

ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

21^Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (Επαναληπτικός Διαγωνισμός)



Σάββατο, 21 Απριλίου, 2007

Ώρα: 10.00 – 13.00

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1 (10 μονάδες)

(α) Όταν ο ωροδείκτης συμπληρώσει 2 πλήρεις κύκλους, συμπληρώνονται 24 ώρες. Μια πλήρης ταλάντωση συμπληρώνεται σε χρόνο μιας περιόδου, δηλαδή σε χρόνο 0,512 s. Επομένως ο αριθμός των ταλαντώσεων N που εκτελεί το εκκρεμές σε 24 ώρες είναι,

$$N = \frac{24.3600s}{0,512s} = 168750. \quad (3 \text{ μον.})$$

(β) Το μήκος ℓ της ράβδου αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας. Εφόσον η περίοδος T του απλού εκκρεμούς δίνεται από τη σχέση

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}, \text{ είναι φανερό ότι με την αύξηση του μήκους αυξάνεται η}$$

περίοδος. Αυτό σημαίνει ότι θα χρειάζεται περισσότερος χρόνος για να δείχνει το ρολόι την ακριβή ώρα, δηλαδή για να δείξει ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Επομένως με την αύξηση του μήκους του εκκρεμούς, το ρολόι "θα πηγαίνει πίσω". (2 μον.)

(γ) Έστω T η περίοδος στη θερμοκρασία των 24°C και T' η περίοδος στη θερμοκρασία των 40°C. Είναι,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_0}{g}} \text{ και } T' = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_0 + \Delta\ell}{g}}, \text{ όπου } \Delta\ell \text{ είναι η αύξηση του μήκους του εκκρεμούς.}$$

Έχουμε,

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_0 + \Delta\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_0}{g} + \frac{\Delta\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_0}{g}\left(1 + \frac{\Delta\ell}{\ell_0}\right)} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_0}{g}}\sqrt{1 + \frac{\Delta\ell}{\ell_0}}$$

$$\Rightarrow T' = T \sqrt{1 + \frac{\Delta \ell}{\ell_0}}$$

Με δεδομένη την προσέγγιση $\sqrt{1 + \frac{\Delta \ell}{\ell_0}} \approx 1 + \frac{\Delta \ell}{2\ell_0}$, η τελευταία σχέση γίνεται

$$T' = T \left(1 + \frac{\Delta \ell}{2\ell_0}\right). \text{ Όμως } \Delta \ell = 0,03\% \ell_0 = \frac{0,03}{100} \ell_0. \text{ Άρα,}$$

$$T' = T \left(1 + \frac{0,03}{200}\right) = \frac{200,03}{200} T = 1,00015 T = 1,00015 \cdot 0,512 = 0,5120768 \text{ s}$$

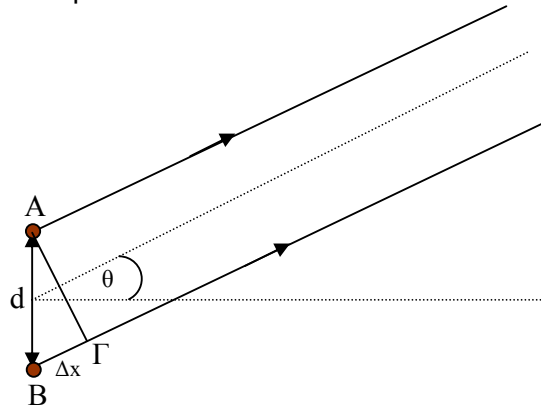
Βρίσκουμε τον χρόνο σε δευτερόλεπτα για 168750 ταλαντώσεις (αριθμός ταλαντώσεων που θα εκτελούσε το εκκρεμές για ακριβή χρόνο 24 ωρών) στη θερμοκρασία των 40°C (όπου η περίοδος είναι τώρα 0,5120768 s). Έχουμε,

$t = 168750 \cdot 0,5120768 = 86412,96 \text{ s}$. Δηλαδή το εκκρεμές θα χρειαστεί 86412,96 s για να δείξει τον ακριβή χρόνο των 24 ωρών ή 86400 s. Άρα το ρολόι "πηγαίνει πίσω" κατά $86412,96 - 86400 \text{ s} = 12,96 \text{ s}$.

(5 μον.)

ΘΕΜΑ 2 (10 μονάδες)

(α) Με βάση την προσέγγιση έχουμε το εξής διάγραμμα για τη συμβολή των κυμάτων στο δέκτη.



Από το διάγραμμα έχουμε για τη διαφορά δρόμου Δx των κυμάτων που φτάνουν στο δέκτη,

$$\Delta x = d \sin \theta$$

Η διαφορά φάσης των κυμάτων που φτάνουν στο δέκτη δίνεται από τη σχέση,

$$\Delta \phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x. \text{ Από τις δύο σχέσεις παίρνουμε για τη διαφορά φάσης,}$$

$$\Delta \phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

(5 μον.)

(β) Για μέγιστα της έντασης (ενισχυτική συμβολή): $\Delta\phi = 2k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{Άρα, } 2k\pi = \frac{2\pi}{\lambda} d \eta \mu \theta \Rightarrow k\lambda = d \eta \mu \theta \Rightarrow \eta \mu \theta = \frac{k\lambda}{d} \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{k\lambda}{d}\right), k = 0, 1, 2, \dots$$

(5 μον.)

ΘΕΜΑ 3 (20 μονάδες)

(α) (i) Έστω y και x το μήκος των δύο διαγωνίων του ρόμβου. Το μήκος y δίνεται από τη σχέση $y = vt$, Το μήκος x βρίσκεται από το πυθαγόρειο θεώρημα.

$$x = 2\sqrt{\ell^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2} \Rightarrow x = 2\sqrt{\ell^2 - \frac{y^2}{4}}.$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\ell^2 - \frac{v^2 t^2}{4}} = \sqrt{4\ell^2 - v^2 t^2}$$

Επομένως το εμβαδόν του ρόμβου είναι,

$$S = \frac{yx}{2} = \frac{vt\sqrt{4\ell^2 - v^2 t^2}}{2}. \text{ Αντικαθιστούμε,}$$

$$S = \frac{yx}{2} = \frac{2t\sqrt{4.0.5^2 - 2^2 t^2}}{2} \Rightarrow S = t\sqrt{1 - 4t^2}.$$

(4 μον.)

(ii) η μαγνητική ροή Φ που περνά από την επιφάνεια του ρόμβου είναι,

$$\Phi = B.S.\cos\theta = B.t\sqrt{1 - 4t^2} = 2t\sqrt{1 - 4t^2}$$

η επαγωγική τάση είναι,

$$E_{\varepsilon\pi} = -N \frac{d\Phi}{dt}, N = 1. \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = -\frac{d}{dt}(2t\sqrt{1 - 4t^2}).$$

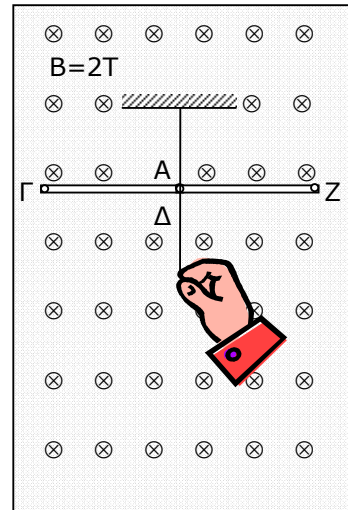
$$E_{\varepsilon\pi} = -(2\sqrt{1 - 4t^2} + 2t \frac{(-8t)}{2\sqrt{1 - 4t^2}})$$

$$E_{\varepsilon\pi} = 2 \frac{(8t^2 - 1)}{\sqrt{1 - 4t^2}}$$

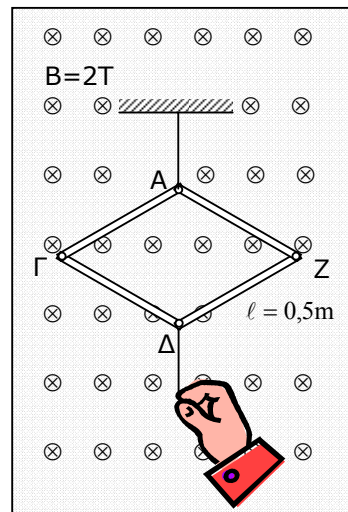
Το επαγωγικό ρεύμα είναι

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R}, R = 2\Omega. \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{8t^2 - 1}{\sqrt{1 - 4t^2}}.$$

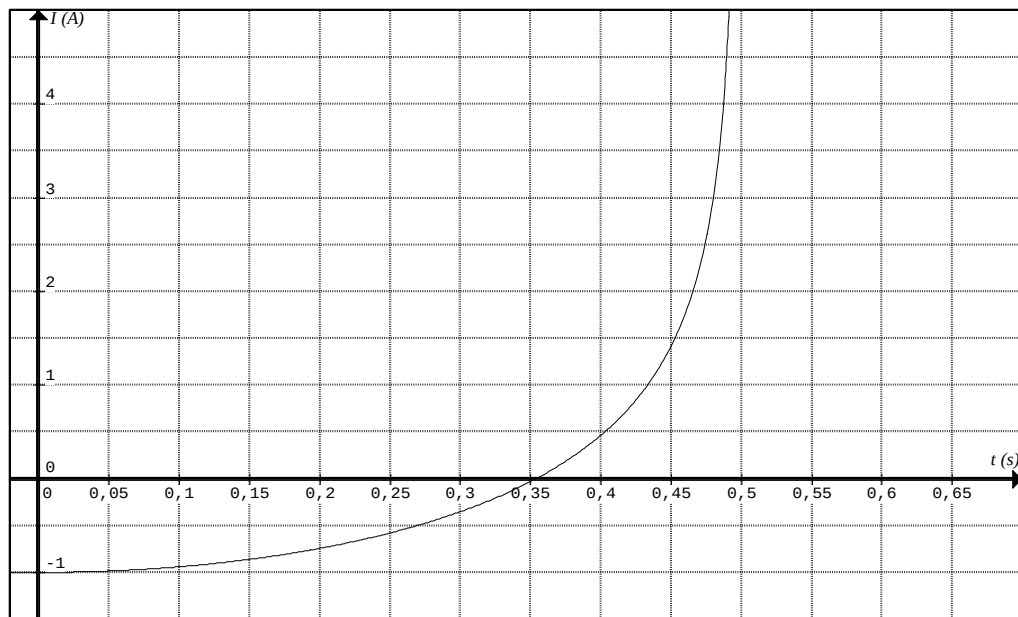
(5 μον.)



Σχ.1

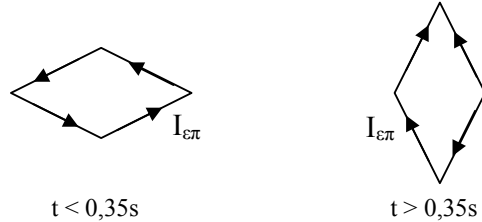


Σχ.2

(β)**(3 μον.)****(3 μον.)**

(γ) Το ρεύμα αλλάζει φορά τη χρονική στιγμή που η συνάρτηση $I_{\varepsilon\pi} = f(t)$ αλλάζει πρόσημο. Από τη σχέση $I_{\varepsilon\pi} = f(t)$, εξάγεται ότι αυτό συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{\sqrt{8}} s = 0,35s$. **(1 μον.)**

(δ)



(4 μον.)

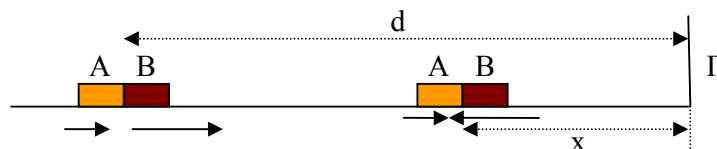
ΘΕΜΑ 4 (20 μονάδες)

(α) Έστω V_1 και V_2 οι ταχύτητες των αμαξιών Α και Β αντίστοιχα μετά την κρούση. Κατά την κρούση διατηρείται η ορμή: $m_1 u_1 = m_1 V_1 + m_2 V_2$. (θεωρούμε θετική φορά προς τα δεξιά). Εφόσον η κρούση είναι ελαστική διατηρείται και η κινητική ενέργεια: $u_1 + V_1 = V_2$. Από τις δύο εξισώσεις προκύπτει:

$$m_1 u_1 = m_1 V_1 + m_2 (u_1 + V_1) \Rightarrow (m_1 - m_2) u_1 = V_1 (m_1 + m_2). \text{ Άρα,}$$

$$V_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) u_1 \quad \text{και} \quad V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1, \quad V_2 > 0, \text{ το αμαξάκι Β κινείται προς τα δεξιά.}$$

Εφόσον $m_1 > m_2$, προκύπτει $V_1 > 0$. Το αμαξάκι Α κινείται επίσης προς τα δεξιά. Το αμαξάκι Β κινούμενο προ τα δεξιά συγκρούεται με το άκρο Γ του αεροδιαδρόμου και επιστρέφει πίσω με την ίδια σε μέτρο ταχύτητα. Στην επιστροφή συγκρούεται με το αμαξάκι Α, για δεύτερη φορά.



Έστω x η απόσταση από το άκρο Γ που συμβαίνει η δεύτερη κρούση, τη χρονική στιγμή t_2 . Μεταξύ των δύο κρούσεων το αμαξάκι Α διανύει απόσταση $d-x$ και το αμαξάκι Β διανύει απόσταση $d+x$. Άρα

$$t_2 = \frac{d+x}{V_2} = \frac{d-x}{V_1} \Rightarrow \frac{d+x}{\frac{2m_1 u_1}{m_1 + m_2}} = \frac{d-x}{\frac{u_1 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}}, \Rightarrow (d+x)(m_1 - m_2) = (d-x)2m_1$$

$$\text{Τελικά, } x = \left(\frac{m_1 + m_2}{3m_1 - m_2} \right) d, \text{ (σχέση 1)}$$

(12 μον.)

$$(β) \quad t_2 = \frac{d-x}{V_1} = \frac{d - \frac{(m_1+m_2)d}{3m_1-m_2}}{\frac{(m_1-m_2)u_1}{m_1+m_2}} \Rightarrow t_2 = \frac{2d(m_1+m_2)}{(3m_1-m_2)u_1}, \text{ (σχέση 2)}$$

(4 μον.)

(γ) (i) Από τη σχέση 1, με $x=d$,

$$\Rightarrow \frac{m_1+m_2}{3m_1-m_2} = 1 \Rightarrow m_1+m_2 = 3m_1-m_2 \Rightarrow m_1 = m_2$$

(2 μον.)

(ii) Για να μπορούν να συγκρούονται για δεύτερη φορά πρέπει να υπάρχει θετική λύση της σχέσης 2, για την τιμή t_2 . Άρα, $3m_1 - m_2 > 0 \Rightarrow m_1 > \frac{m_2}{3}$

(2 μον.)

ΘΕΜΑ 5 (20 μονάδες)

(α) Η ράβδος μετά την κρούση εκτελεί σύνθετη κίνηση. Για το σύστημα ισχύει (i) η αρχή διατήρησης της ορμής, (ii) η αρχή διατήρησης της στροφορμής και (iii) η αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας. Έστω, V_1 η ταχύτητα του υλικού σημείου Γ αμέσως μετά την κρούση, $V_{κμ}$ και ω η γραμμική ταχύτητα του κέντρου μάζας και η γωνιακή ταχύτητα αντίστοιχα του συστήματος ράβδου-υλικών σημείων A και B.

Από τις αρχές διατήρησης έχουμε:

$$(i) \Rightarrow mu = 3mV_{κμ} + mV_1 \Rightarrow u = 3V_{κμ} + V_1, \text{ (Σχέση 1)}$$

$$(ii) \Rightarrow mu\ell = \left(\frac{1}{3}m\ell^2 + 2m\ell^2\right)\omega + mV_1\ell, \text{ (Σχέση 2)}$$

$$(iii) \Rightarrow \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m\ell^2 + 2m\ell^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}3mV_{κμ}^2$$

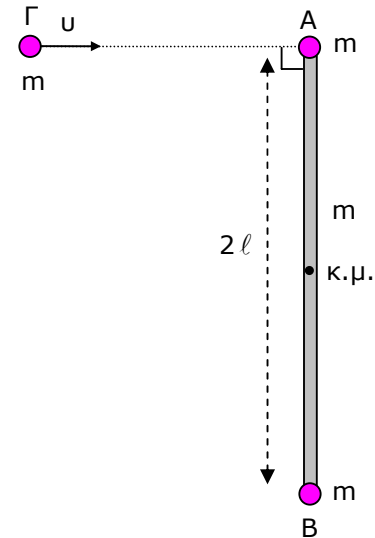
(Σχέση 3).

$$(Σχέση 1) \Rightarrow V_{κμ} = \frac{u - V_1}{3}$$

$$(Σχέση 2) \Rightarrow \omega = \frac{3(u - V_1)}{7\ell}$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις 1 και 2 στην (iii):

$$u^2 = 3\left(\frac{u - V_1}{3}\right)^2 + V_1^2 + \frac{7}{3}\ell^2\left(\frac{u - V_1}{\ell}\right)^2\left(\frac{3}{7}\right)^2$$



$$u^2 - V_1^2 = \frac{(u - V_1)^2}{3} + \frac{3(u - V_1)^2}{7} \Rightarrow u + V_1 = \frac{16}{21}(u - V_1)$$

$\Rightarrow V_1 = -\frac{5}{37}u$. (Το αρνητικό πρόσημο δείχνει την κατεύθυνση, προς τα αριστερά).

(14 μον.)

(β) Η ράβδος εκτελεί περιστροφική κίνηση μετά την πλαστική κρούση. Ισχύει μόνο η αρχή διατήρησης της στροφορμής. Ως προς το σημείο Β έχουμε:

$$\Rightarrow mu\ell = \left(\frac{4}{3}m\ell^2 + 2m(2\ell)^2\right)\omega \Rightarrow u = \frac{28}{3}\ell\omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{3u}{28\ell}.$$

(6 μον.)

ΘΕΜΑ 6 (20 μονάδες)

(α) Κατά την έκρηξη ισχύει η διατήρησης της ορμής. Έστω u_0 η ταχύτητα της μάζας m τη στιγμή της έκρηξης.

Εφόσον η έκρηξη γίνεται στη θέση ισορροπίας Θ.Ι.(1), είναι,
 $u_0 = \omega y_0$.

Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε,

$$mu_0 = m_A u_A - m_B u_B.$$

(Η θετική φορά είναι προς πάνω).

Δίνεται ότι: $u_A = u_B = u$, $m_A = \frac{m}{3}$,

$$m_B = \frac{2m}{3}. \text{ Άρα,}$$

$mu_0 = \frac{m}{3}u - \frac{2m}{3}u \Rightarrow u_0 = -\frac{u}{3}$. Επομένως η φορά της ταχύτητας u_0 είναι προς τα κάτω (από το αρνητικό πρόσημο).

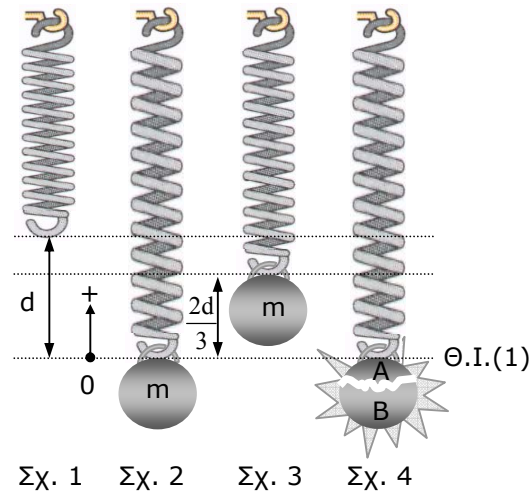
(2 μον.)

(β) Η θέση ισορροπίας του ταλαντωτή αλλάζει. Η νέα θέση ισορροπίας Θ.Ι.(2) βρίσκεται εκεί που ισορροπεί το θραύσμα Α.

Στη θέση ισορροπίας Θ.Ι.(1) ισχύει, από το νόμο του Hooke,

$$mg = Kd \Rightarrow K = \frac{mg}{d}$$

Στη θέση ισορροπίας Θ.Ι.(2), έχουμε,



$$\frac{mg}{3} = Ke \Rightarrow e = \frac{mg}{3K} = \frac{mg}{3 \frac{mg}{d}} \Rightarrow e = \frac{d}{3}.$$

η απόσταση y από το σημείο της έκρηξης έως το νέο σημείο ισορροπίας Θ.Ι.(2), είναι ίση με την απόσταση $d - e$. Άρα,

$$y = d - e = d - \frac{d}{3} = \frac{2d}{3}$$

(Διαφορετικά, η απόσταση y είναι η επιμήκυνση που προκαλεί το θραύσμα Β. Άρα, από το νόμο του Hooke,

$$\frac{2m}{3}g = Ky \Rightarrow y = \frac{2mg}{3K}, \Rightarrow y = \frac{2mg}{3 \frac{mg}{d}} \Rightarrow y = \frac{2d}{3})$$

Το νέο πλάτος y'_0 της ταλάντωσης μπορεί να βρεθεί από τη σχέση:

$$u = \omega' \sqrt{y'^2_0 - y^2}. \quad \text{Όπου,} \quad u = 3u_0, \quad u_0 = \omega y_0, \quad y_0 = \frac{2d}{3}, \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{g}{d}},$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{K}{m_A}} = \sqrt{\frac{3g}{d}} \quad \text{Άρα η σχέση } u = \omega' \sqrt{y'^2_0 - y^2} \text{ γίνεται,}$$

$$3\sqrt{\frac{g}{d}} \frac{2d}{3} = \sqrt{\frac{3g}{d}} \sqrt{y'^2_0 - \left(\frac{2d}{3}\right)^2}$$

$$9 \frac{g}{d} \frac{4d^2}{9} = \frac{3g}{d} \left(y'^2_0 - \frac{4d^2}{9}\right) \Rightarrow 4d = \frac{3}{d} y'^2_0 - \frac{4d}{3}$$

$$4d + \frac{4d}{3} = \frac{3}{d} y'^2_0 \Rightarrow \frac{16d}{3} = \frac{3}{d} y'^2_0 \Rightarrow y'^2_0 = \frac{16d^2}{9}$$

$$\Rightarrow y'_0 = \frac{4d}{3}.$$

(β' τρόπος)

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας, (η ενέργεια ταλάντωσης είναι ίση με την κινητική ενέργεια και την δυναμική ελαστική ενέργεια ως προς τη νέα Θ.Ι.(2)). Άρα,

$$\frac{1}{2}Ky^2 + \frac{1}{2}m_A u^2 = \frac{1}{2}Ky'^2_0, \text{ Αντικαθιστούμε, } m_A = \frac{m}{3}, \quad u = 3u_0 = 3\omega y_0 = 3\sqrt{\frac{K}{m}} \frac{2d}{3},$$

$$\Rightarrow K \frac{4d^2}{9} + \frac{m}{3} \cdot 9 \frac{K}{m} \cdot \frac{4d^2}{9} = Ky'^2_0, \Rightarrow y'_0 = \frac{4d}{3}.$$

(8 μον.)

(γ) Η περίοδος ταλάντωσης του θραύσματος Α είναι: $T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3g}{d}}}$

η περίοδος πριν την έκρηξη είναι:

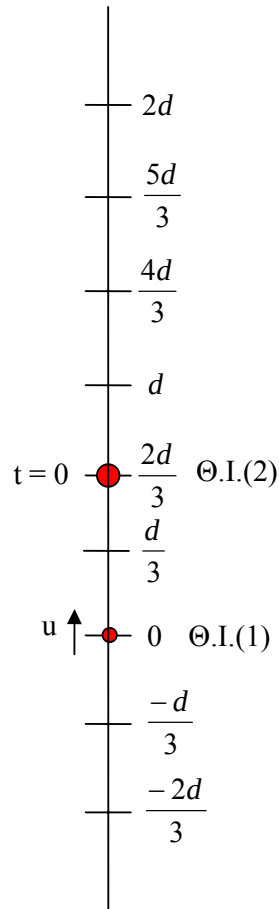
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{d}}}. \text{ Άρα,}$$

$$T' = \frac{T}{\sqrt{3}} = 1s, (T = \sqrt{3}s).$$

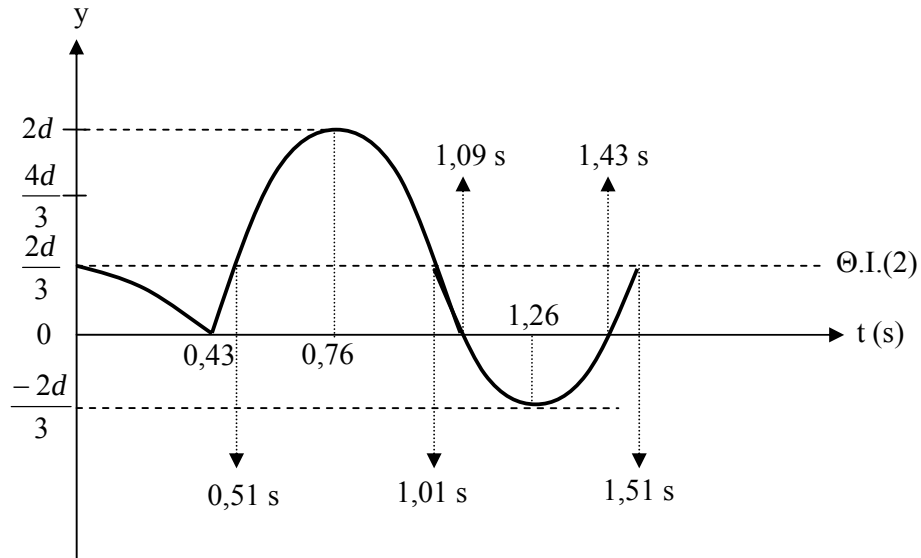
Ο ζητούμενος χρόνος t είναι ο χρόνος t_1 για να κινηθεί το σώμα m από την αρχική ακραία θέση, $\frac{2d}{3}$, μέχρι τη Θ.Ι.(1) και ο χρόνος t_2 για να κινηθεί το θραύσμα Α, m_A , από τη Θ.Ι.(1) μέχρι τη Θ.Ι.(2). Ο χρόνος t_1 γίνεται σε $\frac{1}{4}$ της αρχικής περιόδου. Ο χρόνος t_2 γίνεται σε χρόνο που ικανοποιεί τη σχέση, $\omega' t_2 = \frac{\pi}{6}$, εφόσον το θραύσμα θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση, $y = y_0' \eta \mu(\omega' t)$, με $y = \frac{y_0'}{2}$, όταν $t = t_2$. Άρα,

$$t_2 = \frac{T'}{12}. \text{ Τελικά,}$$

$$t = \frac{T}{4} + \frac{T'}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{12} = 0,51s.$$



(2 μον.)

(δ)**(5 μον.)**

$$\textbf{(ε)} \quad \Delta E = \frac{1}{2} \frac{m}{3} u^2 + \frac{1}{2} \frac{2m}{3} u^2 - \frac{1}{2} m u_0^2 = \frac{1}{2} m (u^2 - u_0^2) = \frac{1}{2} m (9u_0^2 - u_0^2)$$

$$\Delta E = 4m u_0^2 = 4m \omega^2 y_0^2 = 4m \frac{4\pi^2}{T^2} \left(\frac{2d}{3}\right)^2, T = \sqrt{3}s, \text{ Άρα}$$

$$\Delta E = \frac{64\pi^2 m d^2}{27}.$$

Σημείωση, εάν αντικαταστήσουμε στη σχέση

$$\Delta E = 4m \omega^2 y_0^2, \quad \omega^2 = \frac{g}{d}, \quad \text{και} \quad y_0 = \frac{2d}{3}, \quad \text{παίρνουμε,}$$

$$\Delta E = \frac{4mg4d^2}{9d} = \frac{16mgd}{9}, \quad \text{που είναι αποδεκτή.}$$

(3 μον.)