

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5 - ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

Οι μαθητές μας, μπορούν να διαβάσουν πρώτα τη σχετική θεωρία και τα παραδείγματα και παράλληλα να εκτελέσουν τις σχετικές δραστηριότητες, από το σχολικό εγχειρίδιο, **Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Κοινού Κορμού, Β΄ Τεύχος**, που υπάρχουν στην **Ενότητα 5** στις πιο κάτω υποενότητες:

- 5.1 Εισαγωγή, σελίδα 106.
 - 5.2 Στερεά από περιστροφή
 - 5.2.1 Κύλινδρος, σελίδες 107-109.
 - 5.2.2 Κώνος, σελίδες 110-112, Δραστηριότητες σελίδα 113.
 - 5.2.3 Κόλουρος κώνος, σελίδες 114-116.
 - 5.2.4 Σφαίρα, σελίδες 116-117.
 - 5.2.5 Περιστροφή σχημάτων γύρω από άξονα, σελίδες 118-120. Δραστηριότητες σελίδα 121.
Δραστηριότητες ενότητας, σελίδες 122-123.
- Το σχολικό εγχειρίδιο είναι αναρτημένο στην ιστοσελίδα του ΥΠΠΑΝ στην πιο κάτω διεύθυνση:

http://archeia.moec.gov.cy/sm/271/mathimatika_c_lyk_kk_b_tefchos.pdf

Για επιπλέον εμπέδωση της ύλης και εξάσκηση των μαθητών, για την πιο πάνω ενότητα, δίνονται πιο κάτω περίληψη της πυρηνικής γνώσης και σχετικές ασκήσεις:

ΣΤΕΡΕΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

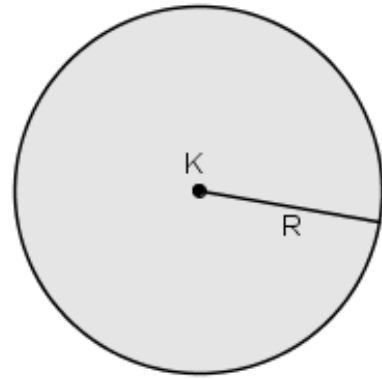
Στερεό εκ περιστροφής λέγεται το στερεό που παράγεται από την περιστροφή ενός επίπεδου σχήματος γύρω από μια ευθεία του επιπέδου του.

➤ Κύκλος

$$E = \pi R^2 \quad : \text{Εμβαδόν}$$

$$\Gamma = 2\pi R \quad : \text{Περίμετρος / Περιφέρεια / Μήκος βάσης}$$

$$\delta = 2R \quad : \text{Διάμετρος}$$



➤ Κύλινδρος:

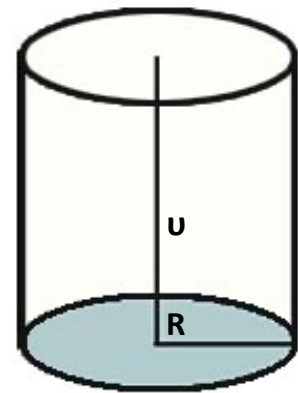
Ο **κύλινδρος** είναι το στερεό που παράγεται όταν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο περιστραφεί μια πλήρη στροφή γύρω από μια ακίνητη πλευρά του.

Τύποι:

$$E_{\kappa} = 2\pi R u$$

$$E_{\text{ολ}} = E_{\kappa} + 2 \cdot E_{\beta} \Rightarrow E_{\text{ολ}} = 2\pi R \cdot (u + R)$$

$$V = \pi R^2 u$$



όπου: **R** είναι η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου,

u είναι το ύψος του κυλίνδρου,

E_κ είναι το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου,

E_{ολ} είναι το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου και

V είναι ο όγκος του κυλίνδρου.

Ασκήσεις:

1. Να βρεθεί ο όγκος και η ολική επιφάνεια κυλίνδρου του οποίου η ακτίνα είναι 7cm και το ύψος 12cm.
2. Το εμβαδό της κυρτής επιφάνειας κυλίνδρου είναι $60\pi \text{ cm}^2$. Αν η ακτίνα του είναι 10cm, να βρείτε τον όγκο του.
3. Κύλινδρος έχει όγκο $250\pi \text{ cm}^3$ και το ύψος του είναι διπλάσιο της ακτίνας της βάσης του. Να βρεθούν:
(α) Το ύψος και η ακτίνα της βάσης του, (β) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου.
4. Κύλινδρος έχει ύψος 8cm και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $48\pi \text{ cm}^2$. Να βρείτε:
(α) Την ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου, (β) Τον όγκο του κυλίνδρου.
5. Ο όγκος κυλίνδρου ισούται με $288\pi \text{ cm}^3$ και το ύψος του 6cm. Να βρεθεί το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του.
6. Ο όγκος του κυλίνδρου είναι $160\pi \text{ cm}^3$ και ισχύει: $2u - 5R = 0$. Να υπολογίσετε:
(α) Την ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου, (β) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου.
7. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κυλίνδρου είναι $48\pi \text{ cm}^2$ και ισχύει η σχέση $2u - 3R = 0$. Να υπολογίσετε: (α) Την ακτίνα της βάσης του, (β) Τον όγκο του κυλίνδρου.
8. Ένας κομμένος κυλινδρικός κορμός δέντρου έχει ολική επιφάνεια $471\pi \text{ cm}^2$ και η ακτίνα της βάσης του είναι 5cm. Να βρείτε το ύψος του και τον όγκο του.

9. Ένα κυλινδρικό ντεπόζιτο έχει ακτίνα βάσης $0,35\text{m}$ και ύψος $1,80\text{m}$. Να βρείτε πόσα τετραγωνικά μέτρα λαμαρίνα χρειάστηκε για να κατασκευαστεί.
10. Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κυλίνδρου είναι $54\pi\text{cm}^2$ και το ύψος του είναι διπλάσιο της ακτίνας της βάσης του. Να υπολογίσετε:
(α) Την ακτίνα του και (β) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου.
11. Μια μεταλλική σωλήνα πάχους 1cm έχει εξωτερική ακτίνα 11cm . Ζητείται ό όγκος του μετάλλου που χρειάζεται για την κατασκευή σωλήνα μήκους 3 μέτρων.
12. Το ύψος κυλίνδρου είναι διπλάσιο της ακτίνας της βάσης του. Αν το εμβαδόν της κυρτής του επιφάνειας είναι ίσο με $100\pi\text{m}^2$, να βρείτε:
(α) Την ακτίνα του κυλίνδρου. (β) Τον όγκο του κυλίνδρου.

➤ Κώνος:

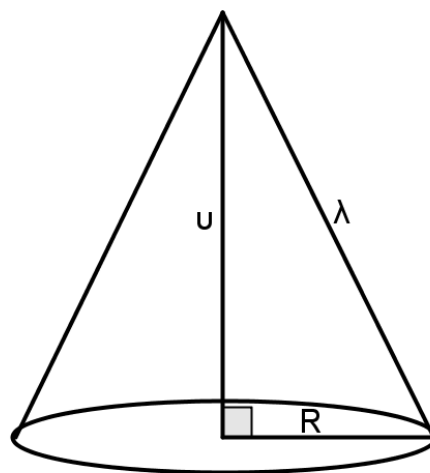
Κώνος λέγεται το στερεό που δημιουργείται από την πλήρη περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου γύρω από μια κάθετη πλευρά του.

Τύποι:

$$E_{\kappa} = \pi R \lambda$$

$$E_{\text{ολ}} = E_{\kappa} + E_{\beta} \Rightarrow E_{\text{ολ}} = \pi R \cdot (R + \lambda)$$

$$V = \frac{\pi R^2 u}{3}$$



Όπου: **R** είναι η ακτίνα της βάσης του κώνου,

u είναι το ύψος του κώνου και

λ είναι η γενέτειρα του κώνου.

Για τα στοιχεία λ, R, u του κώνου ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα

$$\lambda^2 = R^2 + u^2$$

Ασκήσεις:

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κώνου με ακτίνα $R=3\text{cm}$ και γενέτειρα $\lambda=5\text{cm}$.
2. Κώνος έχει ακτίνα βάσης 6cm και ύψος 10cm . Να βρείτε τον όγκο του και την γενέτειρα του.
3. Κώνος έχει ύψος 8cm και περίμετρο βάσης $12\pi\text{cm}$. Να υπολογίσετε την ακτίνα, τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του.

4. Κώνος έχει ακτίνα βάσης 6cm και ύψος 8cm. Να βρείτε:
(α) το εμβαδόν της βάσης, (β) το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας και (γ) τον όγκο του κώνου.
5. Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κώνου είναι $90\pi\text{cm}^2$ και της κυρτής επιφάνειας του είναι $65\pi\text{cm}^2$. Να βρείτε την ακτίνα της βάσης του και τον όγκο του.
6. Η περιφέρεια της βάσης κώνου είναι $24\pi\text{cm}$. Αν το ύψος του κώνου είναι 5cm, να βρείτε τον όγκο του κώνου.
7. Ένας κώνος έχει βάση κύκλο με διάμετρο 6cm. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του είναι $15\pi\text{cm}^2$. Να βρείτε το ύψος και τον όγκο του κώνου.

➤ **Κόλουρος Κώνος:**

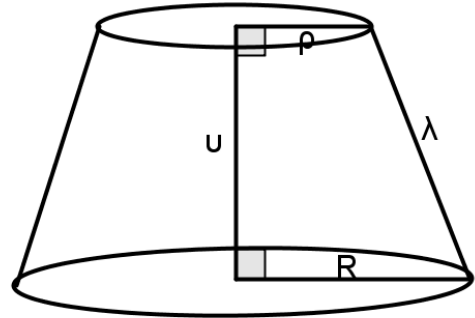
Κόλουρος κώνος λέγεται το στερεό που προκύπτει από την πλήρη περιστροφή ενός ορθογωνίου τραπεζίου γύρω από την πλευρά του που είναι κάθετη στις δύο βάσεις του.

Τύποι:

$$E_{\kappa} = \pi(\rho + R) \cdot \lambda$$

$$E_{\text{ολ}} = E_B + E_{\beta} + E_{\kappa} \Rightarrow E_{\text{ολ}} = \pi R^2 + \pi \rho^2 + \pi(\rho + R) \cdot \lambda$$

$$V = \frac{\pi \cdot \upsilon}{3} \cdot (\rho^2 + \rho \cdot R + R^2)$$



Όπου: **ρ** είναι η ακτίνα της μικρής βάσης του κόλουρου κώνου,

R είναι η ακτίνα της μεγάλης βάσης του κόλουρου κώνου,

λ είναι η γενέτειρα του κόλουρου κώνου,

υ είναι το ύψος του κόλουρου κώνου,

E_β είναι το εμβαδόν της μικρής βάσης του κόλουρου κώνου,

E_B είναι το εμβαδόν της μεγάλης βάσης του κόλουρου κώνου,

E_κ είναι το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κόλουρου κώνου,

E_{ολ} είναι το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κόλουρου κώνου και

V είναι ο όγκος του κόλουρου κώνου.

Για τα στοιχεία του κόλουρου κώνου ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα $\lambda^2 = \upsilon^2 + (R - \rho)^2$

Ασκήσεις:

1. Οι ακτίνες των βάσεων ενός κόλουρου κώνου είναι 10cm και 2cm και το ύψος του είναι 15cm.
Να υπολογίσετε:
(α) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του, (β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του,
(γ) Τον όγκο του.
2. Ένας κόλουρος κώνος έχει όγκο $V = 700\pi\text{cm}^3$ και ύψος $u = 12\text{cm}$. Αν η ακτίνα της μιας βάσης του είναι διπλάσια από την ακτίνα της άλλης βάσης, να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κόλουρου κώνου.
3. Κόλουρος κύλινδρος έχει ακτίνες βάσεων $R = 12\text{m}$ και $\rho = 4\text{m}$. Αν έχει ύψος $u = 6\text{m}$, να βρείτε:
(α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και (β) τον όγκο του κόλουρου κώνου.
4. Κόλουρος κώνος έχει εμβαδόν μικρής βάσης $4\pi\text{cm}^2$. Αν η ακτίνα της μεγάλης βάσης είναι κατά 6cm μεγαλύτερη από την ακτίνα της μικρής βάσης και το ύψος του είναι ίσο με την ακτίνα της μεγάλης βάσης να βρείτε το ολικό εμβαδόν και τον όγκο του κόλουρου κώνου.
5. Ο όγκος κόλουρου κώνου ισούται με $26\pi\text{cm}^3$. Αν $R + \rho = 4\text{cm}$ και $u = 6\text{cm}$, να βρείτε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του.

➤ **Σφαίρα:**

Σφαίρα λέγεται το στερεό που παράγεται όταν ένας κύκλος εκτελέσει μια περιστροφή κατά π γύρω από την διάμετρο του.

Τύποι:

$$\boxed{E = 4\pi R^2} \quad \text{εμβαδόν (ολικό)}$$

$$\boxed{V = \frac{4\pi R^3}{3}} \quad \text{όγκος}$$

Όπου R η ακτίνα της σφαίρας.



Περιστροφή επίπεδου σχήματος γύρω από άξονα:

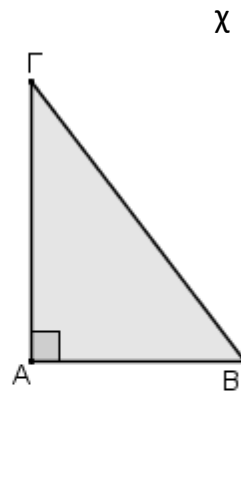
Ασκήσεις:

1. Το ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB = 3\text{cm}$ και $A\Gamma = 4\text{cm}$ περιστρέφεται ολόκληρη στροφή γύρω από τον άξονα $\chi\psi$ που περνά από το B και είναι παράλληλος προς την $A\Gamma$.

Να υπολογίσετε:

(α) Τον όγκο του στερεού που παράγεται.

(β) Το ολικό εμβαδόν του στερεού που παράγεται.

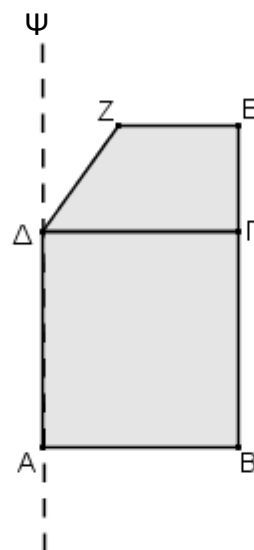


2. Το διπλανό σχήμα αποτελείται από το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και το ορθογώνιο τραπέζιο $ABEZ$. Δίνονται:

$AB = 8\text{cm}$, $B\Gamma = 10\text{cm}$, $EB = 4\text{cm}$ και $EZ = 5\text{cm}$.

(α) Να βρείτε την πλευρά AZ .

(β) Το σχήμα περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την $A\Delta$. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από αυτή την περιστροφή.

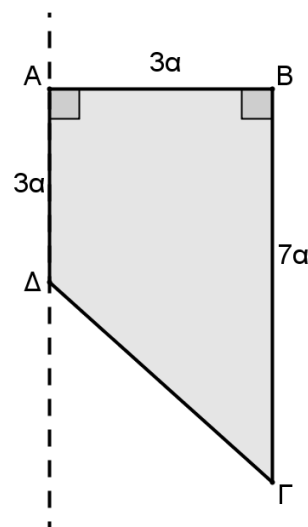


3. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με $\angle A = \angle B = 90^\circ$, $AB = A\Delta = 3\alpha$ και $B\Gamma = 7\alpha$.

Το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ κάνει μια πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $A\Delta$. Να βρείτε:

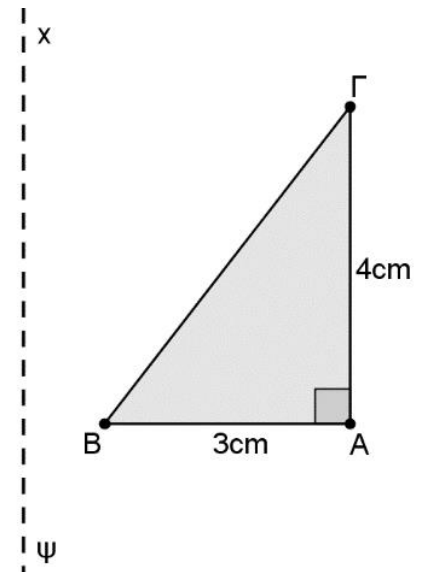
(α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και

(β) Τον όγκο του στερεού που παράγεται.



4. Τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 4\text{cm}$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από ευθεία (ϵ) που είναι παράλληλη προς την $A\Delta$ και απέχει από αυτή απόσταση ίση με 2cm . Να υπολογίσετε τον όγκο και την επιφάνεια του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του τετραγώνου.

5. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\angle A = 90^\circ$), $AB = 3\text{cm}$, $A\Gamma = 4\text{cm}$ και η ευθεία (ϵ) είναι κάθετη στην πλευρά AB στο σημείο B . Το τρίγωνο κάνει μια πλήρη περιστροφή γύρω από την ευθεία $\chi\psi$ που είναι παράλληλη με την $A\Gamma$ και απέχει 1cm από το σημείο B . Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



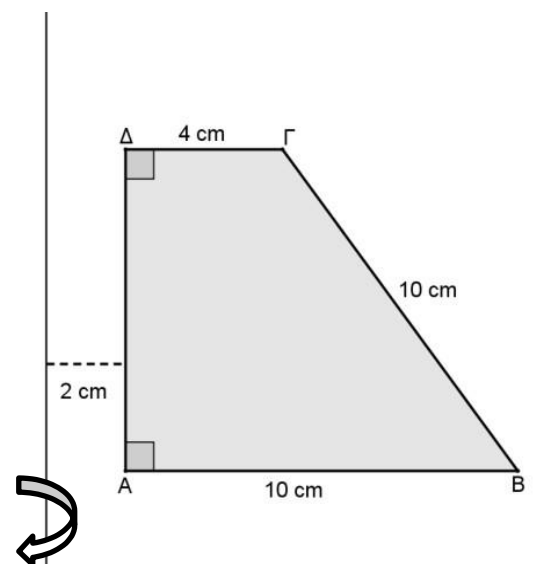
6. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\angle A = 90^\circ$), $AB = 3\text{cm}$, $A\Gamma = 4\text{cm}$ και η ευθεία (ϵ) είναι κάθετη στην πλευρά AB στο σημείο B . Το τρίγωνο κάνει μια πλήρη περιστροφή γύρω από την ευθεία $\chi\psi$ που είναι παράλληλη με την $A\Gamma$ και απέχει 1cm από την $A\Gamma$. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.

7. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($\angle A = \angle \Delta = 90^\circ$)

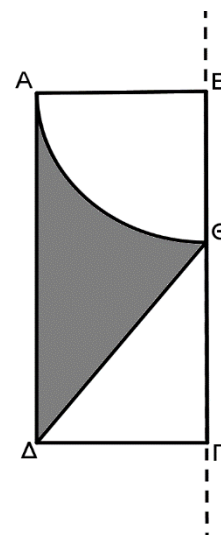
με $AB = B\Gamma = 10\text{cm}$ και $\Gamma\Delta = 4\text{cm}$.

Το τραπέζιο στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από ευθεία (ϵ) που είναι παράλληλη προς την πλευρά $A\Delta$ και απέχει από αυτήν απόσταση 2cm . Να βρείτε:

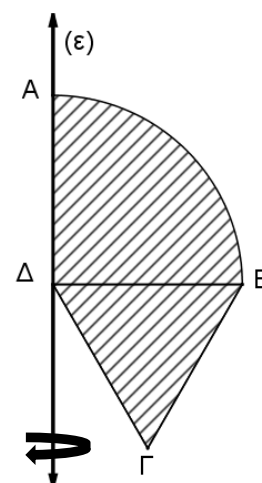
- (α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και
(β) Τον όγκο του στερεού που παράγεται.



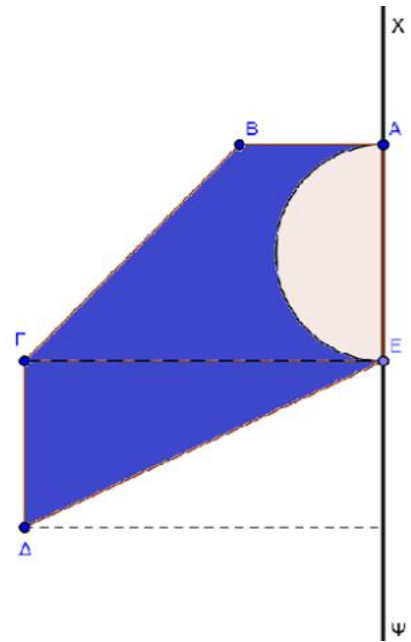
8. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με διαστάσεις $AB = 6 \text{ cm}$ και $B\Gamma = 14 \text{ cm}$. Με κέντρο το B και ακτίνα BA γράφουμε τόξο $A\Theta$ εσωτερικά του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που τέμνει τη $B\Gamma$ στο Θ . Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του μικτόγραμμου τριγώνου $A\Delta\Theta$ γύρω από την ευθεία B



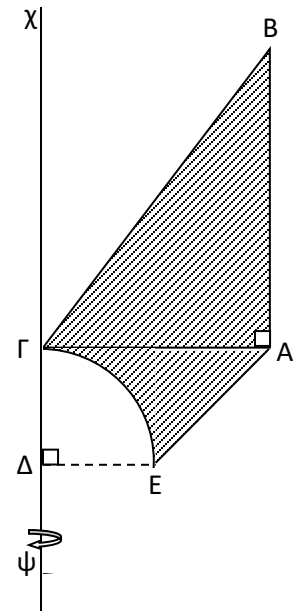
9. Στο πιο κάτω επίπεδο σχήμα $AB\Delta$ είναι τεταρτοκύκλιο και το $B\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 4 cm . Η γραμμοσκιασμένη επιφάνεια περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε) που περνά από τα σημεία A και Δ . Να υπολογίσετε τον όγκο και το ολικό εμβαδόν που του στερεού που παράγεται.



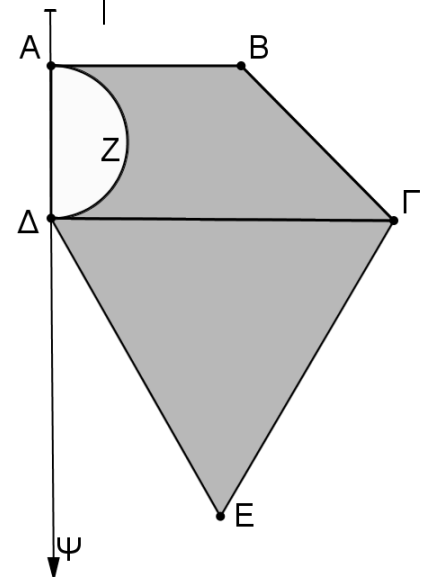
10. Στο διπλανό σχήμα $AB = 4\text{cm}$, $B\Gamma = 10\text{cm}$, $\Gamma E = 12\text{cm}$, $\Delta\Gamma = 5\text{cm}$ και $\Delta\hat{\Gamma}E = 90^\circ$. Οι AB , ΓE είναι κάθετες στον άξονα $\chi\psi$ και το τόξο AE είναι ημικύκλιο. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή σκιασμένου σχήματος γύρω από τον άξονα $\chi\psi$.



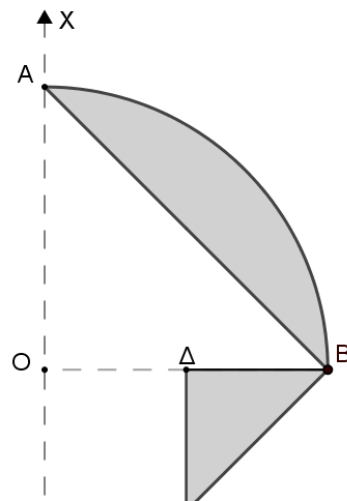
11. Στο διπλανό σχήμα δίνονται: $AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο, $B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$, $\Gamma\hat{A}E = 45^\circ$, $AB = 8\text{cm}$, $AB \parallel \chi\psi$ και $\Delta\Gamma E$ τεταρτοκύκλιο ακτίνας $\rho = 3\text{cm}$. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του $AB\Gamma E$ γύρω από την ευθεία $\chi\psi$.



12. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $AB \parallel \Delta\Gamma$). Το τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ είναι ισόπλευρο με πλευρά $\Delta\Gamma = 9\text{cm}$. Το ημικύκλιο $AZ\Delta$ γράφτηκε με διάμετρο την $A\Delta$. Δίνονται επίσης $\Delta\hat{\Gamma}B = 45^\circ$ και $B\Gamma = 4\sqrt{2}\text{cm}$. Να υπολογίσετε την επιφάνεια του στερεού που δημιουργείται από την πλήρη περιστροφή της σκιασμένης επιφάνειας γύρω από τον άξονα $X\Psi$.



13. Στο διπλανό σχήμα ο κυκλικός τομέας AOB είναι τεταρτοκύκλιο με ακτίνα $OB = 8\text{cm}$, το Δ είναι μέσο του OB και το OΔΓΕ είναι τετράγωνο. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου χωρίου γύρω από τον άξονα $\chi\psi$.



14. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κυκλικός τομέας ABΓ με $\hat{B} = \frac{\pi}{2}$ και

ακτίνα 4 cm, ισόπλευρο τρίγωνο $B\overset{\Delta}{\Gamma}\Delta$ και ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ με $EZ = 5\text{ cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του σκιασμένου χωρίου γύρω από τον άξονα $\chi\psi$.

