2(x^2+2)^2} + c \end{aligned}$$

Διαφορετικά, θέτουμε $u = x^2 + 2$

$$\text{(ια)} \quad \int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{(1+x^2)'}{\sqrt{1+x^2}} dx = 2\sqrt{1+x^2} + c$$

Διαφορετικά, θέτοντας $u = x^2 + 1$

$$\text{(ιβ)} \quad \int \frac{\eta\mu(\ln x)}{x} dx = \int \eta\mu(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = \int \eta\mu(\ln x) d(\ln x) = -\sigma\upsilon\nu(\ln x) + c$$

Διαφορετικά, θέτοντας $u = \ln x$

$$\text{(ιγ)} \quad \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^x(e^x + e^{-x})} = \int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \int \frac{d(e^x)}{1 + e^x} = \tau\omicron\xi\epsilon\varphi(e^x) + c$$

$$\text{(ιδ)} \quad \int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}} dx. \text{ Θεωρούμε την αντικατάσταση } e^x = u \Rightarrow dx = u du \text{ και αρα}$$

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}} dx = \int \frac{u^2}{\sqrt{1-u}} du$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα, θεωρούμε την αντικατάσταση $1-u=w \Rightarrow dw = -du$ και αρα

$$\begin{aligned} \int \frac{u^2}{\sqrt{1-u}} du &= \int \frac{(w-1)^2}{\sqrt{w}} dw = \int \left(w^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{w} + \frac{1}{\sqrt{w}} \right) dw = -\frac{2}{5} w^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3} w^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{w} \\ &= -\frac{2}{5} (1-u)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3} (1-u)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1-u} = -\frac{2}{5} e^{\frac{5}{2}x} + \frac{4}{3} e^{\frac{3}{2}x} - 2\sqrt{1-e^x} + c \end{aligned}$$

$$\text{(ιε)} \quad \int \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}} dx = \int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} dx$$

Θεωρούμε την αντικατάσταση $\sqrt[4]{x} = u \Rightarrow dx = 4u^{\frac{3}{4}} du$ και αφού $\sqrt{x} = u^2$ έχουμε ότι $x^{\frac{3}{4}} = u^3$, δηλ. $dx = 4u^3 du$. Συνεπώς,

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} dx = \int \frac{u^2-1}{u-1} 4u^3 du = 4 \int \frac{(u-1)(u+1)}{u-1} u^3 du = 4 \int (u+1) u^3 du = 4 \int (u^4 + u^3) du$$

$$= 4 \frac{u^5}{5} + 4 \frac{u^4}{4} + c = 4 \frac{x^{\frac{5}{4}}}{5} + x + c$$

2. (α) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. Θεωρούμε την αντικατάσταση $x = 3\eta\mu\theta, \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow dx = 3\sigma\upsilon\nu\theta d\theta$. Τότε,

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \eta\mu^2\theta \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{1 - \eta\mu^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{9}\right)^2} = \frac{1}{9}\sqrt{9-x^2},$$

Έτσι, $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{3\sigma\upsilon\nu\theta d\theta}{9\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{1}{3} \int d\theta = \frac{1}{3}\theta + c = \frac{1}{3}\tau\omicron\xi\eta\mu\left(\frac{x}{3}\right) + c$

(β) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}} dx$. Θεωρούμε την αντικατάσταση $x = 3\eta\mu\theta, \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Leftrightarrow dx = 3\sigma\upsilon\nu\theta d\theta$. Τότε,

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \eta\mu^2\theta \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{1 - \eta\mu^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{9-x^2},$$

Συνεπώς, $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{3\sigma\upsilon\nu\theta d\theta}{9\eta\mu^2\theta 3\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{1}{9} \int \frac{d\theta}{\eta\mu^2\theta} = \frac{1}{9} \int \sigma\tau\epsilon\mu^2\theta d\theta = \frac{1}{9}\sigma\varphi\theta + c$

και για να επιστρέψουμε στην αρχική μας μεταβλητή x , είτε χρησιμοποιούμε τριγωνάκι είτε με τη χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων:

$$\sigma\varphi\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{9-x^2}}{\frac{x}{3}} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}.$$

και αρα $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}} dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + c$

Δραστηριότητες σελ. 34 (Ενότητα 6.2: Τυποποίηση βασικών μορφών ολοκληρωμάτων)

1. (α) $\int \sigma\upsilon\nu(7x) dx = \frac{1}{7} \int \sigma\upsilon\nu(7x) d(7x) = \frac{1}{7} \int (\eta\mu(7x))' d(7x) = \frac{1}{7} \eta\mu(7x) + c$

(β) $\int \sigma\tau\epsilon\mu^2(5x-3) dx = \frac{1}{5} \int \sigma\tau\epsilon\mu^2(5x-3) d(5x-3) = -\frac{1}{5} \sigma\varphi(5x-3) + c$

(γ) $\int (6x-1)^{21} dx = \frac{1}{6} \int (6x-1)^{21} d(6x-1) = \frac{1}{6 \times 22} (6x-1)^{22} + c = \frac{1}{132} (6x-1)^{22} + c$

(δ) $\int e^{4-9x} dx = -\frac{1}{9} \int e^{4-9x} d(4-9x) = -\frac{1}{9} e^{4-9x} + c$

(ε) $\int (e^{4x} - 2 \cdot 4^{-3x}) dx = \int e^{4x} dx - 2 \cdot \int 4^{-3x} dx = \frac{1}{4} \int e^{4x} d(4x) + 2 \cdot \int 4^{-3x} d(-3x)$
 $= \frac{1}{4} e^{4x} + \frac{2 \cdot 4^{-3x}}{3 \cdot \ln 4} + c = \frac{1}{4} e^{4x} + \frac{2 \cdot 4^{-3x}}{3 \cdot \ln 2^2} + c = \frac{1}{4} e^{4x} + \frac{4^{-3x}}{3 \cdot \ln 2} + c$

(στ) $\int (\eta\mu(4x) - \eta\mu(5x)) dx = \int \eta\mu(4x) dx - \int \eta\mu(5x) dx = -\frac{1}{4} \sigma\upsilon\nu(4x) + \frac{1}{5} \sigma\upsilon\nu(5x) + c$

(ζ) $\int \frac{1}{25x^2+1} dx = \int \frac{1}{(5x)^2+1} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{(5x)^2+1} d(5x) = \frac{1}{5} \tau\omicron\xi\epsilon\varphi(5x) + c$

$$(η) \quad \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}} dx = \int \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} d\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{τοξημ}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

$$(θ) \quad \int \frac{1}{(2x+1)^5} dx = \frac{1}{2} \int (2x+1)^{-5} d(2x+1) = -\frac{1}{2 \times (5-1)(2x+1)^{5-1}} + c \\ = -\frac{1}{8(2x+1)^4} + c$$

$$(ι) \quad \int x(x^2-3)^{17} dx = \int \left(\frac{1}{2}(x^2-3)\right)' (x^2-3)^{17} dx = \frac{1}{2} \int (x^2-3)^{17} d(x^2-3) \\ = \frac{1}{2 \times 18} (x^2-3)^{18} + c = \frac{1}{36} (x^2-3)^{18} + c$$

$$(ια) \quad \int \frac{\operatorname{τοξεφ}^3 x}{1+x^2} dx = \int \operatorname{τοξεφ}^3 x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \int \operatorname{τοξεφ}^3 x \cdot (\operatorname{τοξεφ} x)' dx \\ = \int \operatorname{τοξεφ}^3 x d(\operatorname{τοξεφ} x) = \frac{1}{4} \operatorname{τοξεφ}^4 x + c$$

$$(ιβ) \quad \int \frac{\ln^6 x}{x} dx = \int \ln^6 x \cdot \frac{1}{x} dx = \int \ln^6 x \cdot (\ln x)' dx = \frac{1}{7} \ln^7 x + c$$

$$(ιγ) \quad \int \frac{2\eta\mu x}{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}} dx = 2 \int \frac{\eta\mu x}{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}} dx = 2 \int \frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}} dx = 2 \int \frac{d(1-\sigma\upsilon\nu x)}{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}} \\ = 4\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x} + c$$

$$(ιδ) \quad \int \frac{e^x}{(e^x-1)^4} dx = \int \frac{(e^x-1)'}{(e^x-1)^4} dx = \int \frac{d(e^x-1)}{(e^x-1)^4} = -\frac{1}{3(e^x-1)^3} + c$$

$$(ιε) \quad \int \frac{\tau\epsilon\mu^2 x}{2+\epsilon\phi x} dx = \int \frac{(2+\epsilon\phi x)'}{2+\epsilon\phi x} dx = \int \frac{d(2+\epsilon\phi x)}{2+\epsilon\phi x} = \ln|2+\epsilon\phi x| + c$$

$$(ιστ) \quad \int \frac{3x}{x^2+3} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+3} dx = \frac{3}{2} \int \frac{(x^2+3)'}{x^2+3} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2+3) + c$$

$$(ιζ) \quad \int \sigma\phi x dx = \int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} dx = \int \frac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu x} dx = \ln|\eta\mu x| + c$$

$$(ιη) \quad \int \frac{2+2\eta\mu x}{x-\sigma\upsilon\nu x} dx = 2 \int \frac{1+\eta\mu x}{x-\sigma\upsilon\nu x} dx = 2 \int \frac{(x-\sigma\upsilon\nu x)'}{x-\sigma\upsilon\nu x} dx = \ln|x-\sigma\upsilon\nu x| + c$$

$$(ιθ) \quad \int \frac{6x+15}{x^2+5x-1} dx = 3 \int \frac{2x+5}{x^2+5x-1} dx = 3 \int \frac{(x^2+5x-1)'}{x^2+5x-1} dx = 3 \ln|x^2+5x-1| + c$$

$$(κ) \quad \int \sigma\tau\epsilon\mu x dx = \int \sigma\tau\epsilon\mu x \cdot \frac{\sigma\tau\epsilon\mu x - \sigma\phi x}{\sigma\tau\epsilon\mu x - \sigma\phi x} dx = \int \frac{\sigma\tau\epsilon\mu^2 x - \sigma\tau\epsilon\mu x \cdot \sigma\phi x}{\sigma\tau\epsilon\mu x - \sigma\phi x} dx$$

Αλλά, $(\sigma\tau\epsilon\mu x - \epsilon\phi x)' = \sigma\tau\epsilon\mu^2 x - \sigma\tau\epsilon\mu x \cdot \sigma\phi x$ και αρα

$$\int \sigma\tau\epsilon\mu x dx = \ln|\sigma\tau\epsilon\mu x - \sigma\phi x| + c$$

Δραστηριότητες σελ. 38 (Ενότητα 6.3: Ολοκλήρωση κατά παράγοντες)

1. (α)
$$\int x \cdot \eta\mu(2x) dx = \int x \cdot \left(-\frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu(2x)\right)' dx = -\frac{1}{2} x \cdot \sigma\upsilon\nu(2x) + \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu(2x) \cdot 1 dx$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \eta\mu(2x) - x \cdot \sigma\upsilon\nu(2x)\right) + c$$
- (β)
$$\int \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int x \tau\epsilon\mu^2 x dx = \int x \cdot (\epsilon\varphi x)' dx = x \cdot \epsilon\varphi x - \int \epsilon\varphi x \cdot (x)' dx$$
$$= x \cdot \epsilon\varphi x - \int \epsilon\varphi x dx = x \cdot \epsilon\varphi x + \ln|\sigma\upsilon\nu x| + c$$
- (γ)
$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} \cdot \ln x dx = \int \left(-\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln x dx = -\frac{\ln x}{x} - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot (\ln x)' dx$$
$$= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c \quad (x > 0)$$
- (δ)
$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx = \int \frac{1}{x^3} \cdot \ln x dx = \int \left(-\frac{1}{2x^2}\right)' \cdot \ln x dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int \left(-\frac{1}{2x^2}\right) \cdot (\ln x)' dx$$
$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int x^{-3} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c = -\frac{1}{2x^2} \left(\frac{1}{2} + \ln x\right) + c \quad (x > 0)$$
- (ε)
$$\int e^{x+\ln x} dx = \int e^x e^{\ln x} dx = \int e^x x dx = (x-1)e^x + c \quad (\text{ολοκλήρωση κατά μέρη})$$
- (στ)
$$\int x^2 e^{-x} dx = \int x^2 \cdot (-e^{-x})' dx = -e^{-x} \cdot x^2 + \int e^{-x} \cdot (x^2)' dx = -x^2 \cdot e^{-x} + \int e^{-x} \cdot 2x dx$$
$$= -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \int x \cdot (-e^{-x})' dx = -x^2 \cdot e^{-x} - 2 \int e^{-x} \cdot (x)' dx = -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx$$
$$= -x^2 \cdot e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c = -(x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x} + c$$
- (ζ)
$$\int e^{\sqrt{3x+9}} dx.$$
 Θεωρούμε την αντικατάσταση $u = 3x + 9$ και το πιο πάνω γίνεται $\frac{1}{3} \int e^{\sqrt{u}} du$. Θεωρούμε την αντικατάσταση $w = \sqrt{u}$ και το πιο πάνω γίνεται $\frac{2}{3} \int w e^w dw$ το οποίο υπολογίζεται με ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\frac{2}{3} \int w e^w dw = \frac{2}{3} \int w (e^w)' dw = \frac{2}{3} w \cdot e^w - \frac{2}{3} \int e^w (w)' dw = \frac{2}{3} w \cdot e^w - \frac{2}{3} \int e^w dw$$
$$= \frac{2}{3} w \cdot e^w - \frac{2}{3} e^w + c = \frac{2e^w}{3} (w - 1) + c \text{ και αρα}$$
$$\int e^{\sqrt{3x+9}} dx = \frac{2e^{\sqrt{u}}}{3} (\sqrt{u} - 1) + c = \frac{2e^{\sqrt{3x+9}}}{3} (\sqrt{3x+9} - 1) + c$$
- (η)
$$\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx = \int (x)' \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \int x (\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))' dx$$
$$= x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 1)'}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$
$$= x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \int \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} dx = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + c$$
- (θ)
$$\int x^2 \sigma\upsilon\nu(3x) dx = \int x^2 \cdot \left(\frac{1}{3} \eta\mu(3x)\right)' dx = \frac{1}{3} x^2 \eta\mu(3x) - \frac{1}{3} \int \eta\mu(3x) \cdot (x^2)' dx$$
$$= \frac{1}{3} x^2 \eta\mu(3x) - \frac{2}{3} \int x \eta\mu(3x) dx. \text{ Αλλά, ομοίως,}$$
$$\int x \eta\mu(3x) dx = \int x \cdot \left(-\frac{1}{3} \sigma\upsilon\nu(3x)\right)' dx = -\frac{1}{3} \sigma\upsilon\nu(3x) x + \frac{1}{3} \int \sigma\upsilon\nu(3x) \cdot (x)' dx$$
$$= -\frac{1}{3} \sigma\upsilon\nu(3x) x + \frac{1}{9} \eta\mu(3x) + c \text{ και αρα τελικά}$$

$$\begin{aligned}\int x^2 \sigma\upsilon\nu(3x) dx &= \frac{1}{3}x^2\eta\mu(3x) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu(3x)x + \frac{1}{9}\eta\mu(3x)\right) + c \\ &= \frac{1}{3}x^2\eta\mu(3x) - \frac{2}{9}\sigma\upsilon\nu(3x)x - \frac{2}{27}\eta\mu(3x) + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(ι)} \quad \int e^x \sigma\upsilon\nu x dx &= \int \sigma\upsilon\nu x \cdot (e^x)' dx = \sigma\upsilon\nu x \cdot e^x - \int e^x \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' dx = \sigma\upsilon\nu x \cdot e^x + \int e^x \cdot \eta\mu x dx \\ &= \sigma\upsilon\nu x \cdot e^x + \int (e^x)' \cdot \eta\mu x dx = \sigma\upsilon\nu x \cdot e^x + \left(\eta\mu x \cdot e^x - \int e^x \cdot (\eta\mu x)' dx\right) \\ &= \sigma\upsilon\nu x \cdot e^x + \eta\mu x \cdot e^x - \int e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x dx + c_1 \text{ και αρα} \\ 2 \int e^x \sigma\upsilon\nu x dx &= e^x(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x) \Rightarrow \int e^x \sigma\upsilon\nu x dx = \frac{1}{2}e^x(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x) + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(ια)} \quad \int e^{-x} \eta\mu(2x) dx &= \int \eta\mu(2x) \cdot (-e^{-x})' dx = -\eta\mu(2x) \cdot e^{-x} + \int e^{-x} \cdot (\eta\mu(2x))' dx \\ &= -\eta\mu(2x) \cdot e^{-x} + 2 \int e^{-x} \cdot \sigma\upsilon\nu(2x) dx = -\eta\mu(2x) \cdot e^{-x} + 2 \int \sigma\upsilon\nu(2x) \cdot (-e^{-x})' dx \\ &= -\eta\mu(2x) \cdot e^{-x} + 2 \left(-e^{-x} \cdot \sigma\upsilon\nu(2x) + \int (\sigma\upsilon\nu(2x))' \cdot e^{-x} dx\right) \\ &= -\eta\mu(2x) \cdot e^{-x} - 2e^{-x} \cdot \sigma\upsilon\nu(2x) - 4 \int e^{-x} \cdot \eta\mu(2x) dx + c_1 \text{ και αρα} \\ 5 \int e^{-x} \cdot \eta\mu(2x) dx &= -\eta\mu(2x) \cdot e^{-x} - 2e^{-x} \cdot \sigma\upsilon\nu(2x) + c_1 \\ &\Rightarrow \int e^{-x} \cdot \eta\mu(2x) dx = -\frac{e^{-x}}{5}(\eta\mu(2x) + \sigma\upsilon\nu(2x)) + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(ιβ)} \quad \int e^{2x} \sigma\upsilon\nu(3x) dx &= \int \sigma\upsilon\nu(3x) \cdot \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sigma\upsilon\nu(3x) - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cdot (\sigma\upsilon\nu(3x))' dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}\sigma\upsilon\nu(3x) + \frac{3}{2} \int e^{2x} \cdot \eta\mu(3x) dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{2} \int \left(\frac{1}{a}e^{2x}\right)' \cdot \eta\mu(3x) dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}\sigma\upsilon\nu(3x) + \frac{3}{2^2} \int e^{2x} \cdot (\eta\mu(3x))' dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}\sigma\upsilon\nu(3x) + \frac{3}{4} \left(e^{2x} \cdot \eta\mu(3x) - \int e^{2x} \cdot (\eta\mu(3x))' dx\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}\sigma\upsilon\nu(3x) + \frac{3}{4}e^{2x} \cdot \eta\mu(3x) - \frac{3^2}{4} \int e^{2x} \cdot \sigma\upsilon\nu(3x) dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sigma\upsilon\nu(3x) + \frac{3}{4}e^{2x} \cdot \eta\mu(3x) - \frac{9}{4} \\ &\text{και αρα,} \\ \int e^{2x} \sigma\upsilon\nu(3x) dx &= \frac{e^{2x}}{9+4} (3\eta\mu(3x) + 2\sigma\upsilon\nu(3x)) + c = \frac{e^{2x}}{13} (3\eta\mu(3x) + 2\sigma\upsilon\nu(3x)) + c\end{aligned}$$

Σημείωση: Στις λύσεις του ΥΠΠΑΝ η απάντηση είναι

$$\frac{e^{2x}(2\eta\mu(3x) - 3\sigma\upsilon\nu(3x))}{13} + c$$

η οποία συνάρτηση είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x) = e^{2x}\eta\mu(3x)$

Δραστηριότητες σελ. 41 (Ενότητα 6.4: Ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων)

1.

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad \int \eta\mu^2(x) dx &= \int \frac{1 - \sigma\upsilon\nu(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int 1 - \sigma\upsilon\nu(2x) dx \right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \eta\mu(2x) + c \\ &= \frac{1}{2} (x - \eta\mu(x) \cdot \sigma\upsilon\nu(x)) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(β)} \quad \int \sigma\upsilon\nu^3(x) dx &= \int \sigma\upsilon\nu^2(x) \cdot \sigma\upsilon\nu(x) dx = \int \sigma\upsilon\nu^2(x) d(\eta\mu(x)) \\ &= \int (1 - \eta\mu^2(x)) d(\eta\mu(x)) = \int d(\eta\mu(x)) - \int \eta\mu^2(x) d(\eta\mu(x)) = \eta\mu(x) - \frac{\eta\mu^3(x)}{3} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(γ)} \quad \int \sigma\upsilon\nu^4(x) dx &= \int \left(\frac{1 + \sigma\upsilon\nu(2x)}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + \sigma\upsilon\nu(2x))^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + 2\sigma\upsilon\nu(2x) + \sigma\upsilon\nu^2(2x)) dx = \frac{1}{4} \left(\int dx + \int \sigma\upsilon\nu(2x) d(2x) + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1 + \sigma\upsilon\nu(2x)}{2} \right) d(2x) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\int \frac{3}{2} dx + \int \sigma\upsilon\nu(2x) d(2x) + \frac{1}{8} \int \sigma\upsilon\nu(2x) d(2x) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{3x}{2} + \eta\mu(2x) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \eta\mu(4x) \right) \right) = \frac{3x}{8} + \frac{\eta\mu(2x)}{4} + \frac{\eta\mu(4x)}{32} + c \end{aligned}$$

Διαφορετικά,

$$\int \sigma\upsilon\nu^4(x) dx = \frac{1}{4} \sigma\upsilon\nu^3(x) \cdot \eta\mu(x) + \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \dots$$

$$\begin{aligned} \text{(δ)} \quad \int \frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu x} dx &= \int \eta\mu^2 x \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx = \int \eta\mu^2 x \varepsilon\phi x dx = \int (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) \varepsilon\phi x dx \\ &= \int \varepsilon\phi x dx - \int \sigma\upsilon\nu^2 x \varepsilon\phi x dx = -\ln|\sigma\upsilon\nu(x)| - \int \sigma\upsilon\nu x \eta\mu x dx \\ &= -\ln|\sigma\upsilon\nu(x)| - \frac{1}{2} \int \eta\mu(2x) dx = -\ln|\sigma\upsilon\nu(x)| + \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu(2x) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ε)} \quad \int \eta\mu^4(x) \cdot \sigma\upsilon\nu^3(x) dx &= \int \eta\mu^4(x) \cdot \sigma\upsilon\nu^2(x) \cdot \sigma\upsilon\nu(x) dx \\ &= \int \eta\mu^4(x) \cdot (1 - \eta\mu^2(x)) \cdot d(\eta\mu(x)) = \int (\eta\mu^4(x) - \eta\mu^6(x)) \cdot d(\eta\mu(x)) \\ &= \frac{\eta\mu^5(x)}{5} - \frac{\eta\mu^7(x)}{7} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(στ)} \quad \int (\eta\mu^2(x) + \sigma\upsilon\nu^4(x)) \eta\mu(x) dx &= \int (1 - \sigma\upsilon\nu^2(x) + \sigma\upsilon\nu^4(x)) \eta\mu x dx \\ &= - \int (1 - \sigma\upsilon\nu^2(x) + \sigma\upsilon\nu^4(x)) d(\sigma\upsilon\nu(x)) = -\sigma\upsilon\nu(x) + \frac{\sigma\upsilon\nu^3(x)}{3} - \frac{\sigma\upsilon\nu^5(x)}{5} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ζ)} \quad & \int (\eta\mu^3(x)\sigma\upsilon\nu(x) - \eta\mu(x)\sigma\upsilon\nu^3(x)) dx = \int \eta\mu(x)\sigma\upsilon\nu(x)(\eta\mu^2(x) - \sigma\upsilon\nu^2(x)) dx \\ & = \frac{1}{2} \int \eta\mu(2x)\sigma\upsilon\nu(2x) dx = \frac{1}{4} \int \eta\mu(4x) dx = -\frac{1}{16} \sigma\upsilon\nu(4x) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(η)} \quad & \int \tau\epsilon\mu^4(\theta) d\theta = \int \tau\epsilon\mu^2(\theta) \cdot \tau\epsilon\mu^2(\theta) d\theta = \int \tau\epsilon\mu^2(\theta) \cdot (\epsilon\varphi(\theta))' d\theta \\ & = \tau\epsilon\mu^2(\theta) \cdot \epsilon\varphi(\theta) - 2 \int \tau\epsilon\mu^2(x) \cdot \epsilon\varphi^2(x) d\theta = \tau\epsilon\mu^2(x) \cdot \epsilon\varphi(\theta) - 2 \int \tau\epsilon\mu^2(\theta) \cdot (\tau\epsilon\mu^2(\theta) - 1) d\theta \\ & = \tau\epsilon\mu^2(\theta) \cdot \epsilon\varphi(\theta) - 2 \int \tau\epsilon\mu^4(\theta) d\theta + 2 \underbrace{\int \tau\epsilon\mu^2(\theta) d\theta}_{\epsilon\varphi(\theta)} \\ & \Rightarrow 3 \int \tau\epsilon\mu^4(\theta) d\theta = \tau\epsilon\mu^2(\theta) \cdot \epsilon\varphi(\theta) + 2\epsilon\varphi(\theta) + c_1. \text{ Έτσι,} \\ & \int \tau\epsilon\mu^4(\theta) d\theta = \frac{1}{3} \tau\epsilon\mu^2(\theta) \cdot \epsilon\varphi(\theta) + \frac{2}{3} \epsilon\varphi(\theta) + c = \frac{1}{3} (1 + \epsilon\varphi^2(\theta)) \cdot \epsilon\varphi(\theta) + \frac{2}{3} \epsilon\varphi(\theta) + c \\ & = \epsilon\varphi(\theta) + \frac{\epsilon\varphi^3(\theta)}{3} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(θ)} \quad & \int \tau\epsilon\mu^3(x) dx = \int \tau\epsilon\mu(x) \cdot \tau\epsilon\mu^2(x) dx = \int \tau\epsilon\mu(x) \cdot (\epsilon\varphi(x))' dx \\ & = \tau\epsilon\mu(x) \cdot \epsilon\varphi(x) - \int \tau\epsilon\mu(x) \cdot \epsilon\varphi^2(x) dx = \tau\epsilon\mu(x) \cdot \epsilon\varphi(x) - \int \tau\epsilon\mu(x) \cdot (\tau\epsilon\mu^2(x) - 1) dx \\ & = \tau\epsilon\mu(x) \cdot \epsilon\varphi(x) - \int \tau\epsilon\mu^3(x) dx + \int \tau\epsilon\mu(x) dx = \frac{1}{2} \tau\epsilon\mu(x) \cdot \epsilon\varphi(x) + \frac{1}{2} \int \tau\epsilon\mu(x) dx \\ & = \frac{1}{2} \tau\epsilon\mu(x) \cdot \epsilon\varphi(x) + \frac{1}{2} \ln|\tau\epsilon\mu(x) + \epsilon\varphi(x)| + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ι)} \quad & \int \epsilon\varphi^3(x)\tau\epsilon\mu(x) dx = \int \epsilon\varphi^2(x)\epsilon\varphi(x)\tau\epsilon\mu(x) dx = \int (\tau\epsilon\mu^2(x) - 1) \underbrace{\epsilon\varphi(x)\tau\epsilon\mu(x)}_{(\tau\epsilon\mu x)'} dx \\ & = \int (\tau\epsilon\mu^2(x) - 1) d(\tau\epsilon\mu(x)) = \frac{\tau\epsilon\mu^3(x)}{3} - \tau\epsilon\mu(x) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ια)} \quad & \int \eta\mu(2x) \cdot \sigma\upsilon\nu(x) dx = \frac{1}{2} \int [\eta\mu(2x - x) + \eta\mu(2x + x)] dx = \frac{1}{2} \int [\eta\mu(x) + \eta\mu(3x)] dx \\ & = -\frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu(x) - \frac{1}{6} \sigma\upsilon\nu(3x) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ιβ)} \quad & \int \eta\mu(5x) \cdot \eta\mu(7x) dx = \frac{1}{2} \int [\sigma\upsilon\nu(5x - 7x) - \sigma\upsilon\nu(5x + 7x)] dx = \frac{1}{2} \int [\sigma\upsilon\nu(-2x) - \sigma\upsilon\nu(12x)] dx \\ & = \frac{1}{2} \int [\sigma\upsilon\nu(2x) - \sigma\upsilon\nu(12x)] dx = \frac{1}{4} \eta\mu(2x) - \frac{1}{24} \eta\mu(12x) + c \end{aligned}$$

$$(v) \quad \int \sqrt{1 + \eta\mu(2x)} dx = \int \sqrt{(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2} dx = \int (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) dx = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + c$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και το ότι

$$(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = \eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 + \eta\mu(2x)$$

$$\text{Διαφορετικά, } \int \sqrt{1 + \eta\mu(2x)} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{1 + \eta\mu x} dx. \text{ Αλλά,}$$

$$1 + \eta\mu x = 1 + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{και αρα } \frac{1}{2} \int \sqrt{1 + \eta\mu x} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) dx$$

$$= \sqrt{2} \int \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) d\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\eta\mu\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + c = \sqrt{2}\eta\mu\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + c = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + c$$

$$(ιδ) \quad \int \frac{\ln(\tau\epsilon\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int \ln(\tau\epsilon\mu x) \tau\epsilon\mu^2 x dx = \int \ln(\tau\epsilon\mu x) (\epsilon\phi x)' dx$$

$$= \epsilon\phi x \ln(\tau\epsilon\mu x) - \int \epsilon\phi x (\ln(\tau\epsilon\mu x))' dx \quad (\text{κατά μέρη})$$

$$= \epsilon\phi x \ln(\tau\epsilon\mu x) - \int \epsilon\phi x (\ln(\tau\epsilon\mu x))' dx = \epsilon\phi x \ln(\tau\epsilon\mu x) - \int \epsilon\phi x \frac{\tau\epsilon\mu x \epsilon\phi x}{\tau\epsilon\mu x} dx$$

$$= \epsilon\phi x \ln(\tau\epsilon\mu x) - \int \epsilon\phi^2 x dx = \epsilon\phi x \ln(\tau\epsilon\mu x) - (\epsilon\phi x - x) + c$$

$$= \epsilon\phi x \ln(\tau\epsilon\mu x) - \epsilon\phi x + x + c \quad (\text{Χρησιμοποιήσαμε το ότι } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right))$$

Δραστηριότητες σελ. 45 [Ενότητα 6.5: Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις]

1. (α) Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$. Θεωρούμε την αντικατάσταση $x = 4\eta\mu\theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow dx = 4\sigma\upsilon\nu\theta d\theta$.

$$\text{Τότε, } \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \eta\mu^2\theta \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{1 - \eta\mu^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{16}\right)^2} = \sqrt{16 - x^2}$$

$$\text{Έτσι, } \int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \int \frac{\sigma\upsilon\nu\theta d\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \int d\theta = \theta + c = \text{τοξ}\eta\mu\left(\frac{x}{4}\right) + c$$

- (β) $\int \sqrt{4+x^2} dx$. Θεωρούμε την αντικατάσταση $x(\theta) = 2\epsilon\phi\theta \Rightarrow dx = 2\tau\epsilon\mu^2(\theta)d\theta$ στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

και $\epsilon\phi\theta = \frac{x}{2}$. Αφού

$$1 + \epsilon\phi^2(\theta) = \tau\epsilon\mu^2(\theta) \Rightarrow \tau\epsilon\mu^2(\theta) = 1 + \frac{x^2}{4}$$

και αφού $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$ στο $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, είναι $\tau\epsilon\mu(\theta) = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4+x^2}$, δηλ. $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{\tau\epsilon\mu(\theta)} = \frac{2}{\sqrt{4+x^2}}$. Συνεπώς, το πιο πάνω ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται στο

$$2 \int \sqrt{4+4\epsilon\phi^2(\theta)} \tau\epsilon\mu^2(\theta) d\theta = 4 \int \tau\epsilon\mu^3(\theta) d\theta = \ln|\epsilon\phi x + \tau\epsilon\mu x| + \epsilon\phi x + \tau\epsilon\mu x + c$$

και για να επιστρέψουμε στην αρχική μας μεταβλητή x , είτε χρησιμοποιούμε το τριγωνάκι είτε με τη χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων:

$$\epsilon\phi\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \eta\mu\theta \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$$

Συνεπώς,

$$\int \sqrt{4+x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{4+x^2} + 2 \ln \left| \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4+x^2} \right| + c$$

(γ) $\int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} dx.$

Θεωρούμε την αντικατάσταση $x(\theta) = \sqrt{\frac{1}{3}} \sin \theta \Rightarrow dx = -\frac{\sqrt{3}}{3} \eta \mu \theta d\theta$ στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ και προχωρώντας ομοίως με πιο πάνω ευρίσκουμε τελικά ότι

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} \tau ο ξ η μ \left(\frac{\sqrt{3}}{3} x \right) + c$$

(δ) $\int \frac{1}{(x^2+4)^3} dx = \int \frac{1}{(x^2+2^2)^3} dx.$ Εκ του αναγωγικού τύπου

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1} \right]$$

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ όπου $a \neq 0$ ευρίσκουμε:

$$\int \frac{1}{(x^2+4)^3} dx = \frac{1}{16} \left(\frac{3}{8} \frac{x}{x^2+4} + \frac{x}{(x^2+4)^2} + \frac{3}{16} \tau ο ξ ε φ \left(\frac{x}{2} \right) \right) + c$$

(ε) $\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c = \ln \left(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \right) + c$

Διαφορετικά, με την αντικατάσταση $x = \varepsilon \varphi \theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int \frac{\tau \varepsilon \mu^2 \theta}{\varepsilon \varphi \theta \tau \varepsilon \mu^2 \theta} d\theta = \int \sigma \varphi \theta d\theta = \int \frac{\sigma \nu \nu \theta}{\eta \mu \theta} d\theta = \int \frac{(\eta \mu \theta)'}{\eta \mu \theta} d\theta = \ln|\eta \mu \theta| + c$$

Αλλά, αφού $x = \varepsilon \varphi \theta$, έχουμε ότι $\eta \mu \theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ και αρα

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \ln \left(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \right) + c$$

2. (α) Έχουμε

$$\int \sqrt{3-2x-x^2} dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2} dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2} d(x+1) = \int \sqrt{4-x^2} dx$$

Θεωρούμε την αντικατάσταση $x(\theta) = 2\eta \mu \theta \Rightarrow dx = 2\sigma \nu \nu \theta d\theta$ στο διάστημα $(0, \pi)$ και προχωρώντας ομοίως με πιο πάνω ευρίσκουμε τελικά ότι

$$\int \sqrt{3-2x-x^2} dx = \frac{(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}}{2} + 2\tau ο ξ η μ \left(\frac{x+1}{2} \right) + c$$

(β) Έχουμε

$$\int \sqrt{2x^2+12x+8} dx = \sqrt{2} \int \sqrt{13-(x+3)^2} dx = \sqrt{2} \int \sqrt{13-x^2} dx$$

Θεωρούμε την αντικατάσταση $x(\theta) = \sqrt{13}\eta \mu \theta \Rightarrow dx = \sqrt{13}\sigma \nu \nu \theta d\theta$ στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$ και προχωρώντας ομοίως με πιο πάνω ευρίσκουμε τελικά ότι

$$\int \sqrt{2x^2+12x+8} dx = \frac{\sqrt{2}(x+3)\sqrt{x^2+6x+4}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} \ln \left| \sqrt{x^2+6x+4} + x+3 \right| + c$$

(γ) Έχουμε

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2-(x-1)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx$$

Θεωρούμε την αντικατάσταση $x(\theta) = \sqrt{2}\eta \mu \theta \Rightarrow dx = \sqrt{2}\sigma \nu \nu \theta d\theta$ στο διάστημα $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ και προχωρώντας ομοίως με πιο πάνω ευρίσκουμε τελικά ότι

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx = \tau ο ξ η μ \left(\sqrt{2} \frac{x-1}{2} \right) + c$$

(δ) Θεωρούμε την αντικατάσταση

$x = \eta\mu^2\theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow dx = 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta d\theta = \eta\mu(2\theta)d\theta$ και $\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta > 0$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx &= \int \sqrt{\frac{\eta\mu^2\theta}{1-\eta\mu^2\theta}} \eta\mu(2\theta)d\theta = 2 \int \sqrt{\frac{\eta\mu^2\theta}{1-\eta\mu^2\theta}} \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta d\theta = 2 \int \sqrt{\frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}} \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta d\theta \\ &= 2 \int \varepsilon\varphi\theta \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta d\theta = 2 \int \eta\mu^2\theta d\theta = 2 \cdot \frac{1}{2} (x - \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta) + c = \theta - \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + c\end{aligned}$$

$$= \tau\omicron\xi\eta\mu(\sqrt{x}) - \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} + c = \tau\omicron\xi\eta\mu(\sqrt{x}) - \sqrt{x \cdot (1-x)} + c$$

(ε) Θεωρούμε την αντικατάσταση $x = \tau\epsilon\mu\theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < x < 1$, $\theta = \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$, $dx = \tau\epsilon\mu\theta \cdot \varepsilon\varphi\theta d\theta$, $\varepsilon\varphi\theta > 0$. Συνεπώς,

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} dx = \int \frac{\sqrt{\tau\epsilon\mu^2\theta-1}}{\tau\epsilon\mu^2\theta} \tau\epsilon\mu\theta \cdot \varepsilon\varphi\theta d\theta = \int \frac{\sqrt{\tau\epsilon\mu^2\theta-1}}{\tau\epsilon\mu^2\theta} \tau\epsilon\mu\theta \cdot \varepsilon\varphi\theta d\theta$$

$$= \int \frac{\varepsilon\varphi\theta}{\tau\epsilon\mu\theta} \cdot \varepsilon\varphi\theta d\theta = \int \frac{\varepsilon\varphi^2\theta}{\tau\epsilon\mu\theta} d\theta = \int \frac{\tau\epsilon\mu^2\theta-1}{\tau\epsilon\mu\theta} d\theta$$

$$= \int (\tau\epsilon\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta) d\theta = \ln|\tau\epsilon\mu\theta + \varepsilon\varphi\theta| - \eta\mu\theta + c$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + c$$

$$\text{Αφού: } \varepsilon\varphi\theta = \sqrt{\tau\epsilon\mu^2\theta-1} = \sqrt{x^2-1} \text{ και } \frac{1}{x} = \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{1}{x^2} \Rightarrow 1 - \eta\mu^2\theta = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \eta\mu\theta = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

Δραστηριότητες σελ. 51 (Ενότητα 6.6: Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων)

1.

(α)
$$\int \frac{6x}{x^2-4} dx = 6 \int \frac{x dx}{(x-2)(x+2)} dx = \frac{6}{2} \left(\int \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} \right) dx = 3(\ln|x-2| + \ln|x+2|) + c = 3 \ln|x^2-4| + c$$

(β)
$$\int \frac{2x-7}{x^2-7x+3} dx = \int \frac{(x^2-7x+3)'}{x^2-7x+3} dx = \ln|x^2-7x+3| + c$$

(γ)
$$\int \frac{1}{x^2+2x} dx = \int \frac{1}{x(x+2)} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + c$$

(δ)
$$\int \frac{2}{x^2-9} dx = 2 \int \frac{dx}{(x-3)(x+3)} dx = \frac{2}{6} \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + c$$

(ε)
$$\int \frac{5x+4}{x^2+x-2} dx = \int \frac{5x+4}{(x-1)(x+2)} dx = \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+2} \right) dx = 3 \ln|x-1| + 2 \ln|x+2| + c$$

(στ)
$$\int \frac{6x-4}{x^2-6x+13} dx = \int \frac{6x-18+14}{x^2-6x+13} dx = \int \frac{6x-18}{x^2-6x+8} dx + 14 \int \frac{dx}{x^2-6x+13}$$

Είναι

$$\int \frac{6x-18}{x^2-6x+13} dx = 3 \int \frac{2x-6}{x^2-6x+13} dx = 3 \int \frac{d(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13} dx = 3 \ln(x^2-6x+13) + c_1$$

και

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{x-3}{2}\right)}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \tau \circ \xi \varepsilon \varphi \left(\frac{x-3}{2} \right) + c_2$$

Συνεπώς,
$$\int \frac{6x-4}{x^2-6x+13} dx = 3 \ln(x^2-4x+13) + 7 \tau \circ \xi \varepsilon \varphi \left(\frac{x-3}{2} \right) + c$$

(ζ)
$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+2x+6}{x^2+x-2} dx &= \int \left(x-1 + \frac{5x-4}{x^2+x-2} \right) dx = \int (x-1) dx + \int \frac{5x-4}{x^2+x-2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{5x-4}{(x-1)(x+2)} dx = \frac{x^2}{2} - x + \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x + 3 \ln|x-1| + 2 \ln|x+2| + c \end{aligned}$$

(η)
$$\begin{aligned} \int \frac{5x}{(x^2+4)(x+1)} dx &= \int \left(\frac{x+4}{x^2+4} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int \frac{x}{x^2+4} dx + 4 \int \frac{dx}{x^2+4} - \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+4)'}{x^2+4} dx + 2 \int \frac{d\left(\frac{x}{4}\right)}{\left(\frac{x}{4}\right)^2 + 1} - \ln|x+1| = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + 2 \tau \circ \xi \varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} \right) - \ln|x+1| + c \end{aligned}$$

(θ)
$$\int \frac{2x}{x^2-2x+10} dx = \int \frac{2x-2+2}{x^2-2x+10} dx = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+10} dx + 2 \int \frac{dx}{x^2-2x+10}$$

Είναι

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x+10} dx = \int \frac{d(x^2-2x+10)}{x^2-2x+10} dx = \ln(x^2-2x+10) + c_1$$

και

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+10} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+9} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{3} \int \frac{d\left(\frac{x-2}{3}\right)}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{3} \tau \circ \xi \varepsilon \varphi \left(\frac{x-2}{3} \right) + c_2$$

Συνεπώς,
$$\int \frac{2x}{x^2-2x+10} dx = \ln(x^2-2x+10) + \frac{2}{3} \tau \circ \xi \varepsilon \varphi \left(\frac{x-2}{3} \right) + c$$

(ι)
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+10x+29} &= \int \frac{dx}{(x+5)^2+4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+5}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{x+5}{2}\right)}{\left(\frac{x+5}{2}\right)^2+1} \\ &= \frac{1}{2} \tau \circ \xi \varepsilon \varphi \left(\frac{x+5}{2} \right) + c \end{aligned}$$

(ια)
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3(x+1)} &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x^3} dx - \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \ln|x+1| + c = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + c \end{aligned}$$

(ιβ)
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4-1} &= \int \frac{dx}{(x^2-1)(x^2+1)} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \tau \circ \xi \varepsilon \varphi(x) + c \end{aligned}$$

(ιγ)
$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c$$

(ιδ) Θεωρούμε την αντικατάσταση $u = \varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} \right)$ και το πιο πάνω μετασχηματίζεται στο

$$\int \frac{10}{3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x} dx = - \int \frac{du}{2u^2-3u-2} = - \int \frac{du}{(u-2)(2u+1)} = - \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{u-2} - \frac{2}{2u+1} \right) du$$

$$= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{2u+1}{u-2} \right| + c = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-2} \right| + c$$

$$(ιε) \quad \int \frac{8}{3+5\eta\mu(2x)} dx = 8 \int \frac{dx}{3+5\eta\mu(2x)}$$

Θεωρούμε την αντικατάσταση $u = \varepsilon\varphi x \Rightarrow x(u) = \text{τοξεφ}u \Rightarrow dx = \frac{du}{1+u^2}$. Επίσης,

$$\eta\mu(2x) = \frac{2\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = \frac{2u}{1+u^2}$$

και άρα

$$\begin{aligned} \int \frac{8dx}{3+5\eta\mu(2x)} &= 8 \int \frac{\frac{du}{1+u^2}}{3+5\frac{2u}{1+u^2}} = 8 \int \frac{du}{3u^2+10u+3} = 8 \int \frac{1}{8} \left(\frac{3}{3u+1} - \frac{1}{u+3} \right) dt \\ &= \int \left(\frac{3}{3u+1} - \frac{1}{u+3} \right) du = (\ln|3u+1| - \ln|u+3|) + c = \ln \left| \frac{3u+1}{u+3} \right| + c = \ln \left| \frac{3\varepsilon\varphi x + 1}{\varepsilon\varphi x + 3} \right| + c \end{aligned}$$

$$(ιοστ) \quad \int \frac{1}{5+3\sigma\upsilon\nu x} dx. \text{ Θεωρούμε την αντικατάσταση } u = \frac{1}{2}\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \text{ και προχωρώντας εντελώς όμοια με τα 2 προηγούμενα, βρίσκουμε } \int \frac{1}{5+3\sigma\upsilon\nu x} dx = \frac{1}{2} \text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c$$

$$(ιγ) \quad \int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c$$

$$\begin{aligned} (ιδ) \quad &\text{Θεωρούμε την αντικατάσταση } u = \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \text{ και το πιο πάνω μετασχηματίζεται στο} \\ &\int \frac{10}{3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x} dx = - \int \frac{du}{2u^2-3u-2} = - \int \frac{du}{(u-2)(2u+1)} = -\frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{u-2} - \frac{2}{2u+1} \right) du \\ &= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{2u+1}{u-2} \right| + c = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-2} \right| + c \end{aligned}$$

$$(ιε) \quad \int \frac{8}{3+5\eta\mu(2x)} dx = 8 \int \frac{dx}{3+5\eta\mu(2x)}$$

Θεωρούμε την αντικατάσταση $u = \varepsilon\varphi x \Rightarrow x(u) = \text{τοξεφ}u \Rightarrow dx = \frac{du}{1+u^2}$. Επίσης,

$$\eta\mu(2x) = \frac{2\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = \frac{2u}{1+u^2}$$

και άρα

$$\begin{aligned} \int \frac{8dx}{3+5\eta\mu(2x)} &= 8 \int \frac{\frac{du}{1+u^2}}{3+5\frac{2u}{1+u^2}} = 8 \int \frac{du}{3u^2+10u+3} = 8 \int \frac{1}{8} \left(\frac{3}{3u+1} - \frac{1}{u+3} \right) dt \\ &= \int \left(\frac{3}{3u+1} - \frac{1}{u+3} \right) du = (\ln|3u+1| - \ln|u+3|) + c = \ln \left| \frac{3u+1}{u+3} \right| + c = \ln \left| \frac{3\varepsilon\varphi x + 1}{\varepsilon\varphi x + 3} \right| + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ιοστ) \quad &\int \frac{1}{5+3\sigma\upsilon\nu x} dx. \text{ Θεωρούμε την αντικατάσταση } u = \frac{1}{2}\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \text{ και προχωρώντας εντελώς όμοια με τα 2 προηγούμενα, βρίσκουμε } \int \frac{1}{5+3\sigma\upsilon\nu x} dx = \frac{1}{2} \text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c \end{aligned}$$

Δραστηριότητες σελ. 54 (Ενότητα 6.7: Ολοκληρώματα αναγωγικού τύπου)

1. (α) $I_v = \int x^v \cdot e^x dx$, όπου $v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Έχουμε,

$$I_0 = \int e^x dx = e^x + c \text{ και για } v \geq 1 \text{ σταθεροποιημένο}$$

$$\begin{aligned} I_v = \int x^v \cdot e^x dx &= \int x^v \cdot (e^x)' dx = x^v \cdot e^x - \int e^x \cdot (x^v)' dx \\ &= x^v \cdot e^x - v \int e^x \cdot x^{v-1} dx = x^v \cdot e^x - v I_{v-1} \end{aligned}$$

(β) $I_v = \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^v - \frac{v}{2} I_{v-1}$, όπου $I_v = \int x^2 \cdot (\ln x)^v dx$ ($v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Έχουμε,

$$I_0 = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c \text{ και για } v \geq 1 \text{ σταθεροποιημένο}$$

$$\begin{aligned} I_v = \int x \cdot (\ln x)^v dx &= \int (\ln x)^v \cdot \left(\frac{1}{2} x^2\right)' dx = \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^v - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot ((\ln x)^v)' dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^v - \frac{v}{2} \int x \cdot (\ln x)^{v-1} dx = \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^v - \frac{v}{2} I_{v-1} \end{aligned}$$

(γ) $I_v = \int \varepsilon \varphi^v(x) dx$, ($v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Έχουμε, $I_0 = x + c$ και

$$I_1 = \int \varepsilon \varphi(x) dx = \int \frac{\eta \mu(x)}{\sigma \nu(x)} dx = - \int \frac{(\sigma \nu(x))'}{\sigma \nu(x)} dx = - \ln |\sigma \nu(x)| + c = \ln |\tau \varepsilon \mu(x)| + c$$

και για $v \geq 2$ σταθεροποιημένο

$$\begin{aligned} I_v = \int \varepsilon \varphi^v(x) dx &= \int \varepsilon \varphi^{v-2}(x) \cdot \varepsilon \varphi^2(x) dx = \int \varepsilon \varphi^{v-2}(x) \cdot (\tau \varepsilon \mu^2(x) - 1) dx \\ &= \int \varepsilon \varphi^{v-2}(x) \cdot \tau \varepsilon \mu^2(x) dx - \int \varepsilon \varphi^{v-2}(x) dx \\ &= \int \varepsilon \varphi^{v-2}(x) \cdot (\varepsilon \varphi(x))' dx - \int \varepsilon \varphi^{v-2}(x) dx = \frac{\varepsilon \varphi^{v-1}(x)}{v-1} - I_{v-2} \end{aligned}$$

2. $I_v = \int x^v \cdot \eta \mu(2x) dx$, όπου $v \in \mathbb{N}, v \geq 2$.

Είναι δε

$$\begin{aligned} I_0 &= \int x^0 \cdot \eta \mu(2x) dx = \int \eta \mu(2x) dx = -\frac{\sigma \nu(2x)}{2} + c \\ I_1 &= \int x^1 \cdot \eta \mu(2x) dx = \int x \eta \mu(2x) dx = \frac{\eta \mu(2x)}{2} - \frac{\sigma \nu(2x)}{2} + c \end{aligned}$$

(με κατά μέρη ολοκλήρωση)

Έχουμε, για $v \geq 2$ σταθεροποιημένο

$$\begin{aligned} I_v = \int x^v \cdot \eta \mu(2x) dx &= \int x^v \cdot \left(-\frac{1}{2} \sigma \nu(2x)\right)' dx \\ &= -x^v \cdot \frac{1}{2} \sigma \nu(2x) + \frac{v}{2} \int \sigma \nu(2x) \cdot x^{v-1} dx \\ &= -\frac{1}{2} x^v \sigma \nu(2x) + \frac{v}{2} \int \left(\frac{1}{2} \eta \mu(2x)\right)' \cdot x^{v-1} dx \\ &= -\frac{1}{2} x^v \sigma \nu(2x) + \frac{v}{2} \left(\frac{1}{2} \eta \mu(2x) \cdot x^{v-1} - \frac{v-1}{2} \int x^{v-2} \cdot \eta \mu(2x) dx\right) \\ &= -\frac{1}{2} x^v \sigma \nu(2x) + \frac{v}{4} \eta \mu(2x) \cdot x^{v-1} - \frac{v(v-1)}{4} I_{v-2} \end{aligned}$$

Τέλος,

$$\int x^4 \cdot \eta \mu(2x) dx = I_4 = -\frac{1}{2} x^4 \sigma \nu(2x) + \frac{4}{4} \eta \mu(2x) \cdot x^{4-1} - \frac{4(4-1)}{4} I_{4-2}$$

$$= -\frac{1}{2}x^4 \sin(2x) + \eta\mu(2x) \cdot x^3 - 3I_2$$

και αφού

$$I_2 = -\frac{1}{2}x^2 \sin(2x) + \frac{2}{4}\eta\mu(2x) \cdot x^{2-1} - \frac{2(2-1)}{4}I_{2-2} = -\frac{1}{2}x^2 \sin(2x) + \frac{1}{2}\eta\mu(2x) \cdot x - \frac{1}{2}I_0$$

έπεται τελικά ότι

$$\int x^4 \cdot \eta\mu(2x) dx = \frac{x(2x^2 - 3)\eta\mu(2x)}{2} - \frac{(2x^4 - 6x^2 + 3)\sin(2x)}{4} + c$$

Δραστηριότητες σελ. 56 (Ενότητα 6.8: Προβλήματα Αρχικών Τιμών)

1. (α) $f'(x) = 3x - 2$, $f(1) = 1$. Η συνάρτηση $x \mapsto 3x - 2$ είναι συνεχής και αρα

$$f'(x) = 3x - 2, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \int (3x - 2)dx = \frac{3}{2}x^2 - 2x + c$$

$$\text{και } f(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot 1^2 - 2 + c = 1 \Leftrightarrow c = -\frac{3}{2}. \text{ Συνεπώς,}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(β) $f'(x) = \sqrt{x-2}$, $f(3) = 2$. Η συνάρτηση $x \mapsto \sqrt{x-2}$, $x \geq 2$ είναι συνεχής και αρα

$$f'(x) = \sqrt{x-2}, \quad \forall x \geq 2 \Rightarrow f(x) = \int \sqrt{x-2}dx = \int \sqrt{x-2}d(x-2) = \frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\text{και } f(3) = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{3}(3-2)^{\frac{3}{2}} + c = 2 \Leftrightarrow c = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \text{ Συνεπώς,}$$

$$f(x) = \frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}, \quad \forall x \geq 2$$

(γ) $f''(x) = 2 - 6x$, $f'(0) = 4$, $f(0) = 1$. Η συνάρτηση $x \mapsto 2 - 6x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής και αρα

$$f''(x) = 2 - 6x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \int (2 - 6x)dx = x(2 - 3x^2) + c$$

$$\text{και } f'(0) = 4 \Leftrightarrow c = 4. \text{ Συνεπώς,}$$

$$f'(x) = x(2 - 3x^2) + 4, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση $x \mapsto x(2 - 3x^2) + 4$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής και αρα

$$f'(x) = x(2 - 3x^2) + 4, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \int (x(2 - 3x^2) + 4)dx = x^2(1 - x) + 4x + c$$

$$\text{και } f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1. \text{ Συνεπώς,}$$

$$f(x) = x^2(1 - x) + 4x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(δ) $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, $f'(1) = 1$, $f(1) = 1$. Η συνάρτηση $x \mapsto \frac{2}{x^3}$, $x \neq 0$ είναι συνεχής και αρα

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f'(x) = \int \frac{2}{x^3}dx, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} + c, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\text{και } f'(1) = 1 \Leftrightarrow c_2 = 2. \text{ Συνεπώς,}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Για $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ έχουμε

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow f(x) = \int \left(-\frac{1}{x^2} + 2\right)dx = \frac{1}{x} + 2x + c$$

$$\text{και } f(1) = 1 \Leftrightarrow c = -2. \text{ Συνεπώς,}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2x - 2, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

(ε) $f''(x) = 2$, $f(1) = f(3) = 0$. Η συνάρτηση $x \mapsto 2$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής και αρα

$$f''(x) = 2, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \int 2dx = 2x + c, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση $x \mapsto 2x + c$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής και αρα

$$f'(x) = 2x + c \Rightarrow f(x) = \int (2x + c) dx = x^2 + c_1 x + c_2$$

$$\text{και} \begin{cases} f(3) = 0 \Leftrightarrow 9 + 3c_1 + c_2 = 0 \Leftrightarrow 3c_1 + c_2 = -9 \\ f(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + c_1 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3c_1 - 1 - c_1 = -9 \\ c_1 + c_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -4 \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

και αρα

$$f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(στ) $f'(x) \cdot e^{f(x)} = 2 + \ln x$ και $(e, 0) \in Gr(f)$. Έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) \cdot e^{f(x)} = 2 + \ln x \Leftrightarrow \frac{d(e^{f(x)})}{dx} = 2 + \ln x \Leftrightarrow e^{f(x)} = \int (2 + \ln x) dx \Leftrightarrow e^{f(x)} = x(1 + \ln x) + c$$

και αφού $A(e, 0) \in Gr(f) \Rightarrow e^0 = e(1 + \ln e) + c \Rightarrow 1 = 2e + c \Rightarrow c = 1 - 2e$. Έτσι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$e^{f(x)} = x(1 + \ln x) + 1 - 2e \Rightarrow f(x) = \ln(x(1 + \ln x) + 1 - 2e)$$

2. $f'(0) = 0, f(0) = 0, f''(x) = 2 \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$$f''(x) = 2 \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) = \int 2 \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{2x}{x^2+1} + c, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και $f'(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$. Συνεπώς,

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \int \frac{x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) + c$$

και $f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$. Συνεπώς,

$$f(x) = \ln(x^2+1), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3. $f'(1) = 4, f''(x) = 4x^3 + 2x = 2x(x^2+1)$

$$f''(x) = 4x^3 + 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) = \int (4x^3 + 2x) dx = x^4 + x^2 + c, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και $f'(1) = 4 \Leftrightarrow 2 + c = 4 \Leftrightarrow c = 2$. Συνεπώς,

$$f'(x) = x^4 + x^2 + 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Αλλά, $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση f' είναι συνεχής, αρα η συνάρτηση δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Δραστηριότητες σελ. 57-59 (Ενότητας)

1.

$$(α) \quad \int 9x^2 \sqrt{x^3 + 5} dx = 3 \int 3x^2 \sqrt{x^3 + 5} dx = 3 \int \sqrt{x^3 + 5} d(x^3 + 5) = 2(x^3 + 5)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$(β) \quad \int \left(\frac{e^x}{1+e^x} - \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \right) dx = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx - \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα, θεωρούμε την αντικατάσταση $u(x) = e^x \Leftrightarrow du = e^x dx$. Τότε,

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln(1+e^x) + c \text{ και για το δεύτερο,}$$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \int \sqrt{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \sqrt{\ln x} d(\ln x) = \frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\text{και αρα} \quad \int \left(\frac{e^x}{1+e^x} - \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \right) dx = \ln(1+e^x) + \frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$(γ) \quad \int \frac{\eta \mu^3 x}{\sigma \nu \nu^2 x} dx = \int \frac{\eta \mu^2 x}{\sigma \nu \nu^2 x} \cdot \eta \mu x dx = \int \varepsilon \varphi^2 x \cdot \eta \mu x dx = \int (\tau \varepsilon \mu^2 x - 1) \cdot \eta \mu x dx$$

$$= \int \tau \varepsilon \mu x \cdot \varepsilon \varphi x dx - \int \eta \mu x dx$$

Αλλά,

$$\int \frac{1}{\eta \mu x} \cdot \frac{\eta \mu x}{\sigma \nu \nu x} dx + \sigma \nu \nu x = \int \frac{\eta \mu x}{\sigma \nu \nu^2 x} dx = - \int \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} d(\sigma \nu \nu x) = \frac{1}{\sigma \nu \nu x} + c = \tau \varepsilon \mu x + c$$

$$\text{και} \quad \int \eta \mu x dx = \sigma \nu \nu x + c. \text{ Συνεπώς, } \int \frac{\eta \mu^3 x}{\sigma \nu \nu^2 x} dx = \tau \varepsilon \mu x + \sigma \nu \nu x + c$$

$$(δ) \quad I = \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx \int \frac{e^x}{e^x(e^x + e^{-x})} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$$

Θεωρούμε την αντικατάσταση $u(x) = e^x \Leftrightarrow du = e^x dx$. Τότε,

$$I = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \tau \omicron \xi \varepsilon \varphi(u) + c = \tau \omicron \xi \varepsilon \varphi(e^x) + c$$

$$(ε) \quad \int \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^{\frac{3}{2}} + 1} dx = \frac{2}{3} \int \sqrt{x^{\frac{3}{2}} + 1} d\left(x^{\frac{3}{2}} + 1\right) = \frac{2}{3} \left(x^{\frac{3}{2}} + 1\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$(στ) \quad I = \int \sigma \nu \nu \sqrt{x} dx. \text{ Θεωρούμε την αντικατάσταση } u = \sqrt{x} \Leftrightarrow du = \frac{dx}{2u} \text{ και αρα}$$

$$I = 2 \int u \sigma \nu \nu u du = 2 \int u \cdot (\eta \mu u)' du = 2 \int u \cdot (\eta \mu u)' du = 2u \cdot \eta \mu u - 2 \int \eta \mu u \cdot (u)' du$$

$$= 2u \cdot \eta \mu u - 2 \int \eta \mu u du = 2u \cdot \eta \mu u + 2 \sigma \nu \nu u + c = 2(\sqrt{x} \cdot \eta \mu \sqrt{x} + \sigma \nu \nu \sqrt{x}) + c$$

$$(ζ) \quad I = \int \eta \mu x \sigma \nu \nu x e^{\eta \mu x} dx. \text{ Θεωρούμε την αντικατάσταση } u = \eta \mu x \Leftrightarrow \sigma \nu \nu x dx = du \text{ και αρα}$$

$$I = \int u e^u du = \int u \cdot (e^u)' du = u e^u - \int e^u du = u e^u - e^u = e^u(u - 1) + c = e^{\eta\mu x}(\eta\mu x - 1) + c$$

$$(η) \quad I = \int 4x^3 \sqrt{1+x^2} dx = 4 \int x^3 \sqrt{1+x^2} dx = 4 \int x \cdot x^2 \sqrt{1+x^2} dx$$

Θεωρούμε την αντικατάσταση $u(x) = 1 + x^2 \Leftrightarrow du = 2x dx \Leftrightarrow x dx = \frac{du}{2}$ και $x^2 = u(x) - 1$ Τότε,

$$\begin{aligned} I &= 2 \int (u-1) \sqrt{u} du = 2 \int \left(u^{\frac{3}{2}} - \sqrt{u}\right) du = 2 \cdot \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - 2 \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{4}{5} (1+x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{4}{15} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} (3x^2 - 2) + c \end{aligned}$$

Διαφορετικά, ακολουθούμε τον εναλλακτικό τρόπο αντιμετώπισης τέτοιων ολοκληρωμάτων (με ομοιοθεσία) όπως είδαμε στη θεωρία:

$$\begin{aligned} I &= \int 4x^3 \sqrt{1+x^2} dx = 4 \int x^3 \sqrt{1+x^2} dx = 4 \int x \cdot x^2 \sqrt{1+x^2} dx = 4 \int x \cdot (x^2 + 1 - 1) \sqrt{1+x^2} dx \\ &= 4 \int x \cdot (x^2 + 1) \sqrt{1+x^2} dx - 4 \int x \sqrt{1+x^2} dx = 4 \int x \cdot (1+x^2)^{\frac{3}{2}} dx - 4 \int x \sqrt{1+x^2} dx \\ &= 2 \int (1+x^2)^{\frac{3}{2}} d(1+x^2) - 2 \int \sqrt{1+x^2} d(1+x^2) = \frac{4}{5} (1+x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (θ) \quad \int \eta\mu^7 x \sigma\upsilon\nu^3 x dx &= \int \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu^7 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \int \eta\mu^7 x \cdot (1 - \eta\mu^2 x) \cdot \sigma\upsilon\nu x dx \\ &= \int (\eta\mu^7 x - \eta\mu^9 x) d(\eta\mu x) = \frac{\eta\mu^8 x}{8} - \frac{\eta\mu^{10} x}{10} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ι) \quad \int \eta\mu(7x) \sigma\upsilon\nu(3x) dx &= \frac{1}{2} \int [\eta\mu(7x - 3x) + \eta\mu(7x + 3x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int [\eta\mu(4x) + \eta\mu(10x)] dx = -\frac{1}{8} \sigma\upsilon\nu(4x) - \frac{1}{20} \sigma\upsilon\nu(10x) + c \end{aligned}$$

$$(ια) \quad \int \frac{\eta\mu^4 x}{\sigma\upsilon\nu^6 x} dx = \int \varepsilon\varphi^4 x \varepsilon\mu^2 x dx = \int \varepsilon\varphi^4 x d(\varepsilon\varphi x) = \frac{\varepsilon\varphi^5 x}{5} + c$$

$$(ιβ) \quad \int \eta\mu(2x) \sigma\upsilon\nu^6 x dx = 2 \int \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu^6 x dx = -2 \int \sigma\upsilon\nu^7 x d(\sigma\upsilon\nu x) = -\frac{\sigma\upsilon\nu^8 x}{4} + c$$

$$(ιγ) \quad \int \sqrt{1 - \eta\mu(2x)} dx = \int \sqrt{(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2} dx = \int (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) dx = -\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + c$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ και το ότι

$$(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 = \eta\mu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu(2x)$$

Σημείωση: στη λύση του ΥΠΠΑΝ δίνεται

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + c$$

$$(ιδ) \quad \int (x^2 + 1)e^x dx = \int x^2 e^x dx + \int e^x dx$$

Το $\int x^2 e^x dx$ υπολογίζεται εύκολα με 2 εφαρμογές ολοκλήρωσης κατά μέρη:

$$\int e^x \cdot x^2 dx = e^x \cdot x^2 - 2xe^x + 2e^x + c \text{ και } \int e^x dx = e^x + c. \text{ Συνεπώς,}$$

$$\int (x^2 + 1)e^x dx = e^x \cdot x^2 - 2xe^x + 3e^x + c = (x^2 - 2x + 3)e^x + c$$

(ιε)

$$\begin{aligned} I &= \int e^{ax} \eta\mu(\beta x) dx = \int \eta\mu(\beta x) \cdot \left(\frac{1}{a} e^{ax}\right)' dx = \frac{1}{a} e^{ax} \eta\mu(\beta x) - \frac{1}{a} \int e^{ax} \cdot (\eta\mu(\beta x))' dx \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \eta\mu(\beta x) - \frac{\beta}{a} \int e^{ax} \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x) dx = \frac{1}{a} e^{ax} \eta\mu x - \frac{\beta}{a} \int \left(\frac{1}{a} e^{ax}\right)' \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x) dx \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \eta\mu(\beta x) - \frac{\beta}{a^2} \int e^{ax} \cdot (\eta\mu(\beta x))' dx = \frac{1}{a} e^{ax} \eta\mu(\beta x) - \frac{\beta}{a^2} \left(e^{ax} \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x) - \beta \int e^{ax} \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x) dx \right) \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \eta\mu(\beta x) - \frac{\beta}{a^2} e^{ax} \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x) - \frac{\beta^2}{a^2} I \end{aligned}$$

και αρα,
$$I = \frac{e^{ax}}{a^2 + \beta^2} (\beta \sigma\upsilon\nu(\beta x) + a \eta\mu(\beta x)) + c$$

(ιστ)

$$\begin{aligned} \int \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu x dx &= \int \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu x \cdot (x)' dx = \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu x \cdot x - \int x \cdot (\tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu x)' dx \\ &= \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu x \cdot x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu x \cdot x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu x \cdot x - \sqrt{1-x^2} + c \end{aligned}$$

(ιζ)

$$\int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{1}{x-1} + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + c$$

(ιη)

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2+2x+10} dx &= \int \frac{x+1-2}{x^2+2x+10} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+10} dx - 2 \int \frac{dx}{x^2+2x+10} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2x+10)}{x^2+2x+10} - 2 \int \frac{dx}{(x+1)^2-9} = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+10) - \frac{2}{9} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2-1} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+10) - \frac{2}{3} \int \frac{d\left(\frac{x+1}{3}\right)}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2-1} = \ln \sqrt{x^2+2x+10} - \frac{2}{3} \tau\omicron\xi\epsilon\varphi\left(\frac{x+1}{3}\right) + c \end{aligned}$$

(ιθ)

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+2}}{x-7} dx. & \text{Θεωρούμε την αντικατάσταση } u = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow dx = 2u du \text{ και αρα} \\ \int \frac{\sqrt{x+2}}{x-7} dx &= 2 \int \frac{u^2}{u^2-9} du = 2 \int \frac{u^2-9+9}{u^2-9} du = 2 \int \frac{u^2-9}{u^2-9} du - 18 \int \frac{du}{(u-3)(u+3)} \\ 2u - \frac{18}{6} \int \left(\frac{1}{u-3} - \frac{1}{u+3} \right) du &= 2u + 3 \ln \left| \frac{u-3}{u+3} \right| + c = 2\sqrt{x+2} + 3 \ln \left| \frac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x+2}+3} \right| + c \end{aligned}$$

(κ)

$$\int \frac{1}{1+\eta\mu x} dx = \int \frac{1}{1 + \frac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)}} dx = \int \frac{1 + \varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1 + 2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)} dx$$

$$= \int \frac{\tau \varepsilon \mu^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{\left(\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} \right) + 1 \right)^2} dx = 2 \int \frac{1}{\left(\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} \right) + 1 \right)^2} d \left(\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} \right) + 1 \right) = -\frac{2}{\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} \right) + 1} + c$$

$$= \varepsilon \varphi x - \tau \varepsilon \mu x + c$$

Διαφορετικά

$$\int \frac{1}{1 + \eta \mu x} dx = \int \frac{1 - \eta \mu x}{1 - \eta \mu^2 x} dx = \int \frac{1 - \eta \mu x}{\sigma \nu \nu^2 x} dx = \int (\tau \varepsilon \mu^2 x - \tau \varepsilon \mu x \varepsilon \varphi x) dx = \varepsilon \varphi x - \tau \varepsilon \mu x + c$$

(κα)

$$\int \frac{1}{3 + 2 \sigma \nu \nu(2x) - \eta \mu(2x)} dx = - \int \frac{1}{\eta \mu(2x) - 2 \sigma \nu \nu(2x) - 3} dx$$

Αφού $\sigma \nu \nu(2x) = \frac{1 - \varepsilon \varphi^2 x}{1 + \varepsilon \varphi^2 x}$ και $\eta \mu(2x) = \frac{2 \varepsilon \varphi x}{1 + \varepsilon \varphi^2 x}$, το πιο πάνω γίνεται $-\int \frac{1 + \varepsilon \varphi^2 x}{-3 \varepsilon \varphi^2 x + 2 \varepsilon \varphi x - 2} dx$

Και θεωρώντας την αντικατάσταση $u = \varepsilon \varphi^2 x \Leftrightarrow dx = \frac{2}{u^2 + 1} du$ και αρα το πιο πάνω γίνεται

$$= \int \frac{du}{(u - 1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{d \left(\frac{u - 1}{2} \right)}{\left(\frac{u - 1}{2} \right)^2 + 1} = \tau \circ \xi \varepsilon \varphi \left(\frac{u - 1}{2} \right) + c = \tau \circ \xi \varepsilon \varphi \left(\frac{\varepsilon \varphi x - 1}{2} \right) + c$$

(κβ)

$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1 + x^2}} dx$. Θεωρούμε την αντικατάσταση $x(\theta) = \varepsilon \varphi \theta \Leftrightarrow dx = \tau \varepsilon \mu^2(\theta) d\theta$ στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ και $\varepsilon \varphi \theta = x$. Αφού $1 + \varepsilon \varphi^2(\theta) = \tau \varepsilon \mu^2(\theta) \Rightarrow \tau \varepsilon \mu^2(\theta) = 1 + x^2$ και αφού $\sigma \nu \nu \theta > 0$ στο $\left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$, είναι $\tau \varepsilon \mu(\theta) = \sqrt{1 + x^2}$, δηλ. $\sigma \nu \nu \theta = \frac{1}{\tau \varepsilon \mu(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$. Συνεπώς, το πιο πάνω ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται στο

$$\int \frac{\tau \varepsilon \mu^2(\theta) d\theta}{\varepsilon \varphi^2(\theta) \sqrt{1 + \varepsilon \varphi^2(\theta)}} = \int \frac{\tau \varepsilon \mu^2(\theta) d\theta}{\varepsilon \varphi^2(\theta) \tau \varepsilon \mu \theta} = \int \frac{\tau \varepsilon \mu \theta}{\varepsilon \varphi^2(\theta)} d\theta = \int \frac{\sigma \nu \nu \theta}{\eta \mu^2(\theta)} d\theta = \int \frac{(\eta \mu \theta)'}{\eta \mu^2(\theta)} d\theta$$

$$\text{δηλ. } \int \frac{1}{x^2 \sqrt{1 + x^2}} dx = -\frac{1}{\eta \mu \theta} + c = -\sigma \tau \varepsilon \mu \theta + c$$

και για να επιστρέψουμε στην αρχική μας μεταβλητή x , είτε χρησιμοποιούμε τριγωνάκι είτε με τη χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων: $\varepsilon \varphi \theta \cdot \sigma \nu \nu \theta = \eta \mu \theta \Rightarrow \eta \mu \theta = x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

Συνεπώς,

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1 + x^2}} dx = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} + c$$

(κγ)

$$\int \frac{1}{(x + 3) \sqrt{x^2 + 3x}} dx = \int \frac{1}{(x + 3) \sqrt{x(x + 3)}} dx$$

Θεωρούμε την αντικατάσταση $t = \frac{1}{x + 3}, x \neq -3 \Leftrightarrow dt = -\frac{1}{(x + 3)^2} dx \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$

Επίσης, $x = \frac{1}{t} - 3 = \frac{1 - 3t}{t}$ και το πιο πάνω γίνεται

$$\int \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{\frac{1 - 3t}{t}} \cdot \frac{1}{t}} dt = - \int \frac{1}{t \sqrt{\frac{1 - 3t}{t^2}}} dt = - \int \frac{1}{\sqrt{1 - 3t}} dt = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1 - 3t}} d(1 - 3t) = \frac{2}{3} \sqrt{1 - 3t} + c$$

και αρα

$$\int \frac{1}{(x + 3) \sqrt{x^2 + 3x}} dx = \frac{2 \sqrt{x^2 + 3x}}{3(x + 3)} + c$$

2. [Οι f, g θεωρούνται δις παραγωγίσιμες] Έχουμε:

$$\begin{aligned} \int f''(x) \cdot g(x) dx &= \int (f'(x))' \cdot g(x) dx = f'(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g'(x) dx \\ &\quad \text{Κατά μέρη} \\ \text{Κατά μέρη} \quad &= f'(x) \cdot g(x) - \left(f(x) \cdot g'(x) - \int f(x) \cdot (g'(x))' dx \right) \\ &= f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x) + \int f(x) \cdot g''(x) dx \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε το πιο πάνω για τις συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = e^x$ και $g(x) = x^2$:
 $f'(x) = f''(x) = e^x$ και αρα

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2xe^x + 2 \int e^x dx = e^x \cdot x^2 - 2xe^x + 2e^x + c = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$$

3. (α) Έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) &= \frac{\sqrt{x^2+1} \cdot (x)' - x \cdot (\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\ \text{Αυτό μας λέει ότι} \quad &\int \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + c \end{aligned}$$

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{τοξεφ} x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx &= \int \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \cdot \text{τοξεφ} x dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)' \cdot \text{τοξεφ} x dx \\ &\quad \text{[κατά μέρη]} \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \text{τοξεφ} x - \int (\text{τοξεφ} x)' \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \text{τοξεφ} x - \int \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \text{τοξεφ} x - \int \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \text{τοξεφ} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \text{τοξεφ} x + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + c \end{aligned}$$

4. (α) Έχουμε

$$\int \frac{2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x} dx = \int \frac{(\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x)'}{\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x} dx = \ln|\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x| + c$$

$$\begin{aligned} \text{(β)} \quad \sigma\upsilon\nu x &\equiv \alpha(\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x) + \beta(2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) \Leftrightarrow 1 \cdot \sigma\upsilon\nu x + 0 \cdot \eta\mu x \\ &\equiv (\alpha + 2\beta)\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x(2\alpha - \beta) \end{aligned}$$

και λύνοντας το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ 2\alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

ευρίσκουμε ότι $\beta = \frac{2}{5}$ και $\alpha = \frac{1}{5}$

(γ)

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x} dx$$

Από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι

$$\sin x \equiv \frac{1}{5}(\sin x + 2\eta\mu x) + \frac{2}{5}(2\sin x - \eta\mu x)$$

η οποία μας δίνει $5\sin x \equiv (\sin x + 2\eta\mu x) + 2(2\sin x - \eta\mu x)$ και διαιρώντας με το $(\sin x + 2\eta\mu x)$ αμφότερα μέλη, έχουμε:

$$5 \frac{\sin x}{\sin x + 2\eta\mu x} \equiv 1 + 2 \frac{2\sin x - \eta\mu x}{\sin x + 2\eta\mu x}$$

Έτσι,

$$5 \int \frac{\sin x}{\sin x + 2\eta\mu x} dx \equiv \int dx + 2 \int \frac{2\sin x - \eta\mu x}{\sin x + 2\eta\mu x} dx = \int dx + 2 \int \frac{2\sin x - \eta\mu x}{\sin x + 2\eta\mu x} dx$$

$$= x + 2 \ln|\sin x + 2\eta\mu x| + c$$

δηλ.

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + 2\eta\mu x} dx = \frac{x}{5} + \frac{2}{5} \ln|\sin x + 2\eta\mu x| + c$$

5.

(α) $\int \frac{7}{2x\sqrt{\ln(x)}} dx, x \in (0, +\infty)$. Θεωρούμε την αντικατάσταση $u(x) = \ln(x), x \in (0, +\infty) \Leftrightarrow du = \frac{dx}{x}$. Τότε,

$$\int \frac{7}{2x\sqrt{\ln(x)}} dx = 7 \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = 7\sqrt{u} + c = 7\sqrt{\ln(x)} + c$$

(β) $I = \int \frac{e^x}{(e^x + 1)\ln(e^x + 1)} dx = \int \frac{e^x}{e^x + 1} \cdot \frac{1}{\ln(e^x + 1)} dx, \quad x \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε την αντικατάσταση $u(x) = \ln(e^x + 1), x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow du = \frac{e^x}{e^x + 1} dx$. Τότε,

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln(\ln(e^x + 1)) + c$$

(γ) $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2 - 2}} dx, \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

Θεωρούμε την αντικατάσταση $x(\theta) = \sqrt{2}\tau\epsilon\mu\theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow dx(\theta) = \sqrt{2}\tau\epsilon\mu\theta d\theta$. Τότε

$$x^2(\theta) - 1 = 2\tau\epsilon\mu^2\theta - 2 = 2(\tau\epsilon\mu^2\theta - 1) = 2\varepsilon\varphi^2\theta$$

Και αρα αφού $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta > 0, \sqrt{\varepsilon\varphi^2\theta} = \varepsilon\varphi\theta$

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2 - 2}} dx = \int \frac{\sqrt{2}\tau\epsilon\mu\theta d\theta}{4\sqrt{2}\tau\epsilon\mu^4\theta \varepsilon\varphi\theta} = \frac{1}{4} \int \frac{d\theta}{\tau\epsilon\mu^3\theta} = \frac{1}{4} \int \sigma\upsilon\nu^3\theta d\theta = \frac{1}{4} \int \sigma\upsilon\nu^3\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \left(\eta\mu\theta - \frac{1}{3}\eta\mu^3\theta \right) + c$$

Επιστρέφοντας τώρα στον αρχικό μετασχηματισμό μας,

$$x(\theta) = \sqrt{2}\tau\epsilon\mu\theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \theta = \tau\omicron\xi\tau\epsilon\mu\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

και αρα $\eta\mu\theta = \eta\mu\left(\tau\omicron\xi\tau\epsilon\mu\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{2}{x}\sqrt{x^2 - 2}, x \in (0, 1)$

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2 - 2}} dx = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{x}\sqrt{x^2 - 2} - \frac{1}{x^3}(x^2 - 2)^{\frac{3}{2}} \right) + c = \frac{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 2}}{6x^3} + c$$

(δ) $\int \sqrt{\varepsilon\varphi(\theta)} d\theta$. Θεωρούμε την αντικατάσταση

$$u(\theta) = \sqrt{\varepsilon\varphi(\theta)} \Leftrightarrow du(\theta) = \frac{\tau\epsilon\mu^2\theta}{2\sqrt{\varepsilon\varphi(\theta)}} d\theta = \frac{1 + \varepsilon\varphi^2\theta}{2\sqrt{\varepsilon\varphi(\theta)}} d\theta = \frac{1 + u^4}{2u} d\theta \Leftrightarrow d\theta = \frac{2u}{1 + u^4} du$$

Τότε

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{\varepsilon\varphi(\theta)} d\theta &= \int u \frac{2u}{1+u^4} du = \int \frac{2u^2}{1+u^4} du = 2 \int \frac{u^2}{(u^2 - \sqrt{2}u + 1)(u^2 + \sqrt{2}u + 1)} du \\
 &= \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \int \left(\frac{u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{u}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right) du = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \int \left(\frac{u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{u}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right) du \\
 &= \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \ln(u^2 + \sqrt{2}u + 1) + \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} \ln(u^2 - \sqrt{2}u + 1) + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctan}(\sqrt{2}u + 1) \\
 &\quad + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctan}(\sqrt{2}u - 1) + c \\
 &= \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \ln(\varepsilon\varphi^2(\theta) + \sqrt{2\varepsilon\varphi(\theta)} + 1) + \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} \ln(u^2 - \sqrt{2\varepsilon\varphi(\theta)} + 1) + \\
 &\quad + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctan}(\sqrt{2\varepsilon\varphi(\theta)} + 1) + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctan}(\sqrt{2\varepsilon\varphi(\theta)} - 1) + c
 \end{aligned}$$

6. (α) Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \int x(\operatorname{arctan} x)^2 dx &= \int \left(\frac{x^2}{2} \right)' (\operatorname{arctan} x)^2 dx = \frac{x^2}{2} (\operatorname{arctan} x)^2 - \int \left(\frac{x^2}{2} \right)' (\operatorname{arctan} x)^2 dx \\
 &= \frac{x^2}{2} (\operatorname{arctan} x)^2 - \int \frac{x^2}{2} ((\operatorname{arctan} x)^2)' dx = \frac{x^2}{2} (\operatorname{arctan} x)^2 - \int \frac{x^2}{2} ((\operatorname{arctan} x)^2)' dx \\
 &= \frac{x^2}{2} (\operatorname{arctan} x)^2 - \int \frac{x^2 \operatorname{arctan} x}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} (\operatorname{arctan} x)^2 - \int \left(\operatorname{arctan} x - \frac{\operatorname{arctan} x}{1+x^2} \right) dx \\
 &= \frac{x^2}{2} (\operatorname{arctan} x)^2 - \int \operatorname{arctan} x dx - \int \frac{\operatorname{arctan} x}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} (\operatorname{arctan} x)^2 - x \operatorname{arctan} x + \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} - \int \operatorname{arctan} x (\operatorname{arctan} x)' dx \\
 &= \frac{x^2}{2} (\operatorname{arctan} x)^2 - x \operatorname{arctan} x + \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} - \frac{(\operatorname{arctan} x)^2}{2} + c \\
 &= \frac{x^2}{2} (\operatorname{arctan} x)^2 - x \operatorname{arctan} x + \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} - \frac{(\operatorname{arctan} x)^2}{2} + c \\
 &= \frac{1}{2} (x^2 + 1) (\operatorname{arctan} x)^2 - x \operatorname{arctan} x + \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} + c
 \end{aligned}$$

(β) Θεωρούμε την αντικατάσταση $x + 1 = u$:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{(x+1)^3} dx &= \int \frac{(u-1)^2}{u^3} du = \int \frac{u^2 - 2u + 1}{u^3} du = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{u^2} + \frac{1}{u^3} \right) du = \ln|u| + \frac{2}{u} - \frac{1}{2u^2} + c \\
 &= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{u^2} + \frac{1}{u^3} \right) du = \ln|u| + \frac{2}{u} - \frac{1}{2u^2} + c = \ln(x+1) + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + c
 \end{aligned}$$

(γ) Χρησιμοποιούμε την (τριγωνομετρική) ταυτότητα $\eta\mu x = \frac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)}{\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}$:

$$\int \frac{1}{(2 + \eta\mu x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right) + \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + 1} dx (*)$$

Θεωρούμε την αντικατάσταση $u = \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow dx = \frac{2du}{\varepsilon\mu^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2}{u^2+1} du$ και άρα:

$$(*) = \int \frac{du}{u^2 + u + 1} = \int \frac{du}{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} (**)$$

Θεωρούμε την αντικατάσταση $w = \left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow dw = \frac{\sqrt{3}du}{2}$ και αρα:

$$(**) = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dw}{w^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctan} w + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctan} \left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctan} \left(\frac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

7. (α) Έχουμε:

$$I_f = \int e^x (f(x) + f'(x)) dx = \int e^x f(x) dx + \int e^x f'(x) dx$$

Είναι

$$\int e^x f(x) dx = \int (e^x)' f(x) dx = e^x f(x) - \int e^x f'(x) dx$$

και αρα $I_f = e^x f(x) + c$. Έτσι, αν $f(x) = \eta\mu x$, τότε $\int e^x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) dx = e^x \eta\mu x + c$

$$I_\nu = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^\nu} dx \quad (\nu \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0)$$

Για $\nu = 1$, έχουμε $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctan} \left(\frac{x}{a}\right) + c$ ενώ για $\nu > 1$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^\nu} = \int (x)' \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^\nu} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^\nu} - \int x \cdot \left(\frac{1}{(x^2 + a^2)^\nu}\right)' dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^\nu} + 2\nu \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{\nu+1}} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^\nu} + 2\nu \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{\nu+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^\nu} + 2\nu \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^\nu} - 2\nu a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\nu+1}} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^\nu} + 2\nu I_\nu - 2\nu a^2 I_{\nu+1} \end{aligned}$$

και λύνοντας ως προς $I_{\nu+1}$:

$$I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu a^2} \left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^\nu} + (2\nu - 1) I_\nu \right] \quad \text{ή} \quad I_n = \frac{1}{2(\nu - 1)a^2} \left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^{\nu-1}} + (2\nu - 3) I_{\nu-1} \right]$$

(β) Έχουμε

$$I_2 = \frac{1}{2(2-1)a^2} \left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^{2-1}} + (2 \cdot 2 - 3) I_{2-1} \right] = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a} \operatorname{arctan} \left(\frac{x}{a}\right) \right] + c$$

και

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2(3-1)a^2} \left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^{3-1}} + (2 \cdot 3 - 3) I_{3-1} \right] \\ &= \frac{1}{4a^2} \left[\frac{5x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{3}{2a^3} \left[\operatorname{arctan} \left(\frac{x}{a}\right) \right] \right] + c \end{aligned}$$

8. $f(x) = -\frac{2}{x^3}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Η συνάρτηση F με τύπο

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x > 0 \\ \frac{1}{x^2}, & x < 0 \end{cases}$$

είναι μια παράγουσα της f αφού για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ έχουμε $F'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$. Ομοίως και η συνάρτηση G με τύπο

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + 5, & x > 0 \\ \frac{1}{x^2} - 5, & x < 0 \end{cases}$$

είναι μια παράγουσα της f αφού για $x \in (-\infty, 0)$ έχουμε $G'(x) = \left(\frac{1}{x^2} - 5\right)' = -\frac{2}{x^3}$ και για $x \in (0, +\infty)$ έχουμε $G'(x) = \left(\frac{1}{x^2} + 5\right)' = -\frac{2}{x^3}$. Σε κάθε περίπτωση, $F' \equiv f$, $G' \equiv f$. Είναι λάθος να γράψουμε

$$\int \left(-\frac{2}{x^3}\right) dx = \frac{1}{x^2}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \equiv \mathbb{R} - \{0\}$$

αφού το σύνολο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ δεν είναι συνεκτικό.

9. Έχουμε:

$$I_f = \int e^x (f(x) + f'(x)) dx = \int e^x f(x) dx + \int e^x f'(x) dx$$

Είναι

$$\int e^x f(x) dx = \int (e^x)' f(x) dx = e^x f(x) - \int e^x f'(x) dx$$

και άρα $I_f = e^x f(x) + c$. Έτσι, αν $f(x) = \eta \mu x$, τότε $\int e^x (\eta \mu x + \sigma \nu \nu x) dx = e^x \eta \mu x + c$

10. Θα βρούμε την f σε κάθε περίπτωση:

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{cases} f^2(x) f'(x) = x^2 + 1 \\ f(0) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{f^3(x)}{3}\right)' = x^2 + 1 \\ f(0) = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \int \left(\frac{f^3(x)}{3}\right)' dx = \int (x^2 + 1) dx \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{f^3(x)}{3} = \frac{x^3}{3} + x + c \\ f(0) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Είναι $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ και άρα

$$\frac{f^3(x)}{3} = \frac{x^3}{3} + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Για $x > 0$, η πιο πάνω δίνει

$$f^3(x) = x^3 + 3x, \quad \forall x > 0$$

και αφού $f(0) = 0$, έπεται ότι

$$f^3(x) = x^3 + 3x, \quad \forall x \geq 0$$

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{cases} x f'(x) = e^x - f(x) \\ f(2) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x f'(x) + f(x) = e^x \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int (x f'(x) + f(x))' dx = \int e^x dx \\ f(2) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int (xf(x))' dx = e^x \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xf(x) = e^x + c \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

Είναι $f(2) = 0 \Rightarrow c = -e^2$ και αρα $xf(x) = e^x - e^2, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, δηλ.

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{e^2}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

(γ) Έχουμε

$$\begin{cases} 2xf'(x) + x^2f''(x) = 2x + 1 \\ f'(1) = f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int (x^2f'(x))' dx = \int (2x + 1) dx \\ f'(1) = f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2f'(x) = x^2 + x + c_1 \\ f'(1) = f(1) = 2 \end{cases}$$

Αλλά, $f'(1) = 2$ και αρα $c_1 = 0$. Το ΠΑΤ μας γίνεται λοιπόν

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2f'(x) = x^2 + x \\ f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int f'(x) dx = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx \\ f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x + \ln|x| + c \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

Αλλά, $f(1) = 2$ και αρα $1 = c$ και έτσι

$$f(x) = x + \ln|x| + 1$$

11. Έχουμε

$$f''(x) = \frac{2}{(x-3)^2}, \quad x \neq 3$$

Η συνάρτηση F με τύπο

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x-3} + C_1, & x > 3 \\ -\frac{2}{x-3} + C_2, & x < 3 \end{cases}$$

είναι μια παράγουσα της f'' . Από υπόθεση, $f'(4) = 0$ και αρα $C_1 = 2$. Έτσι,

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x-3} + 2, & x > 3 \\ -\frac{2}{x-3} + C_2, & x < 3 \end{cases}$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας και το ότι $f(4) = 4$, βρίσκουμε ότι μια τέτοια συνάρτηση είναι και η

$$f(x) = \begin{cases} -2\ln(x-3) + 2x - 12, & x > 3 \\ -2\ln(3-x) + 2x - 12, & x < 3 \end{cases}$$

Η f δεν είναι μοναδική: η

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-3}, \quad x \neq 3$$

επίσης ικανοποιεί το ΠΑΤ.

12. Έχουμε

$$\begin{cases} f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ f'(0) = 3, f(0) = 2 \end{cases}$$

(α) Είναι $\forall x \in \mathbb{R} \ u(x) = f'(x) - f(x) \Rightarrow u'(x) = f''(x) - f'(x)$ και αρα

$$u'(x) - 2u(x) = f''(x) - f'(x) - 2f'(x) + 2f(x) = f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

από υπόθεση.

(β) Είναι $u(0) = f'(0) - f(0) = 3 - 2 = 1$. Τώρα, θεωρούμε τη συνάρτηση h με τύπο $h(x) = e^{-2x}u(x)$. Είναι

$$h'(x) = (e^{-2x}u(x))' \Rightarrow h'(x) = -2e^{-2x}u(x) + e^{-2x}u'(x) = e^{-2x} \underbrace{(u'(x) - 2u(x))}_{=0} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

και αρα, από γνωστό μας Πόρισμα, είναι $h(x) = c$ για κάποια πραγματική σταθερά c , δηλ. $e^{-2x}u(x) = c$, δηλ. $u(x) = ce^{2x}, \forall x \in \mathbb{R}$. Αλλά, $u(0) = 1$ και αρα $c = 1$. Συνεπώς,

$$u(x) = e^{2x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(γ) Είναι $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(e^{-x}f(x))' = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) = u(x)e^{-x} = e^{2x} \cdot e^{-x} = e^x$$

Τώρα,

$$(e^{-x}f(x))' = e^x \Rightarrow \int (e^{-x}f(x))' dx = \int e^x dx \Rightarrow e^{-x}f(x) = e^x + c \Rightarrow f(x) = e^{2x} + ce^x$$

Αλλά, $f(0) = 2$ και αρα $c + 1 = 2$, δηλ. $c = 1$. Έτσι,

$$f(x) = e^{2x} + e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Δραστηριότητες σελ. 60 (Εμπλουτισμού)
1. Είναι

$$f(x) = |3x - 6| = 3|x - 2| = \begin{cases} 3(x - 2), & x \geq 2 \\ 3(2 - x), & x < 2 \end{cases}$$

Κατ'αρχάς, λόγω της συνέχεις της συνάρτησης στο $\mathbb{R}$, αυτή θα έχει παράγουσα. Για $x \geq 2$ είναι

$$f(x) = 3(x - 2) \Rightarrow \int f(x) dx = 3 \int (x - 2) dx = 3x \left(\frac{x}{2} - 2 \right) + c$$

ενώ για $x < 2$ είναι

$$f(x) = 3(2 - x) \Rightarrow \int f(x) dx = 3 \int (2 - x) dx = 3x \left(2 - \frac{x}{2} \right) + c$$

και αρα μια παράγουσά της είναι (π.χ.) η

$$f(x) = \begin{cases} 3x \left(\frac{x}{2} - 2 \right) - 1, & x \geq 2 \\ 3x \left(2 - \frac{x}{2} \right) + 1, & x < 2 \end{cases}$$

2. $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f''(x) = -\frac{1}{x^2}, f'(1) = 3, f(1) = 3$

Για $x > 0$ είναι

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \int f''(x) dx = \int \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{1}{x} + c_1$$

και αφού $f'(1) = 3$, αντικαθιστώντας, έχουμε ότι $c_1 = 2$, δηλ. $f'(x) = \frac{1}{x} + 2$. Τώρα,

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2 \Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(\frac{1}{x} + 2 \right) dx = \ln x + 2x + c_2$$

και αφού $f(1) = 3$, αντικαθιστώντας, έχουμε ότι $c_2 = 1$, δηλ. $f(x) = \ln x + 2x + 1$, $x > 0$.

3. Δεν ισχύει ότι κάθε συνάρτηση $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει μια παράγουσα F , τότε είναι και συνεχής. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Για $x \neq 0$ η συνάρτηση είναι συνεχής και

$$\int f(x) dx = \int \left(2x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx = \int \left(x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right)' dx = x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) + c$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση F με τύπο $F(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Ελέγχουμε αν υπάρχει η παράγωγος

στο $x = 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(0+h) - F(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

(π.χ. με εφαρμογή του Κριτηρίου Παρεμβολής) και αρα υπάρχει η $F'(0)$ και $= 0$. Έτσι, η (συνεχής) επέκταση g της F , δηλ. η συνάρτηση με τύπο

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι παντού παραγωγίσιμη και μάλιστα $g'(x) = f(x)$. Αλλά, η f δεν είναι συνεχής στο $x = 0$ (δες Θεωρία)

Έτσι, βρήκαμε δυο ακολουθίες πραγματικών αριθμών που συγκλίνουν στο 0 αλλά οι εικόνες τους μέσω της f συγκλίνουν σε διαφορετικούς αριθμούς. Συνεπώς, η f' δεν είναι συνεχής στο $x = 0$ άρα ούτε και παραγωγίσιμη εκεί.

Μέρος II - Αθροίσματα & Σειρές Πραγματικών Αριθμών

Δραστηριότητες σελ 67 (Ενότητα 4.1: Ιδιότητες του Σ-συμβολισμού)

1. (α) Έχουμε

$$\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{8} + \sqrt{9} + \sqrt{10} + \sqrt{11} = \sum_{k=3}^{11} \sqrt{k}$$

(β) Έχουμε

$$2 + 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{2}{6} + \frac{2}{7} = \frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{2}{6} + \frac{2}{7} = \sum_{i=1}^7 \frac{2}{i} = 2 \sum_{i=1}^7 \frac{1}{i}$$

(γ) Έχουμε

$$2^2 + 5^2 + 8^2 + 11^2 + \dots + 26^2 + 29^2 = \sum_{k=1}^{10} (3k-1)^2$$

Πως το βρήκαμε:

Οι όροι $2, 5, 8, 11, \dots, 26, 29$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. $(\alpha_k)_k$ με σταθερή διαφορά $\delta = 3$ και αρχικό όρο $\alpha_1 = 2$. Έτσι,

$$\alpha_k = \alpha_1 + (k-1)\delta = 2 + (k-1)3 = 3k-1.$$

Επίσης, $\alpha_k = 29 \Leftrightarrow 3k-1 = 29 \Leftrightarrow k = 10$.

(ε) Έχουμε

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \dots + 2 \cdot 3^{15} = 2 \sum_{k=1}^{15} 3^k$$

2. (α) Έχουμε

$$\sum_{v=3}^7 \left(\frac{v-4}{v} \right) = \left(\frac{3-4}{3} \right) + \left(\frac{4-4}{4} \right) + \left(\frac{5-4}{5} \right) + \left(\frac{6-4}{6} \right) + \left(\frac{7-4}{7} \right) = -\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + \frac{2}{6} + \frac{3}{7} = \frac{22}{35}$$

(β) Έχουμε

$$\sum_{v=1}^{50} (-1)^{v-1} = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{49} = 1 + (-1) + \dots + (+1) + (-1) = 0$$

Σημείωση: $\sum_{v=1}^{50} (-1)^{v-1} = \sum_{v=0}^{49} (-1)^v$

(γ) Έχουμε

$$\sum_{i=1}^4 (i^2 + 3i - 1) = (1^2 + 3 \cdot 1 - 1) + (2^2 + 3 \cdot 2 - 1) + (3^2 + 3 \cdot 3 - 1) + (4^2 + 3 \cdot 4 - 1) = 3 + 9 + 17 + 27 = 56$$

3. Έχουμε

$$\sum_{\kappa=1}^{10} (3\kappa + \lambda) = 245 \Leftrightarrow 3 \sum_{\kappa=1}^{10} \kappa + \lambda \sum_{\kappa=1}^{10} 1 = 245 \Leftrightarrow 3 \sum_{\kappa=1}^{10} \kappa + \lambda \sum_{\kappa=1}^{10} 1 = 245 \quad (*)$$

Αλλά, $\sum_{\kappa=1}^{10} \kappa = 1 + 2 + \dots + 10 = 55$ και $\sum_{\kappa=1}^{10} 1 = 10$

Έτσι, $(*) \Leftrightarrow 3 \cdot 55 + 10\lambda = 245 \Leftrightarrow 10\lambda = 245 - 165 \Leftrightarrow \lambda = 8$

4. (α) Έχουμε

$$\sum_{k=1}^v (2 \cdot 4^{k-1}) = \sum_{k=1}^v (2 \cdot 2^{2k-2}) = \sum_{k=1}^v (2^{2k-1}) = 2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{2v-1}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα v πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο 2 και σταθερό λόγο $\lambda = 2^2 = 4$. Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^v (2 \cdot 4^{k-1}) = \frac{\alpha_1(\lambda^v - 1)}{\lambda - 1} = \frac{2(4^v - 1)}{4 - 1} = \frac{2(4^v - 1)}{3}$$

(β) Έχουμε
$$\sum_{k=11}^v (5) = 5 \left(\sum_{k=1}^v (1) - \sum_{k=1}^{10} (5) \right)$$

Για το πρώτο άθροισμα, παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα v πρώτων όρων αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και σταθερή διαφορά $\delta = 1$. Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^v (1) = \frac{v(\alpha_1 + \alpha_v)}{2} = \frac{v(1 + 1)}{2} = v$$

ενώ για το δεύτερο, παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα 10 πρώτων όρων αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και σταθερή διαφορά $\delta = 1$. Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{10} (1) = \frac{10(1 + 1)}{2} = 10 \quad \text{και αρα} \quad \sum_{k=11}^v (5) = 5 \left(\sum_{k=1}^v (1) - \sum_{k=1}^{10} (5) \right) = 5(v + 10)$$

(γ) Έχουμε
$$\sum_{k=1}^v (2^{-k}) = \sum_{k=1}^v \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^v \left(\frac{1}{2} \right)^k$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα v πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\frac{1}{2}$ και σταθερό λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$. Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^v (2^{-k}) = \frac{\alpha_1(\lambda^v - 1)}{\lambda - 1} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^v} - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^v}$$

5. Έχουμε για κάθε v φυσικό αριθμό, $S_v = v^2 + 4v$. Είναι
$$\alpha_v = S_v - S_{v-1} = v^2 + 4v - ((v-1)^2 + 4(v-1)) = 2v + 3$$

και αρα η σειρά που αντιστοιχεί στο πιο πάνω μερικό άθροισμα είναι η

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{+\infty} \alpha_v &= \sum_{v=1}^{+\infty} (2v + 3) = (2 \cdot 1 + 3) + (2 \cdot 2 + 3) + \dots \\ &= 5 + 7 + 9 + 11 + \dots \end{aligned}$$

6. Έχουμε
$$\sum_{k=1}^{30} (4\alpha_k - 3\beta_k) = \sum_{k=1}^{30} (4\alpha_k) + \sum_{k=1}^{30} (-3\beta_k) = 4 \sum_{k=1}^{30} \alpha_k - 3 \sum_{k=1}^{30} \beta_k = 4 \cdot 300 - 3 \cdot (-50) = 1350$$

1. (α)

$$\sum_{k=1}^v \left(-\frac{1}{2}\right)^k = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^v = \frac{-\frac{1}{2}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^v\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^v\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{v \rightarrow +\infty} S_v = -\frac{1}{3} \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^v\right) = -\frac{1}{3}$$

και αρα η σειρά συγκλίνει (στον αριθμό $-\frac{1}{3}$)

(β) $\sum_{k=1}^{\infty} (3)^k$ Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς:

$$S_v = \sum_{k=1}^v (3)^k = 3 + (3)^2 + \dots + (3)^v \Rightarrow \lim_{v \rightarrow +\infty} S_v = +\infty$$

και αρα η σειρά δε συγκλίνει.

(γ) Έχουμε

$$\sum_{k=1}^v (3)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^v = \frac{\frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^v\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^v\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{v \rightarrow +\infty} S_v = \frac{1}{2} \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^v\right) = \frac{1}{2}$$

2. Έχουμε

$$\sum_{k=1}^v k(12k + 8) = \sum_{k=1}^v (12k^2 + 8k) = \sum_{k=1}^v (12k^2) + \sum_{k=1}^v (8k) = 12 \sum_{k=1}^v k^2 + 8 \sum_{k=1}^v k$$

$$= 12 \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} + 8 \frac{v(v+1)}{2} = 2v(v+1)((2v+1)+2) = 2v(v+1)(2v+3)$$

3. (α) Είναι

$$\sum_{k=1}^v (k+2)(k+6) = \sum_{k=1}^v (k^2 + 8k + 12) = \sum_{k=1}^v k^2 + 8 \sum_{k=1}^v k + 12 \sum_{k=1}^v 1$$

$$= \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} + 8 \frac{v(v+1)}{2} + 12v = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} + 4v(v+1) + 12v$$

$$= v \left[\frac{(v+1)(2v+1)}{6} + 4(v+1) + 12 \right]$$

(β) Είναι

$$\sum_{k=1}^v (4k^3 + 6k^2 + 2k) = 4 \sum_{k=1}^v k^3 + 6 \sum_{k=1}^v k^2 + 2 \sum_{k=1}^v k = 4 \frac{v^2(v+1)^2}{4} + 6 \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} + 2 \frac{v(v+1)}{2}$$

$$= v^2(v+1)^2 + v(v+1)(2v+1) + v(v+1) = v(v+1)[v(v+1) + 2v + 2] = v(v+1)^2(v+2)$$

(γ) Είναι

$$\sum_{k=1}^v k(k+1)(k+3) = \sum_{k=1}^v (k^3 + 4k^2 + 3k) = \sum_{k=1}^v k^3 + 4 \sum_{k=1}^v k^2 + 3 \sum_{k=1}^v k$$

$$= \frac{v^2(v+1)^2}{4} + 4 \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} + 3 \frac{v(v+1)}{2} = \frac{v(v+1)}{2} \left[\frac{v(v+1)}{2} + 4 \frac{2v+1}{3} + 3 \right]$$

4. (α)

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^3 = \sum_{k=1}^{\infty} 2^3 \cdot k^3 = 8 \sum_{k=1}^{\infty} k^3$$

και αρα

$$S_v = 8 \sum_{k=1}^v k^3 = 8 \frac{v^2(v+1)^2}{4} = 2v^2(v+1)^2$$

$$(β) \quad 1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 7^2 + 4 \cdot 10^2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} k(3k-2)^2$$

Πως το βρήκαμε:

Οι όροι $1, 4, 7, 10, \dots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. $(\alpha_k)_k$ με σταθερή διαφορά $\delta = 3$ και αρχικό όρο $\alpha_1 = 1$. Έτσι,

$$\alpha_k = \alpha_1 + (k-1)\delta = 1 + (k-1)3 = 3k-2.$$

και αρα

$$\begin{aligned} S_v &= \sum_{k=1}^v k(3k-2)^2 = \sum_{k=1}^v k(9k^2 - 12k + 4) = \sum_{k=1}^v (9k^3 - 12k^2 + 4k) = 9 \sum_{k=1}^v k^3 - 12 \sum_{k=1}^v k^2 + 4 \sum_{k=1}^v k \\ &= 9 \frac{k^2(k+1)^2}{4} - 12 \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + 4 \frac{k(k+1)}{2} = 9 \frac{k^2(k+1)^2}{4} - 2k(k+1)(2k+1) + 2k(k+1) \\ &= k(k+1) \left(9 \frac{k(k+1)}{4} - 2(2k+1) + 2 \right) \end{aligned}$$

$$(γ) \quad 2 \cdot 4 + 5 \cdot 7 + 8 \cdot 10 + 11 \cdot 13 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (3k-1)(3k+1) = \sum_{k=1}^{\infty} (9k^2 - 1)$$

Πως το βρήκαμε:

Οι όροι $2, 5, 8, 11, \dots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. $(\alpha_k)_k$ με σταθερή διαφορά $\delta = 3$ και αρχικό όρο $\alpha_1 = 2$. Έτσι,

$$\alpha_k = \alpha_1 + (k-1)2 = 2 + (k-1)3 = 3k-1.$$

Οι όροι $4, 7, 10, 13, \dots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. $(\alpha_k)_k$ με σταθερή διαφορά $\delta = 3$ και αρχικό όρο $\alpha_1 = 4$. Έτσι,

$$\alpha_k = \alpha_1 + (k-1)3 = 4 + (k-1)3 = 3k+1.$$

και αρα

$$S_v = \sum_{k=1}^v (9k^2 - 1) = 9 \sum_{k=1}^v k^2 - \sum_{k=1}^v 1 = 9 \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} - v = v \left[3 \frac{(v+1)(2v+1)}{2} + 1 \right]$$

5. Είναι για $v \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^v (6k^2 + 4k - 1) &= 6 \sum_{k=1}^v k^2 + 4 \sum_{k=1}^v k - \sum_{k=1}^v 1 = 6 \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} + 4 \frac{v(v+1)}{2} - v \\ &= v(v+1)(2v+1) + 2v(v+1) - v = v((v+1)(2v+1) + 2(v+1) - 1) \\ &= v((v+1)(2v+1) + 2(v+1) - 1) = v(2v^2 + 3v + 1) = v(v+1) \left(v - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Το πιο πάνω δίνει:

$$\sum_{k=1}^{40} (6k^2 + 4k - 1) = 40(40+1) \left(40 - \frac{1}{2} \right) \text{ και } \sum_{k=1}^{20} (6k^2 + 4k - 1) = 20(20+1) \left(20 - \frac{1}{2} \right)$$

και αρα

$$\begin{aligned} \sum_{k=21}^{40} (6k^2 + 4k - 1) &= \sum_{k=1}^{40} (6k^2 + 4k - 1) - \sum_{k=1}^{20} (6k^2 + 4k - 1) \\ &= 40(40+1) \left(40 - \frac{1}{2} \right) - 20(20+1) \left(20 - \frac{1}{2} \right) = 118040 \end{aligned}$$

Δραστηριότητες σελ. 80 (Ενότητα 4.5: Μέθοδοι υπολογισμού του Αθροίσματος μιας Σειράς)

1. (α) Έχουμε

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2^2 + 3 \cdot 4^2 + 5 \cdot 6^2 + \dots &= \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^2 (2k-1) \\ \Rightarrow S_n &= 4 \sum_{k=1}^n (2k^3 - k^2) = 4 \left(2 \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= n(n+1) \left(2n(n+1) - 2 \frac{2n+1}{3} \right) \\ &= \frac{2}{3} n(n+1)(3n^2 + n - 1) \end{aligned}$$

Πως το βρήκαμε:

Οι όροι $1, 3, 5, \dots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. $(\alpha_n)_n$ με σταθερή διαφορά $\delta = 2$ και αρχικό όρο $\alpha_1 = 1$. Έτσι,

$$\alpha_k = \alpha_1 + (k-1)2 = 1 + (k-1)2 = 2k-1.$$

Οι όροι $2, 4, 6, \dots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. $(\alpha_n)_n$ με σταθερή διαφορά $\delta = 2$ και αρχικό όρο $\alpha_1 = 2$. Έτσι,

$$\alpha_k = \alpha_1 + (k-1)\delta = 2 + (k-1)2 = 2k.$$

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} 2 \cdot 5 + 6 \cdot 8 + 10 \cdot 11 + 14 \cdot 14 + \dots &= \sum_{k=1}^{\infty} 2(2k-1)(3k-2) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (6k^2 - 7k + 2) \\ \Rightarrow S_n &= 2 \sum_{k=1}^n (6k^2 - 7k + 2) = 2 \left(6 \sum_{k=1}^n k^2 - 7 \sum_{k=1}^n k + 2 \sum_{k=1}^n 1 \right) \\ &= 4 \left(6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 7 \frac{n(n+1)}{2} + 2n \right) \\ &= 4n \left((n+1)(2n+1) - 7 \frac{n+1}{2} + 2 \right) \\ &= n(4n^2 + 7n - 1) \end{aligned}$$

Πως το βρήκαμε:

Οι όροι $5, 8, 11, 14, \dots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. $(\alpha_k)_k$ με σταθερή διαφορά $\delta = 3$ και αρχικό όρο $\alpha_1 = 5$. Έτσι,

$$\alpha_k = \alpha_1 + (k-1)\delta = 5 + (k-1)3 = 3k-2.$$

Οι όροι $2, 6, 10, 14, \dots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. $(\alpha_k)_k$ με σταθερή διαφορά $\delta = 4$ και αρχικό όρο $\alpha_1 = 2$. Έτσι,

$$\alpha_k = \alpha_1 + (k-1)\delta = 2 + (k-1)4 = 2(2k-1).$$

(γ) Έχουμε

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^3 = \sum_{k=1}^{\infty} (8k^3 - 4k^2 + 2k - 1)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow S_v &= 2 \sum_{k=1}^v (8k^3 - 4k^2 + 2k - 1) = 2 \left(8 \sum_{k=1}^v k^3 - 4 \sum_{k=1}^v k^2 + 2 \sum_{k=1}^v k - \sum_{k=1}^v 1 \right) \\
 &= 2 \left(8 \frac{v^2(v+1)^2}{4} - 4 \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} + 2 \frac{v(v+1)}{2} - v \right) \\
 &= 2 \left(2v^2(v+1)^2 - 2 \frac{v(v+1)(2v+1)}{3} + v(v+1) - v \right) \\
 &= v^2(2v^2 - 1)
 \end{aligned}$$

Πως το βρήκαμε:

Οι όροι $1, 3, 5, 7, \dots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. $(\alpha_k)_k$ με σταθερή διαφορά $\delta = 2$ και αρχικό όρο $\alpha_1 = 1$. Έτσι,

$$\alpha_k = \alpha_1 + (k-1)\delta = 1 + (k-1)2 = 2k-1.$$

(δ) Έχουμε

$$\begin{aligned}
 1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + \dots + v(v+1)(v+2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^v (8k^3 - 4k^2 + 2k - 1) \\
 \Rightarrow S_v &= \sum_{k=1}^v (k^3 + 3k^2 + 2k) = \sum_{k=1}^v k^3 + 3 \sum_{k=1}^v k^2 + 2 \sum_{k=1}^v k \\
 &= \frac{v^2(v+1)^2}{4} + 3 \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} + 2 \frac{v(v+1)}{2} \\
 &= v(v+1) \left(\frac{v(v+1)}{4} + \frac{2v+1}{2} + 1 \right) \\
 &= \frac{1}{4} v(v+1)(v+2)(v+3)
 \end{aligned}$$

2. Έχουμε

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=v+1}^{3v} k(6k-2) &= 2 \sum_{k=v+1}^{3v} k(3k-1) = 2 \sum_{k=v+1}^{3v} (3k^2 - k) = 2 \left(\sum_{k=1}^{3v} (3k^2 - k) - \sum_{k=1}^{v+1} (3k^2 - k) \right) \\
 &= 2 \left(3 \sum_{k=1}^{3v} k^2 - \sum_{k=1}^{3v} k - 3 \sum_{k=1}^{v+1} k^2 + \sum_{k=1}^{v+1} k \right) \\
 &= 2 \left(\frac{3v(3v+1)(6v+1)}{6} - \frac{3v(3v+1)}{2} - \frac{(v+1)(v+2)(2v+3)}{6} + \frac{(v+1)(v+2)}{2} \right) \\
 &= 2 \left(\frac{v(3v+1)(6v+1)}{2} - \frac{3v(3v+1)}{2} - \frac{(v+1)(v+2)(2v+3)}{6} + \frac{(v+1)(v+2)}{2} \right) \\
 &= v(3v+1)(6v+1) - 3v(3v+1) - \frac{(v+1)(v+2)(2v+3)}{3} + (v+1)(v+2) \\
 &= 4v^2(13v+4)
 \end{aligned}$$

3. (α) Έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Είναι} \quad S_v &= \sum_{\kappa=1}^v \frac{1}{\kappa(\kappa+2)} = \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^v \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa+2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \dots + \left(\frac{1}{v-3} - \frac{1}{v-1}\right) + \left(\frac{1}{v-2} - \frac{1}{v}\right) + \left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+2}\right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{v+2} \right) \\
 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} S_v = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{v+1} \right) = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

(β) Έχουμε

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{9\kappa^2 - 1} = \frac{1}{9} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

Με μεθόδους που ξεφεύγουν από την ύλη του Λυκείου, αποδεικνύεται ότι αν $\alpha \in (0,1)$, τότε

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} - \pi \sigma \varphi(\alpha\pi) \right]$$

και άρα

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{3}} \left[\frac{1}{\frac{1}{3}} - \pi \sigma \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = \frac{3}{2} \left(3 - \pi \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

Έτσι,

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{9\kappa^2 - 1} = \frac{1}{9} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{18} (9 - \pi\sqrt{3})$$

4. Έστω ότι $S_v = \frac{v}{3(2v+3)}$

(α) Είναι για κάθε $v \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_v = S_v - S_{v-1} = \frac{v}{3(2v+3)} - \frac{v-1}{3(2(v-1)+3)} = \frac{v}{3(2v+3)} - \frac{v-1}{3(2v+1)} = \frac{1}{(2v+1)(2v+3)}$$

(β) Έχουμε $\alpha_{10} = \frac{1}{(20+1)(20+3)} = \frac{1}{483}$

(γ) Έχουμε $S_{15} = \frac{15}{3(30+3)} = \frac{5}{33}$

5. 2, 5, 9, 14, 20, 27, ...

Είναι

$$\alpha_1 = 2 = 1 + 1$$

$$\alpha_2 = 5 = 2 + 3 = \alpha_1 + 3 = \alpha_{2-1} + (2 + 1)$$

$$\alpha_3 = 9 = 5 + 4 = \alpha_2 + 4 = \alpha_{3-1} + (3 + 1)$$

$$\alpha_4 = 14 = 9 + 5 = \alpha_3 + 5 = \alpha_{4-1} + (4 + 1)$$

$\vdots$

$$\alpha_v = \alpha_{v-1} + (v + 1)$$

Διαφορετικά

$$\alpha_1 = 2 = 1 + 1$$

$$\alpha_2 = 5 = 2 + 3$$

$$\alpha_3 = 9 = 2 + 3 + 4$$

$$\alpha_4 = 14 = 2 + 3 + 4 + 5$$

$\vdots$

$$\alpha_v = 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + (v + 1)$$

και άρα

$$\alpha_v = \alpha_1 + 3 + 4 + \dots + (v+1) = 2 + 3 + 4 + \dots + v + (v+1) = \frac{v(v+3)}{2}$$

Αλλά, για κάθε $v \in \mathbb{N}$:

$$2 + 3 + 4 + 5 + \dots + (v+1) = \sum_{k=2}^{v+1} \kappa = \sum_{k=1}^v \kappa + v = \frac{v(v+1)}{2} + v = \frac{v(v+1) + 2v}{2} = \frac{v(v+3)}{2}$$

Τέλος,

$$S_v = \sum_{\kappa=1}^v \frac{\kappa(\kappa+3)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^v (\kappa^2 + 3\kappa) = \frac{1}{2} \left(\frac{v(v+1)(2v+1)}{6} + 3 \frac{v(v+1)}{2} \right) = \frac{v(v+1)}{4} \left(\frac{2v+1}{3} + 3 \right)$$

Δραστηριότητες σελ. 81 (Ενότητας)

1. Είναι για $v \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^v (\kappa+3)^2 &= \sum_{k=1}^v (\kappa^2 + 6\kappa + 9) = \sum_{k=1}^v \kappa^2 + 6 \sum_{k=1}^v \kappa + 9 \sum_{k=1}^v 1 = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} + 6 \frac{v(v+1)}{2} + 9v \\ &= \frac{1}{6} v \left[(v+1)(2v+1) + 2v(v+1) + \frac{3}{2}v \right] = \frac{1}{6} v(2v^2 + 21v + 73) \end{aligned}$$

Το πιο πάνω δίνει:

$$\begin{aligned} \sum_{k=10}^{30} (\kappa+3)^2 &= \sum_{k=1}^{30} (\kappa+3)^2 - \sum_{k=1}^9 (\kappa+3)^2 = \frac{1}{6} 30(2 \cdot 30^2 + 21 \cdot 30 + 73) - \frac{1}{6} 9(2 \cdot 9^2 + 21 \cdot 9 + 73) \\ &= \mathbf{11879} \end{aligned}$$

2. Έχουμε

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + v(v+1) &= \sum_{\kappa=1}^v \kappa(\kappa+1) = \sum_{\kappa=1}^v (\kappa^2 + \kappa) = \sum_{\kappa=1}^v \kappa^2 + \sum_{\kappa=1}^v \kappa \\ &= \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} + \frac{v(v+1)}{2} = \frac{v(v+1)}{2} \left(\frac{2v+1}{3} + 1 \right) = \frac{v(v+1)}{2} \frac{2v+4}{3} = \mathbf{v(v+1)(v+2)} \end{aligned}$$

3. Δες παράδειγμα 1(β)/σελ.77

4. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 \left(\sum_{j=1}^6 (2i+j) \right) &= \sum_{i=1}^5 \left(2 \sum_{j=1}^6 i + \sum_{j=1}^6 j \right) = \sum_{i=1}^5 \left(2i \sum_{j=1}^6 1 + \frac{6(6+1)}{2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^5 (2i \cdot 6 + 21) = 12 \sum_{i=1}^5 i + 21 \sum_{i=1}^5 1 \\ &= 12 \frac{5(5+1)}{2} + 21 \cdot 5 = \mathbf{285} \end{aligned}$$

5. (α) Έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa(\kappa+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

Είναι

$$S_v = \sum_{\kappa=1}^v \frac{1}{\kappa(\kappa+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^v \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{v-3} - \frac{1}{v-1}\right) + \left(\frac{1}{v-2} - \frac{1}{v}\right) + \left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+2}\right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{v+2} \right) \\
 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} S_v = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{v+1} \right) = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

(β) Είναι

$$\begin{aligned}
 S_v &= \sum_{\kappa=3}^v \frac{1}{(\kappa-2)(\kappa+2)} = \frac{1}{4} \sum_{\kappa=3}^v \left(\frac{1}{\kappa-2} - \frac{1}{\kappa+2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{v-5} - \frac{1}{v-1}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{v-4} - \frac{1}{v}\right) + \left(\frac{1}{v-3} - \frac{1}{v+1}\right) + \left(\frac{1}{v-2} - \frac{1}{v+2}\right) \right) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{v+2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{25}{12} - \frac{1}{v+2} \right)
 \end{aligned}$$

και αρα

$$\sum_{\kappa=3}^{\infty} \frac{1}{(\kappa-2)(\kappa+2)} = \sum_{\kappa=3}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa-2} - \frac{1}{\kappa+2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} S_v = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{25}{12} - \frac{1}{v+2} \right) = \frac{25}{48}$$

(γ) Έχουμε

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{3^{\kappa+1}}{7^{\kappa}} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{3^{\kappa} \cdot 3}{7^{\kappa}} = 3 \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{3^{\kappa}}{7^{\kappa}} = 3 \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{3}{7} \right)^{\kappa}$$

Η $\sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{3}{7} \right)^{\kappa}$ είναι γεωμετρική σειρά (αφού $\left| \frac{3}{7} \right| < 1$ η οποία συγκλίνει στον αριθμό $\frac{\frac{3}{7}}{1 - \frac{3}{7}} = \frac{3}{4}$ και αρα

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{3^{\kappa+1}}{7^{\kappa}} = \frac{9}{4}$$

(δ) Έχουμε για $v \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο

$$S_v = \sum_{\kappa=2}^v \frac{\kappa^2}{\kappa^2 - 1} = \sum_{\kappa=2}^v \left(1 + \frac{1}{\kappa^2 - 1} \right) = \sum_{\kappa=2}^v \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa-1} - \frac{1}{\kappa+1} \right) \right) = \sum_{\kappa=2}^v 1 + \frac{1}{2} \sum_{\kappa=2}^v \left(\frac{1}{\kappa-1} - \frac{1}{\kappa+1} \right)$$

Αλλά, $\sum_{\kappa=2}^v 1 = v - 1$ και

$$\sum_{\kappa=2}^v \left(\frac{1}{\kappa-1} - \frac{1}{\kappa+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{v-3} - \frac{1}{v-1} \right) + \left(\frac{1}{v-2} - \frac{1}{v} \right) + \left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1} \right) = 1 - \frac{2}{v}$$

Τελικά $S_v = \sum_{\kappa=2}^v \frac{\kappa^2}{\kappa^2 - 1} = v - \frac{1}{2} - \frac{1}{v}$ και αρα η σειρά δε συγκλίνει.

6. Είναι η άσκηση 2

7. Έχουμε

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{10}{\sum_{\kappa=1}^v \kappa} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{10}{\frac{v(v+1)}{2}} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{20}{v(v+1)} = 20 \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1} \right)$$

και αφού (κατα τα γνωστά) είναι $\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1} \right) = \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{v+1} \right) = 1$ έπεται ότι $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{10}{\sum_{\kappa=1}^v \kappa} = 20$.

Δραστηριότητες σελ. 82 (Εμπλουτισμού)

1. (α) Δεν ισχύει ότι

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} (\alpha_{\kappa} \cdot \beta_{\kappa}) = \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\kappa} \right) \cdot \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \beta_{\kappa} \right)$$

Για παράδειγμα, $\alpha_{\kappa} = \nu, \forall \kappa \in \{1, 2, 3, \dots, \nu\}$ και $\beta_{\kappa} = \frac{1}{\nu}, \forall \kappa \in \{1, 2, 3, \dots, \nu\}$. Τότε $\alpha_{\kappa} \cdot \beta_{\kappa} = 1, \forall \kappa \in \{1, 2, 3, \dots, \nu\}$ και αρα

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} (\alpha_{\kappa} \cdot \beta_{\kappa}) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} 1 = \nu \quad \text{ενώ} \quad \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\kappa} \right) \cdot \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \beta_{\kappa} \right) = \left(\nu \sum_{\kappa=1}^{\nu} 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{\nu} \sum_{\kappa=1}^{\nu} 1 \right) = \nu^2$$

(β) Δεν ισχύει ότι $\sum_{\kappa=1}^{\nu} \left(\frac{\alpha_{\kappa}}{\beta_{\kappa}} \right) = \frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\kappa}}{\sum_{\kappa=1}^{\nu} \beta_{\kappa}}$

Για παράδειγμα, α_{κ} και β_{κ} όπως πιο πάνω. Τότε

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \left(\frac{\alpha_{\kappa}}{\beta_{\kappa}} \right) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \nu^2 = \nu^3 \quad \text{ενώ} \quad \frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\kappa}}{\sum_{\kappa=1}^{\nu} \beta_{\kappa}} = \frac{\nu^2}{1} = \nu^2$$

(γ) Δεν ισχύει ότι $\sum_{\kappa=1}^{\nu} (\alpha_{\kappa})^2 = \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\kappa} \right)^2$

Για παράδειγμα, $\alpha_{\kappa} = \frac{3\nu+1}{2\nu-1}, \forall \kappa \in \{2, 3, \dots, \nu\}$. Τότε

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} (\alpha_{\kappa})^2 = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \left(\frac{3\nu+1}{2\nu-1} \right)^2 = \left(\frac{3\nu+1}{2\nu-1} \right)^2 \sum_{\kappa=1}^{\nu} 1 = \nu \left(\frac{3\nu+1}{2\nu-1} \right)^2$$

$$\text{ενώ} \quad \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\kappa} \right)^2 = \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \left(\frac{3\nu+1}{2\nu-1} \right) \right)^2 = \left(\nu \left(\frac{3\nu+1}{2\nu-1} \right) \right)^2$$

2. Έχουμε:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu - 2^{\nu}}{3^{\nu}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(2 \frac{\nu}{3^{\nu}} - \left(\frac{2}{3} \right)^{\nu} \right)$$

Έστω $\nu \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο. Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της πιο πάνω σειράς:

$$S_{\nu} = \sum_{k=1}^{\nu} \left(2 \frac{k}{3^k} - \left(\frac{2}{3} \right)^k \right) = 2 \sum_{k=1}^{\nu} \frac{k}{3^k} - \sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{2}{3} \right)^k$$

$$\text{Είναι } \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{2}{3} \right)^k = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 2 \quad (\text{Γεωμετρική σειρά}) \quad \text{και} \quad \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{k}{3^k} = \frac{3}{4} \quad \text{και αρα} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu - 2^{\nu}}{3^{\nu}} = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$$

3. Κέντρο μάζας ν σωμάτων βρίσκεται στη θέση $(\bar{x}, 0)$, όπου $\bar{x} = \frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu} (m_{\kappa} \cdot x_{\kappa})}{\sum_{\kappa=1}^{\nu} m_{\kappa}}$.

$x_1 = 1$	$m_1 = 5$	$m_1 \cdot x_1 = 5$	
$x_2 = 3$	$m_2 = 7$	$m_2 \cdot x_2 = 21$	
$x_3 = 5$	$m_3 = 2$	$m_3 \cdot x_3 = 10$	
$x_4 = 7$	$m_4 = 3$	$m_4 \cdot x_4 = 21$	
	$\sum_{\kappa=1}^{\nu} m_{\kappa} = 17$	$\sum_{\kappa=1}^{\nu} (m_{\kappa} \cdot x_{\kappa}) = 57$	$\bar{x} = \frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu} (m_{\kappa} \cdot x_{\kappa})}{\sum_{\kappa=1}^{\nu} m_{\kappa}} = \frac{57}{17}$

Άρα, το κέντρο βάρους έχει συντεταγμένες $\left(\frac{57}{17}, 0 \right)$.

4. Έχουμε για $n \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{(2k)^2} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{4k^2} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{4} S_n \\
 \Rightarrow \frac{3}{4} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \\
 \Rightarrow \frac{3}{4} \times \frac{\pi^2}{6} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}
 \end{aligned}$$

5. Έχουμε

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=5}^{40} \left(\sum_{i=0}^{\infty} (k+2) \left(\frac{1}{k+3} \right)^i \right) &= \sum_{k=5}^{40} \left((k+2) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+3} \right)^i \right) \\
 \text{Γεωμετρική Σειρά} &= \sum_{k=5}^{40} \left((k+2) \frac{1}{1 - \frac{1}{k+3}} \right) = \sum_{k=5}^{40} \left((k+2) \frac{k+3}{k+2} \right) = \sum_{k=5}^{40} (k+3) \\
 &= \sum_{k=1}^{40} (k+3) - \sum_{k=1}^4 (k+3) = \frac{40(40+1)}{2} + 3 \times 40 - \frac{4(4+1)}{2} + 12 \\
 &= 20(21) + 120 - 10 + 12 = 542
 \end{aligned}$$

**Μέρος ΙΙΙ - Ορισμένο Ολοκλήρωμα
και Εφαρμογές**

Δραστηριότητες σελ. 92 (Ορισμός Ορισμένου Ολοκληρώματος)

- 1. (α)** Κατ'αρχάς, η συνάρτηση $f(x) = 3, x \in [-1, 2]$ είναι συνεχής και αρα κατα Riemann ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση μεγέθους n του διαστήματος $[-1, 2]$: $\Delta_n = \frac{3}{n}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Το κάθε x_i δίνεται από την

$$x_i^* = -1 + i \cdot \Delta_n = -1 + i \cdot \frac{3}{n}.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 3 dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n 3 \cdot \frac{3}{n} \right) \\ f(x) = 3, x \in [-1, 2] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n 3 \cdot \frac{3}{n} \right) = 9 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \right) = 9 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 \right) \\ \sum_{i=1}^n 1 = n &= 9 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} n \right) = 9 \end{aligned}$$

- (β)** Κατ'αρχάς, η συνάρτηση $f(x) = 2x - 1, x \in [1, 3]$ είναι συνεχής και αρα κατα Riemann ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση μεγέθους n του διαστήματος $[1, 3]$: $\Delta_n = \frac{2}{n}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Το κάθε x_i δίνεται από την

$$x_i^* = 1 + i \cdot \Delta_n = 1 + i \cdot \frac{2}{n}.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_1^3 (2x - 1) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n \left(2 \left(1 + i \cdot \frac{2}{n} \right) - 1 \right) \cdot \frac{2}{n} \right) \\ f(x) = 2x - 1, x \in [1, 2] &= 2 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \left(1 + i \cdot \frac{2}{n} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \right) = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 \right) \\ \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} &= 2 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n} n + \frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n} n \right) = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + 2 \cdot \frac{n+1}{n} - 1 \right) \\ &= 2 \cdot (2 + 2 - 1) = 6 \end{aligned}$$

- (γ)** Κατ'αρχάς, η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1, x \in [0, 3]$ είναι συνεχής και αρα κατα Riemann ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση μεγέθους n του διαστήματος $[0, 3]$: $\Delta_n = \frac{3}{n}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Το κάθε x_i δίνεται από την

$$x_i^* = 0 + i \cdot \Delta_n = \frac{3i}{n}.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_0^3 (x^2 + 1) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{3i}{n} \right)^2 + 1 \right) \cdot \frac{3}{n} \right) \\ f(x) = x^2 + 1, x \in [0, 3] &= 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{3i}{n} \right)^2 + 1 \right) \right) = 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 \right) \\ \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} &= 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{9n(n+1)(2n+1)}{6n^3} + 1 \right) \\ \text{ιδιότητες των ορίων} &= 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3(n+1)(2n+1) + 2n^2}{2n^2} \right) = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{8n^2}{n^2} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{3 \cdot 8}{2} \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2}{n^2} \right)}_1 = 12$$

Δραστηριότητες σελ. 96 (Ιδιότητες Ορισμένου Ολοκληρώματος)

1. Δεδομένο:

$$\int_{-1}^4 f(x) dx = -3, \quad \int_{-1}^4 g(x) dx = 4$$

Είναι

$$(\alpha) \int_4^{-1} f(x) dx = - \int_{-1}^4 f(x) dx = -(-3) = 3$$

$$\begin{aligned} (\beta) \int_{-1}^4 [10f(x) + 8g(x)] dx &= 10 \int_{-1}^4 f(x) dx + 8 \int_{-1}^4 g(x) dx \\ &= 10 \cdot (-3) + 8 \cdot 4 = -30 + 32 = 2 \end{aligned}$$

2. Δεδομένο:

$$\int_0^3 f(x) dx = 8, \quad \int_2^3 f(x) dx = 10, \quad \int_0^7 f(x) dx = 12$$

Είναι

$$(\alpha) \int_3^2 f(x) dx = - \int_2^3 f(x) dx = -10 \quad (\beta) \int_0^3 \frac{1}{2} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$$

$$(\gamma) \int_0^2 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx - \int_2^3 f(x) dx = 8 - 10 = -2$$

$$(\delta) \int_7^2 f(x) dx = - \int_2^7 f(x) dx = - \left(\int_0^7 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx \right) = -(12 - (-2)) = -14$$

3. Είναι από υπόθεση

$$\int_e^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_e^1 \ln(x^{-1}) dx = \int_e^1 (-\ln(x)) dx = - \int_e^1 \ln(x) dx = \int_1^e \ln(x) dx = 1$$

4. Είναι

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^6 \frac{x(x+3)}{x^2-x+1} dx - \int_{\alpha}^6 \frac{(4x-1)}{x^2-x+1} dx &= 2 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^6 \left[\frac{x(x+3)}{x^2-x+1} - \frac{(4x-1)}{x^2-x+1} \right] dx = 2 \\ \Leftrightarrow \int_{\alpha}^6 \frac{x(x+3) - (4x-1)}{x^2-x+1} dx &= 2 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^6 \frac{x^2+3x-4x+1}{x^2-x+1} dx = 2 \\ \Leftrightarrow \int_{\alpha}^6 \frac{x^2-x+1}{x^2-x+1} dx &= 2 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^6 dx = 2 \Leftrightarrow 6 - \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 4 \end{aligned}$$

1. Έχουμε

$$(\alpha) \quad \int_0^1 (3x^2 + 4x - 2) dx = [x^3 + 2x^2 - 2x]_0^1 = (1^3 + 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1) - (0^3 + 2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0) = 1$$

$$(\beta) \quad \int_1^4 \left(2\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + 1 \right) dx = \left[\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + 8\sqrt{x} + x \right]_1^4 = \left(\frac{4}{3} 4^{\frac{3}{2}} + 8\sqrt{4} + 4 \right) - \left(\frac{4}{3} 2^{\frac{3}{2}} + 8\sqrt{2} + 2 \right) = \frac{61}{3}$$

$$(\gamma) \quad \int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = [\sqrt[3]{x}]_1^8 = 3[(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1})] = 3$$

$$\begin{aligned} (\delta) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(3\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x - \frac{4}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \right) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (3\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x - 4\tau\epsilon\mu^2 x) dx = [3\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x - 4\epsilon\varphi x]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left(3\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) - (3\eta\mu 0 - 2\sigma\upsilon\nu 0 - 4\epsilon\varphi 0) \\ &= \frac{\sqrt{2} - 4}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\epsilon) \quad \int_{-1}^3 (x^3 - 7x + 2) dx + \int_{-1}^3 (3x^3 + 7x - 2) dx &= \int_{-1}^3 [(x^3 - 7x + 2) + (3x^3 + 7x - 2)] dx \\ &= \int_{-1}^3 4x^3 dx = [x^4]_{-1}^3 = 3^4 - (-1)^4 = \frac{3^4}{2} - \frac{1}{2} = 81 - 1 = 80 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma\tau) \quad \int_0^1 \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} dx + \int_1^0 \frac{2}{x^2 + 1} dx &= \int_0^1 \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} dx + \left(- \int_0^1 \frac{2}{x^2 + 1} dx \right) = \int_0^1 \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} dx - \int_0^1 \frac{2}{x^2 + 1} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} - \frac{2}{x^2 + 1} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\zeta) \quad \int_0^1 \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} dx &= \int_0^1 \frac{(x^2 + 1) + 2}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} - \frac{2}{x^2 + 1} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} dx - 2 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= \int_0^1 dx - 2[\tau\omicron\xi\epsilon\varphi x]_0^1 = [x]_0^1 - [2\tau\omicron\xi\epsilon\varphi x]_0^1 = [x - 2\tau\omicron\xi\epsilon\varphi x]_0^1 = \frac{\pi}{2} + 1 \end{aligned}$$

2. (α) Είναι

$$\int (x^3 + 1)^2 x^2 dx = \frac{1}{3} \int (x^3 + 1)^2 d(x^3 + 1) = \frac{1}{9} (x^3 + 1)^3 + c$$

και αρα

$$\int_1^2 (x^3 + 1)^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{9} (x^3 + 1)^3 \right]_1^2 = \frac{721}{29}$$

(β) Είναι

$$\int \frac{x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 4)}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + c$$

και αρα

$$\int_0^3 \frac{x}{x^2 + 4} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) \right]_0^3 = \frac{1}{2} \ln(13) - \ln(2)$$

Σημείωση: Στις απαντήσεις του ΥΠΠΑΝ δίνεται η απάντηση $\sqrt{13} - 2$

(γ) Είναι

$$\int \frac{2x+7}{x^2+7x+12} dx = \int \frac{d(x^2+7x+12)}{x^2+7x+12} = \ln|x^2+7x+12| + c$$

και αρα $\int_{-2}^{-1} \frac{2x+7}{x^2+7x+12} dx = [\ln|x^2+7x+12|]_{-2}^{-1} = \ln(6) - \ln(2) = \ln(3)$

(δ) $\int_e^{e^2} \frac{3}{4x \cdot \sqrt[3]{\ln x}} dx$. Είναι $\int \frac{3}{4x \cdot \sqrt[3]{\ln x}} dx = \frac{3}{4} \int (\ln x)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{3}{4} \int (\ln x)^{\frac{1}{3}} d(\ln x) = \frac{3}{2} (\ln x)^{\frac{2}{3}} + c$

και αρα $\int_e^{e^2} \frac{3}{4x \cdot \sqrt[3]{\ln x}} dx = \left[\frac{3}{2} (\ln x)^{\frac{2}{3}} \right]_e^{e^2} = \frac{9}{8} (2^{\frac{2}{3}} - 1)$

(ε) Είναι

$$\int 2(3\epsilon\phi x + 1)^2 \tau\epsilon\mu^2 x dx = 2 \int (3\epsilon\phi x + 1)^2 d(3\epsilon\phi x + 1) = \frac{2}{9} (3\epsilon\phi x + 1)^3 + c$$

και αρα $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2(3\epsilon\phi x + 1)^2 \tau\epsilon\mu^2 x dx = \left[\frac{2}{9} (3\epsilon\phi x + 1)^3 \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 14$

3. (α) Κάτω από την αντικατάσταση $t = x + 1$, το $\int \frac{x}{(x+1)^4} dx$ γίνεται

$$\int \frac{t-1}{t^4} dt = \int \frac{dt}{t^3} - \int \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{3t^3} + c$$

και αρα

$$\int \frac{x}{(x+1)^4} dx = \frac{1}{3(x+1)^3} - \frac{1}{2(x+1)^2} + c$$

Αφού βρήκαμε την οικογένεια των παραγουσών για το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα, έχουμε ότι

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^4} dx = \left[\frac{1}{3(x+1)^3} - \frac{1}{2(x+1)^2} \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

(β) Κάτω από την αντικατάσταση $u = \sqrt{x+2}$, το $\int x\sqrt{x+2} dx$ γίνεται

$$2 \int (u^2 - 2)u^2 du = 2 \int (u^4 - 2u^2) du = \frac{2u^5}{5} - \frac{4u^3}{3} + c$$

και αρα

$$\int x\sqrt{x+2} dx = \frac{2(x+2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{4(x+2)^{\frac{3}{2}}}{3} + c = 2(x+2)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{x+2}{5} - \frac{4}{3} \right) + c = \frac{2(x+2)^{\frac{3}{2}}(3x-4)}{15} + c$$

Αφού βρήκαμε την οικογένεια των παραγουσών για το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα, έχουμε ότι

$$\int_2^7 \frac{x}{(x+1)^2} dx = \frac{2}{15} \left[(x+2)^{\frac{3}{2}}(3x-4) \right]_2^7 = \frac{886}{15}$$

4. (α) Είναι

$$\begin{aligned} \int \sigma\upsilon\nu^5 x \cdot \eta\mu^2 x dx &= \int \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x dx = \int \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu^2 x \cdot (1 - \eta\mu^2 x)^2 dx \\ &= \int \eta\mu^2 x \cdot (1 - \eta\mu^2 x)^2 d(\eta\mu x) = \frac{\eta\mu^7 x}{7} - 2 \frac{\eta\mu^5 x}{5} + \frac{\eta\mu^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

και αρα
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^5 x \cdot \eta \mu^2 x \, dx = \left[\frac{\eta \mu^7 x}{7} - 2 \frac{\eta \mu^5 x}{5} + \frac{\eta \mu^3 x}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{407}{13440}$$

(β) Θεωρούμε την αντικατάσταση $x = 4\eta\mu\theta, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow dx = 4\sigma\upsilon\nu\theta d\theta$. Τότε,

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \eta\mu^2\theta \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{1 - \eta\mu^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{16}\right)^2} = \sqrt{16 - x^2}$$

Έτσι,

$$\int \sqrt{16 - x^2} \, dx = 16 \int \sigma\upsilon\nu^2\theta \, d\theta = 16 \left(\frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu\theta \eta\mu\theta + \frac{\theta}{2} \right) + c = \frac{x}{2} \sqrt{16 - x^2} + 8\tau\omicron\xi\eta\mu\left(\frac{x}{4}\right) + c$$

και αρα
$$\int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \, dx = \left[\frac{x}{2} \sqrt{16 - x^2} + 8\tau\omicron\xi\eta\mu\left(\frac{x}{4}\right) \right]_0^4 = 4\pi.$$

(γ) Είναι

$$\int \frac{x^4}{x^2 + 1} \, dx = \int \left(\frac{1}{x^2 + 1} + x^2 - 1 \right) \, dx = \tau\omicron\xi\epsilon\phi x + \frac{x^3}{3} - x + c$$

Διαφορετικά, θεωρούμε την αντικατάσταση $x = \epsilon\phi\theta, \theta \in -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow dx = \tau\epsilon\mu^2\theta d\theta$. Τότε,

$$\int \frac{x^4}{1 + x^2} \, dx = \int \frac{\epsilon\phi^4 x}{1 + \epsilon\phi^2 x} \tau\epsilon\mu^2\theta d\theta = \int \frac{\epsilon\phi^4 \theta}{\tau\epsilon\mu^2\theta} \tau\epsilon\mu^2\theta d\theta = \int \epsilon\phi^4 \theta \, d\theta$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} \int \epsilon\phi^4 \theta \, d\theta &= \int \epsilon\phi^2 \theta \cdot \epsilon\phi^2 \theta d\theta = \int \epsilon\phi^2 \theta \cdot (\tau\epsilon\mu^2\theta - 1) d\theta = \int \epsilon\phi^2 \theta \cdot \tau\epsilon\mu^2\theta d\theta - \int \epsilon\phi^2 \theta \, d\theta \\ &= \int \epsilon\phi^2 \theta \cdot (\epsilon\phi(\theta))' d\theta - \int (\tau\epsilon\mu^2\theta - 1) d\theta = \frac{\epsilon\phi^3 \theta}{3} - \epsilon\phi\theta + \theta + c \end{aligned}$$

και αρα τελικ : $\int \frac{x^4}{1 + x^2} \, dx = \frac{x^3}{3} - x + \tau\omicron\xi\epsilon\phi x + c$. Συνεπώς

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^2 + 1} \, dx = \left[\tau\omicron\xi\epsilon\phi x + \frac{x^3}{3} - x \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}.$$

5. Είναι

$$\int \eta\mu^3 x \, dx = \int \eta\mu^2 x \cdot \eta\mu x \, dx = \int (\sigma\upsilon\nu^2 x - 1) \, d(\sigma\upsilon\nu x) = \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{3} - \sigma\upsilon\nu x + c$$

και αρα
$$\int_0^{\pi} \eta\mu^3 x \, dx = \left[\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{3} - \sigma\upsilon\nu x \right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}$$

6. Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_a^{\beta} x \cdot f(x) \, dx &= \int_a^{\beta} (\alpha + \beta - x) \cdot f(\alpha + \beta - x) \, dx \\ &= \int_a^{\beta} (\alpha + \beta - x) \cdot f(x) \, dx \\ &= \int_a^{\beta} (\alpha + \beta) \cdot f(x) \, dx - \int_a^{\beta} x \cdot f(x) \, dx \\ \Rightarrow \int_a^{\beta} x \cdot f(x) \, dx &= \frac{\alpha + \beta}{2} \int_a^{\beta} f(x) \, dx \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το
μετασχηματισμό $\alpha + \beta - x = u$

$f(\alpha + \beta - x) = f(x), \forall x \in [\alpha, \beta]$

7. (α) Είναι

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x-1) \cdot e^x \, dx &= \int_0^1 (x-1) \cdot (e^x)' \, dx = [(x-1) \cdot e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot (x-1)' \, dx = 1 - \int_0^1 e^x \, dx = 1 - e + 1 \\ &= 2 - e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\beta) \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(2x) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(2x) \cdot (x)' dx = [x \cdot \arcsin(2x)]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx \\
 &= \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\delta) I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu(3x) \cdot (e^x)' dx = [\eta\mu(3x) \cdot e^x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cdot (\eta\mu(3x))' dx \\
 &= \eta\mu\left(3\frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{\frac{\pi}{4}} - 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cdot \sigma\upsilon\nu(3x) dx = \eta\mu\left(3\frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{\frac{\pi}{4}} - 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^x)' \cdot \sigma\upsilon\nu(3x) dx \\
 &= \eta\mu\left(3\frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{\frac{\pi}{4}} - 3 \left([\sigma\upsilon\nu(3x) \cdot e^x]_0^{\frac{\pi}{4}} - 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sigma\upsilon\nu(3x))' \cdot e^x dx \right) \\
 &= \eta\mu\left(3\frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{\frac{\pi}{4}} - 3 \left(\sigma\upsilon\nu\left(3\frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{\frac{\pi}{4}} - 1 + 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu(3x) \cdot e^x dx \right) \\
 &= \eta\mu\left(3\frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{\frac{\pi}{4}} - 3\sigma\upsilon\nu\left(3\frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{\frac{\pi}{4}} + 1 - 9I
 \end{aligned}$$

$$\text{και αρα } 10I = \eta\mu\left(3\frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{\frac{\pi}{4}} - 3\sigma\upsilon\nu\left(3\frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{\frac{\pi}{4}} + 1, \text{ δηλ.}$$

$$I = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{10} \left(\eta\mu\left(3\frac{\pi}{4}\right) - 3\sigma\upsilon\nu\left(3\frac{\pi}{4}\right) + 1 \right) = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{10} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 3\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{10} = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{10} 2\sqrt{2} = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{5} + \frac{3}{10}$$

8. (α) $\int_4^5 \frac{x+1}{x-3} dx$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x+1}{x-3} dx &= \int \frac{x-3+4}{x-3} dx = \int \frac{x-3}{x-3} dx + 4 \int \frac{dx}{x-3} = x + 4 \ln|x-3| + c \\
 \text{και αρα} \quad \int_4^5 \frac{x+1}{x-3} dx &= 5 + 4 \ln|5-3| - 4 - 4 \ln|4-3| = \mathbf{1 + 4 \ln 2}
 \end{aligned}$$

(β) $\int_2^4 \frac{x+8}{x^2+x-2} dx$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x+8}{x^2+x-2} dx &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{2x+1}{x^2+x-2} + \frac{15}{x^2+x-2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x-2} dx + \frac{15}{2} \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+x-2)}{x^2+x-2} + \frac{15}{2 \times 3} \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+x-2) + \frac{5}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + c \\
 \text{και αρα} \quad \int_2^4 \frac{x+8}{x^2+x-2} dx &= \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+x-2) + \frac{5}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \right]_2^4 = \mathbf{2 \ln 2 + \ln 3 = \ln(12)}
 \end{aligned}$$

(γ) $\int_2^3 \frac{x^3}{x-1} dx$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x-1} dx &= \int \frac{x^3-1+1}{x-1} dx = \int \left(\frac{x^3-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} \right) dx = \int \left(\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= \int (x^2+x+1) dx + \int \frac{dx}{x-1} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + c\end{aligned}$$

και άρα

$$\int_2^3 \frac{x^3}{x-1} dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| \right]_2^3 = \frac{59}{6} + \ln 2$$

(δ) $\int_2^3 \frac{x^2+3}{x^2-1} dx$. Έχουμε: $\int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx = \int \left(\frac{x^2-1}{x^2-1} + \frac{4}{x^2-1} \right) dx = \int dx + 4 \int \frac{dx}{x^2-1}$

Για το πρώτο, έχουμε: $\int dx = x + c$ και

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c$$

και άρα

$$\int_2^3 \frac{x^2+3}{x^2-1} dx = \left[2 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c \right]_2^3 = 2 \ln \left(\frac{3}{2} \right) + 1$$

9.

$$\int_0^4 |x^2 - 4x + 3| dx$$

$$\text{Αφού } |x^2 - 4x + 3| = |(x-3)(x-1)| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty) \\ -(x^2 - 4x + 3), & x \in (1, 3) \end{cases}$$

έχουμε ότι

$$\int_0^4 |x^2 - 4x + 3| dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx - \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_3^4 (x^2 - 4x + 3) dx$$

το οποίο υπολογίζουμε κατά τα γνωστά:

$$= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4$$

10.

(α) $\int_1^3 (|x-2| + x-1) dx$. Είναι $|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ 2-x, & x < 2 \end{cases}$

και η συνάρτηση $x \mapsto |x-2| + x-1$ είναι συνεχής παντού. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int_1^3 (|x-2| + x-1) dx &= \int_1^2 |x-2| dx + \int_2^3 (x-1) dx \\ &= \int_1^2 (x-2) dx - \int_2^3 (x-2) dx + \int_1^3 (x-1) dx \\ &= \int_1^2 x dx - \int_1^2 2 dx - \int_2^3 x dx + \int_2^3 2 dx + \int_1^3 x dx - \int_1^3 dx \\ &= \int_1^3 x dx - \int_1^3 2 dx + \int_2^3 2 dx - \int_2^3 x dx - \int_1^3 dx = 3\end{aligned}$$

(κατά τα γνωστά)

Σημείωση: Στην έκδοση του 2019 αφαιρέθηκε αλλά η άσκηση ζητά να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα.

(β) $\int_{-1}^2 f(x) dx$, με $f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$. Κατά τα γνωστά (με τη χρήση κανόνα του L'Hospital) έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (xe^{-x}) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+1) = 0$$

Συνεπώς, η συνάρτηση είναι συνεχής (και) στο $x = 0$ το οποίο ευρίσκεται στο εσωτερικό του συνόλου $[-1, 2]$. Άρα,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^0 x e^{-x} dx + \int_0^2 \ln(x+1) dx = -[(x-1)e^{-x}]_0^{-1} - [(x+1)[\ln(x+1) - 1]]_0^2 \\ &= -1 + 3\ln 3 - 2 = -3(1 + \ln 3)\end{aligned}$$

αφού

$$\int x \cdot e^{-x} dx = \int x \cdot (-e^{-x})' dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} \cdot (x)' dx = -(x-1)e^{-x} + c$$

και

$$\int \ln(x+1) dx = \int \ln(x+1) d(x+1) = (x+1)[\ln(x+1) - 1] + c$$

11. Είναι για $v \geq 2$

$$I_v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^v(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^{v-1}(x) \cdot \eta \mu(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^{v-1}(x) \cdot (-\sigma \nu(x))' dx$$

Κατά μέρη και

$$\begin{aligned}(\eta \mu^{v-1}(x))' &= (v-1) \eta \mu^{v-2}(x) \cdot \sigma \nu(x) \\ \sigma \nu^2(x) &= 1 - \eta \mu^2(x) \\ \Rightarrow I_v &= \left(1 - \frac{1}{v}\right) I_{v-2} = \frac{v-1}{v} I_{v-2}\end{aligned}$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}I_7 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^7(x) dx = \frac{6}{7} I_5 = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} I_3 = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1 = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu(x) dx = -\frac{16}{35} [\sigma \nu(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{35} \\ I_0 &= \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1\end{aligned}$$

12. (α) Είναι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(\alpha + \beta - x) d(\alpha + \beta - x) = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Έτσι,

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(\alpha + \beta - x) + f(x)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

δηλ.

$$\begin{aligned}2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} [f(\alpha + \beta - x) + f(x)] dx, \quad \text{δηλ.} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\alpha + \beta - x) + f(x)] dx\end{aligned}$$

(β) (i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{2^x}{2^x - 2^{1-x}}$$

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο ερώτημα για $\alpha = 0$ και $\beta = 1$, έχουμε ότι

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(0 + 1 - x) dx = \int_0^1 f(1 - x) dx \quad (1)$$

Αλλά,

$$f(1-x) = \frac{2^x}{2^x - 2^{1-x}}$$

Όμως, παρατηρούμε ότι

$$f(x) + f(1-x) = \frac{2^x}{2^x - 2^{1-x}} + \frac{2^{1-x}}{2^{1-x} - 2^x} = \frac{2^x}{2^x - 2^{1-x}} - \frac{2^{1-x}}{2^x - 2^{1-x}} = 1$$

και αρα,

$$\int_0^1 [f(x) + f(1-x)] dx = \int_0^1 dx = 1 \quad (2)$$

Τώρα, με τη βοήθεια της (1), έχουμε ότι

$$\frac{1}{2} \int_0^1 [f(x) + f(1-x)] dx = \int_0^1 f(x) dx \quad (3)$$

Έτσι, οι (2) και (3) δίνουν:

$$2 \int_0^1 f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$$

(ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: [2,3] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x) + \ln(4-x)}$

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο ερώτημα για $\alpha = 1$ και $\beta = 3$, έχουμε ότι

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 f(1+3-x) dx = \int_1^3 f(4-x) dx \quad (1)$$

Αλλά, $f(4-x) = \frac{\ln(4-x)}{\ln(x) + \ln(4-x)}$. Παρατηρούμε ότι

$$f(x) + f(4-x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x) + \ln(4-x)} + \frac{\ln(4-x)}{\ln(x) + \ln(4-x)} = 1$$

και αρα,

$$\int_1^3 [f(x) + f(4-x)] dx = \int_1^3 dx = 2 \quad (2)$$

Τώρα, με τη βοήθεια της (1), έχουμε ότι $\frac{1}{2} \int_1^3 [f(x) + f(4-x)] dx = \int_1^3 f(x) dx \quad (3)$

Έτσι, οι (2) και (3) δίνουν:

$$2 \int_1^3 f(x) dx = 2 \Rightarrow \int_1^3 f(x) dx = 1$$

13. (α) $I_v = \int_0^1 x^v \cdot e^{-x} dx, v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = -[e^{-x}]_0^1 = 1 - e^{-1}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx = \int_0^1 x \cdot (-e^{-x})' dx = -[x \cdot e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} \cdot (x)' dx = -e^{-1} + I_0 \\ &= -e^{-1} + 1 - e^{-1} = 1 - 2e^{-1} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 x^2 \cdot e^{-x} dx = \int_0^1 x^2 \cdot (-e^{-x})' dx = -[x^2 \cdot e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} \cdot (x^2)' dx = -e^{-1} + 2I_1 \\ &= -e^{-1} + 2(1 - 2e^{-1}) = 2 - 5e^{-1} \end{aligned}$$

Για $v > 2$,

$$\begin{aligned}
 I_\nu &= \int_0^1 x^\nu \cdot e^{-x} dx = \int_0^1 x^\nu \cdot (-e^{-x})' dx = -[x^\nu \cdot e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} \cdot (x^\nu)' dx \\
 &= -e^{-1} + \nu \int_0^1 e^{-x} \cdot x^{\nu-1} dx = -e^{-1} + \nu \int_0^1 x^{\nu-1} \cdot (-e^{-x})' dx \\
 &= -e^{-1} + \nu \left[-[x^{\nu-1} \cdot e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} \cdot (x^{\nu-1})' dx \right] \\
 &= -e^{-1} + \nu \left[-e^{-1} + (\nu-1) \int_0^1 e^{-x} \cdot x^{\nu-2} dx \right] \\
 &= -e^{-1} - \nu e^{-1} + \nu(\nu-1) I_{\nu-2} = -\frac{\nu+1}{e} + \nu(\nu-1) I_{\nu-2}
 \end{aligned}$$

(β) ($\nu = 4$) Εκ του ανωτέρω αναγωγικού τύπου για $\nu = 4$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x^4 \cdot e^{-x} dx &= I_4 = -\frac{4+1}{e} + 4(4-1) I_{4-2} = -\frac{5}{e} + 12 I_2 = -\frac{5}{e} + 12 \left(2 - \frac{5}{e} \right) = -\frac{5}{e} + 24 - \frac{60}{e} \\
 &= 24 - \frac{65}{e}
 \end{aligned}$$

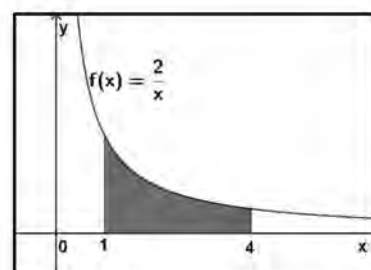
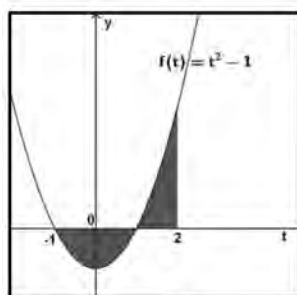
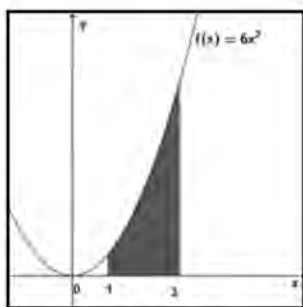
Δραστηριότητες σελ. 121-123 (Εφαρμογές Ορισμένου Ολοκληρώματος)

1. (α) Έχουμε $\int_1^3 6x^2 dx = 2 \int_1^3 3x^2 dx = 2[x^3]_1^3 = 52$

(β) Έχουμε $\int_{-1}^2 (t^2 - 1) dt = \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_{-1}^2 = 0$

Σημείωση: $E = \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt + \int_1^2 (t^2 - 1) dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 + \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_1^2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

(γ) Έχουμε $\int_1^4 \frac{2}{x} dx = [\ln x^2]_1^4 = 4 \ln 2$



2. $f(x) = \eta \mu x, x \in [0, 2\pi]$

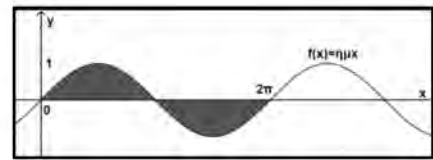
(α) Έχουμε

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \eta \mu x dx = -[\sigma \nu \nu x]_0^{2\pi} = \sigma \nu \nu 0 - \sigma \nu \nu (2\pi) = 1 - 1 = 0$$

(β) Το πιο πάνω ολοκλήρωμα δε δίνει το εμβαδόν που περικλείεται από το γράφημα της f και τον άξονα των τετμημένων, αφού $\int_0^\pi f(x) dx = -\int_\pi^{2\pi} f(x) dx$. Ισοδύναμα, επειδή $\eta \mu x \leq 0, \forall x \in [\pi, 2\pi]$.

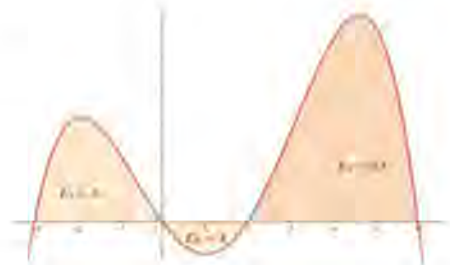
(γ) Για να υπολογίσουμε το εν λόγω εμβαδόν, έχουμε

$$\begin{aligned}
 E &= \int_0^{2\pi} |f(x)| dx = \int_0^{2\pi} |\eta \mu x| dx \\
 &= \int_0^{\pi} \eta \mu x dx + \left(- \int_{\pi}^{2\pi} \eta \mu x dx \right) = [-\sigma \nu \nu x]_0^{\pi} - [-\sigma \nu \nu x]_{\pi}^{2\pi} \\
 &= (\sigma \nu \nu 0 - \sigma \nu \nu (\pi)) + (\sigma \nu (2\pi) - \sigma \nu \nu \pi) = 2 + 2 = 4
 \end{aligned}$$



3. Δεδομένο: $E_1 = 8, E_2 = 4, E_3 = 13$. Τότε

$$\begin{aligned}
 \int_{-3}^6 f(x) dx &= \int_{-3}^0 f(x) dx + \left(- \int_0^2 f(x) dx \right) + \int_2^6 f(x) dx \\
 &= E_1 - E_2 + E_3 = 8 - 4 + 13 = 17
 \end{aligned}$$



4. $f(x) = x^3 + 1, \quad g(x) = (x-1)^2$

Βρίσκουμε τα σημεία τομής των γραφημάτων των 2 συναρτήσεων:

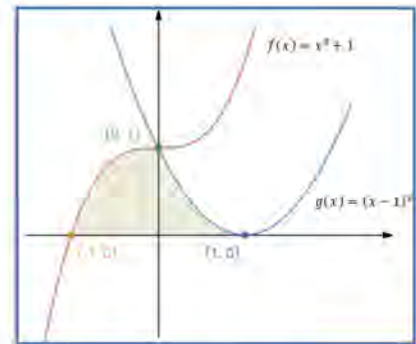
$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) \Leftrightarrow x^3 + 1 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^3 + 1 = x^2 + 2x + 1 \\
 &\Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0
 \end{aligned}$$

$>0, \forall x$

Τώρα, θα δούμε τη 'σχετική θέση' των γραφημάτων που ορίζονται από τις 2 αυτές συναρτήσεις:

$$f(x) - g(x) = x(x^2 - x + 2)$$

και αρα $f(x) - g(x) \leq 0, \forall x \in [-1, 0]$ και $f(x) - g(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]$, δηλ.



$f(x) \leq g(x), \forall x \in [-1, 0]$ και $f(x) \geq g(x), \forall x \in [0, 1]$. Συνεπώς, αφού $f(x), g(x) \geq 0, \forall x \in [-1, 1]$

$$E = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx = \int_{-1}^0 (x^3 + 1) dx + \int_0^1 (x-1)^2 dx$$

τα οποία υπολογίζουμε κατά τα γνωστά και έχουμε εν τέλει:

$$E = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{13}{12}$$

5. (α) $f(x) = 3x^2 + 2 \Rightarrow E = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (3x^2 + 2) dx = [x^3 + 2x]_1^2 = 9 \tau. \mu.$

(β) $f(x) = -3x^2 + 3 \Rightarrow E = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (-3x^2 + 3) dx = [-x^3 + 3x]_0^1 = 2 \tau. \mu.$

(γ) $f(x) = -3x^2 \Rightarrow E = - \int_{-2}^1 f(x) dx = \int_{-2}^1 (3x^2) dx = [x^3]_{-2}^1 = 9 \tau. \mu.$

(δ) $f(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow E = - \int_{-2}^{-1} f(x) dx = \int_{-2}^{-1} (3x^2 - 3) dx = [x^3 - 3x]_{-2}^{-1} = 4 \tau. \mu.$

6. Έχουμε

$$E = 9 \Leftrightarrow \int_{-1}^{\alpha} 3x^2 dx = 9 \Leftrightarrow [x^3]_{-1}^{\alpha} = 9 \Leftrightarrow \alpha^3 + 1 = 9 \Leftrightarrow \alpha^3 = 8 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

7. (α) $f(x) = -(x+2)(x-3) = -x^2 + x + 6$

Το γράφημα της πιο πάνω συνάρτησης είναι παραβολή με κορυφή το σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$ στο οποίο λαμβάνει (ολικό) μέγιστο. Τα σημεία τομής της με τους άξονες είναι τα $x = -2, 3$ και αρα

$$E = \int_{-2}^3 (-x^2 + x + 6) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^3 = \frac{125}{6} \text{ τ.μ.}$$

(β) $f(x) = x^2 - 4$

Το γράφημα της πιο πάνω συνάρτησης είναι παραβολή με κορυφή το σημείο $(0, -4)$ στο οποίο λαμβάνει (ολικό) ελάχιστο. Τα σημεία τομής της με τους άξονες είναι τα $x = \pm 2$ και αρ

$$E = - \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{32}{3} \text{ τ.μ.}$$

8. (α) $f(x) = x^2 + 1, g(x) = 5$

Α' τρόπος (με διαμερίσεις ως προς τον άξονα των τετμημένων) Βρίσκουμε τα σημεία τομής της καμπύλης $y = x^2 + 1$ με την ευθεία $y = 5$: $x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Έτσι, λόγω συμμετρίας είναι

$$\text{Εμβαδόν}(S) = 2 \int_0^2 (5 - (x^2 + 1)) dx = 2 \int_0^2 (4 - x^2) dx = 2 \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{16}{3} \cdot 2 = \frac{32}{3} \text{ τ.μ.}$$

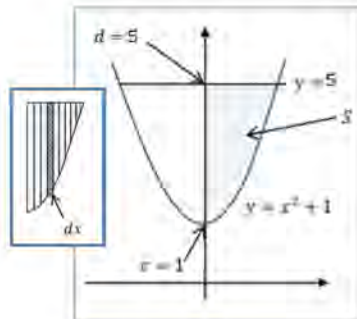
Β' τρόπος (με διαμερίσεις ως προς τον άξονα των τεταγμένων)

Βρίσκουμε τα σημεία τομής της καμπύλης $y = x^2 + 1$ με τον άξονα των τεταγμένων: Είναι $x = 0 \Leftrightarrow y = 1$. Έτσι, τα άκρα ολοκλήρωσης θα είναι τα $c = 1$ και $d = 5$. Θα πρέπει να βρούμε τη συνάρτηση $f(y)$ ως προς την οποία θα ολοκληρώσουμε. Είναι:

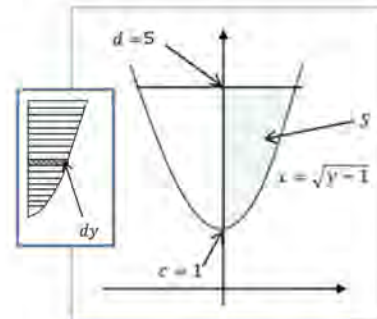
$$y = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{y - 1}$$

Έτσι, λόγω συμμετρίας είναι

$$\text{Εμβαδόν}(S) = 2 \int_1^5 \sqrt{y - 1} dy = 2 \cdot \frac{2}{3} \left[(y - 1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^5 = \frac{4}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} = \frac{32}{3} \text{ τ.μ.}$$



Α' τρόπος



Β' τρόπος

(β) $f(x) = 5x - x^2, g(x) = x$

Α' τρόπος (με διαμερίσεις ως προς τον άξονα των τετμημένων) Βρίσκουμε τα σημεία τομής της καμπύλης $y = 5x - x^2$ με την ευθεία $y = x$:

$$5x - x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 4$$

Επίσης, $\forall x \in [0, 4]$, είναι $f(x) \geq g(x)$. Έτσι,

$$\text{Εμβαδόν}(S) = \int_0^4 (5x - x^2 - x) dx = \int_0^4 (x^2 - 4x) dx = \frac{32}{3} \text{ τ.μ.}$$

Β' τρόπος (με διαμερίσεις ως προς τον άξονα των τεταγμένων)

Βρίσκουμε τα σημεία τομής της καμπύλης $y = 5x - x^2$ με τον άξονα των τεταγμένων: Είναι $x = 0 \Leftrightarrow y = 0,5$. Έτσι, τα άκρα ολοκλήρωσης θα είναι τα $c = \frac{5}{2}$ και $d = 4$. Θα πρέπει να βρούμε τη συνάρτηση $f(y)$ ως προς την οποία θα ολοκληρώσουμε. Είναι:

$$y = 5x - x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{25}{4} - y} + \frac{5}{2}$$

Έτσι,

$$Εμβαδόν(S) = Εμβαδόν(S_1) + Εμβαδόν(S_2) = 2 \int_{\frac{5}{2}}^4 \left(\sqrt{\frac{25}{4} - y} + \frac{5}{2} \right) dy + \int_0^4 (x - (5x - x^2)) dx = \frac{32}{3} \text{ τ. μ.}$$

(γ) $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0, \quad g(x) = 7 - x$

Εύκολα βρίσκουμε τα σημεία τομής των 2 καμπύλων: $x = 1,6$ και ότι $\forall x \in [1,6]$, είναι $f(x) \leq g(x)$. Έτσι,

$$Εμβαδόν(S) = \int_1^6 \left(7 - x - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{35}{2} - \ln 6 \text{ τ. μ.}$$

9. $y = x^2, \quad y^2 = 8x \Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{2x}$

Α' τρόπος (με διαμερίσεις ως προς τον άξονα των τετμημένων)

Βρίσκουμε τα σημεία τομής της καμπύλης $y = x^2$ με την καμπύλη $y^2 = 8x$:

$$y = x^2 \Rightarrow y^2 = x^4 \text{ και αρα } 8x = x^4 \Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2$$

Επίσης, από αυτό, εύκολα βλέπουμε ότι $\forall x \in [0,2]$, είναι $x^4 \leq 8x$. Έτσι,

$$Εμβαδόν(S) = \int_0^2 (2\sqrt{2x} - x^2) dx = \frac{8}{3} \text{ τ. μ.}$$

Β' τρόπος (με διαμερίσεις ως προς τον άξονα των τεταγμένων)

$$Εμβαδόν(S) = \int_0^4 \left(\sqrt{y} - \frac{y^2}{8} \right) dy = \frac{8}{3} \text{ τ. μ.}$$

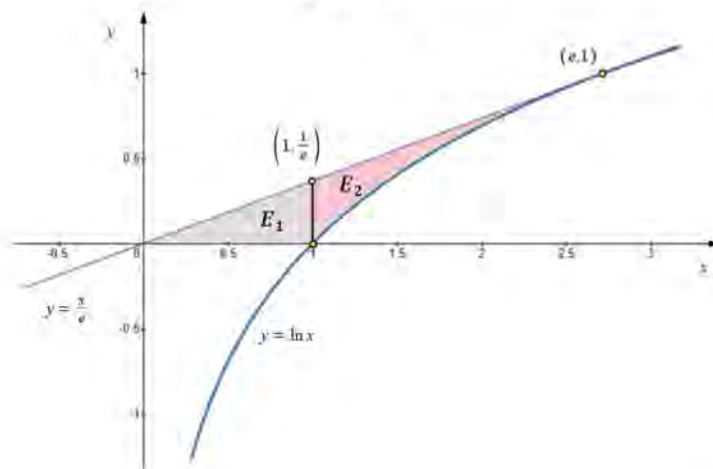
10. Δίνεται η καμπύλη $\{y = \ln x, x > 0\}$. Είναι $y(e) = \ln e = 1$

και αρα η ζητούμενη εφαπτομένη περνά από το σημείο $(e, 1)$. Η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό είναι $y'(e)$. Αλλά, $y' = \frac{1}{x}, x > 0$ και αρα $y'(e) = \frac{1}{e}$. Έτσι, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e), \quad \text{δηλ. } y = \frac{x}{e}$$

Η συνάρτηση $y = \ln x, x > 0$ είναι κοίλη και έτσι το γραφημά της είναι 'κάτω' από το γράφημα της εν λόγω εφαπτομένης. Έτσι,

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e} + \int_1^e \left(\frac{x}{e} - \ln x \right) dx = \frac{1}{2e} + \left[\frac{x^2}{2e} - x \ln x + x \right]_{-1}^e = \frac{1}{2e} + \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} + 1 \\ &= \frac{1}{2} (e - 1) \text{ τ. μ.} \end{aligned}$$



11. Θα μελετήσουμε και θα αναπαραστήσουμε γραφικά τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - 6x^2$

Κατ'αρχάς, η f ως πολυωνυμική συνάρτηση έχει παραγώγους κάθε τάξης. Έχουμε

$$f'(x) = 3x(x-4)$$

και

$$f''(x) = 6(x-2)$$

- Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες:

Είναι $f(x) = x^3 - 6x^2 = x^2(x-6)$ και άρα $f(0) = f(6) = 0$. Παρατηρούμε ότι στο $x = 0$ η συνάρτηση έχει διπλή ρίζα.

- Εύρεση κρίσιμων σημείων, Τ.Α. και Σ.Κ.:

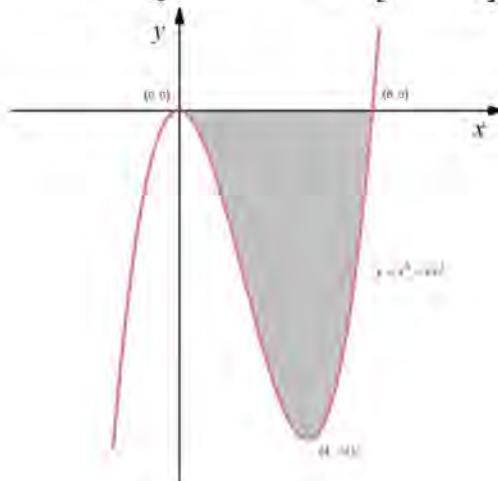
Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 4$. Είναι $f''(4) = 12 > 0$ και άρα, από το κριτήριο 2ας Παραγώγου, η συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(4, f(4)) = (4, -32)$. Επίσης, $f''(0) = -12 < 0$ και άρα, από το κριτήριο 2ας Παραγώγου, η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $(0, f(0)) = (0, 0)$. Τέλος, αφού $f''(2) = 0$ και $f' < 0$ στο $(0, 2) \cup (2, 4)$ και άρα η f' δεν αλλάζει πρόσημο στο σημείο με $x = 2$, έπεται ότι η συνάρτηση έχει Σ.Κ. στο $(0, f(0)) = (0, 0)$. Επίσης, στο διάστημα $(2, +\infty)$ η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, ενώ στο διάστημα $(-\infty, 2)$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

- Συμπεριφορά της συνάρτησης καθώς $x \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

Έτσι

$$E = - \int_0^6 (x^3 - 6x^2) dx = \int_0^6 (6x^2 - x^3) dx = \left[2x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^6 = 108 \text{ τ. μ.}$$



12. $y = f(x) = x + \frac{4}{x-1}, \quad x = 3, x = 9$

Προφανώς, η $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης f . Είναι $f(x) > x, \forall x \in [3, 9]$ και άρα

$$E = \int_3^9 \left(x + \frac{4}{x-1} - x \right) dx = \int_3^9 \frac{4}{x-1} dx = 4[\ln(x-1)]_3^9 = 4(\ln 8 - \ln 2) = 8 \ln 2 \text{ τ. μ.}$$

13. $f(x) = x \eta \mu x, \quad x \in [-\pi, \pi]$

(α) Έχουμε¹

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} x \eta \mu x dx = \int_{-\pi}^0 x \eta \mu x dx + \int_0^{\pi} x \eta \mu x dx$$

Αλλά, $\int_{-\pi}^0 x \eta \mu x dx = \int_0^{\pi} (-x) \eta \mu(-x) dx = \int_0^{\pi} (-x)(-\eta \mu x) dx = \int_0^{\pi} x \eta \mu x dx$ και τελικά,

¹ Ακολουθούμε την απόδειξη του: Έστω $f: [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής άρτια συνάρτηση. Τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} x \eta \mu x dx$$

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cdot \eta \mu x dx &= - \int_0^{\pi} (\pi - x) \cdot \eta \mu(\pi - x) d(\pi - x) = - \int_0^{\pi} (\pi - x) \cdot \eta \mu x d(\pi - x) \\ &= - \int_0^{\pi} \pi \cdot \eta \mu x d(\pi - x) + \int_0^{\pi} x \cdot \eta \mu x d(\pi - x) = \pi \int_0^{\pi} \eta \mu x dx - \int_0^{\pi} x \cdot \eta \mu x dx \end{aligned}$$

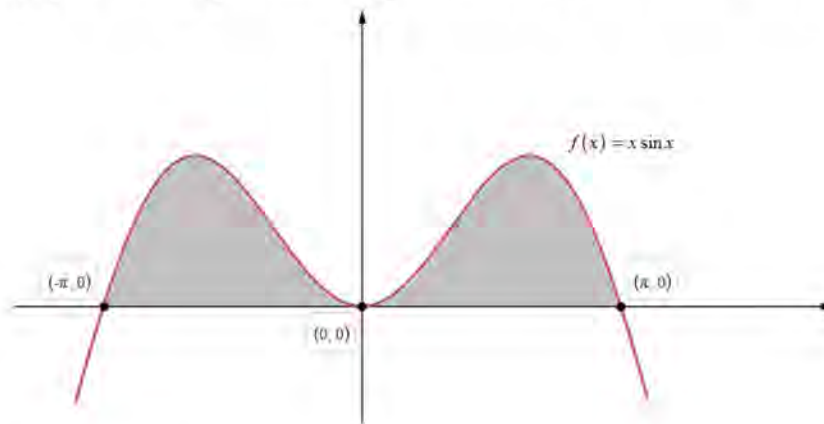
και αρα

$$2 \int_0^{\pi} x \cdot \eta \mu x dx = \pi \int_0^{\pi} \eta \mu x dx, \text{ δηλ. } \int_0^{\pi} x \cdot \eta \mu x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \eta \mu x dx$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cdot \eta \mu x dx &= - \int_0^{\pi} (\pi - x) \cdot \eta \mu(\pi - x) d(\pi - x) = - \int_0^{\pi} (\pi - x) \cdot \eta \mu x d(\pi - x) \\ &= \int_0^{\pi} (\pi - x) \cdot \eta \mu x dx \end{aligned}$$

$$(\gamma) \text{ Είναι } E = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} x \eta \mu x dx = 2 \int_0^{\pi} x \eta \mu x dx = 2 [\eta \mu x - x \sigma \upsilon \nu x]_0^{\pi} = 2\pi$$



14.

$$(\alpha) f(x) = \ln x, \quad g(x) = \ln 2$$

Έχουμε

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln x = \ln 2 \Leftrightarrow x = 2$$

(αφού η $f(x) = \ln x$ είναι 1-1). Άρα, τα γραφήματα των δυο καμπύλων τέμνονται σε ένα και μόνο σημείο, στο $(2, \ln 2)$.

Βρίσκουμε τη σχετική θέση των δυο καμπύλων:

Εύκολα βλέπουμε ότι $\forall x \in (0, \ln 2]$ είναι $f(x) \leq g(x)$ με την ισότητα μόνο για $x = 2$. Έτσι,

$$E = E_1 + E_2 = 1 \cdot \ln 2 + \int_1^2 (g(x) - f(x)) dx = \ln 2 + [\ln 2 - \ln x]_1^2 = \ln 2 + 1 - \ln 2 = 1 \text{ τ. μ.}$$

$$(\beta) f(x) = \frac{1}{4} x^2, \quad g(x) = 2, \quad h(x) = 4$$

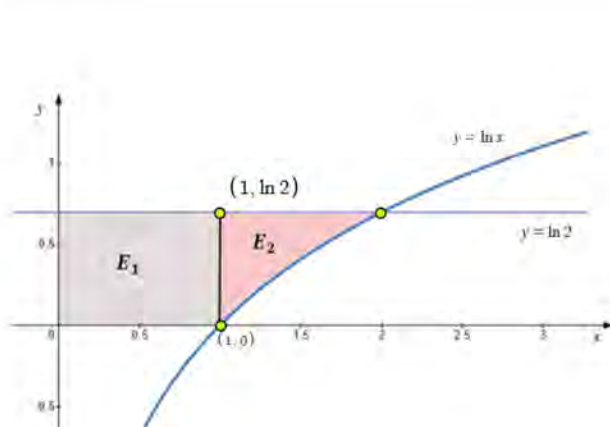
[Λεπτομέρειες στον αναγνώστη]

Έχουμε

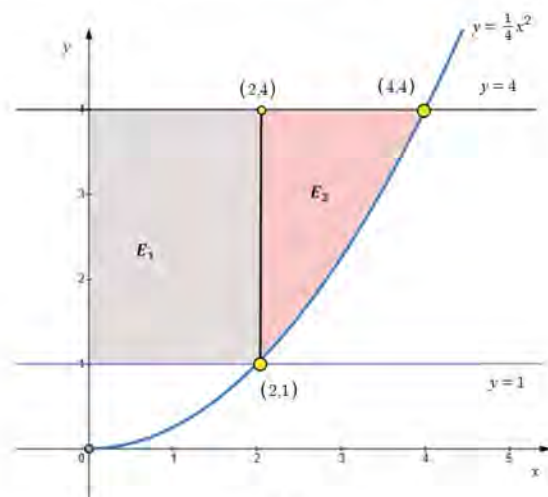
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \geq 0$$

και τα σημεία τομής των 3 αυτών καμπύλων είναι τα $(2, 1)$ και $(4, 4)$. Έτσι,

$$E = E_1 + E_2 = 2 \cdot 3 + \int_2^4 \left(4 - \frac{1}{4} x^2\right) dx = 6 + \left[4x - \frac{x^3}{12}\right]_2^4 = 6 + \frac{10}{3} = \frac{28}{3} \text{ τ. μ.}$$



(α)



(β)

Δραστηριότητες σελ. 135-136 (Υπολογισμός όγκου στερεού εκ περιστροφής)

1. (α) $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 2)^2 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + 4\frac{x^3}{3} + 4x \right]_0^2 = \frac{376\pi}{15} \text{ κ.μ.}$

(β) $V = \pi \int_0^3 x^2(x-3)^2 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + 3x^3 \right]_0^3 = \frac{81\pi}{10} \text{ κ.μ.}$

2. (α) $f(x) = e^x, x \in [1, 2]$. Είναι $f(1) = e = 1, f(2) = e^2$ και

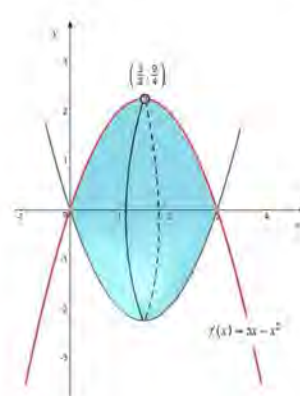
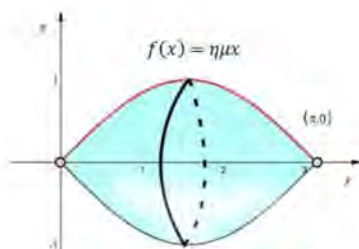
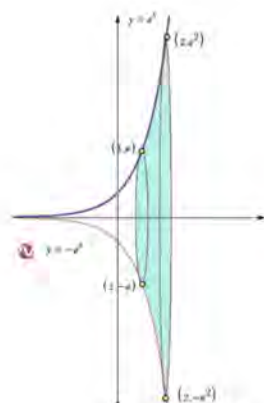
$$V = \pi \int_1^2 f^2(x) dx = \pi \int_1^2 e^{2x} dx = \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 = \pi \frac{e^2}{2} (e^2 - 1) \text{ κ.μ.}$$

(β) $f(x) = \eta \mu x, x \in [0, \pi]$. Είναι $f(0) = \eta \mu 0 = 0, f(\pi) = \eta \mu(\pi) = 0$ και

$$V = \pi \int_0^\pi f^2(x) dx = \pi \int_0^\pi \eta \mu^2 x dx = \frac{\pi}{2} [1 - \sigma \upsilon \nu(2x)]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} \text{ κ.μ.}$$

(γ) $f(x) = 3x - x^2 = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} = -x(x-3), x \in [0, 3]$. Είναι $f(0) = 0, f(3) = 0$ και

$$V = \pi \int_0^3 f^2(x) dx = \pi \int_0^3 (3x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^3 (9x^2 - 6x^3 + x^4) dx = \pi \left[3x^3 - \frac{3x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right]_0^3 = \frac{81\pi}{10} \text{ κ.μ.}$$



3. (α) $f(x) = 4x - x^2 = -(x-2)^2 + 4 = -x(4-x)$ και αρα το γράφημα της f εκφράζει παραβολή με κορυφή (μέγιστο) στο σημείο $(2, 4)$ και ρίζες τα σημεία $x = 0, 4$. Συνεπώς,

$f(x) \geq 0, \forall x \in [0,4]$ και αρα

$$V = \pi \int_0^4 f^2(x) dx = \int_0^4 (4x - x^2)^2 dx = \left[\frac{x^5}{5} - 2x^4 + \frac{16x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{512}{15} \text{ τ.μ.}$$

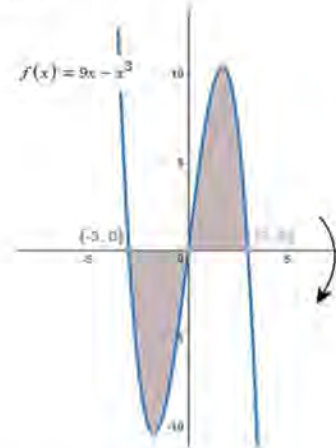
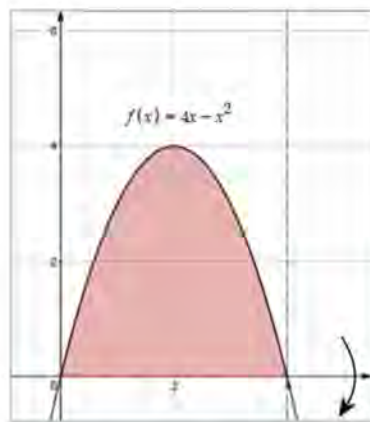
(β) $f(x) = 9x - x^3 = x(9 - x^2) = -x(x - 3)(x + 3)$

Κάνοντας τον πίνακα προσήμου της πιο πάνω πολυωνυμικής συνάρτησης, έχουμε ότι $f(x) \leq 0, \forall x \in [-3,0]$ και $f(x) \geq 0, \forall x \in [0,3]$ και αρα

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-3}^0 f^2(x) dx + \int_0^3 f^2(x) dx = \int_{-3}^0 (9x - x^3)^2 dx - \int_0^3 (9x - x^3)^2 dx \\ &= \left[\frac{x^7}{7} - 18\frac{x^5}{5} + 27x^3 \right]_{-3}^0 - \left[\frac{x^7}{7} - 18\frac{x^5}{5} + 27x^3 \right]_0^3 = \dots = \frac{11664}{35} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Διαφορετικά, παρατηρήστε ότι η συνάρτηση είναι **περιττή** και αρα

$$V = 2\pi \int_0^3 f^2(x) dx$$



4.

(α) $f(x) = 6 - x^2, g(x) = 2.$

Βρίσκουμε τα σημεία τομής των γραφημάτων των πιο πάνω συναρτήσεων:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 6 - x^2 = -x \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -2, 3. \text{ Εύκολα βρίσκουμε } g(-2) = 2 \text{ και } g(3) = -3.$$

Βρίσκουμε τη θέση των δυο γραφημάτων μεταξύ τους:

$$f(x) - g(x) = (x - 3)(x + 2) \geq 0, \forall x \in [-2, 3]$$

(από τον πίνακα προσήμου) και αρα

$$f(x) \geq g(x), \forall x \in [-2, 3]$$

Συνεπώς, (ως προς τον άξονα των τετμημένων)

$$V = \pi \int_{-2}^3 (f^2(x) - g^2(x)) dx = \int_{-2}^3 (32 + x^4 - 12x^2) dx = \left[32x - 4x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^3 = \frac{384}{5} \text{ τ.μ.}$$

(β) $f(x) = 2\sqrt{x}, g(x) = \frac{x}{2}.$

Βρίσκουμε τα σημεία τομής των γραφημάτων των πιο πάνω συναρτήσεων:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow (2\sqrt{x})^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4x = \frac{x^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16x = 0 \Leftrightarrow x(x - 16) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 16. \text{ Εύκολα βρίσκουμε } g(0) = 0 \text{ και } g(16) = 8.$$

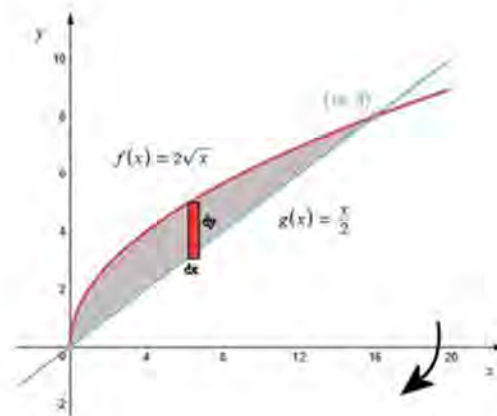
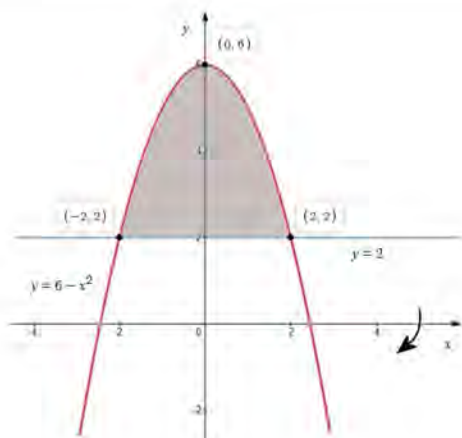
Βρίσκουμε τη θέση των δυο γραφημάτων μεταξύ τους:

$$f(x) - g(x) = x(x - 16) \geq 0, \forall x \in [0, 16]$$

(από τον πίνακα προσήμου) και αρα $f(x) \geq g(x), \forall x \in [0, 16]$

Συνεπώς, (ως προς τον άξονα των τετμημένων)

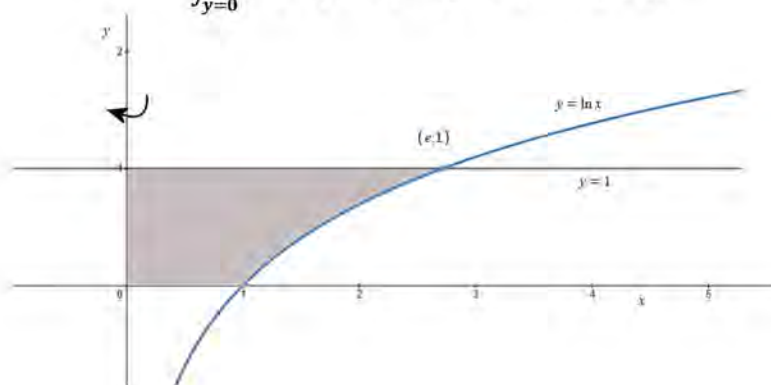
$$E = \pi \int_0^{16} (f^2(x) - g^2(x)) dx = \pi \int_0^{16} \left(4x - \frac{x^2}{4} \right) dx = \pi \left[2x^2 - \frac{x^3}{12} \right]_0^{16} = \frac{512\pi}{3} \text{ τ.μ.}$$



5. (α) Η συνάρτηση $y = f(x) = \ln x, x > 0$ είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφη την $f^{-1}(y) = e^y, y \in \mathbb{R}$ και αφού είναι γνησίως αύξουσα έπεται ότι $f^{-1}([0,1]) = [f^{-1}(0), f^{-1}(1)] = [e^0, e^1] = [1, e]$

Είναι

$$V = \pi \int_{y=0}^1 (e^y)^2 dy = \pi [e^{2y}]_0^1 = \pi(e^2 - 1) \text{ κ. μ.}$$

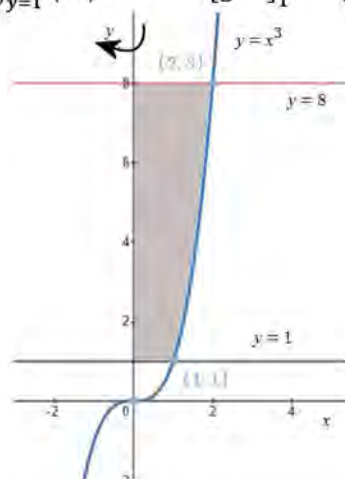


- (β) Η συνάρτηση $y = f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφη την $f^{-1}(y) = y^{1/3}, y \in \mathbb{R}$ και αφού είναι γνησίως αύξουσα έπεται ότι

$$f^{-1}([1,8]) = [f^{-1}(1), f^{-1}(8)] = \left[1^{1/3}, 8^{1/3}\right] = [1,2]$$

Είναι

$$V = \pi \int_{y=1}^8 \left(y^{1/3}\right)^2 dy = \pi \left[\frac{3}{5} y^{5/3}\right]_1^8 = \frac{93\pi}{5} \text{ κ. μ.}$$



6. (α) $y = f(x) = \frac{4}{\pi} \arcsin x, x \in [0,1] \Leftrightarrow x = \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right), y \in [0,1]$ και αρα

$$V = \pi \int_{y=0}^1 \sin^2\left(\frac{\pi y}{4}\right) dy = \pi \left[\frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right) - y \right]_0^1 = 4 - \pi \text{ κ. μ.}$$

(β) $y = f(x) = \eta\mu x \sin x = \frac{1}{2} \eta\mu(2x), x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και αρα

$$V = \frac{\pi}{4} \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2(2x) dx = \frac{\pi}{8} [1 - \cos(4x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} \text{ κ. μ.}$$



7. Εύκολα βρίσκουμε ότι τα σημεία τομής του γραφήματος της $f(x) = x^2$ με την ευθεία με εξίσωση $y = 1$ είναι τα $(1,1)$ και $(-1,1)$.

(α) Σύμφωνα με τον τύπο υπολογισμού όγκων στερεών εκ περιστροφής σε δακτυλίους, έχουμε

$$V = \pi \int_{-1}^1 (f(x) - 1)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = \dots = \frac{16\pi}{15} \text{ κ. μ.}$$

(β) Σύμφωνα με τον ίδιο τύπο $((\text{εξωτερική ακτίνα})^2 - (\text{εσωτερική ακτίνα})^2)$, έχουμε

$$V = \pi \int_{-1}^1 [(f(x) - 1)^2 - (2 - 1)^2] dx = \pi \int_{-1}^1 (2 - x^2)^2 dx - 2\pi = \pi \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^2 + 4) dx - 2\pi$$

$$= \dots = \frac{86\pi}{15} - 2\pi = \frac{56\pi}{15} \text{ κ. μ.}$$

8. (α) Σύμφωνα με τον τύπο υπολογισμού όγκων στερεών εκ περιστροφής σε δακτυλίους, έχουμε

$$V = \pi \int_0^4 (g^2(x) - f^2(x)) dx = \pi \int_0^4 (4 - x) dx = \dots = 8\pi \text{ κ. μ.}$$

- (β) Εύκολα βρίσκουμε ότι $\eta\mu x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ στο διάστημα $[0,1]$. Έτσι,

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (f^2(x) - g^2(x)) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\eta\mu^2(x) - \sin^2(x)) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(2x)) dx = \dots = \frac{\pi}{2} \text{ κ. μ.}$$

Δραστηριότητες σελ. 137-140 (Ενότητας)

1. Θα δείξουμε ότι $\int_0^1 (3x + 2) dx = \frac{7}{2}$.

Κατ'αρχάς, η συνάρτηση $f(x) = 3x + 2, x \in [0, 1]$ είναι συνεχής και αρα κατα Riemann ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση μεγέθους n του διαστήματος $[0, 1]$: $\Delta_x = \frac{1}{n}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Το κάθε x_i δίνεται από την $x_i = i \cdot \Delta_x = \frac{i}{n}$. Έτσι,

$$\int_0^1 (3x + 2) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta_x(n) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \right)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x + 2, x \in [0, 1] \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{3}{n} \left(\frac{i}{n}\right) + 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2}{n} n \right) &= \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

2. Θα δείξουμε ότι $\int_a^\beta x^2 dx = \frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3)$. Κατ'αρχάς, η συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in [\alpha, \beta]$ είναι συνεχής και αρα κατα Riemann ολοκληρώσιμη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\alpha = 0$. Θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση μεγέθους n του διαστήματος $[0, \beta]$: $\Delta_x(n) = \frac{\beta}{n}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Το κάθε x_i δίνεται από την $x_i = i \cdot \Delta_x = i \cdot \frac{\beta}{n}$. Έτσι,

$$\int_a^\beta x^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta_x(n) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n f\left(i \cdot \frac{\beta}{n}\right) \cdot \frac{\beta}{n} \right)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, x \in [\alpha, \beta] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n \left(i \cdot \frac{\beta}{n}\right)^2 \cdot \frac{\beta}{n} \right) = \beta \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\beta^2}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \sum_{i=1}^n i &= \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \beta^3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \beta^3 \frac{2}{6} = \frac{\beta^3}{3} \end{aligned}$$

Αν $\alpha < 0$, τότε

$$\int_a^\beta x^2 dx = \int_a^0 x^2 dx + \int_0^\beta x^2 dx = -\int_0^\alpha x^2 dx + \int_a^0 x^2 dx = \frac{\beta^3}{3} - \frac{\alpha^3}{3}$$

και ομοίως αν $\alpha > 0$.

3. Κατ'αρχάς, τα $\int_1^4 f(x) dx$ και $\int_4^6 f(x) dx$ είναι καλά ορισμένα λόγω της συνέχειας της συνάρτησης. Είναι

$$(\alpha) \quad \int_6^4 f(x) dx = -\int_4^6 f(x) dx = -6 \quad \Bigg| \quad (\beta) \quad \int_2^2 f(x) dx = 0$$

$$(\gamma) \quad \int_1^6 f(x) dx = \int_1^4 f(x) dx + \int_4^6 f(x) dx = 10 - 6 = 4$$

$$(\delta) \quad \int_0^3 f(x+1) dx = \int_1^4 f(x) dx = 10$$

4. Είναι

$$\int_{3\alpha}^{2\alpha} \frac{1}{1+3^{-x}} dx = \int_{3\alpha}^{2\alpha} \frac{3^x}{1+3^x} dx \Rightarrow -\int_{3\alpha}^{2\alpha} \frac{1}{1+3^{-x}} dx = \int_{2\alpha}^{3\alpha} \frac{3^x}{1+3^x} dx$$

και αρα

$$\int_{2\alpha}^{3\alpha} \frac{1}{1+3^x} dx - \int_{3\alpha}^{2\alpha} \frac{1}{1+3^{-x}} dx = \int_{2\alpha}^{3\alpha} \frac{1}{1+3^x} dx + \int_{2\alpha}^{3\alpha} \frac{3^x}{1+3^x} dx = \int_{2\alpha}^{3\alpha} \frac{1+3^x}{1+3^x} dx = \int_{2\alpha}^{3\alpha} dx$$

$$= 3\alpha - 2\alpha = \alpha.$$

5. Είναι

$$\int_1^4 f(x) dx = \int_2^7 f(x) dx \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 f(x) dx + \int_4^7 f(x) dx \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = \int_4^7 f(x) dx$$

6. Είναι

$$\int_{-k}^{2k} (2x+1) dx = 4 \Leftrightarrow \left[x^2 + x \right]_{-k}^{2k} = 4k^2 + 2k - k^2 + k = 4 \Leftrightarrow 3k^2 + 3k - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-3 + \sqrt{57}}{6} = \frac{-1 + \sqrt{19}}{2}$$

Σημείωση: Στις λύσεις του ΥΠΠΑΝ είναι α στη θέση του k .

7. (α) Θα υπολογίσουμε το $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$

1ος τρόπος

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $\theta: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\theta(x) = \arcsin(x) \Leftrightarrow x(\theta) = \sin\theta$ ο οποίος είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού του και μάλιστα γνησίως αύξουσα συνάρτηση ($\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta > 0, \forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$) με $\theta(0) = 0, \theta(1) = \frac{\pi}{2}$. Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 2 αλλαγής μεταβλητής στο ορισμένο ολοκλήρωμα, είναι

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\theta(0)}^{\theta(1)} x^2(\theta) \sqrt{1-x^2(\theta)} x'(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \sqrt{1-\sin^2\theta} \cos\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2\theta) d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2\theta) d(2\theta) = \left[\frac{1}{8} \left(\frac{2\theta}{2} - \frac{\sin(4\theta)}{4} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}$$

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση (αντικατάστασης) $\theta: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\theta(x) = \arcsin(x)$. Η θ είναι αντιστρέψιμη και $\theta^{-1}(0) = 0$ και $\theta(\frac{\pi}{2}) = \arcsin(1) = 1 \Leftrightarrow \theta^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$. Επίσης, είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με την παράγωγό της $\theta'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ να είναι συνεχής συνάρτηση και $\theta'(x) > 0, \forall t \in (0, \frac{\pi}{2})$, δηλ. η θ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Τότε, από το Θεώρημα 1,

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\theta^{-1}(0)}^{\theta^{-1}(1)} x^2(\theta) \sqrt{1-x^2(\theta)} x'(\theta) d\theta$$

και προχωράμε όπως πριν

3ος τρόπος

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = - \int_0^1 [(1-x^2) + 1] \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

και προχωράμε όπως πριν.

(β) Είναι

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = - \left[\arctan x + \frac{1}{x} \right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi+4}{4} - \frac{\pi+\sqrt{3}}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{12}$$

$$(Y) \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$$

1ος τρόπος: Θεωρούμε το μετασχηματισμό $\theta: \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με $\theta(x) = \text{τοξημ}(\sqrt{x}) \Leftrightarrow x(\theta) = \eta\mu^2\theta$ ο οποίος είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού του και μάλιστα γνησίως αύξουσα συνάρτηση ($\frac{dx}{d\theta} = 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta d\theta = \eta\mu(2\theta) > 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$). Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 2 αλλαγής μεταβλητής στο ορισμένο ολοκλήρωμα, είναι

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx &= \int_{x(0)}^{x(\frac{1}{4})} \sqrt{\frac{\eta\mu^2\theta}{1-\eta\mu^2\theta}} \eta\mu(2\theta) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}} \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi\theta\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu^2\theta d\theta = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} (\theta - \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση (αντικατάστασης) $\theta: \left(0, \frac{1}{4}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με $\theta(x) = \text{τοξημ}(\sqrt{x})$. Η θ είναι αντιστρέψιμη και $\theta^{-1}(0) = 0$ και $\theta\left(\frac{1}{4}\right) = \text{τοξημ}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \theta^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$. Επίσης, είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με την παράγωγό της $\theta'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}}, t \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ να είναι συνεχής συνάρτηση και $\theta'(t) > 0, \forall t \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, δηλ. η θ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Τότε, από το Θεώρημα,

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \int_{\theta^{-1}(0)}^{\theta^{-1}(\frac{1}{4})} \sqrt{\frac{\eta\mu^2\theta}{1-\eta\mu^2\theta}} \eta\mu(2\theta) \theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu^2\theta d\theta$$

το οποίο υπολογίζεται όπως πριν

3ος τρόπος

Θεωρούμε την αντικατάσταση

$$u(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \Leftrightarrow u^2(x) = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow x = \frac{u^2(x)}{u^2(x)+1} \quad \text{και} \quad dx = \frac{2u(x)}{(u^2(x)+1)^2} du$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx &= 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{u^2(x)}{(u^2(x)+1)^2} du = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{u^2(x)+1}{(u^2(x)+1)^2} du - 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{du}{(u^2(x)+1)^2} \\ &= 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{du}{u^2(x)+1} - 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{du}{(u^2(x)+1)^2} \end{aligned}$$

και αφού

$$\int \frac{du}{u^2(x)+1} = \text{τοξεφ}\mu + c_1, \quad \int \frac{du}{(u^2(x)+1)^2} = \frac{1}{2} \text{τοξεφ}\mu(x) + \frac{u^2}{2(u^2(x)+1)} + c_2,$$

έχουμε τελικά ότι

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \left[\text{τοξεφ}\mu(x) - \frac{u^2(x)}{u^2(x)+1} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$$

Αυτό μας λέει επίσης ότι $\int \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \text{τοξεφ}\mu \sqrt{\frac{x}{1-x}} - \sqrt{x(1-x)} + c$

(δ) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x} dx$. Θεωρούμε την αντικατάσταση $\theta(x) = \text{τεμ}\theta \Leftrightarrow x = \text{τοξ}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)$ και $dx = \frac{d\theta}{\text{τεμ}\chi\epsilon\varphi x}$.

Έχουμε

$$\int \frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x} dx = \int (\theta^2 - 1) dx = \frac{\theta^3}{3} - \theta + c = \frac{\text{τεμ}^3 x}{3} - \text{τεμ}x + c$$

και αρα

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta \mu^3 x}{\sigma \nu \nu^4 x} dx = \left[\frac{\tau \epsilon \mu^3 x}{3} - \tau \epsilon \mu x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4}{3}$$

(ε) $\int_0^4 \sqrt{8x - x^2} dx = \int_0^4 \sqrt{16 - (x - 4)^2} dx$. Θεωρούμε το μετασχηματισμό

$$u(x) = x - 4 \Leftrightarrow x = u(x) + 4 \text{ και } dx = du. \text{ Έτσι, το πιο πάνω γίνεται } \int_{-4}^0 \sqrt{16 - u^2} du$$

Για το τελευταίο, θεωρούμε (κατά τα γνωστά) την αντικατάσταση $\theta: \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \rightarrow \mathbb{R}$ με $u(\theta) = 4\eta\mu(\theta)$. Η u είναι αντιστρέψιμη με $\theta^{-1}(u) = \text{τοξη}\mu\left(\frac{u}{4}\right)$ και $\theta^{-1}(-4) = 0$ και $\theta(0) = 0 \Leftrightarrow \theta^{-1}(0) = 0 \Leftrightarrow \text{τοξη}\mu\left(\frac{\theta}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \text{τοξη}\mu\frac{\pi}{2}$. Τότε, από το Θεώρημα 1,

$$16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \nu \nu^2(\theta) d\theta = 8[\sigma \nu \nu \theta \eta \mu \theta + \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi$$

(στ) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3 - 3\eta\mu x + \sigma \nu \nu x} dx$. Θα υπολογίσουμε το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα: $\int \frac{dx}{3 - 3\eta\mu x + \sigma \nu \nu x}$

Θεωρούμε την αντικατάσταση $u(x) = \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$ και (κατά τα γνωστά) το πιο πάνω μετασχηματίζεται στο

$$\begin{aligned} - \int \frac{du}{u^2(x) - 3u(x) + 2} &= - \int \frac{du}{(u(x) - 2)(u(x) - 1)} = - \int \left(\frac{1}{u(x) - 2} - \frac{1}{u(x) - 1} \right) du \\ &= \int \frac{1}{u(x) - 1} du - \int \frac{1}{u(x) - 2} du = \ln \left| \frac{u(x) - 1}{u(x) - 2} \right| + c \end{aligned}$$

και αρα $\int \frac{dx}{3 - 3\eta\mu x + \sigma \nu \nu x} = \ln \left| \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) - 2} \right| + c$

Συνεπώς, $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3 - 3\eta\mu x + \sigma \nu \nu x} dx = \left[\ln \left| \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) - 2} \right| \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln \left| \frac{\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3} - 2} \right| = \ln \left(\frac{\sqrt{3} + 5}{4} \right)$

8. Είναι

$$\begin{aligned} \int_0^3 x f'(x) dx + \int_0^3 f(x) dx &= 12 \Leftrightarrow \int_0^3 (x f'(x) + f(x)) dx = 12 \Leftrightarrow \int_0^3 [x f(x)]' dx = 12 \\ &\Leftrightarrow \left[x f(x) \right]_0^3 = 12 \Leftrightarrow 3f(3) = 12 \Leftrightarrow f(3) = 4 \end{aligned}$$

9. Είναι $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $A(2,5), B(4,7) \in Gr(g)$ και $\lambda_{\varepsilon\varphi}(A) = \frac{\pi}{3}$, $\lambda_{\varepsilon\varphi}(B) = \frac{\pi}{6}$, δηλ. $f'(2) = \frac{\pi}{3}$ και $f'(4) = \frac{\pi}{6}$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_2^4 f'(x) \cdot f''(x) dx &= \int_2^4 f'(x) \cdot (f'(x))' dx = [f'(x) \cdot f'(x)]_2^4 - \int_2^4 f'(x) \cdot (f'(x))' dx \\ &= [f'(4)]^2 - [f'(2)]^2 - \int_2^4 f'(x) \cdot f''(x) dx \\ \Rightarrow 2 \int_2^4 f'(x) \cdot f''(x) dx &= \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_2^4 f'(x) \cdot f''(x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{6} \right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\pi^2}{24}$$

Διαφορετικά,

$$\int_2^4 f'(x) \cdot f''(x) dx = \frac{1}{2} \int_2^4 \left([f'(x)]^2 \right)' dx = \frac{1}{2} \left[[f'(x)]^2 \right]_2^4 = \frac{1}{2} \left[[f'(4)]^2 - [f'(2)]^2 \right] =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi^2}{36} - \frac{\pi^2}{9} \right) = -\frac{\pi^2}{24}$$

Σημείωση: Η απάντηση του ΥΠΠΑΝ είναι η $\frac{4}{3}$.

10. Έχουμε

$$\int \frac{\eta\mu(x)}{1+2\sigma\upsilon\nu(x)} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1+2\sigma\upsilon\nu(x))}{1+2\sigma\upsilon\nu(x)} = -\frac{1}{2} \ln(1+2\sigma\upsilon\nu(x)) + c$$

και αρα

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu(x)}{1+2\sigma\upsilon\nu(x)} dx = \left[-\frac{1}{2} \ln(1+2\sigma\upsilon\nu(x)) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\ln 3}{2}$$

Επίσης,

$$\int \frac{\eta\mu(2x)}{1+2\sigma\upsilon\nu(x)} dx = \int \frac{2\eta\mu(x)\sigma\upsilon\nu(x)}{1+2\sigma\upsilon\nu(x)} dx = -2 \int \frac{\sigma\upsilon\nu(x)}{1+2\sigma\upsilon\nu(x)} d(\sigma\upsilon\nu(x))$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1+2\sigma\upsilon\nu(x)) + \sigma\upsilon\nu(x) + c$$

και αρα

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu(2x)}{1+2\sigma\upsilon\nu(x)} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+2\sigma\upsilon\nu(x)) + \sigma\upsilon\nu(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\ln 3}{2}$$

Παρατηρούμε ότι $A + B = 1$.

Διαφορετικά,

$$A + B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu(x)}{1+2\sigma\upsilon\nu(x)} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu(2x)}{1+2\sigma\upsilon\nu(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu(x) + \eta\mu(2x)}{1+2\sigma\upsilon\nu(x)} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu(x) + 2\eta\mu(x)\sigma\upsilon\nu(x)}{1+2\sigma\upsilon\nu(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu(x)(1+2\sigma\upsilon\nu(x))}{1+2\sigma\upsilon\nu(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu(x) dx = -[\sigma\upsilon\nu(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

11. $f(2\alpha - x) = f(x)$. Τότε,

$$\int_0^{2\alpha} f(x) dx = \int_0^{\alpha} f(x) dx + \int_{\alpha}^{2\alpha} f(x) dx$$

$$\text{Αλλά, } \int_{\alpha}^{2\alpha} f(x) dx = \int_{\alpha}^0 f(2\alpha - x) d(2\alpha - x) = \int_{\alpha}^0 f(x) d(2\alpha - x) = -\int_{\alpha}^0 f(x) dx = \int_0^{\alpha} f(x) dx$$

και αρα

$$\int_0^{2\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$$

12. $f(2\alpha - x) = -f(x)$. Τότε,

$$\int_0^{2\alpha} f(x) dx = \int_0^{\alpha} f(x) dx + \int_{\alpha}^{2\alpha} f(x) dx$$

$$\text{Αλλά, } \int_{\alpha}^{2\alpha} f(x) dx = \int_{\alpha}^0 f(2\alpha - x) d(2\alpha - x) = -\int_{\alpha}^0 f(x) d(2\alpha - x) = \int_{\alpha}^0 f(x) dx$$

$$= -\int_0^{\alpha} f(x) dx$$

και αρα

$$\int_0^{2\alpha} f(x) dx = 0$$

13. $f: [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε,

$$\int_0^\alpha x^3 f(x^2) dx = \int_0^\alpha x \cdot x^2 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha^2} x^2 f(x^2) d(x^2) \equiv \frac{1}{2} \int_0^{\alpha^2} x f(x) dx$$

14. (α) Ο μετασχηματισμός $t = 2\alpha - x \Leftrightarrow x = 2\alpha - t$ είναι 1-1 ο οποίος απεικονίζει (με αντιστρέψιμο τρόπο) το διάστημα $[0, 2\alpha]$ στο διάστημα $[0, 2\alpha]$. Επίσης, $dt = -dx$ και άρα

$$\int_0^{2\alpha} \frac{f(2\alpha - x)}{f(x) + f(2\alpha - x)} dx = \int_0^{2\alpha} \frac{f(t)}{f(t) + f(2\alpha - t)} dt \equiv \int_0^{2\alpha} \frac{f(x)}{f(x) + f(2\alpha - x)} dx$$

Αλλά,

$$\int_0^{2\alpha} \frac{f(2\alpha - x)}{f(x) + f(2\alpha - x)} dx + \int_0^{2\alpha} \frac{f(x)}{f(x) + f(2\alpha - x)} dx = \int_0^{2\alpha} \frac{f(x) + f(2\alpha - x)}{f(x) + f(2\alpha - x)} dx = \int_0^{2\alpha} dx = 2\alpha$$

Συνεπώς, από τις 2 αυτές σχέσεις, έπεται ότι

$$\int_0^{2\alpha} \frac{f(x)}{f(x) + f(2\alpha - x)} dx = \alpha$$

(β) Από το προηγούμενο, έχουμε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx = \frac{\pi}{4}$$

15. Έχουμε

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \Rightarrow A\left(\frac{\pi}{2}, 3\right) \in C_f$$

Είναι

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f''(x)] \cdot \sin x dx &= 2 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) \cdot \sin x + f''(x) \cdot \sin x] dx = 2 \\ &\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f'(x))' \cdot \sin x dx = 2 \quad (*) \end{aligned}$$

Είναι (ακολουθώντας ολοκλήρωση κατά μέρη)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f'(x))' \cdot \sin x dx &= \left[f'(x) \cdot \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) \cdot (\sin x)' dx \\ &= f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - f'(0) \cdot \sin 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) \cdot \eta \mu x dx \\ &= -f'(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) \cdot \eta \mu x dx \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας πάλιν ολοκλήρωση κατά μέρη, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) \cdot \eta \mu x dx &= \left[f(x) \cdot \eta \mu x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \sin x dx \\ &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \eta \mu\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) \cdot \eta \mu 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \sin x dx \\ &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \sin x dx \quad (**) \end{aligned}$$

Οι (*) και (**) μας δίνουν τότε

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f''(x)] \cdot \sin x dx = 2 \Leftrightarrow -f'(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow f'(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 = 3 - 2 = 1$$

16. (α) f και g συνεχείς στο διάστημα $[0, \pi]$ και άρα το γινόμενο τους είναι επίσης μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα αυτό και άρα έχει νόημα το $\int_0^\pi f(x)g(x) dx$. Θεωρούμε το μετασχηματισμό $u: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $y(x) = \pi - x$ ο οποίος είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού του και μάλιστα γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ($\frac{dy}{dx} = -1 < 0, \forall x \in [0, \pi]$). Έτσι, σύμφωνα με το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής στο ορισμένο ολοκλήρωμα, είναι

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x)g(x) dx &= - \int_{y(0)}^{y(\pi)} f(\pi - y)g(\pi - y) dy = - \int_\pi^0 f(\pi - y)g(\pi - y) dy \\ &= \int_0^\pi f(\pi - y)g(\pi - y) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Από υπόθεση} &= \int_0^\pi f(y)(\pi - g(y)) dy = \pi \int_0^\pi f(y) dy - \int_0^\pi f(y)g(y) dy \\ &\equiv \pi \int_0^\pi f(x) dx - \int_0^\pi f(x)g(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{και άρα} \quad \int_0^\pi f(x)g(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(x) dx$$

(β) Θεωρούμε f και g με τύπους $f(x) = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x}$ και $g(x) = x$ αντίστοιχα. Είναι συνεχείς στο διάστημα $[0, \pi]$ και $\forall x \in [0, \pi]$ έχουμε

$$f(\pi - x) = \frac{\eta\mu(\pi - x)}{1 + \sigma\upsilon\nu^2(\pi - x)} = \frac{\eta\mu x}{1 + (-\sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x} = f(x)$$

και $g(x) + g(\pi - x) = x + \pi - x = \pi$. Πληρούνται λοιπόν οι υποθέσεις του προηγούμενου ερωτήματος για τις πιο πάνω συναρτήσεις. Συνεπώς,

$$\int_0^\pi \frac{x\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int_0^\pi \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x} x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$$

$$\text{Αλλά,} \quad \int \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x} dx = - \int \frac{d(\sigma\upsilon\nu x)}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x} = -\tau\omicron\xi\epsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x) + c$$

και άρα

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x} dx &= -\frac{\pi}{2} \left[\tau\omicron\xi\epsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x) \right]_0^\pi = -\frac{\pi}{2} (\tau\omicron\xi\epsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu\pi) - \tau\omicron\xi\epsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu 0)) \\ &= -\frac{\pi}{2} (\tau\omicron\xi\epsilon\varphi(-1) - \tau\omicron\xi\epsilon\varphi(1)) = \frac{\pi}{2} (\tau\omicron\xi\epsilon\varphi(1) - \tau\omicron\xi\epsilon\varphi(-1)) = \frac{\pi}{2} (\tau\omicron\xi\epsilon\varphi(1) + \tau\omicron\xi\epsilon\varphi(1)) \\ &= \pi (\tau\omicron\xi\epsilon\varphi(1)) = \pi \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

17. Αν το $\alpha = 0$, δεν έχουμε να δείξουμε κάτι. Έτσι, αν $\alpha > 0$, η καμπύλη έχει εξίσωση

$y = \frac{x^2}{\alpha^2}(x + \alpha)$ και άρα σημεία τομής με τους άξονες τα $(0, 0)$, $(0, -\alpha)$. Το εν λόγω εμβαδόν δίνεται από το

$$E(S) = \int_{-\alpha}^0 \frac{x^2}{\alpha^2}(x + \alpha) dx = \frac{1}{\alpha^2} \int_{-\alpha}^0 x^2(x + \alpha) dx = \frac{1}{\alpha^2} \int_{-\alpha}^0 (x^3 + \alpha x^2) dx = \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{x^4}{4} + \frac{\alpha x^3}{3} \right]_{-\alpha}^0 = \frac{1}{\alpha^2} \left[-\frac{\alpha^4}{4} + \frac{\alpha^4}{3} \right] = \frac{\alpha^2}{12}$$

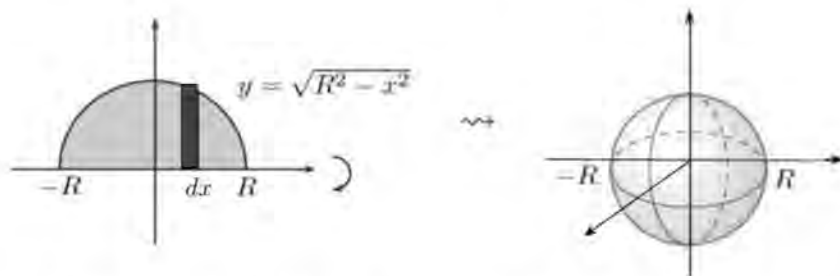
Ομοίως για $\alpha < 0$.

- 18.** Θα βρούμε τον όγκο του στερεού S που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που καθορίζεται από την εξίσωση $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geq 0$ όπου $R > 0$.

$$(C): \{x^2 + y^2 = R^2, x \geq 0\} \equiv \{y = \sqrt{R^2 - x^2}, x \in [-R, R]\}$$

Είναι

$$\begin{aligned} V(S) &= \pi \int_{-R}^R y^2 dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R = \pi \left[\left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3} \right) \right] \\ &= \pi \left(2R^3 - \frac{2R^3}{3} \right) = \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$



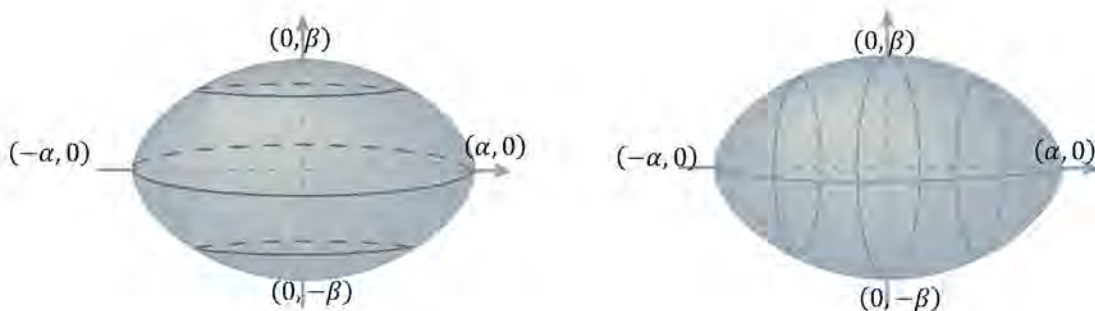
- 19.** Θα βρούμε τον όγκο του στερεού S που προκύπτει από την περιστροφή του χωρίου που καθορίζεται από την καμπύλη (C) με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $y \geq 0$ ($\alpha, \beta > 0$) γύρω από τον άξονα των τετμημένων. Είναι

$$(C): \left\{ \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, y \geq 0 \right\} \equiv \left\{ y = \beta \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}}, x \in [-\alpha, \alpha] \right\}$$

Με διαμέριση ως προς τον άξονα των τετμημένων

$$\begin{aligned} V(S) &= \pi \int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 dx = \beta^2 \pi \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} \right) dx = \frac{\beta^2 \pi}{\alpha^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} (\alpha^2 - x^2) dx \\ &= \frac{\beta^2 \pi}{\alpha^2} \left[\alpha^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{\beta^2 \pi}{\alpha^2} \left[\left(\alpha^3 - \frac{\alpha^3}{3} \right) - \left(-\alpha^3 + \frac{\alpha^3}{3} \right) \right] = \frac{\beta^2 \pi}{\alpha^2} \left(2\alpha^3 - \frac{2\alpha^3}{3} \right) = \frac{\beta^2 \pi}{\alpha^2} \left(\frac{4\alpha^3}{3} \right) = \frac{4\alpha\beta^2\pi}{3} \end{aligned}$$

Σημείωση: Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν στρέψουμε το χωρίο που καθορίζεται από την καμπύλη (C) με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $x \geq 0$ ($\alpha, \beta > 0$).



20. Έχουμε

$$f(x) = 3x - x^2 \text{ και } g(x) = 2$$

Βρίσκουμε τα σημεία τομής των γραφημάτων των πιο πάνω συναρτήσεων:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x - x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x=1) \vee (x=2)$$

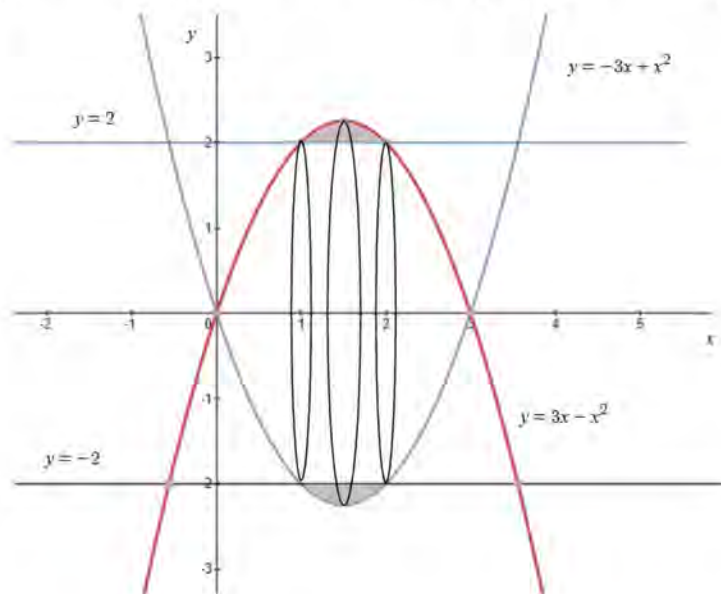
Τα σημεία τομής είναι τα $(1, f(1)) = (1, 2)$ και $(2, f(2)) = (2, 2)$.

Επίσης, $f(x) \geq g(x) = 2, \forall x \in [1, 2]$ με την ισότητα στα άκρα του διαστήματος και μόνο. Η ακτίνα ολοκλήρωσης είναι η

$$R(x) = f(x) - g(x) = 3x - x^2 - 2$$

και άρα

$$V(S) = \pi \int_1^2 R^2(x) dx = \pi \int_1^2 (3x - x^2 - 2)^2 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{15x^4}{6} - 6x + 4 \right]_1^2 = \frac{\pi}{30} \text{ κ. μ.}$$



21. Έχουμε

$$f(x) = \sqrt{x-1} \text{ και } x = 5$$

Βρίσκουμε τα σημεία τομής: $f(5) = 2$ Άρα, το σημείο τομής είναι το $(5, 2)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, με $f^{-1}(y) = y^2 + 1, y \in \mathbb{R}$ και

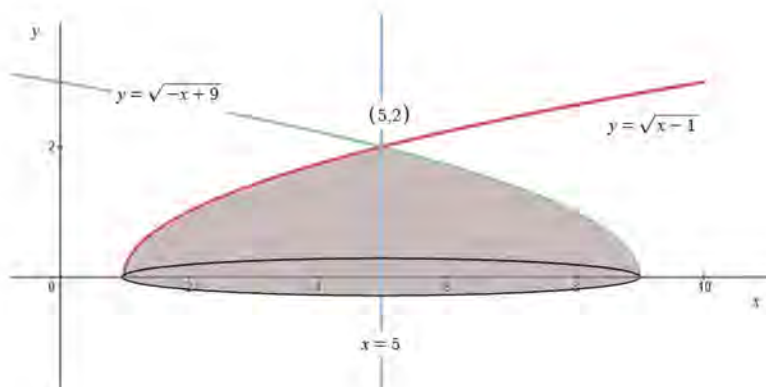
$$f^{-1}([1, 5]) = [f^{-1}(1), f^{-1}(5)] = [0, 2]$$

Η ακτίνα ολοκλήρωσης είναι η

$$R(y) = 5 - f^{-1}(y) = 4 - y^2$$

Άρα,

$$V = \pi \int_{y=0}^2 (4 - y^2)^2 dy = \pi \left[\frac{y^5}{5} - \frac{8y^3}{3} + 16y \right]_0^2 = \frac{256\pi}{15} \text{ κ. μ.}$$



22. Έχουμε

$$f(x) = \ln x \text{ και } x = e$$

Βρίσκουμε τα σημεία τομής: $f(e) = 1$ Άρα, το σημείο τομής είναι το $(e, 1)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, με $f^{-1}(y) = e^y, y \in \mathbb{R}$ και

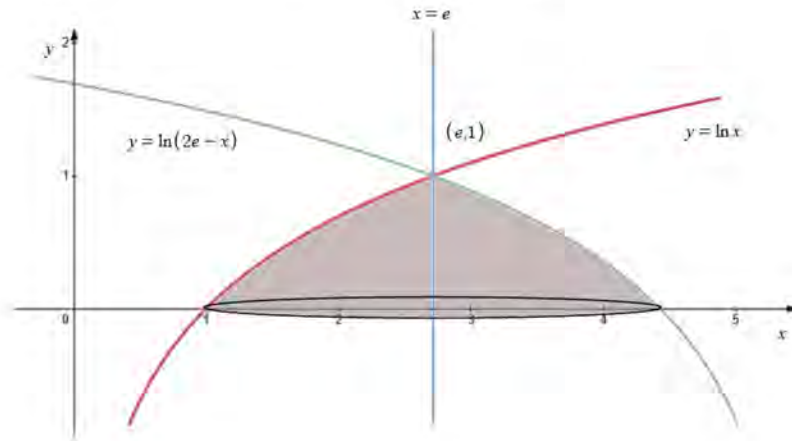
$$f^{-1}([1, e]) = [f^{-1}(1), f^{-1}(e)] = [0, 1]$$

Η ακτίνα ολοκλήρωσης είναι η

$$R(y) = e - f^{-1}(y) = e - e^y$$

Άρα,

$$V = \pi \int_{y=0}^1 (e - e^y)^2 dy = \pi \left[\frac{e^{2y}}{2} + e^2 y - 2e \cdot e^y \right]_0^1 = -\frac{1}{2}(1 + e^2 - 4e) \text{ κ. μ.}$$



23. $f(x) = x^2$ και $g(x) = x$

(α) Εσωτερική ακτίνα ολοκλήρωσης:

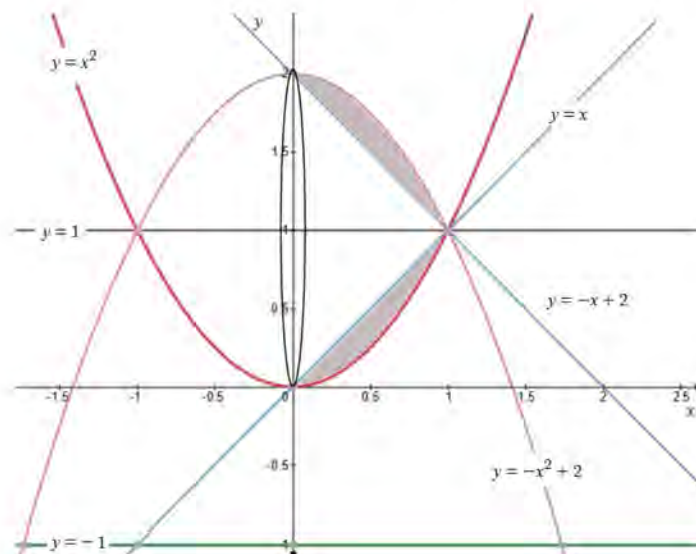
$$R_1(x) = 1 - g(x) = 1 - x$$

Εξωτερική ακτίνα ολοκλήρωσης:

$$R_2(x) = 1 - f(x) = 1 - x^2$$

Άρα

$$V = \pi \int_{x=0}^1 (R_2^2(x) - R_1^2(x)) dx = \pi \int_{x=0}^1 ((1 - x^2)^2 - (1 - x)^2) dx = \dots = \frac{\pi}{5} \text{ κ. μ.}$$



(β) Εσωτερική ακτίνα ολοκλήρωσης:

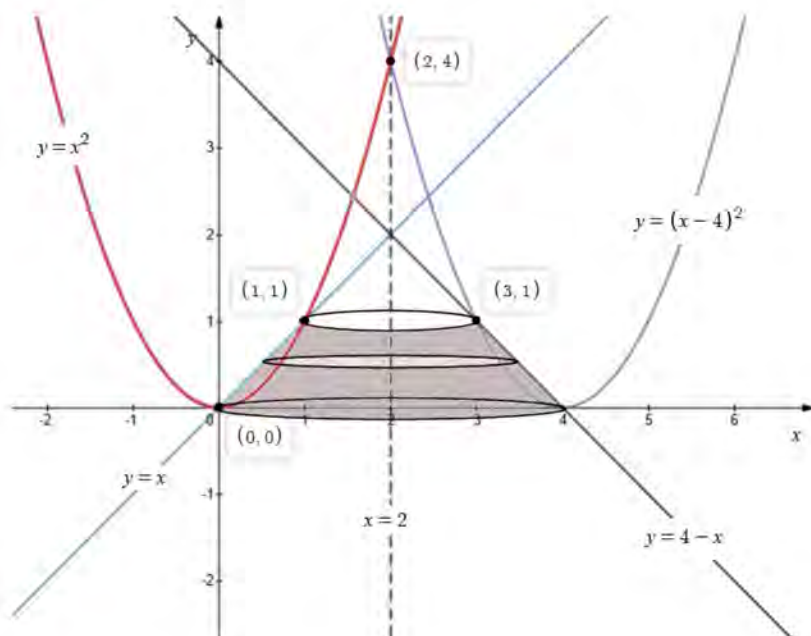
$$R_1(y) = 1 - f^{-1}(y) = 2 - \sqrt{y}$$

Εξωτερική ακτίνα ολοκλήρωσης:

$$R_2(y) = 1 - g^{-1}(y) = 2 - y$$

Άρα

$$V = \pi \int_{y=0}^1 (R_2^2(y) - R_1^2(y)) dy = \pi \int_{y=0}^1 ((2-y)^2 - (2-\sqrt{y})^2) dy = \dots = \frac{\pi}{2} \text{ κ. μ.}$$

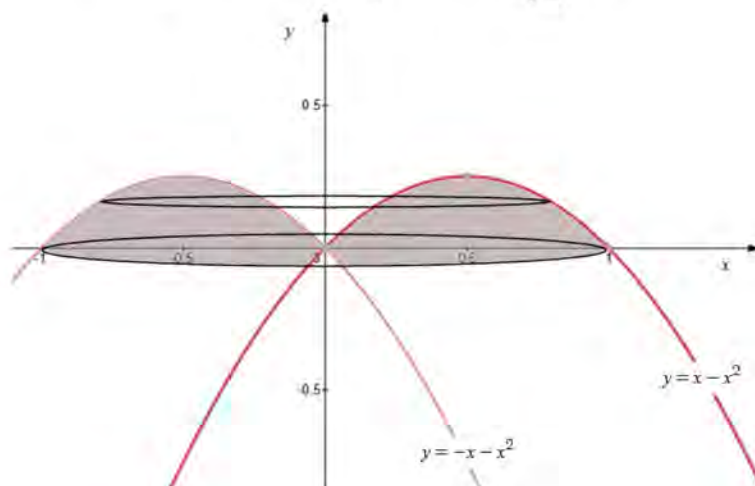


24. $f(x) = x - x^2 = -(x^2 - x) = -\left(x^2 - 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

(α) Είναι

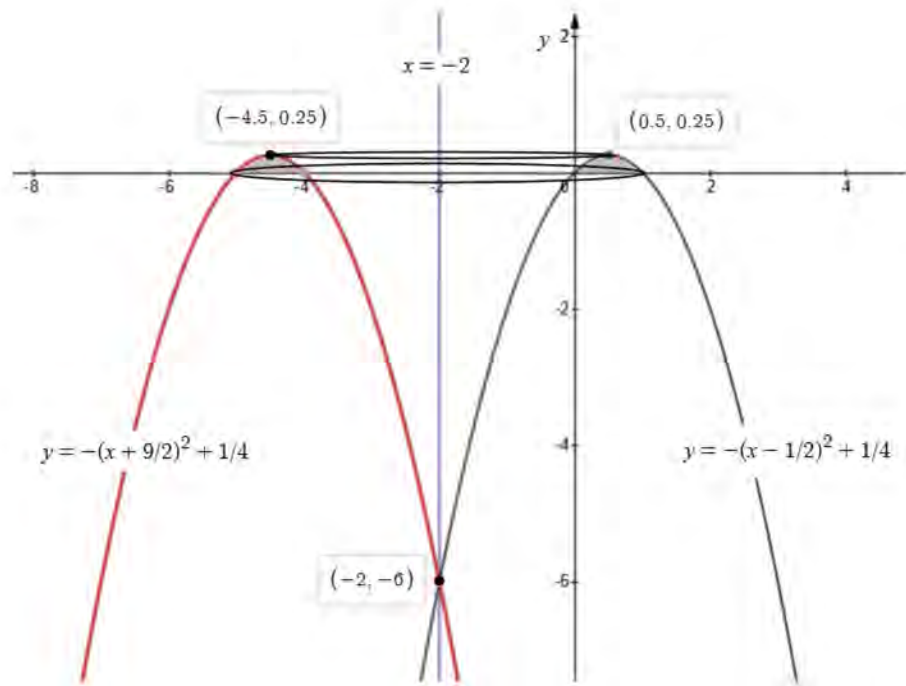
$$V = \pi \int_{y=0}^{\frac{1}{4}} \left[\left(-\sqrt{\frac{1}{4} - y} - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y} \right)^2 \right] dy = \pi \int_{y=0}^{\frac{1}{4}} \left[\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y} \right)^2 \right] dy$$

$$\pi \int_{y=0}^{\frac{1}{4}} \sqrt{1 - 4y} dy = \pi \left[-\frac{(1 - 4y)^{\frac{3}{2}}}{6} \right]_{y=0}^{\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{6} \text{ κ. μ.}$$



(β) Εργαζόμαστε ανάλογα και βρίσκουμε

$$V = \frac{5\pi}{6} \text{ κ.μ.}$$



Δραστηριότητες σελ. 141 (Εμπλουτισμού)

1. Αφού $f(x) \leq M, \forall x \in [\alpha, \beta]$, έπεται από γνωστή μας Πρόταση ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} M dx = M \int_{\alpha}^{\beta} dx = M(\beta - \alpha)$$

και αφού $m \leq f(x), \forall x \in [\alpha, \beta]$, έπεται από γνωστή μας Πρόταση ότι

$$m(\beta - \alpha) = m \int_{\alpha}^{\beta} dx = \int_{\alpha}^{\beta} m dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Συνδυάζοντας τα πιο πάνω, έχουμε:

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha)$$

2. (α) Η συνάρτηση F με τύπο

$$F(x) = \int_{-2}^x (t^3 - 4t) dt, x > -2$$

είναι παραγωγίσιμη για $x > -2$ από το 1ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απ. Λογισμού, αφού η υπο ολοκλήρωση συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, +\infty)$. Έτσι, για $x > -2$

$$F'(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$$

Είναι

$$F(2) = \int_{-2}^2 (t^3 - 4t) dt = 0$$

αφού η υπο ολοκλήρωση συνάρτηση είναι περιττή σε συμμετρικό περί του 0 (κλειστό) διάστημα,

$$F(-2) = \int_{-2}^{-2} (t^3 - 4t) dt = 0 \quad \text{και} \quad F(0) = \int_{-2}^0 (t^3 - 4t) dt = 4$$

Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης είναι τα $x = 0, \pm 2$. έχουμε:

- $F' < 0$ στο διάστημα $(-\infty, -2)$ και $F' > 0$ στο διάστημα $(-2, 2)$ και αφού $F'(-2) = 0$, από το κριτήριο 1ης παραγώγου, έχουμε ότι το γράφημα της συνάρτησης λαμβάνει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(-2, F(-2)) = (-2, 0)$
- $F' > 0$ στο διάστημα $(-2, 0)$ και $F' < 0$ στο διάστημα $(0, 2)$ και αφού $F'(0) = 0$, από το κριτήριο 1ης παραγώγου, έχουμε ότι το γράφημα της συνάρτησης λαμβάνει τοπικό μέγιστο στο σημείο $(0, F(0)) = (0, 4)$
- Ομοίως, έχουμε ότι το γράφημα της συνάρτησης λαμβάνει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(2, F(2)) = (2, 0)$

- (β) Η συνάρτηση F με τύπο

$$F(x) = \int_2^{x^2} \frac{\ln t}{t} dt, \quad x > 0$$

είναι παραγωγίσιμη για $x > \sqrt{2}$ από το 1ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απ. Λογισμού, αφού η υπο ολοκλήρωση συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα $[\sqrt{2}, +\infty)$. Έτσι, για $x > \sqrt{2}$, από Πόρισμα έχουμε

$$F'(x) = \frac{\ln x}{x} (x^2)' = 2x \frac{\ln x}{x} = 2 \ln x$$

Η συνάρτηση αυτή είναι κοίλη στο Π.Ο. της.

3. Θα υπολογίσουμε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (\eta \mu t - t) dt}{\eta \mu x - x \sigma \nu \nu x}$$

Έστω $x > 0$ σταθεροποιημένο.

$$\int_0^x (\eta \mu t - t) dt = \left[-\sigma \nu \nu t - \frac{t^2}{2} \right]_0^x = -\sigma \nu \nu x - \frac{x^2}{2} + 1$$

Έτσι, $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x (\eta \mu t - t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\sigma \nu \nu x - \frac{x^2}{2} + 1 \right) = 0$. Επίσης, $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta \mu x - x \sigma \nu \nu x) = 0$.

Τέλος, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι για κάθε $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$ είναι $\eta \mu x - x \sigma \nu \nu x \neq 0$. Επίσης, από το 1ο ΘΘΑΛ, είναι

$$\frac{d}{dx} \int_0^x (\eta \mu t - t) dt = \eta \mu x - x$$

και ακόμα $\frac{d}{dx} (\eta \mu x - x \sigma \nu \nu x) = \sigma \nu \nu x - \sigma \nu \nu x + x \eta \mu x = x \eta \mu x$. Αλλά, $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta \mu x - x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (x \eta \mu x) = 0$. Είναι

$$\frac{d}{dx} (\eta \mu x - x) = \sigma \nu \nu x - 1, \quad \frac{d}{dx} (x \eta \mu x) = \eta \mu x - \sigma \nu \nu x$$

και αφού $\frac{d}{dx} (x \eta \mu x) = \eta \mu x - \sigma \nu \nu x$ και $\frac{d}{dx} (x \eta \mu x) = x \eta \mu x \neq 0$ για κάθε $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$ και

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \nu \nu x - 1}{\eta \mu x - \sigma \nu \nu x} = 0$, έπεται από τον κανόνα του DeL'Hospital, ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (\eta \mu t - t) dt}{\eta \mu x - x \sigma \nu \nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \int_0^x (\eta \mu t - t) dt}{\frac{d}{dx} (\eta \mu x - x \sigma \nu \nu x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d^2}{dx^2} \int_0^x (\eta \mu t - t) dt}{\frac{d^2}{dx^2} (\eta \mu x - x \sigma \nu \nu x)} = 0$$

4. Υποθέτουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, θα είναι 1-1 και επί του συνόλου $[f(\alpha), f(\beta)]$ (άρα αντιστρέψιμη) και μάλιστα η αντίστροφή της είναι (συνεχής, άρα και) ολοκληρώσιμη στο $[f(\alpha), f(\beta)]$.

(α) Έχουμε ότι

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot f'(x) dx$$

(β) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot f'(x) dx = \left[x \cdot f(x) \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot (x)' dx \\ &= \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \end{aligned}$$

και άρα

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$$

Γεωμετρική ερμηνεία του (β): Το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των ορθογωνίων με πλευρές $\alpha, f(\alpha)$ και $\beta, f(\beta)$ είναι ίσο με το εμβαδόν που περικλείεται από το γράφημα της συνάρτησης $f: [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ συν το εμβαδόν που περικλείεται από το γράφημα της αντίστροφής της.