

## Όγκος στερεού από περιστροφή

**Όγκος στερεού από περιστροφή επίπεδου χωρίου γύρω από τον άξονα των τετμημένων.**

**A.**

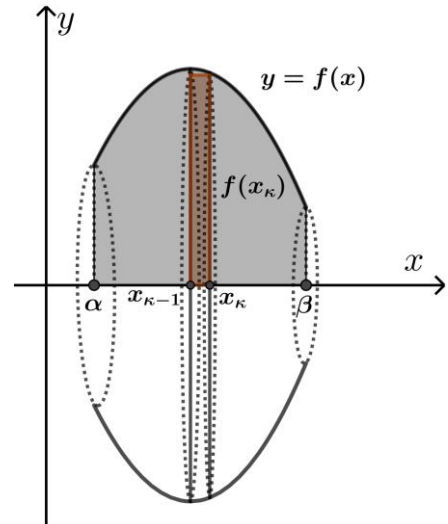
Έστω  $R$  το σκιασμένο χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = f(x) \geq 0$ ,  $x \in [\alpha, \beta]$  και τον άξονα των τετμημένων.

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται από την πλήρη στροφή του χωρίου  $R$  γύρω από τον άξονα των τετμημένων.

Όπως και στον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, θεωρούμε τη διαμέριση του διαστήματος  $[\alpha, \beta]$ :

$$\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_{\kappa-1} < x_{\kappa} < \dots < x_{\nu} = \beta$$

όπου κάθε υποδιάστημα  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, \nu$  έχει πλάτος  $\Delta x$ .



Θεωρώντας το τυχαίο υποδιάστημα  $[x_{\kappa-1}, x_{\kappa}]$ , τότε το (κόκκινο) στοιχειώδες ορθογώνιο με διαστάσεις  $\Delta x = x_{\kappa} - x_{\kappa-1}$  και  $f(x_{\kappa})$  (ή  $f(\xi_{\kappa})$ ,  $\xi_{\kappa} \in [x_{\kappa-1}, x_{\kappa}]$ ) κατά την περιστροφή του γύρω από τον άξονα των τετμημένων παράγει κύλινδρο με ακτίνα βάσης  $\rho = f(x_{\kappa})$  και ύψος  $v = \Delta x$ . Άρα ο στοιχειώδης αυτός κύλινδρος έχει όγκο που δίνεται από τον τύπο  $V_{\kappa} = \pi \rho^2 v = \pi f^2(x_{\kappa}) \Delta x$ .

Επομένως, το άθροισμα όλων των  $\nu$  στοιχειωδών κυλίνδρων που δημιουργούνται από όλα τα στοιχειώδη ορθογώνια δίνεται από τη σχέση:

$$(1) \quad \sum_{\kappa=1}^{\nu} V_{\kappa} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \pi f^2(x_{\kappa}) \Delta x$$

Αν στην ισότητα (1) πάρουμε όριο με  $\nu \rightarrow +\infty$ , τότε το πιο πάνω άθροισμα τείνει να ισούται με τον όγκο του παραγόμενου στερεού από την πλήρη στροφή του χωρίου  $R$  γύρω από τον άξονα των τετμημένων. Με άλλα λόγια, αν  $V$  είναι ο ζητούμενος όγκος, τότε έχουμε:

$$V = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left( \sum_{\kappa=1}^{\nu} V_{\kappa} \right) = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left( \sum_{\kappa=1}^{\nu} \pi f^2(x_{\kappa}) \Delta x \right) = \pi \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x) dx$$

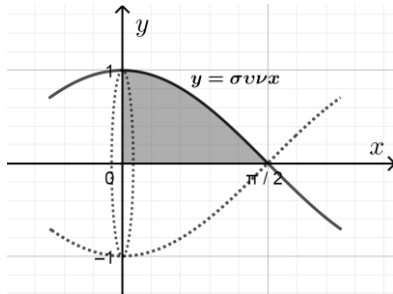
Όλα τα πιο πάνω ερμηνεύουν τον τύπο που δίνεται στο σχολικό βιβλίο στη σελ.125.

**Παρατήρηση:** Ο πιο πάνω τύπος ισχύει και στην περίπτωση που ισχύει  $f(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in [\alpha, \beta]$ .

**Παράδειγμα 1**

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη  $y = \sin x$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  και τους άξονες συντεταγμένων.

Λύση



Σύμφωνα με τον τύπο της προηγούμενης σελίδας, για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \left[ \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) - 0 \right] = \frac{\pi^2}{4} \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 2**

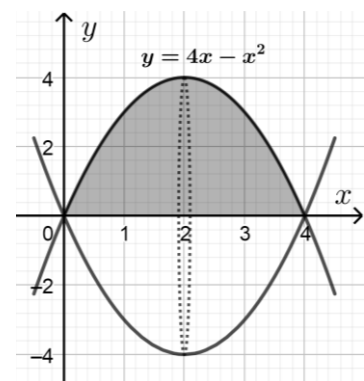
Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη  $y = 4x - x^2$  και τον άξονα των τετμημένων στο διάστημα  $[0, 4]$ .

Λύση

Η καμπύλη  $y = 4x - x^2$  είναι μία παραβολή που τέμνει τον άξονα  $x$  στα σημεία  $(0, 0)$  και  $(4, 0)$  στρέφοντας τα κοίλα προς τα κάτω.

Για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x) dx = \pi \int_0^4 (4x - x^2)^2 dx \\ &= \pi \int_0^4 (16x^2 - 8x^3 + x^4) dx \\ &= \pi \left[ \frac{16x^3}{3} - 2x^4 + \frac{x^5}{5} \right]_0^4 = \frac{512\pi}{15} \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$

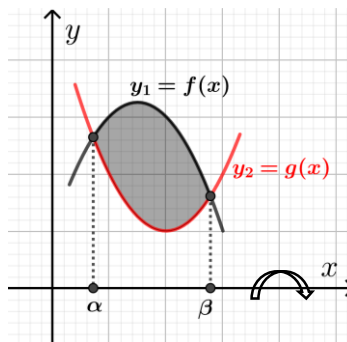


**B.**

Έστω  $R$  το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $y_1 = f(x)$  και  $y_2 = g(x)$  με  $f(x) \geq g(x)$ ,  $\forall x \in [\alpha, \beta]$ .

Ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται από την πλήρη στροφή του χωρίου  $R$  γύρω από τον άξονα των τετμημένων δίνεται από τον τύπο:

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (y_1^2 - y_2^2) dx = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (f^2(x) - g^2(x)) dx$$



### Παράδειγμα 3

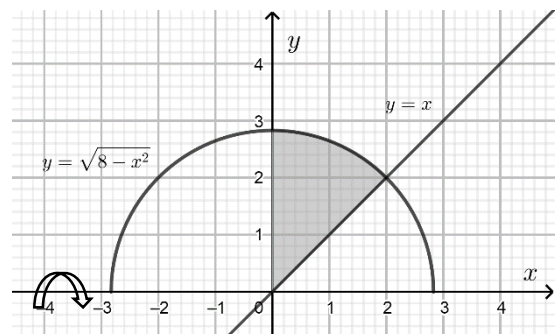
Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη  $y = \sqrt{8 - x^2}$ , τον άξονα των τεταγμένων και την ευθεία  $y = x$ .

Λύση

Η καμπύλη  $y = \sqrt{8 - x^2}$  προκύπτει από την εξίσωση  $x^2 + y^2 = 8$  αν την επιλύσουμε ως προς  $y$  με  $y \geq 0$ , άρα αποτελεί το άνω ημικύκλιο του κύκλου  $x^2 + y^2 = 8$ .

Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων τομής της καμπύλης και της ευθείας:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} y &= x \\ y &= \sqrt{8 - x^2} \end{aligned} \right\} &\Rightarrow x = \sqrt{8 - x^2} \\ \Rightarrow x^2 &= 8 - x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \\ \Rightarrow x &= 2, \text{ αφού } x = y \geq 0 \end{aligned}$$



Για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$V = \pi \int_0^2 (y_1^2 - y_2^2) dx = \pi \int_0^2 (8 - x^2 - x^2) dx = \pi \left[ 8x - \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{32\pi}{3} \text{ κ.μ.}$$

**Παράδειγμα 4**

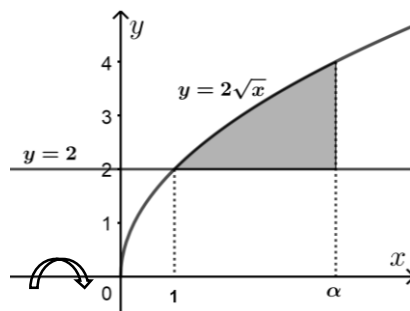
Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη  $y = 2\sqrt{x}$  και τις ευθείες  $y = 2$  και  $x = \alpha$ ,  $\alpha > 1$ , στέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα των τετμημένων. Αν ο όγκος του παραγόμενου στερεού είναι ίσος με  $18\pi$  κ.μ., να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ .

Λύση

Η καμπύλη  $y = 2\sqrt{x}$  είναι το τμήμα της παραβολής  $y^2 = 4x$  που αντιστοιχεί για  $y \geq 0$ .

Η ευθεία  $y = 2$  τέμνει την καμπύλη  $y = 2\sqrt{x}$  όταν:

$$2\sqrt{x} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$



Για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{\alpha} (y_1^2 - y_2^2) dx = \pi \int_1^{\alpha} ((2\sqrt{x})^2 - 2^2) dx = \pi \int_1^{\alpha} (4x - 4) dx \\ &= \pi [2x^2 - 4x]_1^{\alpha} = \pi [(2\alpha^2 - 4\alpha) - (2 - 4)] \\ &= \pi (2\alpha^2 - 4\alpha + 2) \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$

Αφού δίνεται ότι ο πιο πάνω όγκος είναι ίσος με  $18\pi$  κ.μ., τότε έχουμε:

$$2\alpha^2 - 4\alpha + 2 = 18 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 4)(\alpha + 2) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4 \text{ ή } \alpha = -2$$

Επειδή είναι δεδομένο ότι  $\alpha > 1$ , η δεκτή λύση είναι η  $\alpha = 4$ .

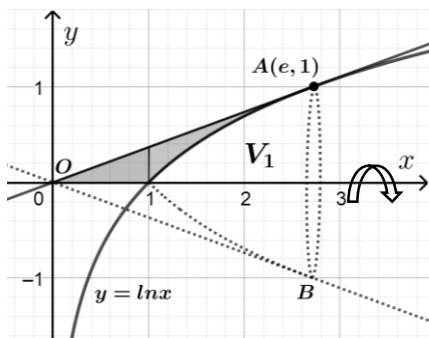
### Παράδειγμα 5

Το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = \ln x$ , την εφαπτομένη της στο σημείο της με τετμημένη  $x = e$  και τον άξονα των τετμημένων, στρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα των τετμημένων. Να υπολογίσετε τον όγκο του παραγόμενου στερεού.

Λύση

α' τρόπος:

Παρατηρώντας το πιο κάτω σχήμα, ο όγκος  $V_1$  δημιουργείται από την περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη  $y = \ln x$  και τον άξονα των τετμημένων στο διάστημα  $[1, e]$  γύρω από τον άξονα των τετμημένων. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:



$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx = \pi \left[ x(\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \pi \left( e - 2 \int_1^e \ln x dx \right) \\ &= \pi \left( e - \left[ 2x \ln x \right]_1^e - 2 \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\ &= \pi(e - 2e + [2x]_1^e) \\ &= \pi(e - 2e + 2e - 2) \\ &= \pi(e - 2) \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$

Το τμήμα  $OA$  κατά την περιστροφή παράγει τον όγκο του κώνου  $OAB$  με ακτίνα βάσης  $\rho = y_A = 1$  και ύψος  $v = x_A = e$ . Άρα ο κώνος έχει όγκο:

$$V_2 = \frac{\pi \rho^2 v}{3} = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot e}{3} = \frac{\pi e}{3} \text{ κ.μ.}$$

Επομένως, ο ζητούμενος όγκος είναι ίσος με:

$$V = V_2 - V_1 = \frac{\pi e}{3} - \pi(e - 2) = \frac{\pi}{3}(6 - 2e) \text{ κ.μ.}$$

β' τρόπος (πιο περίπλοκος):

Εύκολα βρίσκουμε ότι η εφαπτομένη στο  $A$  έχει εξίσωση  $y = \frac{x}{e}$ .

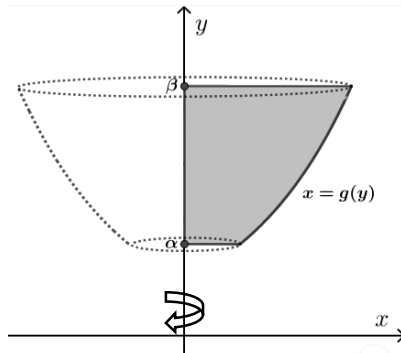
Άρα για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$V = \pi \int_0^1 \left( \frac{x}{e} \right)^2 dx + \pi \int_1^e \left[ \left( \frac{x}{e} \right)^2 - (\ln x)^2 \right] dx = \dots$$

**Όγκος στερεού από περιστροφή επίπεδου χωρίου γύρω από τον άξονα των τεταγμένων.****A.**

Έστω  $R$  το σκιασμένο χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = f(x)$ ,  $x \geq 0$ , τον άξονα των τεταγμένων και τις ευθείες  $y = \alpha$  και  $y = \beta$ .

Επιλύοντας τον τύπο  $y = f(x)$  ως προς  $x$ , δηλαδή  $x = g(y)$ ,  $y \in [\alpha, \beta]$ , τότε ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται από την πλήρη στροφή του χωρίου  $R$  γύρω από τον άξονα των τεταγμένων, δίνεται από τον τύπο:



$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} g^2(y) dy$$

**Παρατήρηση:** Ο πιο πάνω τύπος ισχύει και στην περίπτωση που ισχύει  $x = g(y)$ ,  $x \leq 0$ .

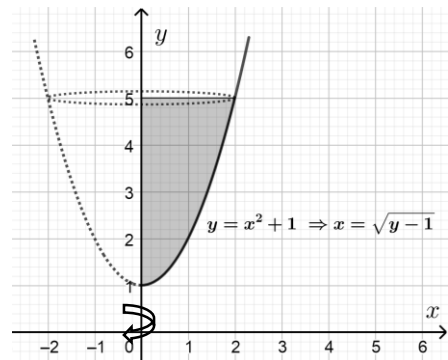
**Παράδειγμα 6**

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη  $y = x^2 + 1$ ,  $x \geq 0$ , τον άξονα των τεταγμένων και την ευθεία  $y = 5$ .

Λύση

Είναι  $y = x^2 + 1$ ,  $x \geq 0 \Rightarrow x = g(y) = \sqrt{y-1}$ , άρα για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} g^2(y) dy = \pi \int_1^5 (y-1) dy \\ &= \pi \left[ \frac{y^2}{2} - y \right]_1^5 = \pi \left[ \left( \frac{25}{2} - 5 \right) - \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \right] = 8\pi \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$



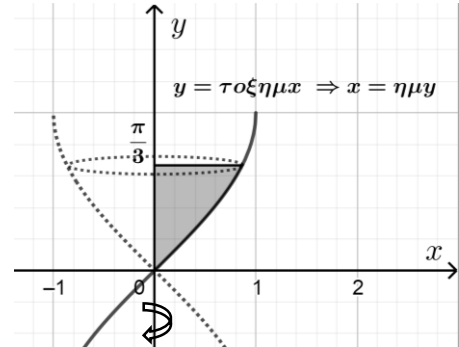
### Παράδειγμα 7

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη  $y = \text{τοξημ}x$ ,  $x \geq 0$ , τον άξονα των τεταγμένων και την ευθεία  $y = \frac{\pi}{3}$ .

Λύση

Είναι  $y = \text{τοξημ}x$ ,  $x \geq 0 \Rightarrow x = g(y) = \eta\mu y$ , άρα για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} g^2(y) dy = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu^2 y dy = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2y}{2} dy \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ y - \frac{\eta\mu 2y}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{2} \left[ \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - 0 \right] \\ &= \frac{\pi}{12} (4\pi - 3\sqrt{3}) \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$

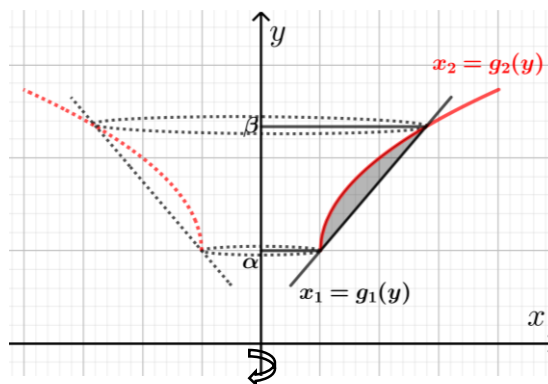


**B.**

Έστω  $R$  το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες με εξισώσεις  $x_1 = g_1(y)$ ,  $x_2 = g_2(y)$  και τις ευθείες  $y = \alpha$  και  $y = \beta$ .

Ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται από την πλήρη στροφή του χωρίου  $R$  γύρω από τον άξονα των τεταγμένων, δίνεται από τον τύπο:

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (x_1^2 - x_2^2) dy = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (g_1^2(y) - g_2^2(y)) dy$$



**Παράδειγμα 8**

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη  $y = \frac{3}{x}$ ,  $x > 0$  και την ευθεία  $y = 4 - x$ .

Λύση

Βρίσκουμε τα σημεία τομής της καμπύλης και της ευθείας:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{x} \\ y = 4 - x \end{array} \right\} \Rightarrow 4 - x = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 1) = 0$$

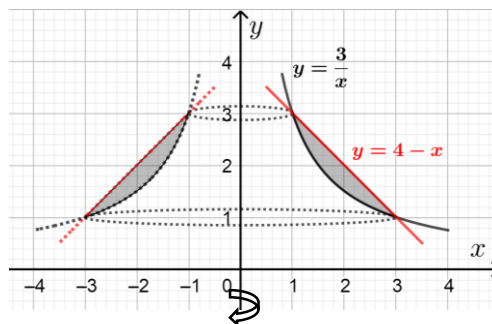
$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = 1$$

Για  $x = 3 \Rightarrow y = 1$  και για  $x = 1 \Rightarrow y = 3$ .

Είναι  $y = 4 - x \Rightarrow x_1 = 4 - y$  και  $y = \frac{3}{x} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{y}$ .

Για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} (x_1^2 - x_2^2) dy = \pi \int_1^3 \left( (4 - y)^2 - \left( \frac{3}{y} \right)^2 \right) dy = \pi \int_1^3 \left( 16 - 8y + y^2 - \frac{9}{y^2} \right) dy \\ &= \pi \left[ 16y - 4y^2 + \frac{y^3}{3} + \frac{9}{y} \right]_1^3 \\ &= \pi \left[ (48 - 36 + 9 + 3) - \left( 16 - 4 + \frac{1}{3} + 9 \right) \right] \\ &= \frac{8\pi}{3} \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$

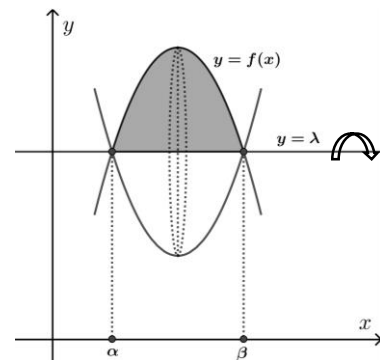




**Όγκος στερεού από περιστροφή επίπεδου χωρίου γύρω από ευθεία  $y = \lambda$ .**

Υποθέτουμε ότι η  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $[a, \beta]$ . Έστω  $R$  το σκιασμένο χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση  $y = f(x)$  και την ευθεία  $y = \lambda$ .

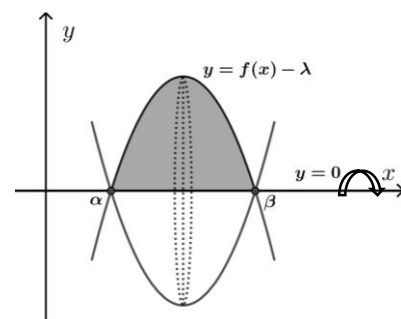
Θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του χωρίου  $R$  γύρω από την ευθεία  $y = \lambda$  (Σχήμα 1).



Σχήμα 1

Αν μετατοπίσουμε την πιο πάνω καμπύλη  $f$  και την ευθεία  $y = \lambda$  κατά  $\lambda$  μονάδες κατακόρυφα προς τα κάτω, τότε η προκύπτει η συνάρτηση  $g(x) = f(x) - \lambda$  και ο νέος άξονας περιστροφής είναι η ευθεία  $y = 0$ , δηλαδή ο άξονας των τετμημένων (Σχήμα 2).

Τότε, ο όγκος του στερεού που παράγεται στο σχήμα 1 είναι  
ισοδύναμος με τον όγκο του στερεού που παράγεται στο σχήμα 2.  
Επομένως, κατά τα γνωστά, για τον ζητούμενο όγκο  $V$  ισχύει:



Σχήμα 2

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} g(x)^2 dx = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - \lambda)^2 dx$$

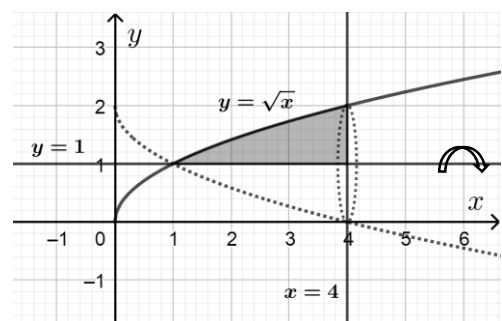
### Παράδειγμα 9

Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη  $y = \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$  και τις ευθείες  $y = 1$ ,  $x = 4$  περιστρέφεται πλήρως γύρω από την ευθεία  $y = 1$ . Να υπολογίσετε τον όγκο του παραγόμενου στερεού.

Λύση

Για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - \lambda)^2 dx = \pi \int_1^4 (\sqrt{x} - 1)^2 dx \\ &= \pi \int_1^4 (x - 2\sqrt{x} + 1) dx = \pi \left[ \frac{x^2}{2} - 2 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + x \right]_1^4 \\ &= \pi \left[ \frac{x^2}{2} - 4 \frac{\sqrt{x^3}}{3} + x \right]_1^4 = \pi \left[ \left( 8 - \frac{32}{3} + 4 \right) - \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 1 \right) \right] = \frac{7\pi}{6} \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$



**Παράδειγμα 10**

Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη  $y = \frac{3}{x}$ ,  $x > 0$  και τις ευθείες  $y = x - 2$ ,  $y = 3$  περιστρέφεται πλήρως γύρω από την ευθεία  $y = 3$ . Να υπολογίσετε τον όγκο του παραγόμενου στερεού.

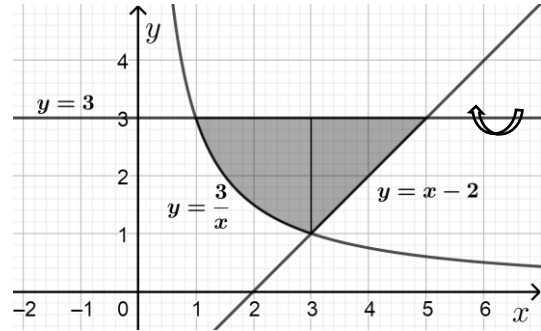
**Λύση**

Βρίσκουμε το σημείο τομής της καμπύλης και της ευθείας:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{x} \\ y = x - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x - 2 = \frac{3}{x} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ή } x = -1$$

Επειδή δίνεται ότι  $x > 0$ , δεκτή λύση είναι η  $x = 3$ , άρα το σημείο τομής είναι το  $(3, 1)$ .

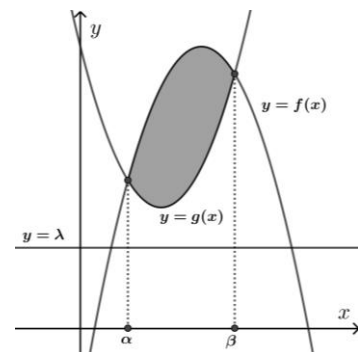


Για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^3 \left(3 - \frac{3}{x}\right)^2 dx + \pi \int_3^5 (3 - (x - 2))^2 dx \\ &= \pi \int_1^3 \left(9 - \frac{18}{x} + \frac{9}{x^2}\right) dx + \pi \int_3^5 (25 - 10x + x^2) dx \\ &= \pi \left[9x - 18 \ln x - \frac{9}{x}\right]_1^3 + \pi \left[25x - 5x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_3^5 \\ &= \pi[(27 - 18 \ln 3 - 3) - (9 - 0 - 9)] + \pi \left[\left(125 - 125 + \frac{125}{3}\right) - (75 - 45 + 9)\right] \\ &= \pi \left(\frac{80}{3} - 18 \ln 3\right) \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$

Αν οι γραφικές παραστάσεις των συνεχών συναρτήσεων  $y = f(x)$  και  $y = g(x)$  τέμνονται σε δύο σημεία με τετμημένες  $x = \alpha$  και  $x = \beta$  και επιπλέον είναι  $f(x) \geq g(x)$ ,  $\forall x \in [\alpha, \beta]$ , τότε το χωρίο που περικλείεται από τις δύο καμπύλες όταν περιστραφεί πλήρως γύρω από την ευθεία  $y = \lambda$  παράγει στερεό όγκου:

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - \lambda)^2 dx - \pi \int_{\alpha}^{\beta} (g(x) - \lambda)^2 dx$$



**Παράδειγμα 11**

Το χωρίο που περικλείεται από τις παραβολές  $y = \frac{x^2}{2} + 4$  και  $y = x^2 + 2$  περιστρέφεται κατά  $2\pi$  γύρω από την ευθεία  $y = 1$ . Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

Λύση

Βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο καμπύλων:

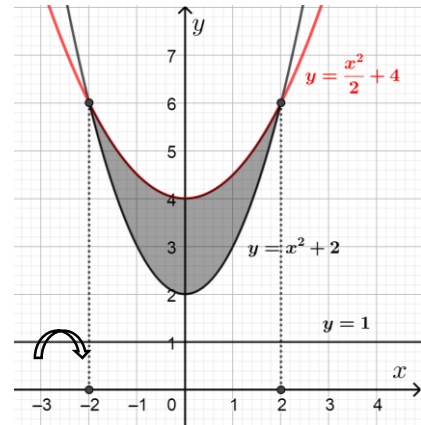
$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{x^2}{2} + 4 \\ y = x^2 + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{2} + 4 = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 + 8 = 2x^2 + 4$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 \text{ ή } x = 2$$

Άρα τα σημεία τομής είναι τα  $(-2, 6)$  και  $(2, 6)$ .

Λόγω συμμετρίας, για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 \left( \frac{x^2}{2} + 4 - 1 \right)^2 dx - 2\pi \int_0^2 (x^2 + 2 - 1)^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^2 \left( \frac{x^4}{4} + 3x^2 + 9 \right) dx - 2\pi \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1) dx \\ &= 2\pi \left[ \frac{x^5}{20} + x^3 + 9x \right]_0^2 - 2\pi \left[ \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right]_0^2 \\ &= 2\pi \left[ \left( \frac{32}{20} + 8 + 18 \right) - 0 \right] - 2\pi \left[ \left( \frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2 \right) - 0 \right] \\ &= \frac{416\pi}{15} \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$

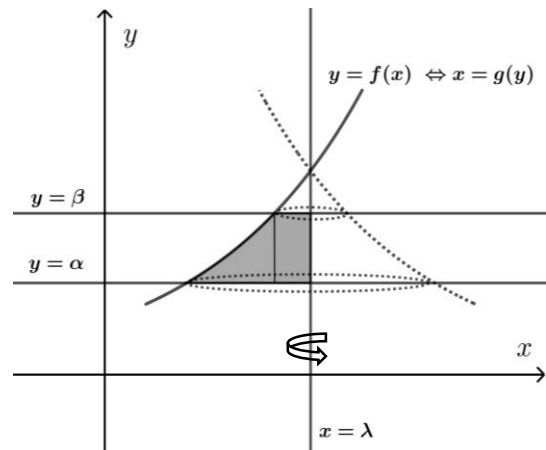


**Όγκος στερεού από περιστροφή επίπεδου χωρίου γύρω από ευθεία  $x = \lambda$ .**

Έστω  $y = f(x)$ ,  $x \geq 0$  μία συνεχής συνάρτηση.

Αν το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη  $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ , την ευθεία  $x = \lambda$  και τις ευθείες  $y = \alpha$ ,  $y = \beta$  περιστραφεί πλήρως γύρω από την ευθεία  $x = \lambda$ , τότε ο όγκος  $V$  του παραγόμενου στερεού δίνεται από τον τύπο:

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (\lambda - g(y))^2 dy$$



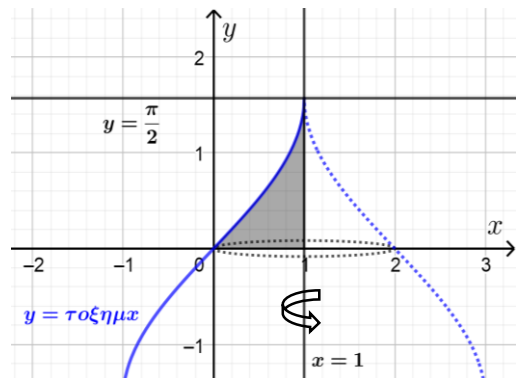
**Παράδειγμα 12**

Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη  $y = \text{τοξημ}x$  και τις ευθείες  $y = 0$ ,  $x = 1$  περιστρέφεται κατά  $2\pi$  γύρω από την ευθεία  $x = 1$ . Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

Λύση

Είναι  $y = \text{τοξημ}x \Leftrightarrow x = \eta\mu y$ , και για  $x = 1$  είναι  $y = \frac{\pi}{2}$ , άρα για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} (1 - g(y))^2 dy = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \eta\mu y)^2 dy \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\eta\mu y + \eta^2 y^2) dy \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 - 2\eta\mu y + \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2y}{2} \right) dy \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{3}{2} - 2\eta\mu y - \frac{\sigma\upsilon\nu 2y}{2} \right) dy \\ &= \pi \left[ \frac{3y}{2} + 2\sigma\upsilon\nu y - \frac{\eta\mu 2y}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \left[ \left( \frac{3\pi}{4} + 0 - 0 \right) - (0 + 2 - 0) \right] \\ &= \frac{\pi}{4} (3\pi - 8) \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$



**Άσκηση 24 (Σελ.140 σχολικού βιβλίου Β Τεύχος)**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x - x^2$ . Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη στροφή του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και τον άξονα των τετμημένων γύρω από:

(α) τον άξονα των τεταγμένων

(β) από την ευθεία  $x = -2$

Λύση

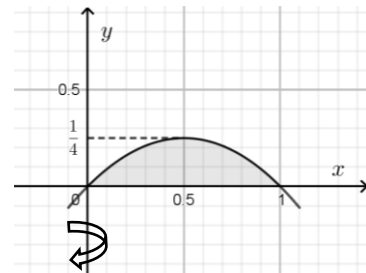
Θα χρειαστεί να λύσουμε την  $y = x - x^2$  ως προς  $x$ . Έχουμε:

$$x^2 - x + y = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{1-4y}}{2} \quad \text{ή} \quad x = \frac{1-\sqrt{1-4y}}{2}, \quad y \leq \frac{1}{4}$$

Η  $\frac{1+\sqrt{1-4y}}{2}$  αφορά τον κλάδο της παραβολής για  $x \geq \frac{1}{2}$ , ενώ η  $\frac{1-\sqrt{1-4y}}{2}$  αφορά τον κλάδο της παραβολής για  $x \leq \frac{1}{2}$ .

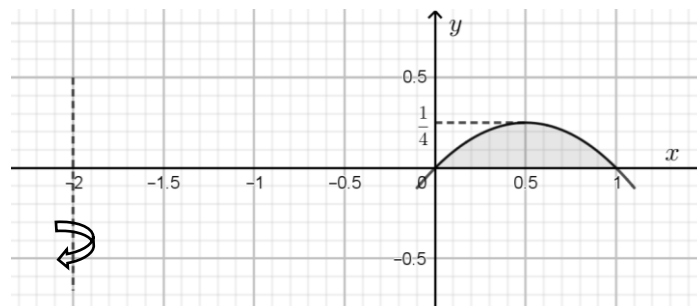
(α) Άρα για τον όγκο περιστροφής γύρω από τον άξονα των τεταγμένων, έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{1}{4}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{1-4y}}{2} \right)^2 - \left( \frac{1-\sqrt{1-4y}}{2} \right)^2 \right) dy \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{1}{4}} 4\sqrt{1-4y} dy = \pi \left[ -\frac{\sqrt{(1-4y)^3}}{6} \right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{6} \text{ κ. μ.} \end{aligned}$$



(β) Με όμοιο τρόπο έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{1}{4}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{1-4y}}{2} + 2 \right)^2 - \left( \frac{1-\sqrt{1-4y}}{2} + 2 \right)^2 \right) dy \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{1}{4}} 20\sqrt{1-4y} dy = 5\pi \left[ -\frac{\sqrt{(1-4y)^3}}{6} \right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{5\pi}{6} \text{ κ. μ.} \end{aligned}$$



## Ασκήσεις

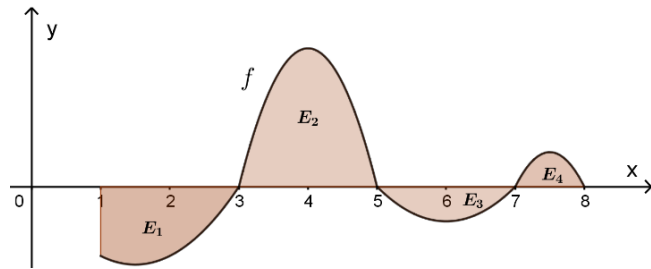
1. Στο διπλανό σχήμα τα σκιασμένα χωρία έχουν εμβαδά  $E_1 = \frac{5}{3}$ ,  $E_2 = 3$ ,  $E_3 = \frac{2}{3}$  και  $E_4$ .

Να υπολογίσετε:

(α) τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_1^5 f(x)dx \text{ και } I_2 = \int_7^1 f(x)dx$$

(β) το εμβαδόν του χωρίου  $E_4$  αν  $\int_1^8 f(x)dx = \frac{7}{6}$



2. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που περικλείεται από:

(α) την καμπύλη  $y^2 = 9x$  και την ευθεία  $y = x + 2$

(β) τις καμπύλες  $y = \sqrt{12 - x^2}$ ,  $y = \sqrt{x}$  και τον άξονα των τεταγμένων

3. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων του χωρίου που περικλείεται από:

(α) την καμπύλη  $y = \tan x$ , την ευθεία  $y = \frac{\pi}{3}$  και τον άξονα των τεταγμένων

(β) τις καμπύλες  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ ,  $x = \sqrt{y}$ ,  $y \geq 0$  και τις ευθείες  $x = 0$ ,  $y = 2$

(γ) την καμπύλη  $y^2 = 4x$ , την εφαπτομένη της στο  $A(1, 2)$  και τον άξονα των τεταγμένων

4. Δίνεται η καμπύλη  $y = \sqrt{x}$  και το σημείο της  $A(\alpha, \sqrt{\alpha})$ ,  $\alpha > 0$ .

Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη, την κάθετή της στο  $A$  και τον άξονα των τετμημένων περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα των τετμημένων δημιουργώντας στερεό όγκου  $\frac{2\pi}{3}$  κυβικές μονάδες. Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ .

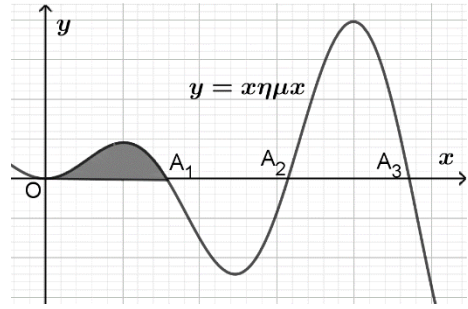
5. (α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση  $x = \varepsilon\varphi\theta$ ,  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ , ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

(β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη  $y = \frac{x}{1+x^2}$ , τον άξονα των τετμημένων και την ευθεία  $x = 1$ .

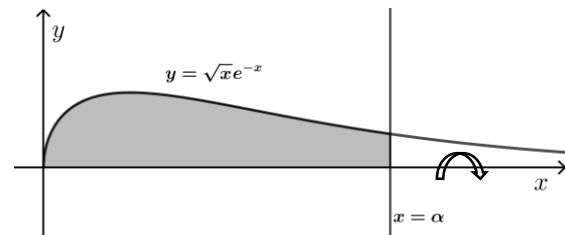
6. Το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες  $y = \ln x$  και  $y = \ln \frac{1}{x}$  περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα των τεταγμένων. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

7. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης με εξίσωση. Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα  $x'x$  στα σημεία  $O, A_1, A_2, A_3$ , κ.ο.κ. Το σκιασμένο μέρος που περικλείεται από την καμπύλη και το τμήμα  $OA_1$  του άξονα των τετμημένων περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα των τετμημένων. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.



8. Δίνεται η καμπύλη  $(C): y = x^3$  και σημείο  $B(\kappa, 0)$  με  $\kappa > 0$ . Από το σημείο  $B$  φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα  $y'y$  η οποία τέμνει την καμπύλη στο σημείο  $A$ .
- (α) Να δείξετε ότι η καμπύλη  $(C)$  χωρίζει το  $\Delta OAB$  ( $O$  η αρχή) σε δύο ισεμβαδικά χωρία.
- (β) Έστω  $T$  το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη  $(C)$ , την ευθεία  $AB$  και τον άξονα των τετμημένων. Το χωρίο  $T$  όταν περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα των τετμημένων δημιουργεί στερεό με όγκο  $V_x$ , ενώ όταν περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα των τεταγμένων δημιουργεί στερεό με όγκο  $V_y$ . Αν  $\frac{V_x}{V_y} = \frac{10}{7}$ , να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $A$ .

9. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της καμπύλης  $y = \sqrt{x}e^{-x}$ ,  $x \geq 0$ . Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη τον άξονα των τετμημένων και την ευθεία  $x = \alpha$ ,  $\alpha > 0$ , περιστρέφεται κατά  $2\pi$  γύρω από τον άξονα των τετμημένων.



- (α) Να δείξετε ότι ο όγκος του παραγόμενου στερεού δίνεται από τη σχέση:

$$V(\alpha) = \frac{1}{4}(-2\alpha e^{-2\alpha} - e^{-2\alpha} + 1)$$

- (β) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} V(\alpha)$ .

10. Δίνονται η παραβολή  $(c): y = 4 - x^2$  και η ευθεία  $(\varepsilon): y = x + 2$ .

- (α) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των  $(c)$  και  $(\varepsilon)$ .
- (β) Αν το πιο πάνω χωρίο περιστραφεί πλήρως γύρω από την ευθεία  $y = 5$ , να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

11. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται, όταν το χωρίο που περικλείεται από τις  $y = x^2 + 2$  και  $y = x + 2$  περιστραφεί πλήρως γύρω από την ευθεία  $y = 1$ .

12. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες  $y = x^2$  και  $y = x^3$ :

- (α) γύρω από τον άξονα των τετμημένων  
(β) γύρω από την ευθεία  $x = 1$