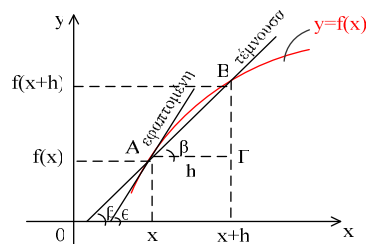


ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ – ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ		ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ	
Απλή συνάρτηση $f(x)$	Σύνθετη συνάρτηση $f(g(x))$	Απλή συνάρτηση $f(x)$	Σύνθετη συνάρτηση $f(g(x))$
$(x)' = 1, (A)' = 0 \quad A \in \mathbb{R}$	$[Af(x)]' = Af'(x)$	$\int dx = x + c$	$\int Af(x) dx = A \int f(x) dx$
$(x^a)' = ax^{a-1} \quad a \in \mathbb{R}$	$[f^a(x)]' = a[f(x)]^{a-1} \cdot f'(x)$	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad a \neq -1$	$\int f^a(x)f'(x)dx = \frac{f^{a+1}(x)}{a+1} + c$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[\sqrt{f(x)}]' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{1}{f^2(x)} \cdot f'(x)$	$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$	$\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\frac{1}{f(x)} + c$
$(e^x)' = e^x$	$[e^{f(x)}]' = e^{f(x)}f'(x)$	$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)} + c$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad a \neq 1 > 0$	$[a^{f(x)}]' = a^{f(x)}f'(x)\ln a$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{f(x)}f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$	$[\ln f(x)]' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c$
$(\sin x)' = \cos x$	$[\sin f(x)]' = f'(x) \cos f(x)$	$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int f'(x) \cos f(x) dx = \sin f(x) + c$
$(\cos x)' = -\sin x$	$[\cos f(x)]' = -f'(x) \sin f(x)$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int f'(x) \sin f(x) dx = -\cos f(x) + c$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$[\tan f(x)]' = \frac{1}{\cos^2 f(x)} f'(x)$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \tan f(x) + c$
$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$[\cot f(x)]' = \frac{-1}{\sin^2 f(x)} f'(x)$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)} dx = -\cot f(x) + c$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[\arcsin f(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} f'(x)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = \arcsin f(x) + c$
$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[\arccos f(x)]' = \frac{-1}{\sqrt{1-f^2(x)}} f'(x)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = -\arccos f(x) + c$
$(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$	$[\arctan f(x)]' = \frac{1}{1+f^2(x)} f'(x)$	$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + c$	$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \arctan f(x) + c$
$(\sinh x)' = \cosh x$	$[\sinh f(x)]' = f'(x) \cosh f(x)$	$\int \cosh x dx = \sinh x + c$	$\int f'(x) \cosh f(x) dx = \sinh f(x) + c$
$(\cosh x)' = \sinh x$	$[\cosh f(x)]' = f'(x) \sinh f(x)$	$\int \sinh x dx = \cosh x + c$	$\int f'(x) \sinh f(x) dx = \cosh f(x) + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln x + \sqrt{x^2+a} + c \quad a \in \mathbb{R} \quad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + c \quad \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a} \sin[\arctan x/a] + c$ $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad \int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + c$			

Η έννοια της παραγώγου



Ας είναι η συνάρτηση $y = f(x)$ με γραφική παράσταση του σχήματος και τα σημεία της $A(x, f(x))$ και $B(x+h, f(x+h))$. Η τέμνουσα ευθεία ΑΒ, έχει κλίση (εφαπτομένη της γωνίας β):

$$\tan \beta = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Όταν το h γίνεται σχεδόν μηδέν ($h \rightarrow 0$), τότε το $x+h$ πάλι να ταυτιστεί με το x , το σημείο Β της καμπύλης με το Α και η τέμνουσα ευθεία με την εφαπτομένη της καμπύλης. Αυτή η διαδικασία περιγράφεται με το όριο, που μας δίνει την έννοια της παραγώγου στη θέση x :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{με} \quad f'(x) = \tan \theta$$

Συμβολισμοί της παραγώγου για την συνάρτηση $y=f(x)$:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

Η παραγωγή της $f'(x)$ ως προς x , δίνει την **δεύτερη παράγωγο**:

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

Όμοια η τρίτη παράγωγος είναι: $f'''(x) = f^{(3)}(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$ κ.ο.κ.

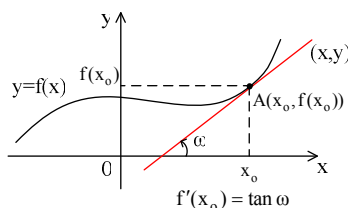
Ερμηνεία της παραγώγου

- Η **ταχύτητα** – ρυθμός μεταβολής του διαστήματος $s(t)$ στη μονάδα του χρόνου είναι η παράγωγος ως προς το χρόνο: $s'(t) = v(t)$
- Η **επιτάχυνση** $\gamma(t)$ είναι η μεταβολή της ταχύτητας στη μονάδα του χρόνου: $v'(t) = \gamma(t)$ ή $\gamma(t) = s''(t)$ (δεύτερη παράγωγος)
Δηλαδή με την παράγωγο δίνουμε τον ρυθμό – ταχύτητα μεταβολής ενός μεγέθους ως προς τον παράγοντα που τον καθορίζει.
- Γεωμετρικά η $f'(x)$ δίνει την κλίση της εφαπτομένης ευθείας, $\tan \theta = f'(x)$.

Εξίσωση εφαπτομένης ευθείας

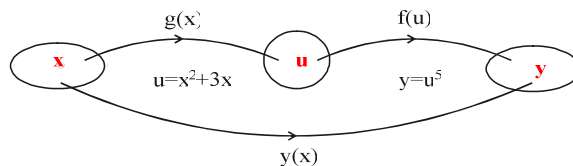
Στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της καμπύλης $y = f(x)$, η εφαπτομένη ευθεία έχει **κλίση** $\tan \omega = f'(x_0)$ και το τυχαίο σημείο της (x, y) ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \text{ή} \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης (Κανόνας Αλυσίδας)

Ας είναι η σύνθετη συνάρτηση $y=f(g(x))$. Δηλαδή για την τιμή του $x=x_0$ βρίσκουμε την $g(x_0)=u$ και στη συνέχεια την $y=f(u)=f(g(x_0))$. π.χ. για την $y=(x^2+3x)^5$ έχουμε: $u=g(x)=x^2+3x$ και $f(u)=u^5=g^5(x)$. Σύνθεση είναι η εξαγωγή του τελικού αποτελέσματος βήμα – βήμα από τη μια μεταβλητή στην άλλη. $x \rightarrow u \rightarrow y$
Σχηματικά έχουμε:



Η παράγωγος της $y=f(g(x))$ είναι ίση με το γινόμενο των παραγώγων των συναρτήσεων της σύνθεσης:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du} f(u) \frac{du}{dx} = \frac{d}{du} f(u) \frac{d}{dx} g(x)$$

Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση $y=f(x)$, αν λύσουμε την εξίσωση ως προς x θεωρώντας το y γνωστό προκύπτει η αντίστροφη $x=f^{-1}(y)$. Από $f^{-1}[f(x)]=x$ με τον κανόνα της αλυσίδας η παράγωγος είναι:

$$\frac{d}{dy} [f^{-1}(y)] \cdot \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dx}{dx} \Rightarrow [f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}$$

Μονοτονία Συνάρτησης

Ας είναι η συνάρτηση $y = f(x)$ με Π.Ο. το $A \subseteq \mathbb{R}$. Για την εύρεση και των διαστημάτων που είναι αύξουσα ή φθίνουσα κάνουμε τα εξής:

1^ο Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο $f'(x)$ και τα σημεία μηδενισμού της (ρίζες), από την λύση της εξίσωσης $f'(x)=0$. Θυμίζουμε ότι μια ρίζα x_0 ($f'(x_0)=0$), μπορεί να είναι σταθμός που αλλάζει πρόσημο η παράσταση της $f'(x)$.

2^ο ● Στο διάστημα Δ του Π.Ο. που η $f'(x)>0$ η συνάρτηση $f(x)$ είναι **γνήσια αύξουσα**. Δηλαδή αν $x_1 < x_2$ στο Δ προκύπτει $f(x_1) < f(x_2)$. Αν μεγαλώνει η μεταβλητή x τότε, μεγαλώνει και το αποτέλεσμα $f(x)$.

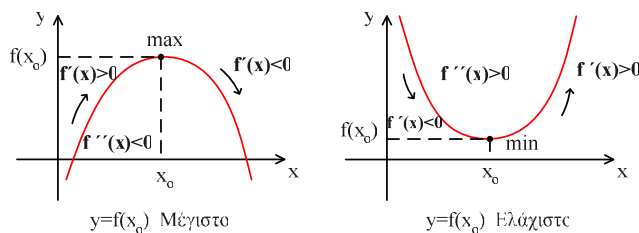
● Στο διάστημα Δ του Π.Ο. που η $f'(x)<0$ η συνάρτηση $f(x)$ είναι **γνήσια φθίνουσα**. Δηλαδή αν $x_1 < x_2$ στο Δ προκύπτει $f(x_1) > f(x_2)$. Αν μεγαλώνει η μεταβλητή x τότε, μικραίνει το αποτέλεσμα $f(x)$.

Ακρότατα Συνάρτησης

Ας είναι μια ρίζα x_0 της πρώτης παραγώγου με $f'(x_0)=0$:

α) Όταν για $x < x_0 \Rightarrow f'(x) > 0$ και για $x > x_0 \Rightarrow f'(x) < 0$ τότε, στο σημείο (θέση) x_0 έχουμε **τοπικό μέγιστο** το $f(x_0)$ (βλ. σχήμα).

β) Όταν για $x < x_0 \Rightarrow f'(x) < 0$ και για $x > x_0 \Rightarrow f'(x) > 0$ τότε, στο σημείο (θέση) x_0 έχουμε **τοπικό ελάχιστο** το $f(x_0)$ (βλ. σχήμα).



Κριτήριο 2^{ης} παραγώγου για Ακρότατα

Εξετάσουμε αν στο x_0 (ρίζα της $f'(x_0)=0$) έχουμε τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο με την 2^η παράγωγο στο x_0 δηλαδή: $f''(x_0)$.

α) Όταν στη θέση x_0 με $f'(x_0)=0$ προκύπτει $f''(x_0) < 0$, τότε στο x_0 έχουμε **τοπικό μέγιστο** την τιμή $y=f(x_0)$.

β) Όταν στη θέση x_0 με $f'(x_0)=0$ προκύπτει $f''(x_0) > 0$, τότε στο x_0 έχουμε **τοπικό ελάχιστο** την τιμή $y=f(x_0)$.