

ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

19^Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ



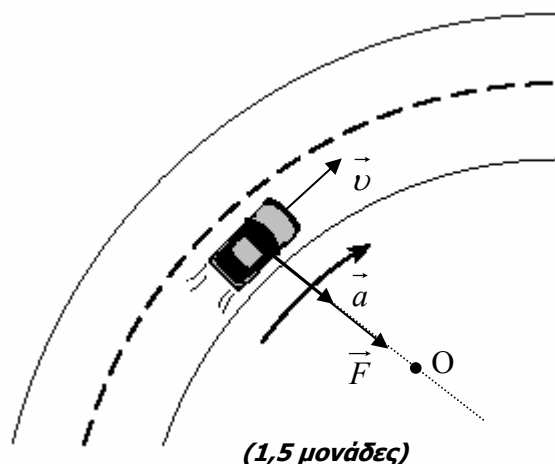
Κυριακή, 03 Απριλίου, 2005

Ώρα: 10:00 - 13:00

Προτεινόμενες Λύσεις

ΘΕΜΑ 1 (10 μονάδες)

Α). Η ταχύτητα $\vec{v}$ είναι εφαπτομενική της τροχιάς. Εφόσον το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό και αλλάζει μόνο η διεύθυνση τότε η επιτάχυνση $\vec{a}$ και η συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ έχουν διεύθυνση ακτινική της τροχιάς με φορά το κέντρο της.
(1,5 μονάδες).



Β). Στο αυτοκίνητο εξασκούνται δύο δυνάμεις. Το βάρος Mg και η κάθετη αντίδραση από τη γέφυρα N . Η συνισταμένη δύναμη είναι:

$$\Sigma F = Mg - N \quad \textbf{(1 μονάδες)}$$

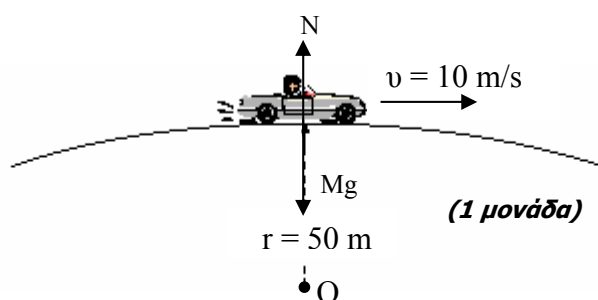
η οποία προκαλεί την κεντρομόλο επιτάχυνση:

$$\Sigma F = M \frac{v^2}{r} \quad \textbf{(2 μονάδες)}$$

Άρα

$$Mg - N = M \frac{v^2}{r} \Rightarrow N = M(g - \frac{v^2}{r}). \quad \textbf{(1 μονάδα)}$$

Αντικαθιστούμε,



$$N = 1040(10 - \frac{100}{50}) = 1040(10 - 2) = 8320N \text{ (1 μονάδα)}$$

Η δύναμη που εξασκεί το όχημα πάνω στη γέφυρα είναι η αντίδραση της N . Επομένως, η δύναμη του οχήματος πάνω στη γέφυρα είναι:

$$N' = -8320N \text{ (1 μονάδα),}$$

ίσου μέτρου αλλά αντίθετης φοράς με την N .

ΘΕΜΑ 2 (15 μονάδες)

(α) Η μπάλα εκτελεί οριζόντια βολή. Ο χρόνος που χρειάζεται να κτυπήσει στο έδαφος είναι ο ίδιος με το χρόνο που θα έκανε αν εκτελούσε ελεύθερη πτώση από το ίδιο ύψος. Επομένως,

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ (2 μονάδες)}$$

Αντικαθιστούμε,

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 45}{10}} = \sqrt{9} = 3s \text{ (1 μονάδα)}$$

(β) Η οριζόντια ταχύτητα της μπάλας, μετά την κρούση, έχει σταθερό μέτρο. Άρα

$$V_2 = \frac{X}{t}$$

Σε χρόνο 3 s διανύει οριζόντια απόσταση 30 m. Άρα η οριζόντια ταχύτητα της μπάλας είναι,

$$V_2 = \frac{30}{3} = 10m/s \text{ (2 μονάδες)}$$

Για να βρούμε την ταχύτητα με την οποία το βλήμα εξέρχεται από την μπάλα εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής:

$$m_1v_1 = m_1V_1 + m_2V_2 \text{ (2 μονάδες)}$$

Όπου m_1 και m_2 είναι η μάζα του βλήματος και της μπάλας αντίστοιχα.

v_1 και V_1 είναι οι ταχύτητες του βλήματος πριν και αμέσως μετά την κρούση

V_2 είναι η ταχύτητα της μπάλας αμέσως μετά την κρούση.

Αντικαθιστούμε στην τελευταία σχέση:

$$0,01 \times 290 = 0,01V_1 + 0,2 \times 10 \Rightarrow V_1 = \frac{2,9 - 2}{0,01} = 90m/s \text{ (1 μονάδα)}$$

Το βλήμα κάνει τον ίδιο χρόνο, με την μπάλα, να κτυπήσει στο έδαφος. Άρα η οριζόντια απόσταση που διανύει πριν να κτυπήσει στο έδαφος, αμέσως μετά την κρούση, είναι,

$$X_1 = V_1 t \Rightarrow X_1 = 90 \times 3 = 270 \text{ m } (1 \text{ μονάδα})$$

Επομένως η απόσταση AB είναι,

$$AB = 270 - 30 = 240 \text{ m. } (1 \text{ μονάδα})$$

(γ) Βρίσκουμε την αρχική και την τελική κινητική ενέργεια του συστήματος.

$$E_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} 0,01 \times (290)^2 = 420,5 \text{ J } (1 \text{ μονάδα})$$

$$E_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} 0,01 (90)^2 + \frac{1}{2} 0,2 (10)^2 = 40,5 + 10 = 50,5 \text{ J } (2 \text{ μονάδες})$$

Έχουμε λοιπόν μια διαφορά ΔΕ ίση με

$$\Delta E = 420,5 - 50,5 \text{ J} = 370 \text{ J. } (1 \text{ μονάδα})$$

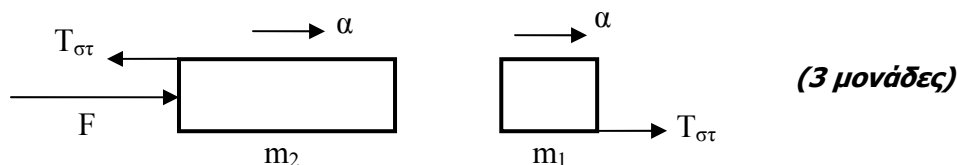
Επομένως ποσοστό $\frac{370}{420,5} \times 100\% = 88\%$ της αρχικής κινητικής ενέργειας του

βλήματος μετατράπηκε σε άλλες μορφές ενέργειας λόγω της κρούσης. (1 μονάδα)

ΘΕΜΑ 3 (15 μονάδες)

(α) Για να μην ολισθαίνει το σώμα μάζας m_1 πάνω στο m_2 θα πρέπει η τριβή μεταξύ των επιφανειών των δύο σωμάτων να είναι στατική.

Οι δυνάμεις, στην οριζόντια διεύθυνση, που εξασκούνται στα δύο σώματα φαίνονται στο ελεύθερο διάγραμμα δυνάμεων στο σχήμα.



Εφόσον τα δύο σώματα κινούνται μαζί έχουν την ίδια επιτάχυνση. Άρα,

$$F = (m_1 + m_2) \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F}{m_1 + m_2} (1 \text{ μονάδα})$$

Η στατική τριβή δίνεται από τη σχέση

$$T_{\sigma\tau} \leq n_{\sigma\tau} N_1, (1 \text{ μονάδα})$$

όπου N_1 είναι η κάθετη αντίδραση στο σώμα m_1 . Είναι

$$N_1 = m_1 g .$$

Άρα,

$$T_{στ} \leq n_{στ} m_1 g \text{ (1 μονάδα)}$$

Η εξίσωση κίνησης, από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, για το σώμα m_1 , είναι,

$T_{στ} = m_1 a$. Αντικαθιστούμε τις δύο προηγούμενες σχέσεις για την $T_{στ}$ και την επιτάχυνση a , παίρνουμε,

$$m_1 \frac{F}{m_1 + m_2} \leq n_{στ} m_1 g \Rightarrow F \leq n_{στ} g (m_1 + m_2). \text{ Επομένως η μέγιστη τιμή της δύναμης}$$

F που θα πρέπει να εξασκείται στη μάζα m_2 έτσι ώστε τα σώματα να κινούνται χωρίς ολίσθηση, είναι

$$F_{\max} = n_{στ} g (m_1 + m_2) \text{ (2 μονάδες)}$$

(β) Από την προηγούμενη σχέση για τη μέγιστη τιμή της δύναμης και τη σχέση για την επιτάχυνση των σωμάτων, παίρνουμε,

$$a = n_{στ} g. \text{ (2 μονάδες)}$$

Αντικαθιστούμε,

$$a = 0,25 \times 10 = 2,5 \text{ m/s}^2 \text{ (1 μονάδα)}$$

(γ) Η μέγιστη τιμή της δύναμης F που θα πρέπει να εξασκείται στη μάζα m_2 έτσι ώστε τα σώματα να κινούνται χωρίς ολίσθηση είναι, με αντικατάσταση στην αντίστοιχη σχέση,

$$F_{\max} = 0,25 \times 10 (1 + 2) = 7,5 \text{ N}.$$

Άρα με την εξάσκηση δύναμης μέτρου 10 N, μεγαλύτερης της $F_{\max}$ προκαλείται ολίσθηση μεταξύ των δύο σωμάτων και έτσι τα σώματα δεν έχουν την ίδια επιτάχυνση. Για το κάθε σώμα έχουμε,

$$T_{ολ} = m_1 a_1$$

$$F - T_{ολ} = m_2 a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{F - T_{ολ}}{m_2}$$

Όπου $T_{ολ}$ είναι η τριβή ολίσθησης:

$$T_{ολ} = n_{ολ} N_1 = n_{ολ} m_1 g$$

Έχουμε λοιπόν,

$$a_1 = n_{ολ} g \text{ (1 μονάδα)}$$

$$a_2 = \frac{F - n_{ολ} m_1 g}{m_2}. \text{ (1 μονάδα)}$$

Αντικαθιστούμε,

$$a_1 = 0,10 \times 10 = 1,0 \text{ m/s}^2 . \text{ (1 μονάδα)}$$

$$a_2 = \frac{10 - 0,10 \times 1 \times 10}{2} = 4,5 \text{ m/s}^2 . \text{ (1 μονάδα)}$$

ΘΕΜΑ 4 (15 μονάδες)

(α) Διατήρηση μηχανικής ενέργειας από το σημείο Α μέχρι το Ο:

$$mgh = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh} . \text{ (2 μονάδες)}$$

Αντικαθιστούμε,

$$v_0 = \sqrt{2 \times 10 \times 20} = 20 \text{ m/s} \text{ (1 μονάδα)}$$

(β) Παίρνουμε ως αρχή για τη θέση του χιονοδρόμου το σημείο Ο. Η θέση του χιονοδρόμου μπορεί να βρεθεί ως η συνιστάμενη της θέσης στην οριζόντια διεύθυνση x και της θέσης στην κατακόρυφη διεύθυνση y . Στη x διεύθυνση η κίνηση γίνεται με σταθερή ταχύτητα $v_0 \sin \theta$ και στη y διεύθυνση γίνεται με σταθερή επιτάχυνση g και αρχική ταχύτητα $-v_0 \eta \mu \theta$. Θεωρήσαμε θετική φορά προς τα δεξιά και προς τα κάτω. Έχουμε έτσι τις εξισώσεις για τη θέση του σκιέρ σε σχέση με το Ο:

$$x = (v_0 \sin \theta) t . \text{ (2 μονάδες)}$$

$$y = (-v_0 \eta \mu \theta) t + \frac{1}{2} g t^2 . \text{ (2 μονάδες)}$$

Σημείωση: Οι εξισώσεις μπορούν να τροποποιηθούν ανάλογα με τη θετική φορά που ορίζεται αυθαίρετα.

(γ) Στο σημείο Ρ έχουμε,

$$y = x \cdot \epsilon \phi \theta$$

Επομένως παίρνουμε, με βάση τις εξισώσεις για τις θέσεις x και y , τη σχέση

$$(v_0 \sin \theta)(\epsilon \phi \theta) t = (-v_0 \eta \mu \theta) t + \frac{1}{2} g t^2 . \text{ Άρα}$$

$$2(\eta \mu \theta) v_0 t = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \frac{4 v_0 \eta \mu \theta}{g}$$

Αντικαθιστούμε,

$$t = \frac{4 \times 20 \times \eta \mu 30^\circ}{10} = 4 \text{ s} , \text{ (2 μονάδες)}$$

Από το χρόνο που θέλει ο χιονοδρόμος να φτάσει από το Ο στο Ρ, υπολογίσουμε τις συντεταγμένες x και y :

$$x = 20(\sin 30^\circ) 4 = 40 \sqrt{3} \text{ m} . \text{ (2 μονάδες)}$$

$$y = -20(\eta\mu 30^\circ)4 + \frac{1}{2}10 \times 16 = -40 + 80 = 40\text{m} . \text{ (2 μονάδες)}$$

Η απόσταση OP είναι

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4800 + 1600} = \sqrt{6400} = 80\text{m} . \text{ (2 μονάδες)}$$

ΘΕΜΑ 5 (20 μονάδες)

(α) Η ένταση του πεδίου βαρύτητας ενός πλανήτη σε απόσταση r από το κέντρο του δίνεται από τη σχέση:

$$g_r = G \frac{M_\pi}{r^2} , \text{ (1 μονάδα)}$$

όπου M_π είναι η μάζα του πλανήτη.

Αν συμβολίσουμε με $M_{\pi\rho}$ τη μάζα του πυρήνα του πλανήτη και με $M_{\upsilon\pi}$ την υπόλοιπη μάζα του, έχουμε

$$M_\pi = M_{\pi\rho} + M_{\upsilon\pi} , \text{ (1 μονάδα)}$$

Από τη σχέση της πυκνότητας και του όγκου έχουμε για τη μάζα,

$$M_{\pi\rho} = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi \left(\frac{R}{3}\right)^3 = \frac{4\pi\rho R^3}{81} . \text{ (2 μονάδες)}$$

$M_{\upsilon\pi} = \rho_{\upsilon\pi} V_{\upsilon\pi}$, όπου $\rho_{\upsilon\pi}$ είναι η πυκνότητα του υπόλοιπου πλανήτη που περιβάλλει τον πυρήνα και $V_{\upsilon\pi}$ είναι ο όγκος του αντίστοιχου μέρους. Ο όγκος βρίσκεται αν αφαιρέσουμε τον όγκο του πυρήνα από τον όγκο ολόκληρου του πλανήτη. Άρα

$$M_{\upsilon\pi} = \frac{\rho}{2} \frac{4}{3} \pi \left[R^3 - \left(\frac{R}{3}\right)^3 \right] = \frac{2\pi\rho}{3} \left(\frac{26R^3}{27} \right) = \frac{52\pi\rho R^3}{81} . \text{ (3 μονάδες)}$$

Η μάζα επομένως του πλανήτη, γράφεται,

$$M_\pi = \frac{4\pi\rho R^3}{81} + \frac{52\pi\rho R^3}{81} = \frac{56\pi\rho R^3}{81} \text{ (1 μονάδα)}$$

Η ένταση του πεδίου βαρύτητας σε απόσταση ίση με $50R$ από το κέντρο του είναι,

$$g = G \frac{56\pi\rho R^3}{81(50R)^2} = G \frac{14\pi\rho R}{50625} . \text{ (1 μονάδα)}$$

(β) Η σχέση κεντρομόλου επιτάχυνσης και γραμμικής ταχύτητας είναι:

$$a_\kappa = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{a_\kappa r} . \text{ (1 μονάδα)}$$

Η ένταση του πεδίου βαρύτητας σε απόσταση $50R$ από το κέντρο του πλανήτη είναι ίση με την κεντρομόλο επιτάχυνση του δορυφόρου, εφόσον αυτός περιστρέφεται στην ίδια απόσταση από τον πλανήτη. Άρα,

$$v = \sqrt{gr} \cdot (2 \text{ μονάδες})$$

Αντικαθιστούμε τη σχέση για την ένταση που βρήκαμε στο ερώτημα (α),

$$v = R \sqrt{\frac{28G\pi\rho}{2025}} \cdot (1 \text{ μονάδα})$$

(γ) Η δύναμη που εξασκεί ο πλανήτης στο δορυφόρο είναι,

$$F = M_{\delta\sigma\rho} a_{\kappa}, \text{ όπου } M_{\delta\sigma\rho} \text{ είναι η μάζα του δορυφόρου. } (1 \text{ μονάδα})$$

$$F = \frac{\rho}{3} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{R}{4}\right)^3 \frac{14G\pi\rho R}{50625} = \frac{7G\pi^2 \rho^2 R^4}{3645000} \cdot (2 \text{ μονάδες})$$

(δ) Στο σημείο, που απέχει απόσταση x από το κέντρο του πλανήτη, όπου η συνιστάμενη ένταση είναι μηδέν,

$$g_{\pi} = g_{\delta\sigma\rho} \Rightarrow \frac{GM_{\pi}}{x^2} = \frac{GM_{\delta\sigma\rho}}{(50R - x)^2} \quad (2 \text{ μονάδες})$$

Αντικαθιστούμε τις μάζες του πλανήτη και του δορυφόρου,

$$\frac{56\pi\rho R^3}{81x^2} = \frac{\pi\rho R^3}{144(50R - x)^2} \Rightarrow \frac{56}{81x^2} = \frac{1}{144(50R - x)^2},$$

$$\left(\frac{x}{50R - x}\right)^2 = 99,56$$

$$\frac{x}{50R - x} = 9,98 \Rightarrow x = 499R - 9,98x \cdot (1 \text{ μονάδα})$$

$$x = 45,45R \cdot (1 \text{ μονάδα})$$

ΘΕΜΑ 6 (25 μονάδες)

(α) Σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του σώματος εξασκούνται σε αυτό η δύναμη F , η οποία είναι σταθερή σε μέτρο, διεύθυνση και φορά, η τριβή T , η οποία είναι σταθερή σε μέτρο και διεύθυνση αλλά αντίθετης φοράς με τη φορά της ταχύτητας του σώματος, το βάρος B και η κάθετη αντίδραση N από το δάπεδο.

Όταν το σώμα πλησιάζει προς το τοίχωμα η επιτάχυνση έχει την ίδια φορά με την ταχύτητα επειδή $F > T$ και το σώμα επιταχύνεται. Όταν όμως απομακρύνεται από το τοίχωμα, η επιτάχυνση έχει αντίθετη φορά με τη φορά της ταχύτητας και το σώμα επιβραδύνεται.

Εξαιτίας της τριβής, έπειτα από κάθε ανάκλαση στο τοίχωμα το σώμα θα σταματά στιγμιαία σε ορισμένη απόσταση από το O . Η απόσταση αυτή θα μειώνεται διαρκώς, με αποτέλεσμα να σταματήσει τελικά στο σημείο O . **(5 μονάδες)**

(β) (i) Όταν πλησιάζει το σημείο O ,

$$\Sigma F = ma \Rightarrow -F + T = ma \Rightarrow a = \frac{-F + T}{m}. \text{ Αντικαθιστούμε,}$$

$$a = \frac{-11 + 1}{1} = -10 \text{ m/s}^2. \text{ (3 μονάδες)}$$

(ii) Όταν απομακρύνεται από το O ,

$$\Sigma F = ma \Rightarrow -F - T = ma \Rightarrow a = \frac{-F - T}{m}. \text{ Αντικαθιστούμε,}$$

$$a = \frac{-11 - 1}{1} = -12 \text{ m/s}^2. \text{ (3 μονάδες)}$$

(γ) Το έργο όλων των δυνάμεων στο σώμα είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας (θεώρημα έργου-ενέργειας), έτσι

$$W_F + W_T = \Delta E_K \Rightarrow F \cdot x - T \cdot x = \frac{1}{2} m v_1^2 - E_0, \text{ όπου } v_1 \text{ το μέτρο της ταχύτητας του}$$

σώματος αμέσως μετά την πρώτη ανάκλαση. Αντικαθιστούμε,

$$11x15 - 1x15 = \frac{1}{2} (1) v_1^2 - 50 \Rightarrow v_1 = \sqrt{400} = 20 \text{ m/s}. \text{ (3 μονάδες)}$$

[Εναλλακτικά, από τη σχέση $E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$ βρίσκουμε την αρχική ταχύτητα:

$v_0 = 10 \text{ m/s}$. Από τη σχέση:

$$v_1^2 = v_0^2 + 2|\alpha|x,$$

Υπολογίζουμε την ταχύτητα αμέσως μετά την πρώτη ανάκλαση: $v_1 = 20 \text{ m/s}$].

Η χρονική στιγμή που συμβαίνει η πρώτη ανάκλαση βρίσκεται από τη σχέση,

$$v_1 = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{v_1 - v_0}{a} . \text{ Αντικαθιστούμε,}$$

$$t = \frac{20 - 10}{10} = 1s . \text{ (3 μονάδες)}$$

(δ) Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου-ενέργειας:

$$W_F + W_T = \Delta E_K \Rightarrow -F \cdot x - T \cdot x = 0 - \frac{1}{2} m v_1^2 . \text{ Αντικαθιστούμε,}$$

$$(11 + 1)x = \frac{1}{2} (1)(20^2) \Rightarrow x = 16,7m . \text{ (3 μονάδες)}$$

(ε) Αν s είναι το ολικό μήκος της τροχιάς του σώματος από τη στιγμή $t = 0$ ώσπου να σταματήσει εντελώς, έχουμε από το θεώρημα έργου-ενέργειας:

$W_F + W_T = \Delta E_K \Rightarrow F \cdot x_0 - T \cdot s = 0 - E_0$, εφόσον η δύναμη F είναι σταθερή συνεχώς (μέτρο, διεύθυνση και φορά) και το έργο πάνω στο σώμα εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση. Όμως η τριβή έχει φορά αντίθετη της ταχύτητας και το έργο πάνω στο σώμα είναι αρνητικό (καταναλώνει έργο) και ανάλογο του συνολικού διαστήματος που ενεργεί η δύναμη. Επομένως, από την τελευταία σχέση, έχουμε

$$s = \frac{E_0 + F \cdot x_0}{T} . \text{ Αντικαθιστούμε,}$$

$$s = \frac{50 + 11 \times 15}{1} = 215m$$

(5 μονάδες)