

ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ



22^Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (Επαναληπτικός Διαγωνισμός)

Κυριακή, 20 Απριλίου, 2008,

Ωρα: 10.00 - 13.00

Προτεινόμενες Λύσεις

ΘΕΜΑ 1 (15 μονάδες)

(α) Σε κάθε χρονική στιγμή η επαγωγική ηλεκτρεγερτική δύναμη δίνεται από τη σχέση: $E_{επ} = Bv\ell$, όπου ℓ είναι το μήκος Α'Γ' του αγωγού που είναι σε επαφή με τον κυκλικό αγωγό. Από το σχήμα προκύπτει ότι,

$$(A'O)^2 = (A'M)^2 + (MO)^2 \Rightarrow d^2 = \frac{\ell^2}{4} + (d - vt)^2$$

Άρα, $\ell = 2\sqrt{d^2 - (d - vt)^2}$. Επομένως έχουμε,

$$E_{επ} = 2Bv\sqrt{d^2 - (d - vt)^2} = 2Bv\sqrt{vt(2d - vt)}.$$

(μ.7)

(β) Όταν ο αγωγός βρίσκεται στο κέντρο του κυκλικού πλαισίου, έχουμε το πιο κάτω ισοδύναμο κύκλωμα.

Τα τμήματα Α'ΚΓ' και Α'ΛΓ' έχουν ίσες αντιστάσεις, $R/2$. Το τμήμα του αγωγού, Α'Γ' έχει αντίσταση $r\ell$. Οι αντιστάσεις $R/2$ και $R/2$ είναι παράλληλες, με ισοδύναμη αντίσταση $R/4$. Η ισοδύναμη αντίσταση, $R/4$, είναι σε σειρά με την αντίσταση του αγωγού, $r_{αγ}$.

Είναι $r_{αγ} = r\ell = r2d$. Άρα,

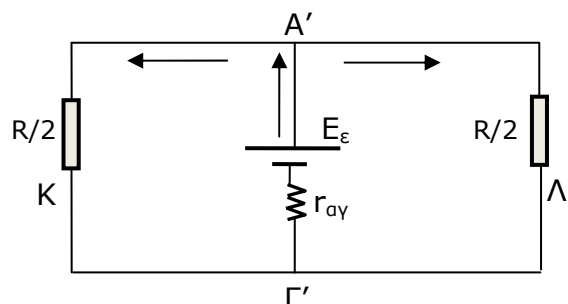
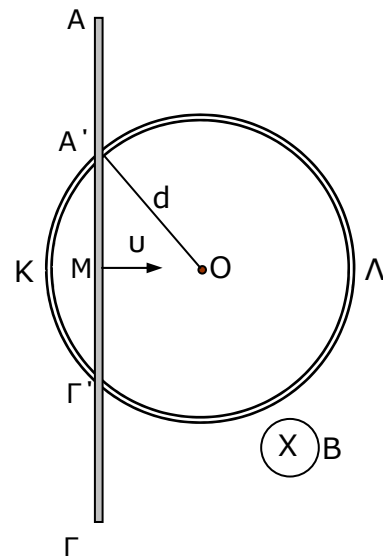
$$R_{ολ} = \frac{R}{4} + 2rd \Rightarrow R_{ολ} = \frac{R + 8rd}{4}$$

Η επαγωγική τάση όταν ο αγωγός περνά από το κέντρο είναι $E_{επ} = 2Bvd$.

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό τη στιγμή που περνά από το κέντρο Ο του κυκλικού πλαισίου είναι,

$$I = \frac{E_{επ}}{R_{ολ}} = \frac{8Bvd}{R + 8rd}.$$

(μ.5)

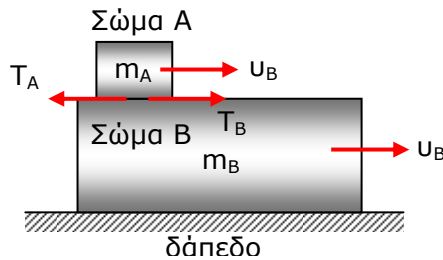


(γ) Η φορά των ρευμάτων στα τόξα Α'ΚΓ' και Α'ΛΓ' είναι όπως δείχνει το πιο πάνω σχήμα. Η φορά αυτή προκύπτει από την πολικότητα της επαγωγικής τάσης, σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz. **(μ.3)**

ΘΕΜΑ 2 (15 μονάδες)

(α) Το σώμα Α κινείται προς τα δεξιά και επιβραδύνεται, αφού η τριβή T_A είναι αντίθετη της ταχύτητάς του.

Το σώμα Β κινείται προς τα δεξιά και επιταχύνεται με την επίδραση της δύναμης της τριβής T_B . Τα σώματα σε κάποια στιγμή αποκτούν κοινή ταχύτητα, δεν υπάρχει σχετική κίνηση του ενός ως προς το άλλο. **(μ.4)**



(β) Ισχύει η διατήρηση της ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων, εφόσον δεν υπάρχει τριβή μεταξύ του δαπέδου και του σώματος Β. Οι δυνάμεις μεταξύ των δύο σωμάτων είναι εσωτερικές για το σύστημα. Άρα, $m_A v_{0A} = m_A v_A + m_B v_B$. Δίνεται ότι, $m_B = 2m_A = 2m$ και για τη στιγμή που τα σώματα αποκτούν κοινή ταχύτητα, $v_A = v_B = v_k$. Άρα,

$$m v_{0A} = m v_k + 2m v_k \Rightarrow v_k = \frac{v_{0A}}{3}.$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι,

$\Delta E = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 - \frac{1}{2} m_A v_{0A}^2$. Για την στιγμή που τα σώματα αποκτούν κοινή ταχύτητα, έχουμε,

$$\Delta E = \frac{1}{2} m v_k^2 + \frac{1}{2} 2m v_k^2 - \frac{1}{2} m v_{0A}^2 = \frac{1}{2} m \frac{v_{0A}^2}{9} + \frac{1}{2} 2m \frac{v_{0A}^2}{9} - \frac{1}{2} m v_{0A}^2. \text{ Τελικά,}$$

$$\Delta E = -\frac{m v_{0A}^2}{3}.$$

Η απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων οφείλεται στο έργο της τριβής που ασκείται στο σώμα Α για το σχετικό διάστημα που κινείται το σώμα Α σε σχέση με το σώμα Β.

(μ.6)

(γ) Α' τρόπος:

Το μέτρο της τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων είναι, $T = \mu mg$.

Από το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας:

$$\text{Για το σώμα Α: } \Delta E_1 = -T \cdot x_1 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_k^2 - \frac{1}{2} m v_{0A}^2 = -\mu mg \cdot x_1 \Rightarrow -\frac{4m v_{0A}^2}{9} = -\mu mg x_1.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \frac{v_{0A}^2}{9} - \frac{1}{2} m v_{0A}^2 = -\mu mg \cdot x_1 \Rightarrow -\frac{4m v_{0A}^2}{9} = -\mu mg x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{4v_{0A}^2}{9\mu g}.$$

$$\text{Για το σώμα Β: } \Delta E_2 = T \cdot x_2 \Rightarrow \frac{1}{2} 2m v_k^2 = \mu mg \cdot x_2 \Rightarrow \frac{m v_{0A}^2}{9} = \mu mg x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{v_{0A}^2}{9\mu g}.$$

(μ.3)**Β' τρόπος:**

Η επιτάχυνση για το σώμα Α και Β έχει μέτρο, $a_1 = \frac{T}{m} = \mu g$ και

$a_2 = \frac{T}{2m} = \frac{\mu g}{2}$, αντίστοιχα. Η σχέση ταχύτητας και διαστήματος για το σώμα Α είναι,

$v_A^2 = v_{0A}^2 - 2a_1 x_1$ και για το σώμα Β, $v_B^2 = 2a_2 x_2$. Όταν τα σώματα αποκτούν

$$\text{κοινή ταχύτητα: } v_k^2 = v_{0A}^2 - 2a_1 x_1 \Rightarrow \frac{v_{0A}^2}{9} = v_{0A}^2 - 2\mu g x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{4v_{0A}^2}{9\mu g}.$$

$$v_k^2 = 2a_2 x_2 \Rightarrow \frac{v_{0A}^2}{9} = 2 \frac{\mu g}{2} x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{v_{0A}^2}{9\mu g}.$$

(δ) Α' τρόπος

Το σχετικό διάστημα που κινήθηκε το ένα σώμα ως προς το άλλο είναι:

$$\Delta x = x_1 - x_2 \Rightarrow \Delta x = \frac{v_{0A}^2}{3\mu g}. \quad \textbf{(μ.2)}$$

Β' τρόπος:

Από το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας:

$$\Delta E = -T \cdot \Delta x \Rightarrow -\frac{m v_{0A}^2}{3} = -\mu mg \cdot \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{v_{0A}^2}{3\mu g}.$$

ΘΕΜΑ 3 (20 μονάδες)**(α) Α' τρόπος**

Βρίσκουμε την κυκλική συχνότητα του κάθε σώματος, όταν εκτελεί ταλάντωση.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{K}{2m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{2K}{m}}. \text{ Άρα,}$$

$$\omega_2 = 2\omega_1.$$

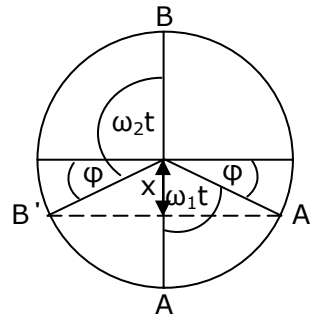
Με βάση τον τριγωνομετρικό κύκλο:

$$\omega_1 t = \frac{\pi}{2} - \phi \text{ και } \omega_2 t = \frac{\pi}{2} + \phi. \text{ Με πρόσθεση κατά}$$

μέλη προκύπτει: Άρα, $(\omega_1 + \omega_2)t = \pi$. Από τη

σχέση $\omega_2 = 2\omega_1$, παίρνουμε,

$$3\omega_1 t = \pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{3\omega_1} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{2m}{K}}. \quad (\mu.5)$$

**Β' τρόπος**

Οι φάσεις των δύο ταλαντωτών Α και Β σε κάθε στιγμή είναι, $\phi_1 = \omega_1 t - \frac{\pi}{2}$

και $\phi_2 = \omega_2 t + \frac{\pi}{2}$, αντίστοιχα. Όταν συγκρουστούν για πρώτη φορά,

$$\phi_1 + \phi_2 = \pi. \text{ Άρα, } \omega_1 t - \frac{\pi}{2} + \omega_2 t + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{\pi}{3\omega_1} = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{2m}{K}}.$$

(β) Α' τρόπος

Από τον τριγωνομετρικό κύκλο:

$$|x| = x_0 \eta \mu \phi \Rightarrow |x| = x_0 \eta \mu \left(\frac{\pi}{2} - \omega_1 t \right) \Rightarrow |x| = x_0 \eta \mu \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{x_0}{2}. \text{ Άρα,}$$

$$x = -\frac{x_0}{2}. \quad (\mu.4)$$

Β' τρόπος

Από την εξίσωση κίνησης του Α (ή του Β), $x = x_0 \eta \mu \left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2} \right)$,

αντικαθιστούμε,

$$x = x_0 \eta \mu \left(\sqrt{\frac{K}{2m}} \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{2m}{K}} - \frac{\pi}{2} \right) = x_0 \eta \mu \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) = x_0 \eta \mu \left(-\frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow x = -\frac{x_0}{2}$$

(γ) Είναι $v = \omega \sqrt{x_0^2 - x^2}$. Άρα τη στιγμή της σύγκρουσης, $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}$. Οι ταχύτητες έχουν αντίθετη φορά. Άρα, $\frac{\vec{v}_1}{\vec{v}_2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{v}_2 = -2\vec{v}_1$. **(μ.3)**

(δ) Κατά την κρούση αναπτύσσονται δυνάμεις που είναι εσωτερικές για τα δύο σώματα.

Ισχύει η διατήρηση της ορμής: $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$. Είναι $\vec{v}_2 = -2\vec{v}_1$ και $m_1 = 2m_2 = 2m$. Άρα, $2m\vec{v}_1 - 2m\vec{v}_1 = 2m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$,
 $\Rightarrow 0 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_2 = -2\vec{v}_1$.

Η κρούση είναι ελαστική και η διάρκειά της είναι αμελητέα. Από τη διατήρηση της ορμής και της κινητικής ενέργειας: $\vec{v}_1 + \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_2$. Είναι $\vec{v}_2 = -2\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2 = -2\vec{v}_1$. Άρα, $\vec{v}_1 + \vec{v}_1 = -2\vec{v}_1 - 2\vec{v}_1 \Rightarrow 3\vec{v}_1 = -3\vec{v}_1 \Rightarrow \vec{v}_1 = -\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$.

Τη στιγμή της κρούσης: $v_1 = \omega_1 \sqrt{x_0^2 - x_1^2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{K}{2m}} \sqrt{x_0^2 - \frac{x_0^2}{4}} \Rightarrow v_1 = x_0 \sqrt{\frac{3K}{8m}}$.

Επομένως, $\vec{v}_1 = -x_0 \sqrt{\frac{3K}{8m}}$ (προς τα αριστερά) και

$\vec{v}_2 = +x_0 \sqrt{\frac{3K}{2m}}$ (προς τα δεξιά). **(μ.6)**

(ε) Τα σώματα αμέσως μετά την κρούση διατηρούν τα μέτρα των ταχυτήτων που είχαν τη στιγμή της κρούσης αλλά αντιστρέφεται η φορά. Η ενέργεια στο σύστημα πριν και μετά την κρούση επίσης διατηρείται, εφόσον οι τριβές είναι αμελητέες.

Επομένως η ενέργεια για το κάθε σώμα διατηρείται. Άρα ταυτόχρονα φτάνουν στις θέσεις $-x_0$ το σώμα Α και $+x_0$ το σώμα Β. Επομένως η μέγιστη απόσταση τους παραμένει $2x_0$. **(μ.2)**

ΘΕΜΑ 4 (20 μονάδες)

(α) Η στροφορμή της δοκού παίρνει μέγιστη τιμή στην κατακόρυφη θέση. Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας στην οριζόντια και στην κατακόρυφη θέση, παίρνουμε:

$$mg \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} I \omega_3^2 \Rightarrow mg \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{3} m \ell^2 \omega_3^2 \Rightarrow \omega_3 = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}. \text{ Όπου } \omega_3 \text{ είναι η γωνιακή}$$

ταχύτητα στην κατακόρυφη θέση, που είναι και η μέγιστη τιμή. Στη θέση που η δοκός σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση, η δυναμική ενέργεια ελαττώνεται ως προς την οριζόντια θέση κατά

$$\Delta E_{\text{δυν}} = -mgh = -mg \frac{\ell}{2} \eta \mu \theta. \text{ Η ελάττωση αυτή είναι ίση κατά απόλυτη τιμή με}$$

την αύξηση της κινητικής ενέργειας της δοκού, στη θέση θ . Άρα,

$$mg \frac{\ell}{2} \eta \mu \theta = \frac{1}{2} I \omega_2^2 \Rightarrow mg \frac{\ell}{2} \eta \mu \theta = \frac{1}{2} \frac{1}{3} m \ell^2 \omega_2^2 \Rightarrow g \eta \mu \theta = \frac{1}{3} \ell \omega_2^2 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{3g \eta \mu \theta}{\ell}}.$$

Δίνεται ότι στη θέση 2 η στροφορμή είναι ίση με το $\frac{1}{\sqrt{2}}$ της μέγιστης

στροφορμής. Εφόσον η στροφορμή είναι ανάλογη της γωνιακής ταχύτητας,

για σταθερή ροπή αδράνειας, έχουμε, $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_3$. Άρα,

$$\sqrt{\frac{3g \eta \mu \theta}{\ell}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3g}{\ell}} \Rightarrow \eta \mu \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ. \quad (\mu.8)$$

(β) Η διάρκεια κρούσης είναι αμελητέα. Λίγο πριν και αμέσως μετά την κρούση η στροφορμή του συστήματος διατηρείται. Άρα,

$$-I \omega_2 + \frac{m}{3} v \ell \eta \mu \theta = (I + \frac{m}{3} \ell^2) \omega. \text{ Όπου } \omega \text{ είναι η γωνιακή ταχύτητα αμέσως}$$

μετά την κρούση. Αντικαθιστούμε,

$$-\frac{1}{3} m \ell^2 \sqrt{\frac{3g \eta \mu \theta}{\ell}} + \frac{m}{3} \sqrt{96g \ell} \cdot \ell \eta \mu 30^\circ = (\frac{1}{3} m \ell^2 + \frac{m}{3} \ell^2) \omega$$

$$\Rightarrow -\sqrt{\frac{g \ell^3}{6}} + 4\sqrt{\frac{g \ell^3}{6}} = \frac{2}{3} \ell^2 \omega \Rightarrow 3\sqrt{\frac{g \ell^3}{6}} = \frac{2}{3} \ell^2 \omega \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{27g}{8\ell}}, \text{ στη διεύθυνση του}$$

άξονα περιστροφής με φορά προς τα έξω.

(μ.6)

(γ) Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας έχουμε ότι η ελάττωση της κινητικής ενέργειας από τη θέση θ στη θέση ϕ είναι ίση κατά απόλυτη τιμή με την αύξηση της δυναμικής ενέργειας βαρύτητας. Άρα,

$$\frac{m}{3} g (\ell \eta \mu \theta + \ell \eta \mu \phi) + mg (\frac{\ell}{2} \eta \mu \theta + \frac{\ell}{2} \eta \mu \phi) = \frac{1}{2} (I + \frac{m}{3} \ell^2) \omega^2,$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} (\frac{1}{2} + \eta \mu \phi) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \eta \mu \phi) = \frac{1}{2} (\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) \frac{27}{8} \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \eta \mu \phi + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \eta \mu \phi = \frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6} \eta \mu \phi = \frac{17}{24} \Rightarrow \eta \mu \phi = \frac{17}{20} \Rightarrow \phi = 58,21^\circ.$$

(μ.6)

ΘΕΜΑ 5 (30 μονάδες)

(α) Η περίοδος της ταλάντωσης της ράβδου είναι $1/2,5 = 0,4$ s. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να εκπέμπει κύμα η πηγή στο σημείο 2 και η πηγή στο σημείο 1 αρχίζει εκπομπή τη στιγμή $t = 0,2$ s, δηλαδή μισή περίοδο μετά. Η απόσταση των δύο πηγών είναι $100 \cdot \sin 37^\circ = 100 \cdot 0,8 = 80$ cm.

Ο χρόνος για να φτάσει κύμα στο σημείο που είναι ο φελλός Φ από την πηγή στο 1, μετά τη στιγμή $t = 0$, είναι $t_1 = 0,2 + \frac{x_1}{v} = 0,2 + \frac{20}{50} = 0,6$ s.

Ο χρόνος για να φτάσει κύμα στο σημείο που είναι ο φελλός Φ από την πηγή στο 2, μετά τη στιγμή $t = 0$, είναι $t_2 = \frac{x_2}{v} = \frac{60}{50} = 1,2$ s.

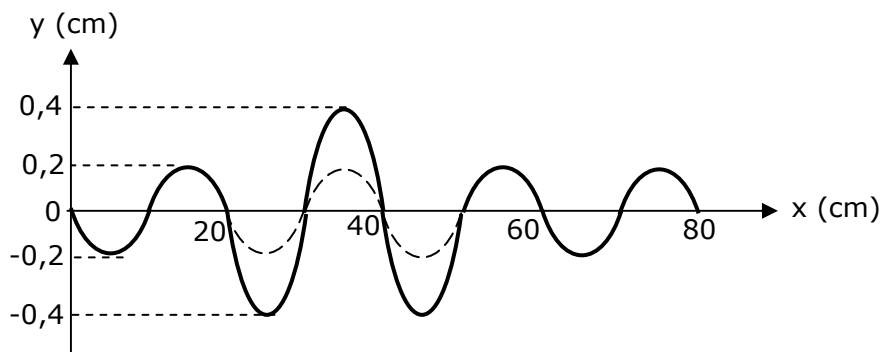
Επομένως κύμα φτάνει στο φελλό τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,6$ s. **(μ.4)**

(β) Η συμβολή των κυμάτων αρχίζει από τη στιγμή που φτάνουν και τα δύο κύματα στο φελλό. Αυτό συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t_2 = 1,2$ s. **(μ.1)**

(γ) Το μήκος κύματος είναι, $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{50}{2,5} = 20$ cm. Το κύμα που

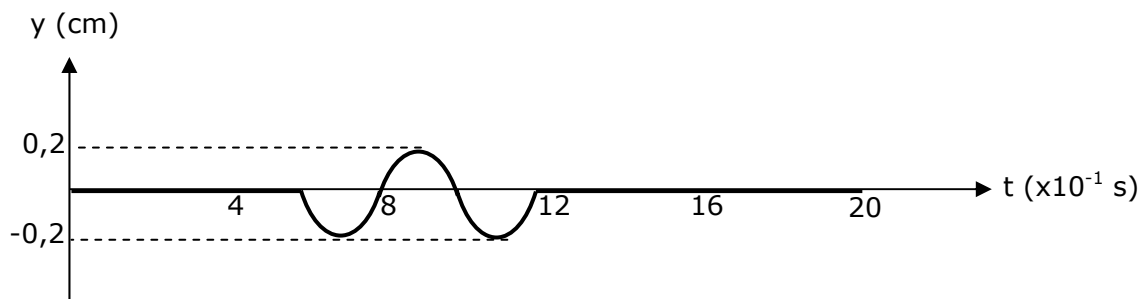
δημιουργείται στο σημείο 2 φτάνει στο φελλό τη στιγμή $t = 1,2$ s και η πηγή στο 2 εκτελεί 3 πλήρεις ταλαντώσεις. Το κύμα από το σημείο 1 αρχίζει να διαδίδεται τη στιγμή $t = 0,2$ s. Άρα τη χρονική στιγμή $1,2$ s η πηγή στο σημείο 1 ταλαντώνεται για 1 s και το κύμα διαδίδεται σε απόσταση 50 cm. Τη χρονική αυτή στιγμή η πηγή στο σημείο 1 εκτελεί 2,5 ταλαντώσεις.

Από το σημείο με $x = 20$ cm (που βρίσκεται ο φελλός) μέχρι το σημείο με $x = 50$ cm έχουμε συμβολή των κυμάτων. Τα στιγμιότυπα φαίνονται στο διάγραμμα, $y = f(x)$, τη χρονική στιγμή $t = 1,2$ s.



(μ.8)

(δ) Το σημείο που βρίσκεται ο φελλός έχουμε πλήρη απόσβεση. Δηλαδή στο φελλό έχουμε δεσμό. Το κύμα στο φελλό φτάνει τη στιγμή $t = 0,6 \text{ s}$, άρα μέχρι τη στιγμή $t = 1,2 \text{ s}$ που έχουμε τη συμβολή, ο φελλός εκτελεί 1,5 ταλαντώσεις. Άρα έχουμε για το φελλό τη γραφική παράσταση $y = f(t)$, όπως στο διάγραμμα.



(μ.6)

(ε) Στο σημείο M έχουμε ενισχυτική συμβολή (κοιλία). Άρα το πλάτος ταλάντωσης του σημείου M είναι $2y_0 = 0,4 \text{ cm}$.

Το σημείο N δεν είναι ούτε κοιλία ούτε δεσμός. Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου N υπολογίζεται από τη σχέση $A_{(N)} = 2y_0 \eta \mu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$, όπου x είναι η απόσταση του σημείου N από τη φελλό (δεσμό). Άρα,
 $A_{(N)} = 2 \cdot 0,2 \eta \mu\left(\frac{2\pi \cdot 8}{20}\right) = 0,24 \text{ cm}$.

(μ.3)

(στ) Τα σημεία N και M ταλαντώνονται με διαφορά φάσης π (180°). **(μ.1)**

(ζ) Το πλήθος των υπερβολών ενίσχυσης και απόσβεσης είναι όσο και το πλήθος των δεσμών και των κοιλιών. Έχουμε 9 δεσμούς και 8 κοιλίες. Άρα έχουμε 17 συνολικά υπερβολές ενίσχυσης και απόσβεσης. **(μ.4)**

(η) Τα κύματα φτάνουν στο σημείο P με διαφορά δρόμου $\Delta x = x_2 - x_1 = 60 - 40 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$. Η διαφορά αυτή είναι ίση με το μήκος κύματος. Επειδή οι πηγές έχουν διαφορά φάσης π , στο P έχουμε συμβολή πλήρους απόσβεσης. Άρα το πλάτος ταλάντωσης στο P είναι μηδέν. **(μ.3)**