

ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ



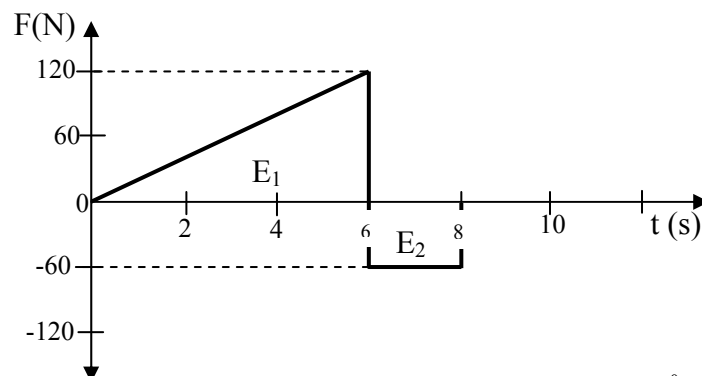
21^Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ - Α' ΦΑΣΗ

Κυριακή, 14 Ιανουαρίου, 2007

Ωρα: 10:00 - 13:00

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1



α) Από το γενικευμένο δεύτερο νόμο του Newton

$$\Sigma F = \frac{\Delta P}{\Delta t} \Rightarrow \Delta P = \Sigma F \cdot \Delta t \text{ έχουμε ότι}$$

το εμβαδό στη γραφική παράσταση $F=f(t)$ δίνει τη μεταβολή της ορμής.

$$E_1 = \frac{6 \cdot 120}{2} = 360, \quad E_2 = 2 \cdot 60 = 120$$

$$\Delta P = 360 - 120 = 240 \Rightarrow \underline{\Delta P = 240 Nm} \Rightarrow P_{\text{τελ}} - P_{\text{αρχ}}^0 = 240 \Rightarrow m \cdot v_{t=8s} = 240 \Rightarrow \cancel{m} \cdot v_{t=8s} = 240$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{t=8s} = 24 m/s}$$

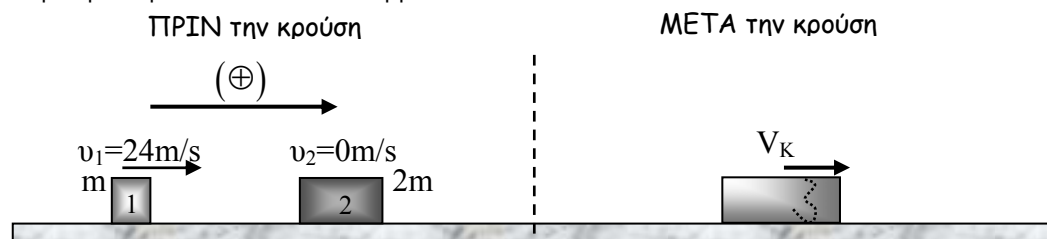
(μονάδες 3)

β) Η μεγαλύτερη μεταβολή στην ορμή είναι

$$\Delta P = 360 Nm \Rightarrow P_{t=6s} - P_{\text{αρχ}}^0 = 360 \Rightarrow m \cdot v_{t=6s} = 360 \Rightarrow \cancel{m} \cdot v_{t=6s} = 360 \Rightarrow \boxed{v_{t=6s} = 36 m/s = v_{\text{max}}}$$

(μονάδες 3)

γ) Η ταχύτητα με την οποία κινείται η μπάλα είναι 24 m/s



$$\text{Επειδή } \Sigma F_{\text{εξ}} = 0 \Rightarrow \bar{P} = c \Rightarrow \bar{P}_{\text{τελ}} = \bar{P}_{\text{αρχ}} \Rightarrow m \cdot v = (m + 2m) \cdot V_K \Rightarrow V_K = \frac{\cancel{m}}{3\cancel{m}} \cdot v \Rightarrow \underline{V_K = \frac{v}{3}} \text{ (μονάδα 1)}$$

Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος που θα μεταβιβαστεί στο δεύτερο σώμα, δίνεται από το λόγο $\frac{E_{K_2 \text{ μετα}}}{E_{K_1 \text{ πριν}}}$.

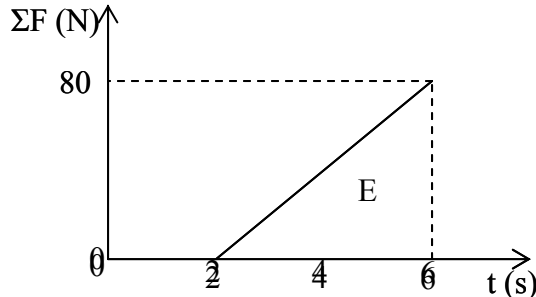
$$\frac{E_{K_2 \text{ μετα}}}{E_{K_1 \text{ πριν}}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2\cancel{m} \cdot \left(\frac{v}{3}\right)^2}{\frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v^2} = \frac{2 \cdot \cancel{m} \cdot \frac{v^2}{9}}{\cancel{m} \cdot v^2} = \frac{2}{9} (= 22,2\%)$$

(μονάδες 2)

$$\delta) \text{ Αν } \mu_{ολ} = \mu_{στ} = 0,4 \Rightarrow T_{στ} = \mu_{στ} \cdot N = \mu_{στ} \cdot B = \mu_{στ} \cdot m \cdot g = 0,4 \cdot 10 \cdot 10 = 40 \Rightarrow T_{στ} = 40 \text{ N}$$

(μονάδα 1)

Αυτό σημαίνει ότι το σώμα αρχίζει να κινείται όταν πάνω του ασκηθεί δύναμη μεγαλύτερη από 40N. Η μέγιστη τιμή της ταχύτητας πάλι θα είναι τη χρονική στιγμή $t=6s$. Τώρα επειδή ασκούνται δύο δυνάμεις μας ενδιαφέρει η Συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω στο σώμα, έτσι η γραφική παράσταση $\Sigma F=f(t)$ είναι:



$$\text{Το εμβαδό } E \text{ ισούται με } E = \frac{4 \cdot 80}{2} = 160$$

$$\Delta P = 160 \text{ Nm} \Rightarrow P_{τελ} - P_{αρ}^0 = 160$$

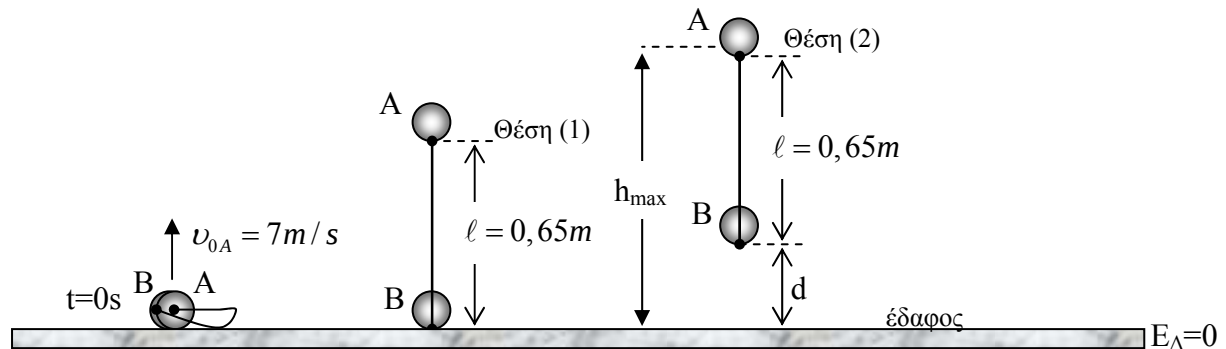
$$\Rightarrow m \cdot v_{t=6s} = 160 \Rightarrow 10 \cdot v_{t=6s} = 160$$

$$\Rightarrow v_{t=6s} = 16 \text{ m/s} = v'_{\max}$$

(μονάδες 2)

ΘΕΜΑ 2

α) Οι σφαίρες Α και Β είναι σημειακές.



Η σφαίρα Α εκτελεί κατακόρυφη κίνηση προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $v_{0A} = 7 \text{ m/s}$. Όταν φτάσει στη θέση όπου το νήμα τεντώνει (θέση 1) έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 - gt \Rightarrow v_{1A} = v_{0A} - gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_{0A} - v_{1A}}{g} \quad (1) \\ y &= v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \Rightarrow l = v_{0A} t_1 - \frac{1}{2} gt_1^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow l = v_{0A} \frac{v_{0A} - v_{1A}}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_{0A} - v_{1A}}{g} \right)^2 \Rightarrow$$

(μονάδα 1)

$$2lg = 2v_{0A}^2 - 2v_{0A}v_{1A} + v_{0A}^2 + 2v_{0A}v_{1A} - v_{1A}^2 \Rightarrow v_{1A} = \sqrt{v_{0A}^2 - 2gl} \Rightarrow \sqrt{7^2 - 2 \cdot 10 \cdot 0,65} = 6$$

$$\Rightarrow v_{1A} = 6 \text{ m/s}$$

Όπου v_{1A} η ταχύτητα που έχει η σφαίρα Α όταν φτάσει στη θέση όπου τεντώνει το νήμα. (θέση 1)

Από την σχέση (1) $t_1 = \frac{7-6}{10} = 0,1 \Rightarrow t_1 = 0,1s$. Όπου t_1 ο χρόνος που χρειάζεται να φτάσει στη θέση 1.

Επειδή το τέντωμα του νήματος είναι ακαριαίο, κατά το τέντωμα του νήματος ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής.

$$\Sigma F_{εξ} = 0 \Rightarrow \vec{P} = c \Rightarrow \vec{P}_\pi = \vec{P}_\mu \Rightarrow m_A v_{1A} = (m_A + m_B) V_K \Rightarrow V_K = \frac{m_A v_{1A}}{m_A + m_B} = \frac{0,1 \cdot 6}{0,1 + 0,1} = \frac{0,6}{0,2} = 3$$

$$\Rightarrow V_K = 3 \text{ m/s}$$

(μονάδα 1)

Όταν τεντωθεί το νήμα και πάλι η κίνηση είναι κατακόρυφη βολή προς τα πάνω.

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 - gt \Rightarrow 0 = V_K - gt_2 \Rightarrow t_2 = \frac{V_K}{g} \quad (2) \\ y &= v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \Rightarrow d = V_K t_2 - \frac{1}{2} gt_2^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d = V_K \frac{V_K}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_K}{g} \right)^2 \Rightarrow d = \frac{V_K^2}{2g} = \frac{3^2}{20} = 0,45$$

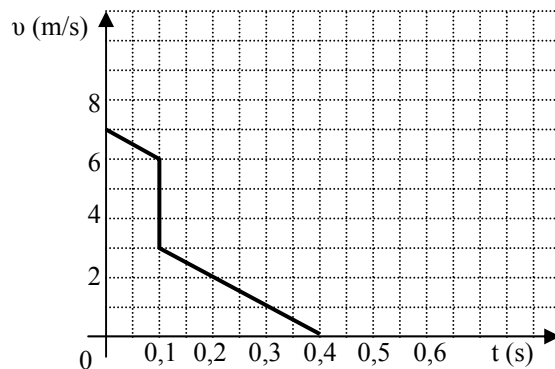
$\Rightarrow d = 0,45m$. Όπου το d η απόσταση από τη θέση 1 μέχρι το ανώτατο σημείο της τροχιάς του συστήματος. (μονάδα 1)

Το μέγιστο ύψος $h_{\max}$ που θα φτάσει η μπάλα Α ισούται με:

$$h_{\max} = \ell + d = 0,65 + 0,45 = 1,1 \Rightarrow \boxed{h_{\max} = 1,1m} \quad \text{(μονάδα 1)}$$

β) Αφού τεντωθεί το νήμα ο χρόνος που χρειάζεται για να φτάσει το σύστημα στην ανώτατη του θέση (θέση 2) είναι:

$$t_2 = \frac{V_K}{g} = \frac{3}{10} \Rightarrow t_2 = 0,3s \quad \text{(μονάδα 1)}$$



(μονάδα 2)

γ) Θεωρούμε ότι το επίπεδο μηδενικής Βαρυτικής Ενέργειας είναι το έδαφος.

$$E_{ολ_{\text{συστ}(1)}} = E_{Καρχ_{\text{συστ}(1)}} + E_{\cancel{\Delta_{αρχ_{\text{συστ}(1)}}}} = \frac{1}{2} m_A v_{0A}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 7^2 = 2,45 \Rightarrow \boxed{E_{Καρχ_{\text{συστ}}} = 2,45 J} \quad \text{(μονάδα 1)}$$

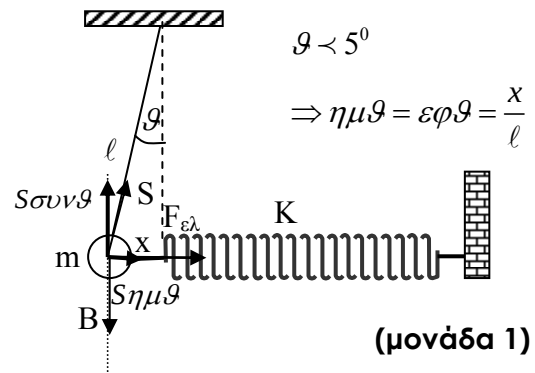
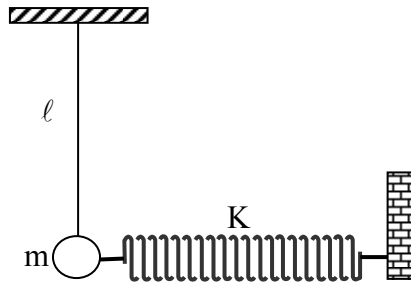
$$E_{ολ_{\text{συστ}(2)}} = E_{\Delta_{A(2)}} + E_{\Delta_{B(2)}} = m_A \cdot g \cdot h_{A(2)} + m_A \cdot g \cdot h_{B(2)} = 0,1 \cdot 10 \cdot 0,45 + 0,1 \cdot 10 \cdot 1,1 = 1,1 + 0,45 = 1,55$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{ολ_{\text{συστ}(2)}} = 1,55 J} \quad \text{(μονάδα 1)}$$

Η μεταβολή της ενέργειας ισούται με $\Delta E = 1,55 - 2,45 \Rightarrow \Delta E = -0,9 J$. Δηλαδή υπάρχει απώλεια ενέργειας 0,9 J, η οποία χάνεται κατά το τέντωμα του σχοινιού. (μονάδα 1)

ΘΕΜΑ 3

α)



Εκτρέπουμε το σφαιρίδιο κατά μικρή γωνία ($\theta < 5^\circ$). Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στο σφαιρίδιο σε μια τυχαία θέση και βρίσκουμε την συνισταμένη δύναμη στη διεύθυνση της κίνησης.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow S \sigma \nu \theta = B \Rightarrow S = \frac{m \cdot g}{\sigma \nu \theta}$$

$$\Sigma F_x = -S \eta \mu \theta - F_{el} = -\frac{m \cdot g}{\sigma \nu \theta} \eta \mu \theta - K \cdot x = -(m \cdot g \cdot \varepsilon \varphi \theta + K \cdot x) = -(m \cdot g \cdot \frac{x}{l} + K \cdot x) = -(\frac{m \cdot g}{l} + K) x$$

(μονάδα 1)

Παρατηρούμε ότι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα έχει μέτρο ανάλογο με το μέτρο της απομάκρυνσης από τη Θέση Ισορροπίας και με φορά προς τη Θέση Ισορροπίας, άρα είναι Δύναμη επαναφοράς και έτσι το σώμα εκτελεί Γραμμική Αρμονική Ταλάντωση.

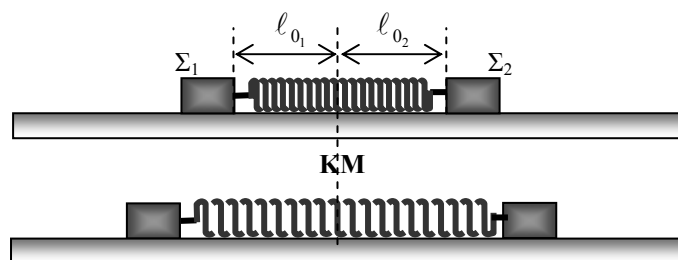
(μονάδα 1)

β) Είναι της μορφής $F_{επ} = -D \cdot x$.

$$D = \frac{m \cdot g}{l} + K \Rightarrow m \cdot \omega^2 = \frac{m \cdot g}{l} + K \Rightarrow m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} = \frac{m \cdot g}{l} + K \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot l}{m \cdot g + l \cdot K}}$$

(μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 4



α) Αφού στο σύστημα $\Sigma F_{εξ} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{\sigma \nu \sigma \tau} = c$ και αρχικά ήταν ακίνητο $\vec{P}_{\sigma \nu \sigma \tau} = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot v_{KM} = 0 \Rightarrow v_{KM} = 0$

(μονάδες 1)

Επειδή το Κέντρο Μάζας παραμένει ακίνητο (ως να ήταν καρφωμένο στο πάτωμα) είναι σαφές ότι το κάθε σώμα ταλαντώνεται με την επίδραση του μέρους του ελατηρίου δεξιά / αριστερά του Κέντρου Μάζας. Η θέση του Κέντρου Μάζας είναι:

$$K_1 \cdot \ell_1 = K_2 \cdot \ell_2 = K_0 \cdot \ell_0$$

$$m_1 \cdot \ell_1 = m_2 \cdot \ell_2 \Rightarrow m_1 \cdot \ell_1 = m_2 \cdot (\ell_0 - \ell_1) \Rightarrow \ell_1 = \frac{m_2 \cdot \ell_0}{m_1 + m_2} \Rightarrow \ell_1 = \frac{4 \cdot 21}{6} = 0,14 \Rightarrow \underline{\ell_1 = 0,14m}$$

και $\ell_2 = 0,21 - 0,14 \Rightarrow \underline{\ell_2 = 0,07m = 7cm}$. Οι αποστάσεις αυτές είναι από το Κέντρο Μάζας.

(μονάδες 2)

β) Σε τυχαία θέση $F_1 = F_2 = -K_1 x_1 = -K_2 x_2 = -K(x_1 + x_2) = -Kx$

(μονάδα 1)

Παρατηρούμε ότι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα έχει μέτρο ανάλογο με το μέτρο της απομάκρυνσης από τη θέση Ισορροπίας και με φορά προς τη θέση Ισορροπίας, άρα είναι Δύναμη επαναφοράς και έτσι το σώμα εκτελεί Γραμμική Αρμονική Ταλάντωση.

(μονάδα 1)

Για οποιαδήποτε θέση για το ΚΜ ισχύει:

$$K_1 \cdot \ell_1 = K_0 \cdot \ell_0 \Rightarrow K_1 = \frac{K_0 \cdot \ell_0}{\ell_1} = \frac{12 \cdot 0,21}{0,14} = 18 \Rightarrow K_1 = 18 \text{ N/m}$$

$$K_2 \cdot \ell_2 = K_0 \cdot \ell_0 \Rightarrow K_2 = \frac{K_0 \cdot \ell_0}{\ell_2} = \frac{12 \cdot 0,21}{0,7} = 36 \Rightarrow K_2 = 36 \text{ N/m}$$

Το κάθε σώμα εκτελεί ταλάντωση με το μέρος του ελατηρίου ℓ_1 και ℓ_2 αντίστοιχα.

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F &= K_1 \cdot x_{01} = K_1 \cdot x_{01} \\ x_{01} + x_{02} &= d \end{aligned} \right\} \Rightarrow 18x_{01} = 36x_{02} \Rightarrow 18x_{01} = 36(0,12 - x_{01}) \Rightarrow 18x_{01} = 36(0,12 - x_{01})$$

$$\Rightarrow 18x_{01} = 432 - 36x_{01} \Rightarrow 54x_{01} = 4,32 \Rightarrow x_{01} = 0,08 \text{ m} = 8 \text{ cm}$$

(μονάδα 1)

$$0,08 + x_{02} = 0,12 \Rightarrow x_{02} = 0,04 \text{ m} = 4 \text{ cm}$$

(μονάδα 1)

γ) Η περίοδος για το σώμα Σ_1 $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{K_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{18}} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ s}$

(μονάδα 2)

Η περίοδος για το σώμα Σ_2 $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{K_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{4}{36}} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{3} \text{ s}$

(μονάδα 2)

δ) Αφού τα δύο σώματα κινούνται με διαφορά φάσης π θα είναι στην πιο κοντινή

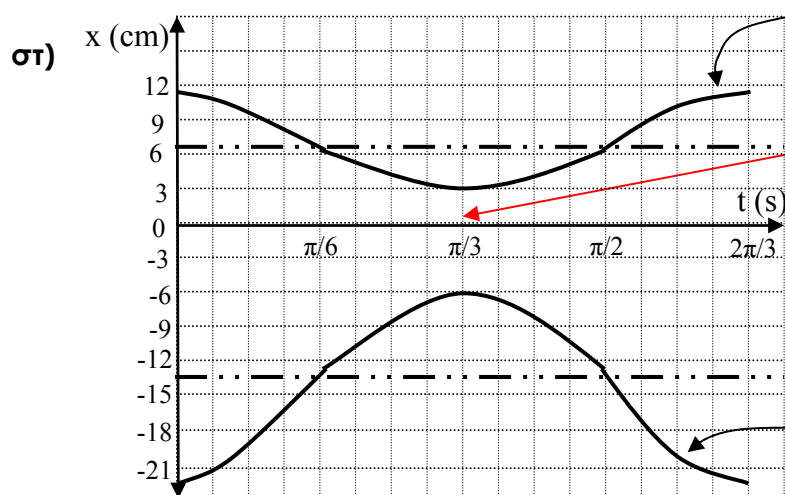
απόσταση σε χρόνο $\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{3} = 1,05 \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{3} \text{ s} = 1,05 \text{ s}$

(μονάδες 3)

ε) $x_2 = \ell_{02} + x_{02} \eta\mu(\omega_2 t + \varphi_0) \Rightarrow x_2 = 7 + 4 \eta\mu\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi \cdot 3}{2\pi} \Rightarrow \omega = 3 \text{ rad/s}$$

(μονάδες 3)



$$x_2 = 7 + 4 \eta\mu\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$$

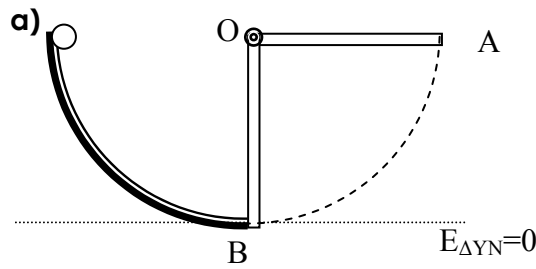
Τα δύο σώματα θα είναι στην πιο κοντινή απόσταση

Η περίοδος $T = \frac{2\pi}{3} \text{ s} = 2,1 \text{ s}$.

$$x_1 = -14 + 8 \eta\mu\left(3t + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

(μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 5



Με τη εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για τη μετακίνηση της ράβδου από τη θέση Α στην θέση Β.

$$E_{M_A} = E_{M_B} \Rightarrow E_{Kiv_A}^0 + E_{\Delta v_A} = E_{Kiv_B} + E_{\Delta v_A}$$

$$Mg\ell = \frac{1}{2} I_{\rho} \cdot \omega^2 + Mg \cdot \frac{\ell}{2} \quad (\text{μονάδα 1})$$

$$\Rightarrow Mg\ell = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} M \ell^2 \cdot \omega^2 + Mg \cdot \frac{\ell}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} \omega^2 \ell = \frac{g}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10}{1,2}} = 5 \Rightarrow \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(μονάδες 2)

Έτσι $v = \omega \ell = 5 \cdot 1,2 = 6 \Rightarrow v = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (μονάδα 1)

β) Με τη εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για τη μετακίνηση της σφαίρας από τη θέση Α στην θέση Β.

$$E_{M_A} = E_{M_B} \Rightarrow E_{Kiv_A}^0 + E_{\Delta v_A} = E_{Kiv_B} + E_{\Delta v_A}$$

$$\Rightarrow m \cdot g \cdot R = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot gR} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1,2} = \sqrt{24} = 4,9 \Rightarrow v = 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(μονάδες 2)

Η σφαίρα εκτελεί κυκλική κίνηση με κέντρο το σημείο Ο. Έτσι:

$$L = m \cdot v \cdot R = 0,5 \cdot 4,9 \cdot 1,2 = 2,94 \Rightarrow L = 2,94 \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

(μονάδες 2)

γ) Επειδή το σύστημα είναι μονωμένο ως προς την περιστροφή των σωμάτων γύρω από τον άξονα περιστροφής της ράβδου, έτσι:

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \vec{L}_{\sigma\phi} + \vec{L}_{\rho\alpha\beta} = \vec{L}_{\tau\epsilon\lambda}$$

Θεωρούμε ότι η θετική φορά είναι προς τα μέσα της σελίδας. Έτσι:

$$-L_{\sigma\phi} + I_{\rho\alpha\beta} \cdot \omega = I_{\sigma\upsilon\sigma\tau} \cdot \omega_{\mu} \Rightarrow -m \cdot v \cdot R + \left(\frac{1}{3} M \ell^2 \right) \cdot \omega = \left(\frac{1}{3} M \ell^2 + m \ell^2 \right) \cdot \omega_{\mu}$$

$$\Rightarrow -2,94 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1,2^2 \cdot 5 = \left(\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1,2^2 + 0,5 \cdot 1,2^2 \right) \omega_{\mu} \Rightarrow 5,46 = 2,4 \omega_{\mu} \Rightarrow \omega_{\mu} = 2,275 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(μονάδες 2)

Για τη μεταβολή της στροφορμής της σφαίρας έχουμε:

$$\Delta \vec{L}_{\sigma\phi} = \vec{L}_{\sigma\phi_{\mu\epsilon\tau}} - \vec{L}_{\sigma\phi_{\pi\rho\iota\nu}} \Rightarrow \Delta L_{\sigma\phi} = m \cdot v_{\mu} \cdot R - (-m \cdot v_{\pi} \cdot R) = m \cdot R \cdot (\omega_{\mu} \ell + v_{\pi})$$

$$\Rightarrow \Delta L_{\sigma\phi} = 0,5 \cdot 1,2 \cdot (2,275 \cdot 1,2 + 4,9) = 4,58 \Rightarrow \Delta L_{\sigma\phi} = 4,58 \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

(μονάδες 2)

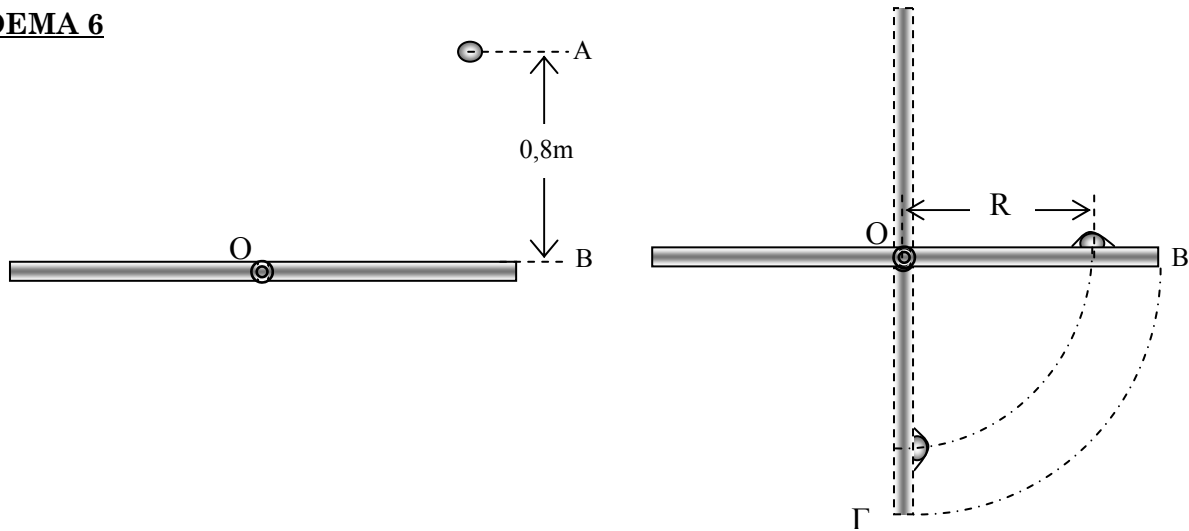
δ) Το ποσοστό επί τοις εκατό της απώλειας κινητικής ενέργειας εξαιτίας της κρούσης των δύο σωμάτων.

$$a\% = \left| \frac{\Delta E_K}{E_{\text{ολ.συστ}}} \right| = \left| \frac{E_{\alpha\rho.\sigma\upsilon\sigma\tau} - E_{\tau\epsilon\lambda.\sigma\upsilon\sigma\tau}}{E_{\text{ολ.συστ}}} \right| \cdot 100 = \left| \frac{\left(\frac{1}{2} I_{\sigma\upsilon\sigma\tau} \cdot \omega_{\mu\epsilon\tau}^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} I_{\rho\alpha\beta} \cdot \omega_{\pi\rho\iota\nu}^2 \right)}{\frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} I_{\rho\alpha\beta} \cdot \omega_{\pi\rho\iota\nu}^2} \right| \cdot 100 \quad (\text{μονάδες 2})$$

$$\Rightarrow a\% = \left| \frac{(2,4 \cdot 2,275^2) - (0,5 \cdot 4,9^2 + 1,68 \cdot 5^2)}{0,5 \cdot 4,9^2 + 1,68 \cdot 5^2} \right| \cdot 100 = \left| \frac{12,42 - 54}{54} \right| \cdot 100 = 77\%$$

(μονάδες 2)

ΘΕΜΑ 6



α) Για το κομμάτι πλαστελίνης εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας.

$$E_{M_A} = E_{M_B} \Rightarrow E_{Kiv_A} + E_{\Delta v_A} = E_{Kiv_B} + E_{\Delta v_A}$$

$$\Rightarrow \cancel{m} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,8} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow v_B = 4 \frac{m}{s} \quad (\text{μονάδα 1})$$

Η ταχύτητα v_B είναι η ταχύτητα που έχει η πλαστελίνη όταν φτάνει στη ράβδο.

Η πλαστελίνη προκαλεί περιστροφή στη ράβδο.

Επειδή ΣΜ=0 ισχύει η Αρχή Διατήρηση της Στροφορμής.

$$\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{αρχ} \Rightarrow m \cdot v_B \cdot R = I_{συστ} \cdot \omega_0 \Rightarrow m \cdot v_B \cdot R = \left(\frac{M \cdot \ell^2}{12} + m \cdot R^2 \right) \cdot \omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{m \cdot v_B \cdot R}{\frac{M \cdot \ell^2}{12} + m \cdot R^2}$$

$$\omega_0 = \frac{0,2 \cdot 4 \cdot 0,5}{\frac{0,8 \cdot 1,2^2}{12} + 0,2 \cdot 0,5^2} = \frac{0,4}{0,096 + 0,05} = \frac{0,4}{0,146} = 2,74 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 2,74 \text{ rad/s}} \quad (\text{μονάδες 3})$$

$$\beta) \Delta E_K = E_{K_{\text{τελ}}} - E_{K_{\text{αρχ}}} = \frac{1}{2} \cdot I_{\sigma\sigma\tau} \cdot \omega_0^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{M \cdot \ell^2}{12} + m \cdot R^2 \right) \cdot \omega_0^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 \quad (\text{μονάδες 2})$$

$$\Rightarrow \Delta E_K = \frac{1}{2} \left(\frac{0,8 \cdot 1,2^2}{12} + 0,2 \cdot 0,5^2 \right) \cdot 2,74^2 - \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 4^2 = 0,548 - 1,6 = -1,052 \Rightarrow \boxed{\Delta E_K = -1,052 \text{ J}}$$

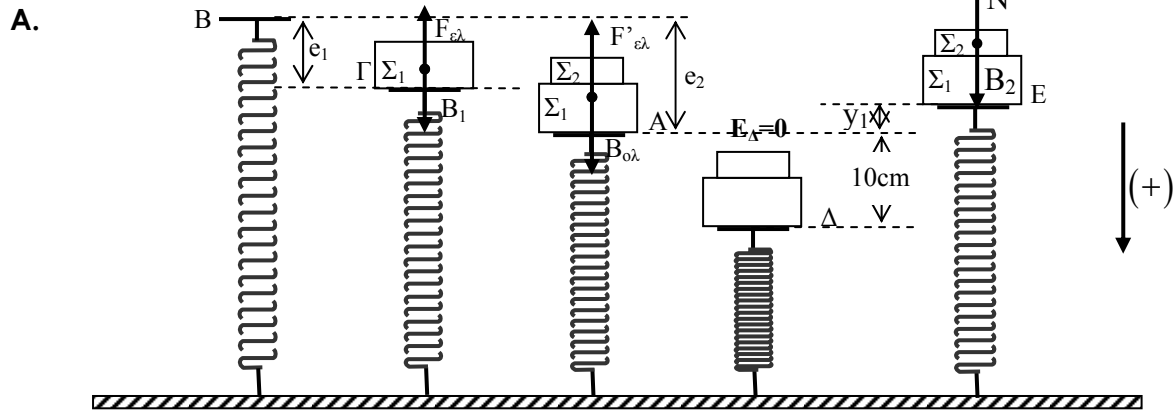
Άρα η απώλεια κατά την κρούση είναι 1,052 J.

(μονάδες 2)

$$\gamma) E_{M_B} = E_{M_\Gamma} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot I_{\sigma\sigma\tau} \cdot \omega_0^2 = \frac{1}{2} \cdot I_{\sigma\sigma\tau} \cdot \omega_\Gamma^2 - m \cdot g \cdot R \Rightarrow \omega_\Gamma = \sqrt{\frac{I_{\sigma\sigma\tau} \cdot \omega_0^2 + 2 \cdot m \cdot g \cdot R}{I_{\sigma\sigma\tau}}} \quad (\text{μονάδες 2})$$

$$\Rightarrow \omega_\Gamma = \sqrt{\frac{0,146 \cdot 2,74^2 + 2 \cdot 0,2 \cdot 10 \cdot 0,5}{0,146}} = \sqrt{\frac{3,1}{0,146}} = \sqrt{21,23} \Rightarrow \boxed{\omega_\Gamma = 4,61 \text{ rad/s}} \quad (\text{μονάδες 2})$$

ΘΕΜΑ 7



B η θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

Γ η Θέση Ισορροπίας του σώματος Σ_1 .

A η Θέση Ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 .

Δ η Ακραία Θέση της Γ.Α.Τ. που εκτελεί το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 .

E Τυχαία Θέση

α) Στην Τυχαία Θέση E έχουμε (βλέπε αρχικό σχήμα) για το Σ_2 :

$$\Sigma F = m \cdot a \Rightarrow -N + B_2 = m_2 \cdot a \Rightarrow N = B_2 - m_2 \cdot a$$

Χάνει η επαφή όταν $N = 0$.

$$N = 0 \Rightarrow B_2 - m_2 \cdot a = 0 \Rightarrow B_2 = m_2 \cdot a \Rightarrow \cancel{m_2} \cdot g = -\cancel{m_2} \cdot \omega^2 \cdot y \Rightarrow y = -\frac{g}{\omega^2} \quad (\text{μονάδες } 2)$$

$$\text{Χάνει επαφή όταν } y = -\frac{g}{\omega^2}.$$

Ταλαντώνονται και τα δύο σώματα μαζί και έτσι:

$$K = (m_1 + m_2) \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{K}{m_1 + m_2}$$

$$y = -\frac{g}{\omega^2} = -\frac{g \cdot (m_1 + m_2)}{K} = -\frac{10 \cdot (0,3 + 0,15)}{50} = -0,09 \Rightarrow \boxed{y = -0,09 \text{ m}}$$

Το σώμα χάνει επαφή 0,09m (9cm) πάνω από τη Θέση Ισορροπίας.

(μονάδες 2)

β) Α' τρόπος

Η εξίσωση ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων είναι:

$$y = y_0 \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \quad (1)$$

$$t = 0 \rightarrow y = +0,1 \text{ m} \Rightarrow +0,1 = 0,1 \eta \mu(0 + \varphi_0) \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = +1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{50}{0,3 + 0,15}} = 10,54 \Rightarrow \omega = 10,54 \text{ rad/s}$$

$$\text{Από την ένα } y = 0,1 \eta \mu(10,54t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \boxed{y = 0,1 \eta \mu(10,54t + \frac{\pi}{2})} \quad y \text{ σε m και } t \text{ σε s. } (\text{μονάδες } 4)$$

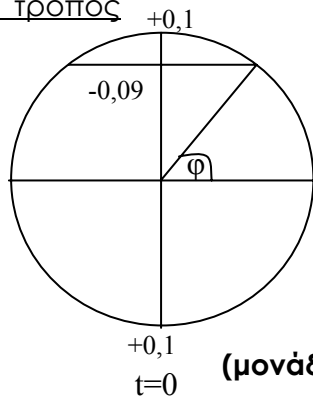
Αφού χάνει επαφή στη θέση $y = -0,09 \text{ m}$ έχουμε ότι:

$$0,09 = 0,1 \eta \mu(10,54t_1 + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \eta \mu(10,54t_1 + \frac{\pi}{2}) = 0,9 \xrightarrow{4^\circ \text{ τεταρτ.}} 10,54t_1 + 1,57 = 4,26$$

$$\Rightarrow \boxed{t_1 = 0,255 \text{ s}}$$

(μονάδες 4)

Β' τρόπος



$$\eta\mu\varphi = \frac{0,09}{0,1} = 0,9 \Rightarrow \varphi = 1,12\text{rad}$$

(μονάδες 2)

Η συνολική γωνιακή μετατόπιση που διανύει στην αντίστοιχη κυκλική κίνηση είναι:

$$\varphi_{ολ} = \frac{\pi}{2} + 1,12 \Rightarrow \varphi_{ολ} = 2,69\text{rad}$$

$$\varphi = \omega t \Rightarrow t_1 = \frac{\varphi}{\omega}$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{2,69}{10,54} = 0,255 \Rightarrow \boxed{t_1 = 0,255\text{s}}$$

(μονάδες 4)

Γ' τρόπος

Χρόνος μέχρι να χάσει επαφή το Σ₂:

$$t_1 = \frac{T}{4} + t', \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10,54} \Rightarrow T = 0,6\text{s} \Rightarrow \frac{T}{4} = 0,15\text{s}$$

(μονάδες 4)

$$y = y_0 \eta\mu\omega t \Rightarrow 0,09 = 0,1 \eta\mu 10,54 t' \Rightarrow \eta\mu 10,54 t' = 0,9 \Rightarrow 10,54 t' = 1,12 \Rightarrow t' = 0,106\text{s}$$

$$t_1 = 0,15 + 0,106 \Rightarrow \boxed{t_1 = 0,256\text{s}}$$

(μονάδες 4)

γ) Όταν το σώμα Σ₂ χάνει επαφή, η Θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αλλάζει η Θέση Ισορροπίας.

Για τη Θέση Γ, η οποία είναι Θέση Ισορροπίας για το σώμα Σ₁, έχουμε ότι:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow B_1 = F_{ελ} \Rightarrow m_1 \cdot g = K \cdot e_1 \Rightarrow e_1 = \frac{m_1 \cdot g}{K} = \frac{0,3 \cdot 10}{50} = 0,06 \Rightarrow \underline{e_1 = 0,06\text{m}}$$

Για τη Θέση Α, η οποία είναι Θέση Ισορροπίας για το σύστημα των σωμάτων Σ₁ και Σ₂, έχουμε ότι:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow B_1 + B_2 = F'_{ελ} \Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot g = K \cdot e_2 \Rightarrow e_2 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot g}{K} = \frac{0,45 \cdot 10}{50} = 0,09 \Rightarrow \underline{e_2 = 0,09\text{m}}$$

(μονάδα 1)

Όταν χάνει επαφή το Σ₂ το συσσωμάτωμα έχει ταχύτητα:

$$v_1 = \omega \sqrt{y_0^2 - y_1^2} = 10,54 \sqrt{0,1^2 - 0,09^2} = 0,46 \Rightarrow \underline{v_1 = 0,46\text{m/s}}$$

(μονάδα 1)

Αυτή η ταχύτητα είναι και η ταχύτητα του σώματος Σ₂ αμέσως μετά, αλλά η απομάκρυνση από τη Θέση Ισορροπίας είναι διαφορετική από προηγούμενως, διότι η Θέση Ισορροπίας άλλαξε.

$$y_2 = y_1 + (e_1 - e_2) = 0,09 - (0,09 - 0,06) = 0,06 \Rightarrow \underline{y_2 = 0,06\text{m}}$$

(μονάδα 1)

Επίσης αλλάζει και η κυκλική συχνότητα ω, αφού αλλάζει η μάζα του ταλαντωτή.

$$K = m_1 \cdot \omega_1^2 \Rightarrow \omega_2 \sqrt{\frac{K}{m_1}} = \sqrt{\frac{50}{0,3}} = 12,91 \Rightarrow \underline{\omega_2 = 12,91\text{rad/s}}$$

(μονάδα 1)

$$v_2 = v_1 = \omega_2 \sqrt{y_{0_2}^2 - y_2^2} \Rightarrow y_{0_2} = \sqrt{\frac{v_1^2}{\omega_2^2} + y_2^2} = \sqrt{\frac{0,46^2}{12,91^2} + 0,06^2} = 0,07 \Rightarrow \underline{y_{0_2} = 0,07\text{m}}$$

(μονάδα 1)

Η εξίσωση ταλάντωσης του σώματος Σ₁ μετά που θα χάσει επαφή ο Σ₂ είναι:

$$y = y_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (1)$$

$$t = 0 \rightarrow y = +0,06\text{m} \Rightarrow +0,06 = 0,07 \cdot \eta\mu(0 + \varphi_0) \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = +0,86 \xrightarrow{3^\circ \text{ Τεταρτ.}} \Rightarrow \underline{\varphi_0 = 4,17\text{rad}}$$

Α' τρόπος

Από την (1) $y = 0,07\eta\mu(12,91t + 4,17) \Rightarrow \boxed{y = 0,07\eta\mu(12,91t + 4,17)}$ y σε m και t σε s.

(μονάδα 1)

Όταν φτάνει στην ανώτατη θέση $y = -0,07\text{ m}$ έχουμε ότι:

$$-0,07 = 0,07\eta\mu(12,91t_2 + 4,17) \Rightarrow \eta\mu(12,91t_2 + 4,17) = -1 \Rightarrow 12,91t_2 + 4,17 = 3\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{t_2 = 0,042\text{s}}$$

(μονάδα 1)

Άρα η χρονική στιγμή κατά την οποία το Σ_1 φτάνει στο μέγιστο του ύψος είναι:

$$t_x = t_1 + t_2 = 0,255 + 0,042 = 0,322 \Rightarrow \boxed{t_x = 0,297\text{s}}$$

(μονάδα 1)

Β' τρόπος Οι τελευταίες τρεις μονάδες μπορεί να δοθούν και έτσι:

$$\eta\mu\varphi_2 = \frac{0,06}{0,07} = \frac{6}{7} \Rightarrow \varphi_2 = 1,03\text{rad}$$

(μονάδα 1)

Η γωνιακή μετατόπιση που διανύει στην αντίστοιχη κυκλική κίνηση είναι:

$$\vartheta_2 = \frac{\pi}{2} - 1,03 \Rightarrow \vartheta_2 = 0,54\text{rad}$$

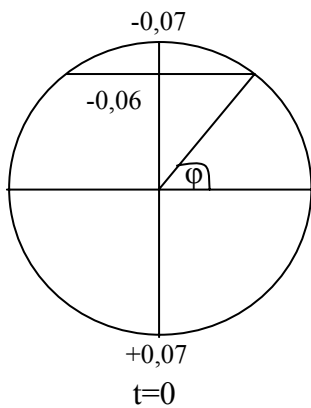
$$\vartheta_2 = \omega_2 \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{\vartheta_2}{\omega_2} = 0,042 \Rightarrow \underline{t_2 = 0,042\text{s}}$$

(μονάδα 1)

Άρα η χρονική στιγμή κατά την οποία το Σ_1 φτάνει στο μέγιστο του ύψος είναι:

$$t_x = t_1 + t_2 = 0,255 + 0,042 = 0,322 \Rightarrow \boxed{t_x = 0,297\text{s}}$$

(μονάδα 1)



Γ' τρόπος

Η νέα Θέση Ισορροπίας είναι κατά y_2 πιο πάνω από τη Θέση Α.

$$m_2 \cdot g = K \cdot y_2 \Rightarrow y_2 = \frac{m_2 \cdot g}{K} = \frac{1,5}{50} \Rightarrow \underline{y_2 = 0,03\text{m}}$$

Άρα τη στιγμή της απώλειας επαφής, το Σ_1 βρίσκεται κατά $0,09 - 0,03 = 0,06\text{m} = 6\text{cm}$ πάνω από τη Θέση Ισορροπίας. Ο χρόνος t_2 που μεσολαβεί από τη στιγμή της απώλειας επαφής μέχρι το Σ_1 να φτάσει στο μέγιστο ύψος

$$\text{είναι } t_2 = \frac{T'}{4} - t', \quad T' = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,3}{50}} \Rightarrow \underline{T' = 0,48\text{s}}$$

$$0,06 = 0,07\eta\mu 12,9t' \Rightarrow \eta\mu 12,9t' = 0,857 \Rightarrow 12,9t' = 1,029 \Rightarrow \underline{t' = 0,08\text{s}}$$

(μονάδα 1)

$$t_2 = \frac{T'}{4} - t' = \frac{0,487}{4} - 0,08 = 0,042 \Rightarrow \underline{t_2 = 0,042\text{s}}$$

(μονάδα 1)

$$t_{\text{ολ}} = t_1 + t_2 = 0,256 + 0,042 = 0,298 \Rightarrow \boxed{t_{\text{ολ}} = 0,298\text{s}}$$

(μονάδα 1)

$$\text{B. } \Delta E_A = -(m_1 + m_2) \cdot g \cdot y + \left[\frac{1}{2} \cdot K \cdot (y + e_2)^2 - \frac{1}{2} \cdot K \cdot e_2^2 \right]$$

$$\Delta E_A = -(m_1 + m_2) \cdot g \cdot y + \frac{1}{2} \cdot K \cdot y^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot \cancel{2} \cdot y \cdot e_2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot \cancel{e_2^2} - \frac{1}{2} \cdot K \cdot \cancel{e_2^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta E_A &= -\cancel{(m_1 + m_2)} \cdot \cancel{g} \cdot y + \frac{1}{2} \cdot K \cdot y^2 + \cancel{K \cdot y \cdot e_2} \\ \cancel{(m_1 + m_2)} \cdot \cancel{g} &= K \cdot e_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\Delta E_A = \frac{1}{2} \cdot K \cdot y^2}$$

(μονάδες 4)

ΤΕΛΟΣ