

ΦΥΣΙΚΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ****3.1 ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ - ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ - ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ**

Περιοδική κίνηση είναι η κίνηση που εκτελεί ένα σώμα (ακόμα και ένα σημείο χωρίς απαραίτητα αυτό να είναι υλικό σημείο με μάζα, όπως μια φωτεινή κηλίδα) και επαναλαμβάνεται σε συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα. Το χρονικό διάστημα στο οποίο επαναλαμβάνεται η κίνηση ονομάζεται περίοδος T . Παραδείγματα περιοδικών κινήσεων είναι η κίνηση της Σελήνης γύρω από τη Γη, η κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο.

Η ταλάντωση είναι μια περιοδική κίνηση που γίνεται μεταξύ δύο ακραίων σημείων, δηλαδή είναι μια παλινδρομική κίνηση οπότε η τροχιά έχει δύο ακραία σημεία. Το σώμα δηλαδή παλινδρομεί μεταξύ δύο σημείων που είναι τα άκρα της τροχιάς του. Το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να κινηθεί από το ένα άκρο μέχρι να επανέλθει στο ίδιο άκρο ονομάζεται περίοδος της ταλάντωσης. Έτσι σε μια περίοδο το σώμα περνά δύο φορές από κάθε σημείο της τροχιάς του, μια φορά όταν κατευθύνεται προς το κέντρο (το μέσο της απόστασης των δύο άκρων) και μια φορά όταν κατευθύνεται προς το άκρο που είναι το πλησιέστερο του σημείου αυτού.

Παραδείγματα ταλαντώσεων είναι η κίνηση του πιστονιού σε μια μηχανή αυτοκινήτου, η κίνηση του εκκρεμούς και η κίνηση ενός σώματος σε ελατήριο.

Μια ταλάντωση ονομάζεται αρμονική αν η μετατόπιση από ένα σημείο αναφοράς είναι ημιτονοειδής ή συνημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου. Όταν το σημείο αναφοράς είναι το κέντρο της ταλάντωσης, τότε η μετατόπιση ως προς το κέντρο της ταλάντωσης δίνεται είτε από την εξίσωση $x = x_0 \eta\mu(\omega t + \phi_0)$, είτε από την εξίσωση $x = x_0 \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0)$. Η απόσταση από το κέντρο της τροχιάς μέχρι το ένα άκρο της ονομάζεται πλάτος της ταλάντωσης, x_0 . Η συνάρτηση $\phi = \omega t + \phi_0$ ονομάζεται φάση της αντίστοιχης εξίσωσης της ταλάντωσης και δεν είναι χαρακτηριστική ιδιότητα της ταλάντωσης. Η φάση δηλαδή δεν έχει κάποια φυσική σημασία για την αρμονική ταλάντωση, όπως έχει ο ρυθμός μεταβολής της φάσης που είναι ίσος με το φυσικό μέγεθος ω , που ονομάζεται κυκλική συχνότητα. Για συγκεκριμένη αρμονική ταλάντωση, η κυκλική συχνότητα είναι μια χαρακτηριστική ιδιότητα της συγκεκριμένης κίνησης. Το πλάτος μιας αρμονικής ταλάντωσης είναι επίσης μια χαρακτηριστική ιδιότητα της κίνησης. Κάθε φορά που συμπληρώνεται μια πλήρης ταλάντωση η φάση αυξάνεται κατά 2π και περνά χρονικό διάστημα μιας περιόδου.

Η κυκλική συχνότητα είναι μονόμετρο μέγεθος και συνδέεται με την περίοδο T και τη συχνότητα f με τις σχέσεις $\omega = \frac{2\pi}{T}$ και $\omega = 2\pi f$ αντίστοιχα. Η συχνότητα f είναι ο αριθμός των πλήρων ταλαντώσεων που γίνονται σε κάποιο χρονικό διάστημα δια το χρονικό αυτό διάστημα.

Μια πλήρης ταλάντωση συμπληρώνεται αν το σώμα, ξεκινώντας από οποιοδήποτε σημείο, κινηθεί σε όλη την τροχιά και επιστρέψει στο ίδιο σημείο από το οποίο ξεκίνησε. Με αυτό τον τρόπο περνά από όλα τα σημεία της τροχιάς του ακριβώς δύο φορές.

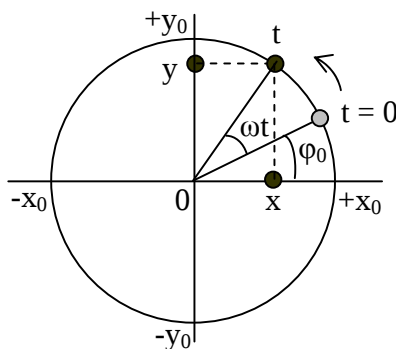
3.2 ΣΧΕΣΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Υπάρχει μια σχέση της ομαλής κυκλικής κίνησης και της αρμονικής ταλάντωσης. Η κίνηση που κάνει η προβολή ενός σώματος που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση στον y ή τον x άξονα, είναι αρμονική ταλάντωση κατά μήκος του άξονα αυτού.

Όπως προκύπτει από το σχεδιάγραμμα του κύκλου η μετατόπιση από το κέντρο του κύκλου (κέντρο της ταλάντωσης), ικανοποιεί τη σχέση $y = y_0 \eta\mu(\omega t + \phi_0)$ ή τη σχέση

$$x = x_0 \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0).$$

Εδώ θα χρησιμοποιούμε για την μετατόπιση από το κέντρο της ταλάντωσης είτε το σύμβολο y είτε το σύμβολο x , ανεξάρτητα αν η κίνηση γίνεται οριζόντια, κατακόρυφα ή σε άλλη διεύθυνση.



3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ και ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Ξεκινώντας από τη σχέση $y = y_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ με συνεχείς παραγώγους μπορούμε να πάρουμε τις σχέσεις που δίνουν την ταχύτητα u και την επιτάχυνση a σε μια απλή αρμονική ταλάντωση.

Έχουμε έτσι: $u = \frac{dy}{dt} \Rightarrow u = \omega y_0 \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$ και $a = \frac{du}{dt} \Rightarrow a = -\omega^2 y_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$.

Παρατηρούμε από τις σχέσεις αυτές ότι οι μέγιστες τιμές του μέτρου της ταχύτητας και της επιτάχυνσης είναι αντίστοιχα $v_0 = \omega y_0$ και $a_0 = \omega^2 y_0$. Οι τιμές αυτές ονομάζονται πλάτος της ταχύτητας και πλάτος της επιτάχυνσης αντίστοιχα.

Επίσης παίρνουμε τις εξής σχέσεις, που είναι ανεξάρτητες του χρόνου:

Είναι η ταχύτητα συνάρτησι της μετατόπισης από το κέντρο της ταλάντωσης $u^2 = \omega^2 (y_0^2 - y^2)$.

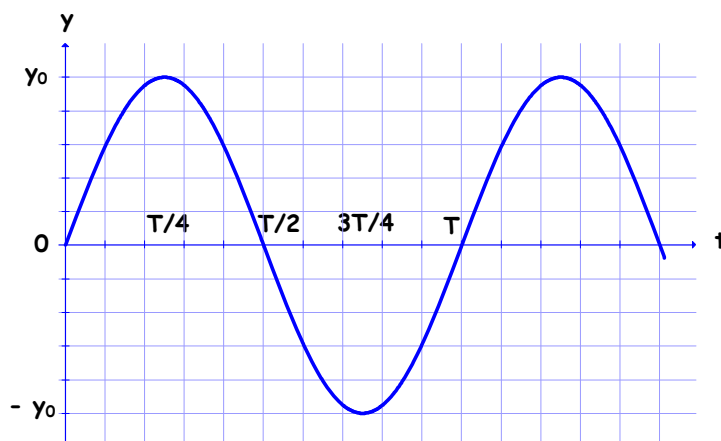
Είναι η επιτάχυνση συνάρτησι της ταχύτητας $a^2 = \omega^2 (\omega^2 y_0^2 - u^2)$.

Είναι η επιτάχυνση συνάρτησι της μετατόπισης από το κέντρο της ταλάντωσης $\vec{a} = -\omega^2 \vec{y}$.

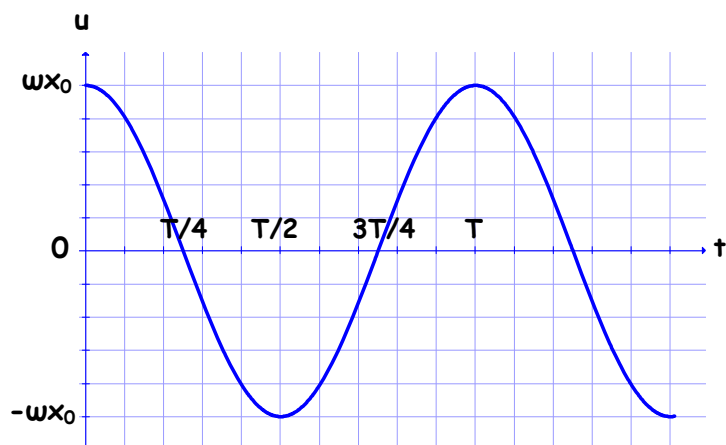
Η σχέση $\vec{a} = -\omega^2 \vec{y}$ αποτελεί και την αναγκαία συνθήκη για να είναι η κίνηση αρμονική ταλάντωση.

Στα άκρα της ταλάντωσης η ταχύτητα έχει στιγμιαία τιμή μηδέν. Στο κέντρο της ταλάντωσης το μέτρο της ταχύτητας είναι μέγιστο. Η επιτάχυνση έχει μέγιστο μέτρο στα άκρα της ταλάντωσης και παίρνει τιμή μηδέν στο κέντρο της ταλάντωσης.

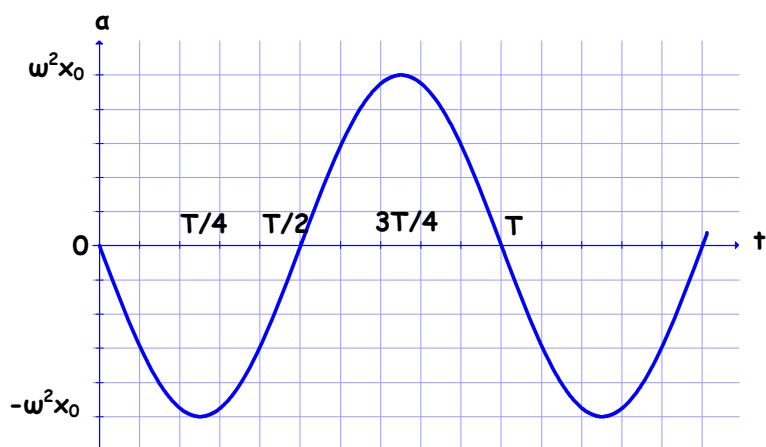
Η γραφική παράσταση της εξίσωσης $y = y_0 \eta\mu(\omega t)$ φαίνεται πιο κάτω.



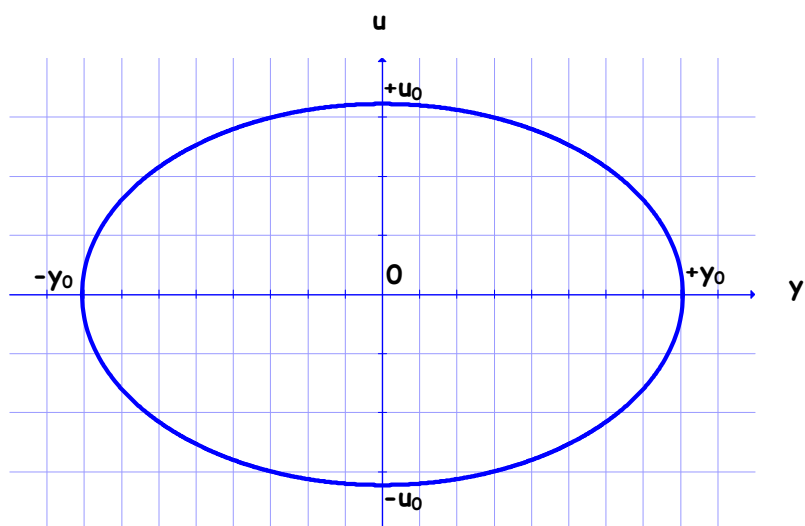
Τότε η ταχύτητα u έχει εξίσωση $u = \omega y_0 \sin(\omega t)$ και η αντίστοιχη γραφική παράσταση φαίνεται πιο κάτω.



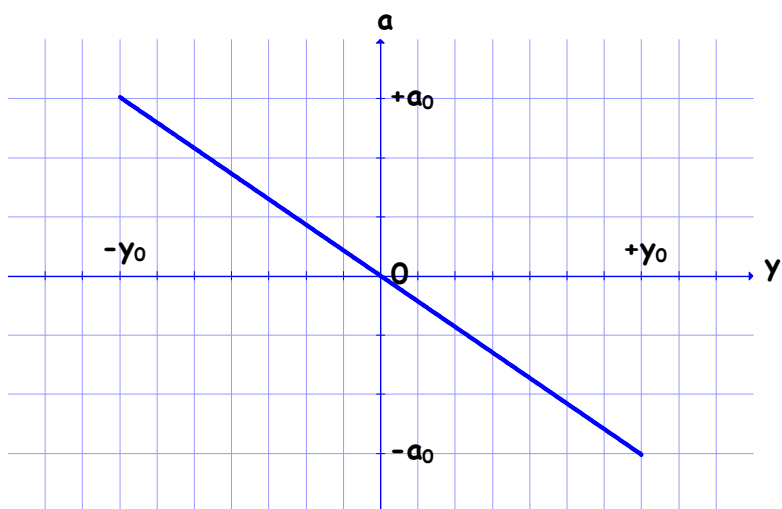
Η επιτάχυνση τότε έχει εξίσωση $a = -\omega^2 y_0 \cos(\omega t)$ και η αντίστοιχη γραφική παράσταση φαίνεται πιο κάτω.



Η γραφική παράσταση της εξίσωσης $u^2 = \omega^2(y_0^2 - y^2)$, φαίνεται πιο κάτω.



Η γραφική παράσταση της εξίσωσης $\vec{a} = -\omega^2 \vec{y}$, φαίνεται πιο κάτω.



Πρόβλημα 56

Μια αρμονική ταλάντωση έχει πλάτος 0,20 m και περίοδο 10 s.

(α) Να υπολογίσετε (i) τη συχνότητα και (ii) την κυκλική συχνότητα.

(β) Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα για να αυξηθεί η φάση κατά $\frac{\pi}{3}$.

(γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας στο κέντρο της ταλάντωσης.

(δ) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας σε απόσταση 0,10 m από το κέντρο της ταλάντωσης.

(ε) Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης

Πρόβλημα 57

Μια αρμονική ταλάντωση έχει πλάτος 50 cm. Το μέτρο της ταχύτητας στο κέντρο της ταλάντωσης είναι 2,5 m/s.

(α) Να υπολογίσετε (i) την κυκλική συχνότητα και (ii) τη συχνότητα της ταλάντωσης.

(β) Δίνεται ότι τη στιγμή $t = 0$, ο ταλαντωτής βρίσκεται στη θέση +50 cm.

Θεωρήστε $x = 0$ το κέντρο της ταλάντωσης.

Να υπολογίσετε (i) τη θέση και (ii) την ταχύτητα του ταλαντωτή τη στιγμή 2 s.

Πρόβλημα 58

Ένα σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με πλάτος $x_0 = 0,40$ m. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = +x_0$.

Τη χρονική στιγμή $t = 0,523$ s το σώμα περνά από τη θέση $x = +x_0/2$, για πρώτη φορά.

(α) Να υπολογίσετε (i) την περίοδο και (ii) την κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης.

(β) Να υπολογίσετε τη μικρότερη χρονική στιγμή t στην οποία το σώμα περνά από το σημείο με $x = -x_0/2$.

Πρόβλημα 59

Η κυκλική συχνότητα μιας αρμονικής ταλάντωσης είναι 10 rad/s και το πλάτος της ταλάντωσης είναι 8 cm. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = -8$ cm.

(α) Να υπολογίσετε τη θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση, τη χρονική στιγμή $t = 0,52$ s.

(β) Να σημειώσετε στην ευθεία της κίνησης (Θεωρήστε την ευθεία να είναι ο x -άξονας) τα διανύσματα της θέσης x , της ταχύτητας u και της επιτάχυνσης a , τη χρονική στιγμή $t = 0,52$ s.

(γ) Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τις γραφικές παραστάσεις $x = f(t)$, $u = f(t)$ και $a = f(t)$, για τις δύο πρώτες περιόδους.

Πρόβλημα 60

Ένα σώμα μάζας 0,1 kg εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Η σταθερά της ταλάντωσης είναι 10 N/m. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα περνά από το σημείο με $x = 0$, που είναι η θέση ισορροπίας με ταχύτητα μέτρου 3 m/s με αρνητική φορά.

Να προσδιορίσετε τη θέση x σε συνάρτηση με το χρόνο.

(Απ. $x = 0,3\sigma\upsilon\nu(10t + \frac{\pi}{2})$ ή $x = -0,3\sigma\upsilon\nu(10t + \frac{3\pi}{2})$ ή $x = 0,3\eta\mu(10t + \pi)$, μονάδες στο S.I)

Πρόβλημα 61

Ένα σώμα μάζας 0,1 kg εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Η σταθερά της ταλάντωσης είναι 10 N/m. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα περνά από το σημείο με $x = +0,04$ m ως προς τη θέση ισορροπίας με ταχύτητα μέτρου 0,3 m/s με αρνητική φορά.

Να προσδιορίσετε τη θέση x σε συνάρτηση με το χρόνο.

(Απ. $x = 0,05\eta\mu(10t + 2,21)$ ή $x = 0,05\sigma\upsilon\nu(10t + 0,644)$, μονάδες στο S.I)

Πρόβλημα 62

Ένα σώμα μάζας 0,1 kg εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Η σταθερά της ταλάντωσης είναι 10 N/m. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα περνά από το σημείο με $x = +0,5$ m ως προς τη θέση ισορροπίας, όπου $x = 0$, με ταχύτητα μέτρου 10 m/s και με θετική φορά.

Να προσδιορίσετε τη θέση x σε συνάρτηση με το χρόνο.

(Απ. $x = 1,12\eta\mu(10t + 0,464)$ ή $x = 1,12\sigma\upsilon\nu(10t + 5,17)$ ή $x = 1,12\sigma\upsilon\nu(10t - 1,11)$, μονάδες στο S.I)

Πρόβλημα 63

Ένα σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση και η εξίσωση της Θέσης σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνεται από τη σχέση $x = 0,40\eta\mu(0,2\pi t)$, (S.I.).

(α) Να προσδιορίσετε το πλάτος και την κυκλική συχνότητα ω της ταλάντωσης

(β) Να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης.

(γ) Να υπολογίσετε τα πλάτη της ταχύτητας και της επιτάχυνσης.

(δ) Να γράψετε τις εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου.

(ε) Να σχεδιάσετε για τις δύο πρώτες περιόδους, σε βαθμολογημένους άξονες, τις γραφικές παραστάσεις, $x = f(t)$, $u = f(t)$ και $a = f(t)$.

Πρόβλημα 64

Ένα σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση και η εξίσωση της ταχύτητάς του σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνεται από τη σχέση $u = 0,8\eta\mu(4\pi t)$, (S.I.).

(α) Να προσδιορίσετε την κυκλική συχνότητα ω της ταλάντωσης

(β) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης.

(γ) Να γράψετε τις εξισώσεις της θέσης και της επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου.

(δ) Να σχεδιάσετε για δύο περιόδους τις γραφικές παραστάσεις, $x = f(t)$, $u = f(t)$ και $a = f(t)$, σε βαθμολογημένους άξονες.

Πρόβλημα 65

Ένα σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση και η εξίσωση της επιτάχυνσής του σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνεται από τη σχέση $a = 4\sigma\upsilon\nu(0,8\pi t)$, (S.I.).

(α) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης.

(β) Να γράψετε τις εξισώσεις της θέσης και της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου.

(γ) Να σχεδιάσετε για δύο περιόδους τις γραφικές παραστάσεις, $x = f(t)$, $u = f(t)$ και $a = f(t)$, σε βαθμολογημένους άξονες.

Πρόβλημα 66

Ένα σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $x = 0,04\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6})$, μονάδες στο S.I.

Να προσδιορίσετε:

(α) Το πλάτος.

(β) Την κυκλική συχνότητα.

(γ) Την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 1,2$ s

(δ) Την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος όταν $x = 0,02$ m.

Πρόβλημα 67

Ένα σώμα μάζας 0,1 kg εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας τη στιγμή $t = 0$ με ταχύτητα μέτρου 3 m/s με αρνητική φορά κίνησης. Η σταθερά της ταλάντωσης είναι 10 N/m.

(α) Να υπολογίσετε το πλάτος και την κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης.

(β) Να προσδιορίσετε τη θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση ως συνάρτηση του χρόνου.

Πρόβλημα 68

Ένα σώμα μάζας 900 g εκτελεί αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $x = 0,1\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{4})$, (SI).

Κατά τη διάρκεια της πρώτης περιόδου το σώμα περνά από τη θέση +0,05 m δύο φορές, τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 , που διαφέρουν κατά $\Delta t = 2$ s.

Να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης.

Πρόβλημα 69

Ένα σώμα μάζας 2 kg εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Η συνισταμένη δύναμη στο σώμα ικανοποιεί τη σχέση $\vec{F} = -50\vec{x}$, μονάδες στο S.I. Δίνεται ότι $-0,20 \leq x \leq +0,20$ m.

(α) Να υπολογίσετε την κυκλική συχνότητα ω της ταλάντωσης.

(β) Να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης.

(γ) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος όταν (i) $x = +0,20$ m και (ii) $x = -0,10$ m.

(δ) Να σημειώσετε στην ευθεία κίνησης, τα διανύσματα της επιτάχυνσης στις θέσεις

(i) $x = +0,20$ m και (ii) $x = -0,10$ m. Εξηγήστε.

ΦΥΣΙΚΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ3.4 ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Μέχρι τώρα εξετάσαμε την αρμονική ταλάντωση από πλευράς της κινηματικής χωρίς να εξετάσουμε την αιτία της κίνησης αυτής που είναι η επίδραση δυνάμεων, όταν φυσικά ο ταλαντωτής είναι ένα σώμα (υλικό σημείο) με μάζα m .

Θα δούμε την περίπτωση όπου σε ένα σώμα είτε ασκείται μια μοναδική δύναμη είτε ασκούνται πολλές δυνάμεις και η συνισταμένη δύναμη είναι της μορφής $\Sigma \vec{F} = -D\vec{y}$, όπου D είναι μια θετική σταθερά που ονομάζεται σταθερά της ταλάντωσης. Τότε από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$, οπότε έχουμε

$$m\vec{a} = -D\vec{y} \Rightarrow m \frac{d^2 \vec{y}}{dt^2} = -D\vec{y} \Rightarrow \frac{d^2 \vec{y}}{dt^2} + \frac{D}{m} \vec{y} = 0.$$

Μια λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι η εξίσωση: $y = y_0 \eta \mu \left(\sqrt{\frac{D}{m}} t + \phi_0 \right)$, όπου

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \text{ Άρα, γράφουμε τη λύση ως } y = y_0 \eta \mu (\omega t + \phi_0).$$

Επομένως η περίοδος και η συχνότητα της ελεύθερης αρμονικής ταλάντωσης δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις, $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$, $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}$.

3.5 ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ

Ένας αρμονικός ταλαντωτής έχει κινητική ενέργεια λόγω της κίνησης (ταχύτητας). Είναι $E_K = \frac{1}{2}mu^2$. Από τη σχέση $u^2 = \omega^2(y_0^2 - y^2)$, έχουμε τη σχέση $E_K = \frac{1}{2}m\omega^2(y_0^2 - y^2)$.

Η ενέργεια του ταλαντωτή στο κέντρο της ταλάντωσης, $y = 0$, είναι, άρα,

$$E_T = \frac{1}{2}m\omega^2 y_0^2 = \frac{1}{2}Dy_0^2.$$

Σε απόσταση y από το κέντρο της ταλάντωσης η ενέργεια αυτή είναι κινητική και δυναμική και διατηρείται σταθερή εφόσον η μόνη δύναμη που ασκείται είναι η συνισταμένη, συντηρητική,

δύναμη της μορφής $\Sigma \vec{F} = -D\vec{y}$. Άρα, $E_T = E_K + E_\Delta$. Άρα, $\frac{1}{2}Dy_0^2 = \frac{1}{2}D(y_0^2 - y^2) + E_\Delta$.

Άρα, η δυναμική ενέργεια του ταλαντωτή είναι $E_\Delta = \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 y^2$.

Πρόβλημα 70

Ένα σώμα μάζας 1 kg εκτελεί ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση με περίοδο $\frac{\pi}{10} \text{ s}$.

Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι 200 J . Να υπολογίσετε

(α) το πλάτος της ταλάντωσης.

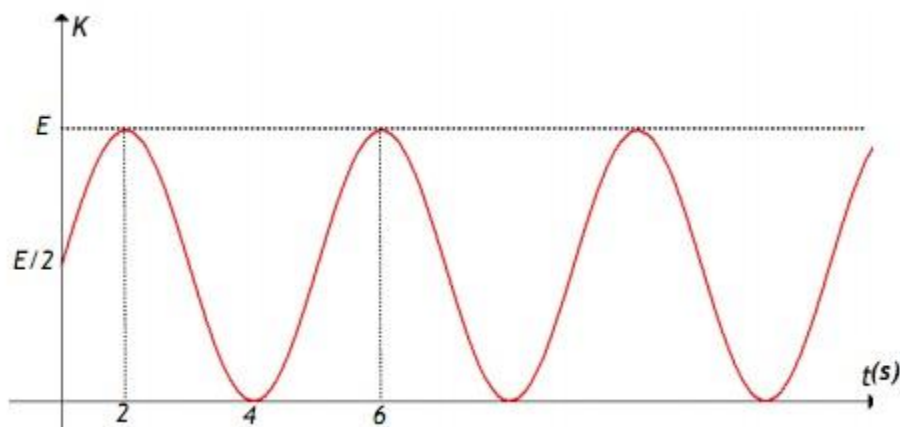
(β) το μέγιστο μέτρο της ταχύτητας του σώματος.

Πρόβλημα 71

Ένα υλικό σημείο, μάζας 100 g , εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα 4 Hz και πλάτος 10 cm . Να προσδιορίσετε την εξίσωση του διανύσματος θέσης ως προς το σημείο ισορροπίας του, σε συνάρτηση με το χρόνο, δεδομένου ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι το 25% της ολικής ενέργειας της ταλάντωσης.

Πρόβλημα 72

Η κινητική ενέργεια ενός σώματος, μάζας 20 kg , που εκτελεί ελεύθερη αρμονική ταλάντωση, χωρίς απόσβεση, σε σχέση με το χρόνο, φαίνεται στο διάγραμμα, όπου $E = 100 \text{ J}$.

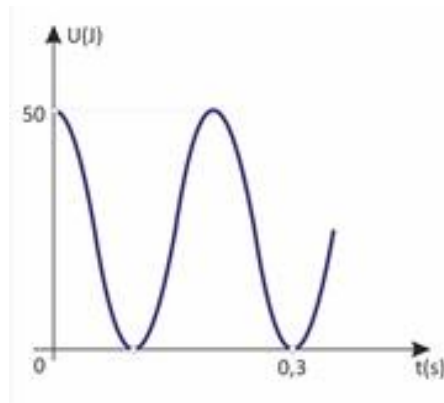


(α) Να υπολογίσετε τη συχνότητα της ταλάντωσης.

(β) Να υπολογίσετε τη σταθερά της ταλάντωσης.

Πρόβλημα 73

Η δυναμική ενέργεια της αρμονικής ταλάντωσης ενός σώματος, μάζας 10 kg, σε σχέση με το χρόνο, φαίνεται στο διάγραμμα.

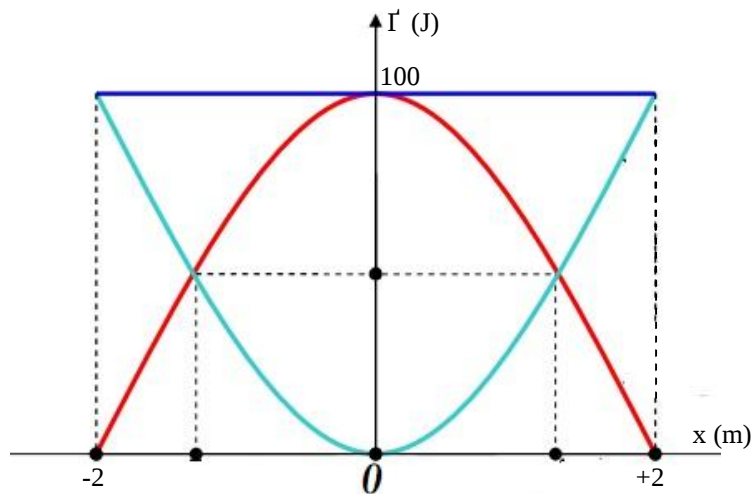


(α) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης.

(β) Να προσδιορίσετε την εξίσωση του διανύσματος θέσης, ως προς το σημείο ισορροπίας, σε συνάρτηση με το χρόνο, αν τη στιγμή $t = 0$ το σώμα έχει αρνητική επιτάχυνση.

Πρόβλημα 74

Η γραφική παράσταση δείχνει την κινητική και τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης ενός σώματος μάζας 400 g, σε συνάρτηση με τη θέση.



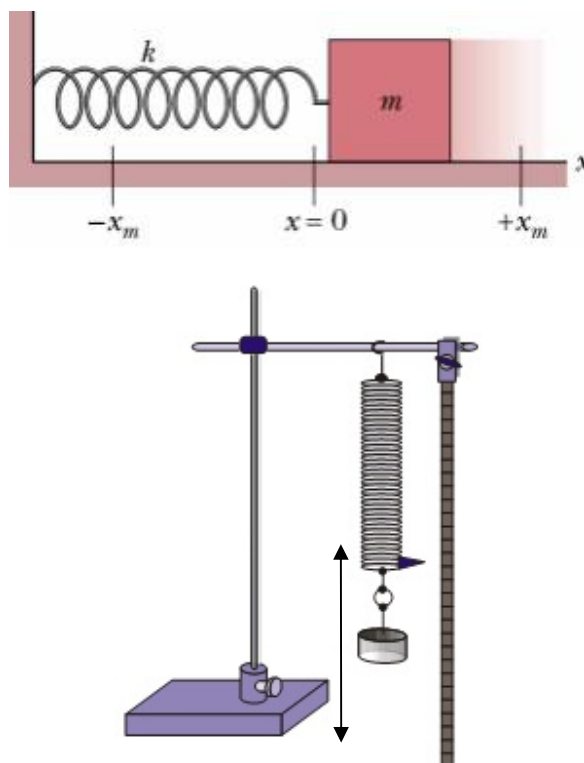
(α) Να υπολογίσετε τη σταθερά της ταλάντωσης.

(β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.

ΦΥΣΙΚΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ****3.6 ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΣΩΜΑΤΟΣ ΣΕ ΕΛΑΤΗΡΙΟ**

Θεωρήστε ένα σώμα μάζας m προσδεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ή κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι συνδεδεμένο σε σταθερό σημείο. Το σώμα απομακρύνεται από το σημείο ισορροπίας του στη διεύθυνση του μήκους του ελατηρίου και αφήνεται να κινηθεί ελεύθερα. Το σώμα δέχεται τη συνισταμένη δύναμη που ικανοποιεί τη σχέση $\Sigma \vec{F} = -K\vec{x}$. Το διάνυσμα θέσης $\vec{x}$ ορίζεται ως προς το σημείο ισορροπίας του σώματος που είναι το κέντρο της ταλάντωσης. Άρα η σταθερά της ταλάντωσης είναι η σταθερά του ελατηρίου.

Επομένως το σώμα εκτελεί ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση, με περίοδο που δίνεται από τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$. Στο κατακόρυφο ελατήριο ισχύει και η σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{e}{g}}$, όπου e είναι η στατική επιμήκυνση που προκαλεί το σώμα.



Πρόβλημα 75

Ένα σώμα μάζας $4,8 \text{ kg}$ είναι συνδεδεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου και εκτελεί ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα έχει μετατόπιση από το σημείο ισορροπίας $-0,50 \text{ m}$ (διάνυσμα θέσης), ταχύτητα $-0,80 \text{ m/s}$ και επιτάχυνση $+8,3 \text{ m/s}^2$.

Να υπολογίσετε

- (α) τη σταθερά του ελατηρίου.
- (β) το πλάτος της ταλάντωσης.

Πρόβλημα 76

Ένα σώμα μάζας $1,5 \text{ kg}$ είναι συνδεδεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς 220 N/m και βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντια επιφάνεια. Το σώμα απομακρύνεται κατά μήκος του ελατηρίου κατά $0,080 \text{ m}$ προς τη θετική φορά, και τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνεται από την ηρεμία και εκτελεί ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή $0,70 \text{ s}$,

- (α) το διάνυσμα θέσης
- (β) την ταχύτητα του σώματος.

Πρόβλημα 77

Ένα σώμα μάζας $0,13 \text{ kg}$ είναι συνδεδεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς 500 N/m και βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντια επιφάνεια. Το σώμα απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας, κατά μήκος του ελατηρίου, κατά $0,080 \text{ m}$ προς τη θετική φορά, και αφήνεται από την ηρεμία και εκτελεί ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση. Όταν η απόσταση του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι $0,018 \text{ m}$, να υπολογίσετε

- (α) την κινητική ενέργεια του σώματος,
- (β) το μέτρο της επιτάχυνσης.

Πρόβλημα 78

Ένα σώμα μάζας $0,25 \text{ kg}$ εκτελεί ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση, σε οριζόντια επιφάνεια. Το σώμα είναι συνδεδεμένο στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς 200 N/m . Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι συνδεδεμένο σε ακλόνητο σημείο. Η ταλάντωση προκλήθηκε όταν απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά $0,15 \text{ m}$ και δώσαμε στο σώμα ταχύτητα μέτρου 3 m/s , στη διεύθυνση του ελατηρίου.

- (α) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης.
- (β) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας όταν το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας.

Πρόβλημα 79

Ένα κατακόρυφο ελατήριο φυσικού μήκους 60 cm επιμηκύνεται κατά 5,0 cm όταν προσδεθεί στο ελεύθερο άκρο του ένα σώμα μάζας 200 g. Στη συνέχεια απομακρύνουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά 2,5 cm από τη θέση ισορροπίας και τη στιγμή $t = 0$ το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελεί ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση.

Να υπολογίσετε:

- (α) τη σταθερά του ελατηρίου.
- (β) την περίοδο της ταλάντωσης.
- (γ) τη μικρότερη χρονική στιγμή που το σώμα περνά 2,5 mm πάνω από τη θέση ισορροπίας.

Πρόβλημα 80

Ένα σώμα μάζας 50 g εκτελεί ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση στο ελεύθερο άκρο ιδανικού ελατηρίου. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι συνδεδεμένο σε ακλόνητο σημείο. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι 12 cm και η περίοδος είναι 1,70 s. Να υπολογίσετε:

- (α) τη συχνότητα
 - (β) τη σταθερά του ελατηρίου.
- (Απ. (α) 0,588 Hz, (β) 0,68 N/m)

Πρόβλημα 81

Ένα σώμα μάζας 0,25 kg συνδέεται στο ένα άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι συνδεδεμένο σε ακλόνητο σημείο. Όταν το σώμα απομακρυνθεί κατακόρυφα προς τα κάτω κατά 10 cm από το σημείο ισορροπίας του και αφεθεί να κινηθεί ελεύθερα, η κίνηση είναι ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση με περίοδο 2 s.

Να υπολογίσετε

- (α) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν περνά από το σημείο ισορροπίας του.
- (β) τη μικρότερη χρονική διάρκεια για να κινηθεί το σώμα από το σημείο που βρίσκεται 2 cm κάτω από το σημείο ισορροπίας στο σημείο που βρίσκεται 4 cm πάνω από το σημείο ισορροπίας.
- (γ) τη σταθερά του ελατηρίου.
- (δ) τη στατική επιμήκυνση που προκαλεί το σώμα.

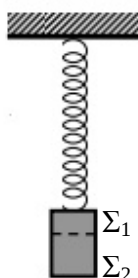
Πρόβλημα 82

Ένα σώμα Σ μάζας 5 kg βρίσκεται στο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς 500 N/m. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι συνδεδεμένο σε ακλόνητο σημείο. Το σώμα απομακρύνεται κατακόρυφα προς τα κάτω κατά 20 cm από το σημείο ισορροπίας του. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνεται να κινηθεί ελεύθερα, χωρίς τριβές.

- (α) Να δείξετε ότι η κίνηση είναι ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση.
- (β) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος τη χρονική στιγμή 0,1 s.

Πρόβλημα 83

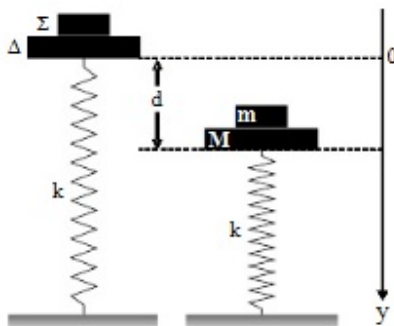
Ένα σώμα μάζας 4 kg αποτελείται από δύο κομμάτια, Σ_1 και Σ_2 , ενωμένα μεταξύ τους. Το σώμα αναρτάται στο κάτω μέρος ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς 400 N/m και αρχικά ισορροπεί. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι συνδεδεμένο σε ακλόνητο σημείο. Μετατοπίζουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα πάνω μέχρις ότου το ελατήριο αποκτήσει το φυσικό του μήκος και αμέσως μετά το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί, χωρίς αρχική ταχύτητα. Τη στιγμή που μηδενίζεται για πρώτη φορά η ταχύτητα του σώματος, αποσπάται το κατώτατο κομμάτι του σώματος, Σ_2 , με μάζα 3 kg και πέφτει ελεύθερα, χωρίς αρχική ταχύτητα. Το άλλο κομμάτι, Σ_1 , συνεχίζει να εκτελεί ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση.



- (α) Να υπολογίσετε το πλάτος και την περίοδο της ταλάντωσης του κομματιού Σ_1 .
 (β) Να υπολογίσετε την απόσταση των δύο κομματιών τη στιγμή που το μέτρο της ταχύτητας του Σ_1 παίρνει μέγιστη τιμή, για πρώτη φορά, μετά την απόσπαση του Σ_2 . (Θεωρήστε ότι το Σ_2 είναι ακόμα σε ελεύθερη πτώση).

Πρόβλημα 84

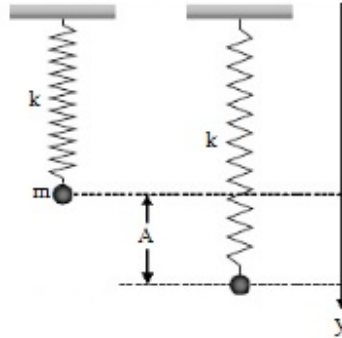
Το άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς 200 N/m είναι στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο. Στο άλλο άκρο του είναι σταθερά συνδεδεμένος ένας δίσκος, Δ , μάζας $1,5 \text{ kg}$. Πάνω στο δίσκο τοποθετείται ένα σώμα, Σ , μάζας $0,5 \text{ kg}$. Το σύστημα είναι αρχικά ακίνητο στη θέση ισορροπίας του. Απομακρύνουμε το σύστημα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά $d = \frac{\sqrt{5}}{10} \text{ m}$ και το αφήνουμε ελεύθερο.



- (α) Να δείξετε ότι το σώμα θα εγκαταλείψει το δίσκο και να υπολογίσετε τη θέση που συμβαίνει αυτό.
- (β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος τη στιγμή που εγκαταλείπει το δίσκο.
- (γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της μετατόπισης d ώστε το σώμα να μην εγκαταλείπει το δίσκο σε κανένα σημείο της τροχιάς.
- (Απ. (α) $-0,1 \text{ m}$, (β) -2 m/s , 10 m/s^2 , (γ) ---)

Πρόβλημα 85

Ένα σώμα μάζας $m = 0,5 \text{ kg}$ είναι δεμένο στο ένα άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς 50 N/m και ισορροπεί όπως δείχνει το σχήμα. Απομακρύνουμε το σώμα από το σημείο ισορροπίας του κατά τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου κατά $A = 0,2 \text{ m}$ προς τα κάτω και το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση ταλάντωσης.



- (α) Να υπολογίσετε τη μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης.
 (β) Να υπολογίσετε τη μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.
 (γ) Να προσδιορίσετε την εξίσωση της θέσης y σε συνάρτηση με το χρόνο t , αν για $t = 0$ το σώμα περνά από τη θέση $+0,10 \text{ m}$ με την ταχύτητα να έχει αρνητική φορά.

(Απ. (α) 1 J , (β) $2,25 \text{ J}$, (γ) $y = 0,2\eta\mu(10t + \frac{5\pi}{6})$)

Πρόβλημα 86

Ένα σώμα μάζας 1 kg είναι συνδεδεμένο στο ένα άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς 400 N/m . Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι συνδεδεμένο στην οροφή ενός ανελκυστήρα. Το σώμα είναι ακίνητο σε σχέση με τον ανελκυστήρα ο οποίος ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα μέτρου $\sqrt{2} \text{ m/s}$. Κάποια στιγμή ο ανελκυστήρας σταματά ακαριαία, οπότε το σώμα εκτελεί ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση.

Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης του σώματος (α) αν το ελατήριο ήταν παραμορφωμένο λόγω του βάρους του σώματος, (β) αν κρατούμε ακίνητο το σώμα ώστε το ελατήριο να έχει το φυσικό του μήκος.

(Απ. (α) $\frac{\sqrt{2}}{20} \text{ m}$, (β) $0,075 \text{ m}$)