

ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

29η Ολυμπιάδα Φυσικής Γ' Λυκείου (Β' φάση)

Κυριακή 29 Μαρτίου 2015

Ωρα: 10.00 - 13.00



ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Το δοκίμιο αποτελείται από εννέα (9) σελίδες και επτά (7) θέματα.
2. Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα του δοκιμίου.
3. Μαζί με το τετράδιο απαντήσεων θα πάρετε και ένα φύλλο με λογαριθμικό χαρτί.
4. Επιτρέπεται η χρήση μόνο μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
6. Επιτρέπεται η χρήση ΜΟΝΟ μπλε μελανιού. (Οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
7. Τα σχήματα των θεμάτων δεν είναι υπό κλίμακα.
8. Δίνεται: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1 (Μονάδες 15)

α'. Να διατυπώσετε το θεώρημα διατήρησης της ορμής για ένα σύστημα σωμάτων.

(Μον. 1)

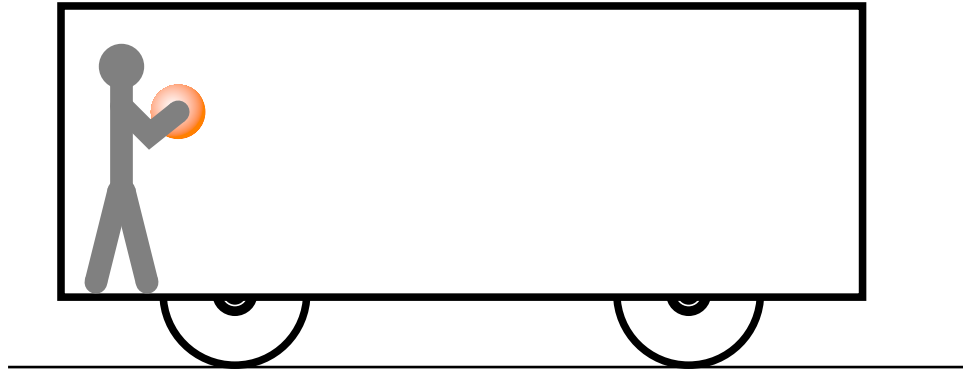
Όταν σε ένα σύστημα σωμάτων δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις ή η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα είναι ίση με μηδέν, τότε η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

β'. Να γράψετε ποια συστήματα σωμάτων ονομάζονται απομονωμένα.

(Μον. 1)

Απομονωμένα ονομάζονται τα συστήματα, στα σώματα των οποίων δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις ή η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτά είναι ίση με μηδέν.

γ'. Ένας άνθρωπος στέκεται στο ένα άκρο ενός κλειστού βαγονιού κρατώντας μια μπάλα μάζας m . Η συνολική μάζα του βαγονιού και του ανθρώπου είναι M . Η απόσταση της μπάλας από τον απέναντι τοίχο του βαγονιού είναι l .



Ο άνθρωπος ρίχνει την μπάλα προς τον απέναντι τοίχο του βαγονιού με ταχύτητα u_0 . Η μπάλα συγκρούεται ελαστικά με τον απέναντι τοίχο και επιστρέφει στον άνθρωπο, ο οποίος την ακινητοποιεί. Θεωρώντας ότι δεν υπάρχουν τριβές στους τροχούς του βαγονιού να υπολογίσετε τη συνολική απόσταση που θα διανύσει ο άνθρωπος ως προς ένα παρατηρητή που βρίσκεται έξω από το βαγόνι.

(Μον. 5)

Στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις γι' αυτό το κέντρο βάρους του συστήματος θα παραμένει ακίνητο. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για την εκτόξευση της μπάλας από τον άνθρωπο.

$$P_{\text{αρχ}} = P_{\text{τελ}} \Rightarrow 0 = mu_0 - MV_0$$

Άρα μετά την εκτόξευση της μπάλας ο άνθρωπος με το βαγόνι θα κινηθούν με ταχύτητα $V_0 = \frac{m}{M}u_0$ προς τα αριστερά **Μον. 1**. Η μπάλα θα συγκρουστεί με τον τοίχο σε χρόνο

$$t_1 = \frac{l}{u_0 + \frac{m}{M}u_0} = \frac{lM}{u_0(M+m)} \quad \text{Μον. 1}$$

και σε αυτό το χρόνο το βαγόνι με τον άνθρωπο θα έχει διανύσει απόσταση

$$s_1 = V_0 \cdot t_1 = \frac{m}{M+m}l \quad \text{Μον. 1}$$

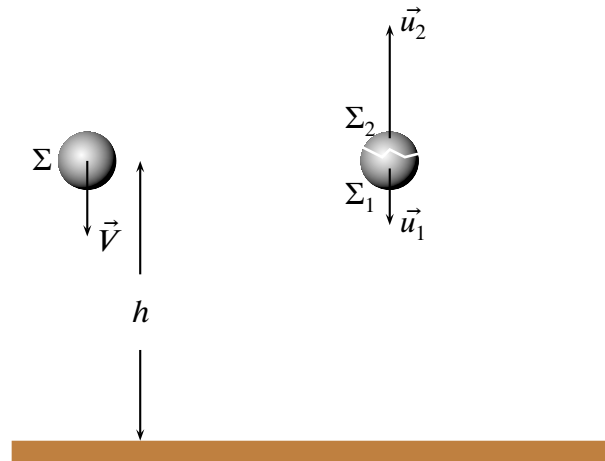
Για την ελαστική κρούση της μπάλας με τον τοίχο του βαγονιού εφαρμόζουμε τις αρχές διατήρησης ορμής και ενέργειας. Προκύπτει ότι οι ταχύτητες των δύο σωμάτων θα αλλάξουν φορά, ενώ το μέτρο τους θα παραμείνει το ίδιο **Μον. 1**. Συνεπώς η μπάλα θα διανύσει την απόσταση από τον τοίχο στον άνθρωπο σε χρόνο $t_2 = t_1$ και το βαγόνι με τον άνθρωπο θα διανύσει απόσταση $s_2 = s_1$. Με την ακινητοποίηση της μπάλας από τον άνθρωπο ακινητοποιείται και το βαγόνι. Επομένως η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο άνθρωπος είναι

$$s_{\text{ολ}} = s_1 + s_2 = \frac{2m}{M+m}l \quad \text{Μον. 1}$$

- δ'. Ένα σώμα Σ μάζας $1,00 \text{ kg}$ πέφτει ελεύθερα όταν σε κάποια στιγμή διασπάται ακαριαία σε δύο κομμάτια Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 0,75 \text{ kg}$ και $m_2 = 0,25 \text{ kg}$, αντίστοιχα, και τα οποία κινούνται σε κατακόρυφη διεύθυνση με ταχύτητες $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$. Η ταχύτητα του μικρού κομματιού είναι διπλάσια από την ταχύτητα του μεγάλου κομματιού, $u_2 = 2u_1$. Οι διαστάσεις του σώματος και των κομματιών είναι αμελητέες.

Πριν την έκρηξη

Μετά την έκρηξη



- i. Να εξηγήσετε γιατί το σώμα Σ δεν μπορεί να θεωρηθεί απομονωμένο σύστημα.

(Μον. 1)

Στο σώμα Σ ασκείται εξωτερική δύναμη, το βάρος του, γι' αυτό και δεν είναι απομονωμένο σύστημα.

- ii. Να εξηγήσετε γιατί, παρόλο που το σύστημα δεν είναι απομονωμένο, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα διατήρησης της ορμής για την έκρηξη του σώματος Σ .

(Μον. 2)

Όπως αναφέρεται στην εκφώνηση του θέματος η έκρηξη πραγματοποιείται ακαριαία, δηλαδή, σε χρόνο $\Delta t \simeq 0$ **Μον. 1**. Αυτό σημαίνει ότι η μεταβολή της ορμής του συστήματος λόγω του βάρους του σώματος θα είναι $\Delta P = B \cdot \Delta t \simeq 0$ **Μον. 1**. Γι' αυτό και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $P_{\alpha\rho\chi} = P_{\tau\epsilon\lambda}$.

Αντίστοιχα, επειδή η έκρηξη γίνεται σε πολύ μικρό χρόνο οι εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται είναι πολύ μεγαλύτερες από την εξωτερική δύναμη του βάρους, γι' αυτό και η μεταβολή της ορμής λόγω της επίδρασης του βάρους κατά τη διάρκεια της έκρηξης μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα και το σύστημα απομονωμένο.

- iii. Αν η ταχύτητα του σώματος Σ πριν την έκρηξη ήταν $V = 20 \text{ m/s}$ και βρισκόταν σε ύψος $h = 16 \text{ m}$ πάνω από το έδαφος να υπολογίσετε τη χρονική διαφορά με την οποία θα πέσουν στο έδαφος τα δύο κομμάτια. Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

(Μον. 5)

Εφαρμόζουμε το θεώρημα διατήρησης της ορμής για την έκρηξη του σώματος

$$m_1 u_1 - m_2 u_2 = m u \quad \text{Μον. 1}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $u_2 = 2u_1$ και $m_1 = 3m_2$ θα βρούμε ότι $u_1 = 80$ m/s και $u_2 = 160$ m/s **Mov. 1**.

Μετά την έκρηξη το Σ_1 θα εκτελέσει κατακόρυφη βολή προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα $u_1 = 80$ m/s. Άρα θα κτυπήσει στο έδαφος σε χρόνο t_1 , ο οποίος ικανοποιεί την εξίσωση $gt_1^2 + 2u_1t_1 - 2h = 0$. Η θετική λύση της εξίσωσης μας δίνει

$$t_1 = \frac{-u_1 + \sqrt{u_1^2 + 2gh}}{g} = 0,20 \text{ s} \quad \text{Mov. 1.}$$

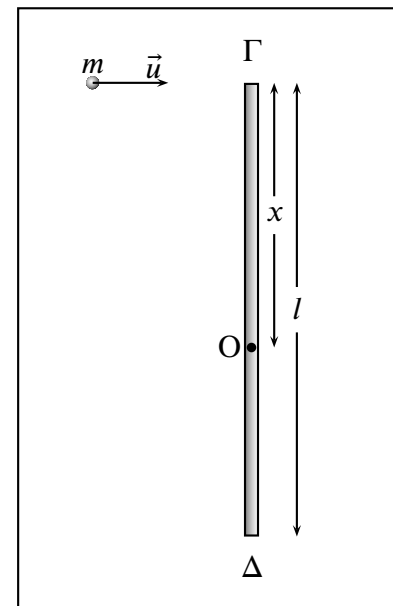
Το Σ_2 μετά την έκρηξη εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $u_2 = 160$ m/s. Άρα θα κτυπήσει στο έδαφος σε χρόνο t_2 , ο οποίος ικανοποιεί την εξίσωση $gt_2^2 - 2u_2t_2 - 2h = 0$. Η θετική λύση της εξίσωσης μας δίνει

$$t_2 = \frac{u_2 + \sqrt{u_2^2 + 2gh}}{g} = 32,72 \text{ s} \quad \text{Mov. 1.}$$

Άρα, τα δύο σώματα θα κτυπήσουν στο έδαφος με διαφορά χρόνου $\Delta t = t_2 - t_1 = 32,52 \text{ s}$ **Mov. 1**.

ΘΕΜΑ 2 (Μονάδες 10)

Η ομογενής ράβδος $\Gamma\Delta$ έχει μήκος l , μάζα M και βρίσκεται ακίνητη σε οριζόντιο επίπεδο. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα, ο οποίος διέρχεται από σημείο O της ράβδου. Το σημείο O απέχει από το άκρο Γ της ράβδου απόσταση x . Ένα σώμα μάζας m και αμελητέων διαστάσεων κινείται χωρίς τριβές στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $\vec{u}$ και συγκρούεται πλαστικά με τη ράβδο στο άκρο Γ .



- α'. Να υπολογίσετε την ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο O σε συνάρτηση με την απόσταση x . Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας ράβδου μάζας M και μήκους l ως προς άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της είναι $I = \frac{1}{3}Ml^2$.

(Mov. 3)

Υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας των τμημάτων της ράβδου $O\Gamma$ και $O\Delta$ ως προς άξονα που διέρχεται από το σημείο O **Mov. 1**. Για το τμήμα $O\Gamma$ θα έχουμε $I_1 = \frac{1}{3}M\frac{x}{l}x^2$ και για το τμήμα $O\Delta$ θα έχουμε $I_2 = \frac{1}{3}M\frac{(l-x)}{l}(l-x)^2$ **Mov. 1**. Συνεπώς, η συνολική ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που



διέρχεται από το σημείο Ο θα είναι

$$I = I_1 + I_2 = \frac{M}{3l} [x^3 + (l-x)^3] = \frac{M}{3} (l^2 - 3lx + 3x^2) \quad \text{Mov. 1}$$

β'. Να αποδείξετε ότι η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος μετά την κρούση θα είναι μέγιστη όταν η απόσταση x είναι ίση με

$$x = \sqrt{\frac{M}{3(M+m)}} \cdot l$$

(Mov. 5)

Εφαρμόζουμε το θεώρημα διατήρησης της στροφορμής για την κρούση του σώματος με την ράβδο

$$mux = (I + mx^2)\omega, \quad \text{Mov. 1}$$

όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση. Από εδώ προκύπτει ότι η γωνιακή ταχύτητα θα είναι ίση με

$$\omega = \frac{3mux}{Ml^2 - 3Mlx + 3Mx^2 + 3mx^2} \quad \text{Mov. 1}$$

Παραγωγίζουμε την ω ως προς x Mov. 1 και μηδενίζουμε την παράγωγο για να προσδιορίσουμε τα ακρότατα της ω Mov. 1. Προκύπτει ότι

$$\frac{d\omega}{dx} = 0 \Rightarrow x_{max} = \sqrt{\frac{M}{3(M+m)}} \cdot l \quad \text{Mov. 1}$$

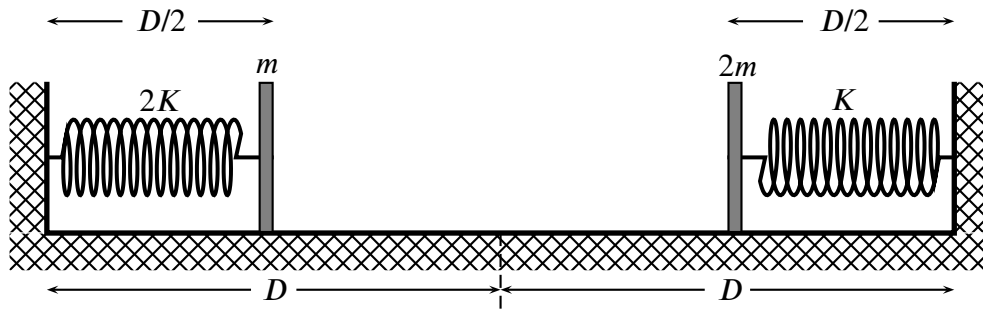
γ'. Να υπολογίσετε το λόγο των μαζών m/M έτσι ώστε η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα να επιτυγχάνεται για $x = l/2$.

(Mov. 2)

Θέτουμε $x_{max} = l/2$ στον τύπο που πήραμε για το x_{max} στο προηγούμενο ερώτημα Mov. 1 και βρίσκουμε ότι θα πρέπει να ισχύει $m/M = 1/3$. Mov. 1

ΘΕΜΑ 3 (Μονάδες 15)

Τα δύο ελατήρια στο πιο κάτω σχήμα έχουν φυσικό μήκος ίσο με D . Το ένα ελατήριο έχει σταθερά K και στο ελεύθερο άκρο του είναι συνδεδεμένο σώμα μάζας $2m$. Το άλλο ελατήριο έχει σταθερά $2K$ και στο ελεύθερο άκρο του είναι συνδεδεμένο σώμα μάζας m . Το πάχος των δύο σωμάτων είναι αμελητέο. Τα δύο σώματα μπορούν να ολισθαίνουν χωρίς τριβή στο οριζόντιο επίπεδο.



Τα δύο ελατήρια συμπιέζονται κατά $D/2$ (η κατάσταση που αποτυπώνεται στο σχήμα) και στη συνέχεια αφήνονται ελεύθερα ταυτόχρονα. Η κρούση των δύο σωμάτων είναι κεντρική και πλαστική. Να δείξετε ότι η μέγιστη ταχύτητα που θα έχει το συσσωμάτωμα που προέκυψε από την ένωση των δύο σωμάτων θα είναι ίση με

$$V_{max} = \frac{D}{4} \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

Τα δύο σώματα με μάζες m και $2m$ όταν αφεθούν ελεύθερα θα αρχίσουν να εκτελούν ταλάντωση με αρχικό πλάτος $D/2$ και κυκλικές συχνότητες $\omega_1 = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ και $\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{2m}}$, αντίστοιχα. Οι εξισώσεις των ταλαντώσεων των δύο σωμάτων θα είναι

$$x_1 = -\frac{D}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{2K}{m}}t\right), \quad x_2 = \frac{D}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{K}{2m}}t\right), \quad \text{Mov. 2} \quad (1)$$

όπου x_1 και x_2 είναι οι μετατοπίσεις των σωμάτων από την κοινή τους θέση ισορροπίας. Τη χρονική στιγμή t_K κατά την οποία τα δύο σώματα συγκρούονται πλαστικά θα ισχύει $x_1 = x_2$. Άρα

$$\sin\left(\sqrt{\frac{2K}{m}}t_\Sigma\right) + \sin\left(\sqrt{\frac{K}{2m}}t_\Sigma\right) = 0. \quad \text{Mov. 1}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο για τη μετατροπή αθροίσματος δύο συνημιτόνων σε γινόμενο ($\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$) θα έχουμε

$$\sin\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{K}{2m}}t_\Sigma\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2m}}t_\Sigma\right) = 0. \quad \text{Mov. 1}$$

Από την πιο πάνω τριγωνομετρική εξίσωση παίρνουμε τις πιο κάτω λύσεις:

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{K}{2m}}t_\Sigma = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2m}}t_\Sigma = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

Ο μικρότερος χρόνος Mov. 1 που προκύπτει από τις πιο πάνω λύσεις είναι

$$t_\Sigma = \sqrt{\frac{2m}{K}} \frac{\pi}{3} \quad \text{Mov. 1}$$



Για να προσδιορίσουμε σε ποιο σημείο θα γίνει η κρούση θέτουμε $t = t_\Sigma$ στις εξισώσεις των δύο ταλαντώσεων. Προκύπτει ότι

$$x_{1_\Sigma} = -\frac{D}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{D}{4} \quad \text{και} \quad x_{2_\Sigma} = \frac{D}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{D}{4} \quad \text{Mov. 1}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την ταχύτητα των δύο σωμάτων σε αυτό το σημείο πριν την κρούση. Γι' αυτό το σκοπό παραγωγίζουμε ως προς το χρόνο τις εξισώσεις των ταλαντώσεων (1) και θέτουμε στις παραγώγους $t = t_\Sigma$. Αυτό μας δίνει για τις δύο ταχύτητες τις πιο κάτω σχέσεις:

$$u_1 = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{2K}{m}} \eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{D}{4} \sqrt{\frac{6K}{m}} \quad \text{Mov. 1}$$

$$u_2 = -\frac{D}{2} \sqrt{\frac{K}{2m}} \eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{D}{8} \sqrt{\frac{6K}{m}} = -\frac{u_1}{2}. \quad \text{Mov. 1}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για την πλαστική κρούση των δύο σωμάτων για να υπολογίσουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση.

$$mu_1 + 2mu_2 = 3mV. \quad \text{Mov. 1}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $u_2 = -u_1/2$ βρίσκουμε ότι $V = 0$ Mov. 1. Δηλαδή, μετά την κρούση το συσσωμάτωμα είναι στιγμιαία ακίνητο σε απόσταση $D/4$ δεξιά από τη θέση ισορροπίας. Αυτό σημαίνει ότι το συσσωμάτωμα θα εκτελέσει ταλάντωση με πλάτος $x_0 = D/4$ Mov. 1 και κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ Mov. 1. Συνεπώς, η μέγιστη ταχύτητα του συσσωματώματος θα είναι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης Mov. 1, η οποία υπολογίζεται από τη σχέση $u_0 = x_0\omega$. Άρα

$$V_{\max} = \frac{D}{4} \sqrt{\frac{K}{m}}. \quad \text{Mov. 1}$$

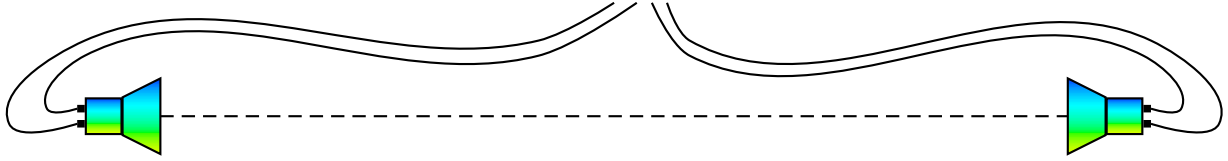
ΘΕΜΑ 4 (Μονάδες 20)

α'. Να εξηγήσετε με ποιους τρόπους μπορούμε να πάρουμε στάσιμο κύμα σε ένα ελαστικό μέσο. (Mov. 3)

Το στάσιμο κύμα σε ένα ελαστικό μέσο μπορεί να δημιουργηθεί με τη συμβολή Mov. 1 δύο τρεχόντων κυμάτων με το ίδιο πλάτος από σύμφωνες πηγές, τα οποία διαδίδονται στην ίδια διεύθυνση προς αντίθετες κατευθύνσεις Mov. 1, ή από τη συμβολή ενός τρέχοντος κύματος με το ανακλώμενο κύμα Mov. 1.

β'. Στο πιο κάτω σχήμα τα δύο πανομοιότυπα μεγάφωνα είναι συνδεδεμένα με την ίδια γεννήτρια συχνοτήτων και βρίσκονται σε απόσταση l το ένα από το άλλο. Θέτουμε τη γεννήτρια συχνοτήτων σε λειτουργία.

Προς γεννήτρια συχνότητων



- i. Να εξαγάγετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται ανάμεσα στις δύο πηγές.

(Μον. 5)

Αφού τα δύο μεγάφωνα είναι συνδεδεμένα με την ίδια γεννήτρια συχνότητων και είναι πανομοιότυπα, τα ηχητικά κύματα θα έχουν την ίδια συχνότητα και πλάτος **Mov. 1**. Οι εξισώσεις των δύο κυμάτων είναι

$$y_1 = y_0 \eta \mu \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right], \quad \text{Mov. 1}$$

$$y_2 = y_0 \eta \mu \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \right]. \quad \text{Mov. 1}$$

Κατά τη συμβολή των δύο κυμάτων οι μετατοπίσεις y_1 και y_2 προστίθενται και μας δίνουν τη συνολική μετατόπιση του σημείου του ελαστικού μέσου **Mov. 1**. Δηλαδή,

$$Y = y_1 + y_2 = y_0 \eta \mu \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] + y_0 \eta \mu \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \right].$$

Μετατρέποντας το άθροισμα των ημιτόνων σε γινόμενο ($\eta \mu A + \eta \mu B = 2\eta \mu \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$) παίρνουμε την εξίσωση του στάσιμου κύματος:

$$Y = 2y_0 \sin \left(2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \eta \mu \left(2\pi \frac{t}{T} \right) \quad \text{Mov. 1}$$

- ii. Αν η γεννήτρια συχνότητων λειτουργεί στα 1062,5 Hz και η απόσταση μεταξύ των δύο μεγαφώνων είναι 1,20 m να υπολογίσετε τον αριθμό των δεσμών του στάσιμου κύματος ανάμεσα στα δύο μεγάφωνα. Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα: $u = 340$ m/s.

(Μον. 3)

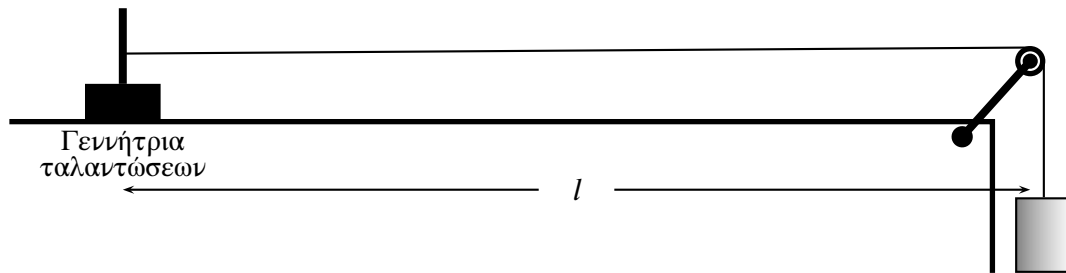
Υπολογίζουμε το μήκος κύματος των κυμάτων που παράγουν τα δύο μεγάφωνα:

$$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{340}{1062,5} = 0,32 \text{ m} \quad \text{Mov. 1}$$

Ανάμεσα στα δύο μεγάφωνα σχηματίζεται στάσιμο κύμα από τη συμβολή των δύο ηχητικών κυμάτων. Στο μέσο της απόστασης μεταξύ των δύο μεγαφώνων σχηματίζεται κοιλιά **Mov. 1**. Σε απόσταση $\lambda/4$ από την κοιλιά σχηματίζονται δεσμοί. Αν θέσουμε $x = 0$ το μέσο της απόστασης μεταξύ των δύο μεγαφώνων τότε δεσμοί θα σχηματισθούν στις θέσεις $x = \pm 0,08 \text{ m}, \pm 0,24 \text{ m}, \pm 0,40 \text{ m}, \pm 0,56 \text{ m}$. Δηλαδή, θα σχηματισθούν οκτώ δεσμοί **Mov. 1**.

γ'. Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται η πειραματική διάταξη για τη δημιουργία στάσιμου κύματος σε

χορδή.



- i. Να εξαγάγετε τη σχέση που δίνει τις συχνότητες, για τις οποίες δημιουργείται στάσιμο κύμα στη χορδή.

(Μον. 4)

Τα δύο άκρα της χορδής είναι στερεωμένα, άρα εκεί θα δημιουργηθούν δεσμοί Mov. 1. Στο μήκος l της χορδής θα πρέπει να περιέχεται ακέραιος αριθμός της απόστασης μεταξύ δύο δεσμών σε ένα στάσιμο κύμα, η οποία είναι $\lambda/2$ Mov. 1, δηλαδή,

$$l = K \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \text{Mov. 1}$$

Αφού $\lambda = v/f$, προκύπτει ότι

$$f = \frac{Kv}{2l} \quad \text{Mov. 1}$$

- ii. Να εξετάσετε κατά πόσο θα δημιουργηθεί στάσιμο κύμα στη χορδή αν η γεννήτρια συχνοτήτων λειτουργεί στα 106,25 Hz, το μήκος της χορδής είναι $l = 1,20$ m και η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στη χορδή είναι 34,0 m/s.

(Μον. 3)

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στη σχέση που βρήκαμε στο τελευταίο ερώτημα και υπολογίζουμε τον αριθμό K :

$$106,25 = \frac{K \cdot 34,0}{2 \cdot 1,20} \quad \text{Mov. 1} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{106,25 \cdot 2,40}{34,0} = 7,5 \quad \text{Mov. 1}$$

Ο αριθμός K που βρήκαμε δεν είναι ακέραιος, άρα δεν θα δημιουργηθεί στάσιμο κύμα στη χορδή Mov. 1.

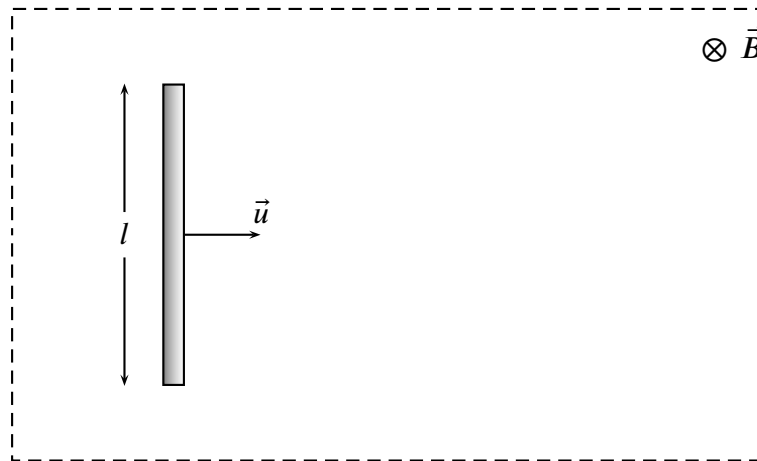
- iii. Να εξηγήσετε γιατί σε μια χορδή στερεωμένη και στα δύο άκρα της, όπως η χορδή του σχήματος πιο πάνω, μπορεί να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα μόνο για συγκεκριμένες συχνότητες διέγερσης της χορδής.

(Μον. 2)

Το στάσιμο κύμα δημιουργείται στη χορδή από τη συμβολή του κύματος που δημιουργείται στο ένα άκρο της χορδής από τη γεννήτρια ταλαντώσεων και του ανακλώμενου κύματος από το άλλο άκρο της χορδής. Όμως, το ανακλώμενο κύμα θα κινηθεί προς το αριστερό άκρο της χορδής και θα πάθει και αυτό ανάκλαση **Mov. 1**. Για να είναι το κύμα που ανακλάται στο αριστερό άκρο σε φάση με το κύμα που δημιουργείται από την πηγή στο ίδιο άκρο θα πρέπει το κύμα να διανύσει την απόσταση $2l$ σε χρόνο που είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου του κύματος, δηλαδή θα πρέπει η απόσταση $2l$ να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος λ **Mov. 1**.

ΘΕΜΑ 5 (Μονάδες 15)

α'. Μια μεταλλική ράβδος μήκους l κινείται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με σταθερή ταχύτητα $\vec{u}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



i Να αποδείξετε ότι μεταξύ των άκρων της ράβδου εμφανίζεται διαφορά δυναμικού $E_{επ.}$ ίση με

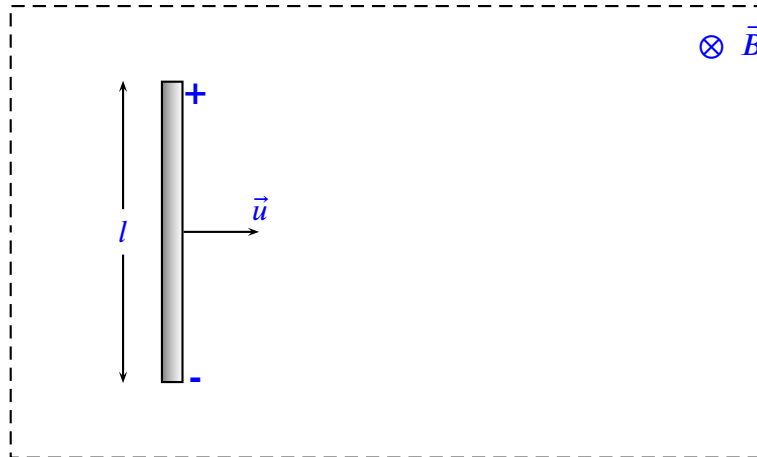
$$E_{επ.} = B \cdot u \cdot l$$

(Μov. 4)

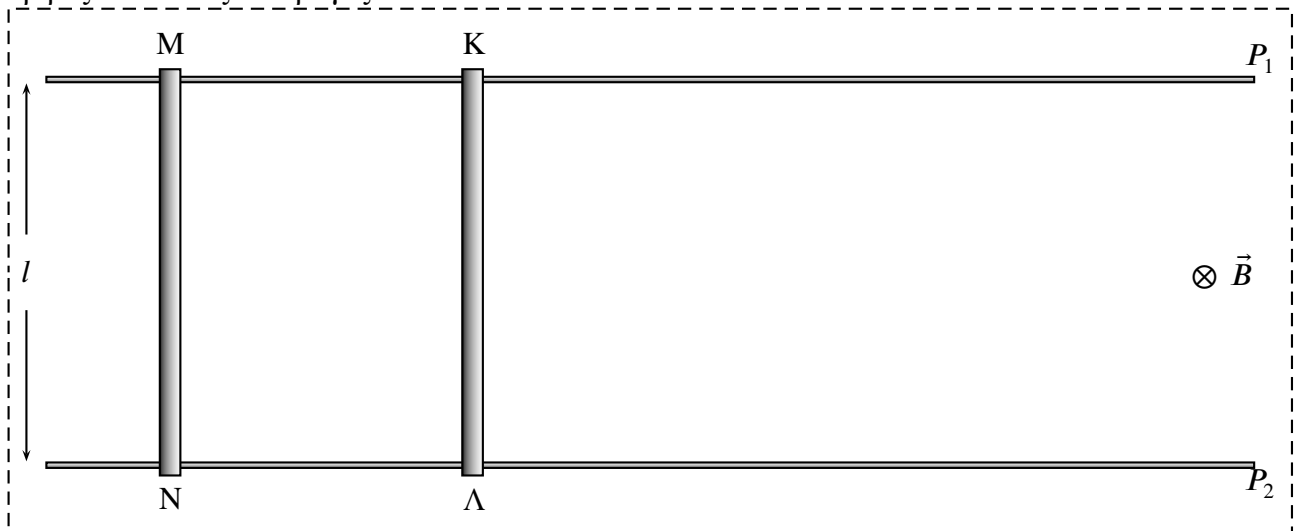
Κατά την κίνηση της ράβδου μέσα στο μαγνητικό πεδίο στα ηλεκτρόνια της ράβδου ασκείται δύναμη Λόρεντζ (Lorentz), ίση με $F_L = B \cdot q_e \cdot u$, όπου q_e είναι το ηλεκτρικό φορτίο του ηλεκτρονίου **Mov. 1**. Η δύναμη αυτή, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού, έχει φορά προς τα κάτω. Γι' αυτό θα αρχίσει να αυξάνεται η συγκέντρωση ηλεκτρονίων στο ένα άκρο της ράβδου και να μειώνεται στο άλλο. Δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στα δύο άκρα της ράβδου, το οποίο θα ασκεί στα ηλεκτρόνια δύναμη $F_C = q_e \cdot \mathcal{E}$, όπου $\mathcal{E}$ είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ανάμεσα στα δύο άκρα της ράβδου **Mov. 1**. Η κίνηση των ηλεκτρονίων προς το άκρο της ράβδου θα σταματήσει όταν οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό γίνουν ίσες σε μέτρο, δηλαδή $F_L = F_C \Rightarrow B \cdot q_e \cdot u = q_e \cdot \mathcal{E}$ **Mov. 1**. Αντικαθιστώντας την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου με τη βοήθεια της σχέσης $\mathcal{E} = \frac{E_{επ.}}{l}$ βρίσκουμε ότι $E_{επ.} = B \cdot u \cdot l$ **Mov. 1**

- ii. Να σημειώσετε στο σχήμα στο τετράδιο απαντήσεων το θετικά φορτισμένο άκρο της ράβδου.

(Μον. 1)



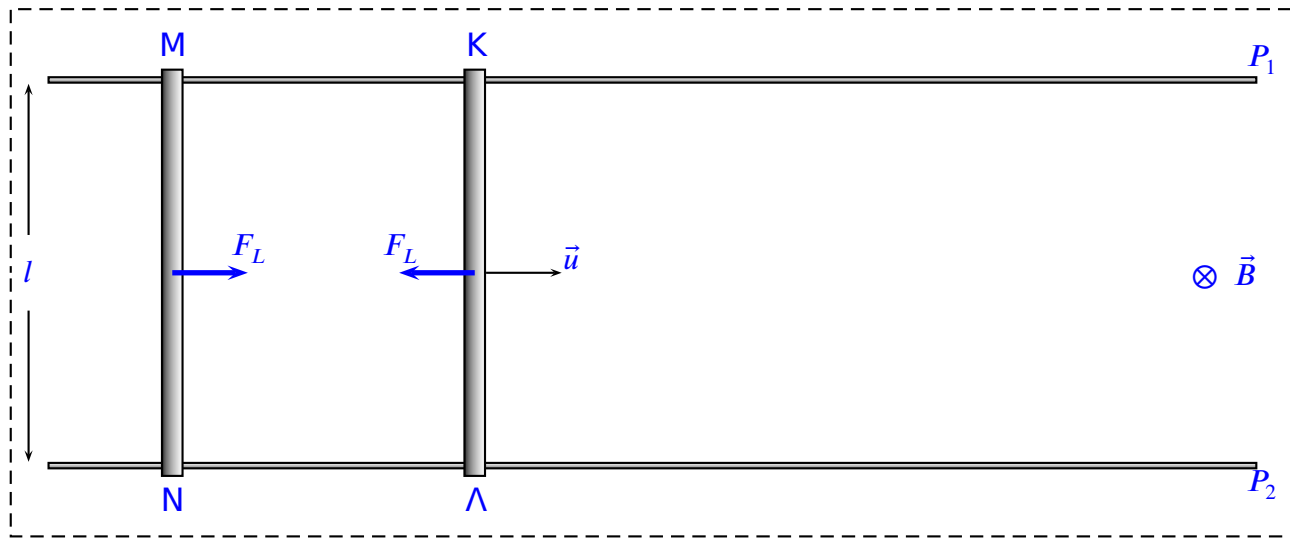
- β'. Στο πιο κάτω σχήμα οι δύο αγωγίμες ράβδοι ΚΛ και ΜΝ βρίσκονται ακίνητες πάνω σε δύο οριζόντιες και παράλληλες αγωγίμες ράγες P_1 και P_2 μεγάλου μήκους. Το σύστημα βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής $\vec{B}$. Το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στο οριζόντιο επίπεδο, στο οποίο βρίσκονται οι δύο ράγες. Οι ράβδοι μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές πάνω στις δύο ράγες.



Συγκρατώντας ακίνητη τη ράβδο ΜΝ αναγκάζουμε τη ράβδο ΚΛ να κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{u}$ προς τα δεξιά και τότε αφήνουμε ελεύθερη τη ράβδο ΜΝ.

- i. Να σχεδιάσετε τη δύναμη Λαπλάς (Laplace) που ασκείται σε κάθε ράβδο τη στιγμή που αφήνουμε ελεύθερη τη ράβδο ΜΝ.

(Μον. 2)



- ii. Να περιγράψετε την κίνηση της ράβδου MN, αν η ράβδος KΛ συνεχίσει να κινείται με σταθερή ταχύτητα για αρκετό χρονικό διάστημα. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μον. 4)

Όταν η ράβδος MN αφεθεί ελεύθερη θα ασκείται σε αυτή δύναμη Λαπλάς προς τα δεξιά, αφού διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα λόγω της κίνησης της ράβδου KΛ. Η δύναμη αυτή θα είναι ίση με $F_L = B \cdot I_{\text{επ}} \cdot l$ [Mov. 1]. Συνεπώς, η ράβδος MN θα κινηθεί προς τα δεξιά με επιτάχυνση $a = F_L/m$, όπου m είναι η μάζα της ράβδου [Mov. 1]. Η κίνηση της ράβδου MN δημιουργεί στα άκρα της επαγωγική τάση που αυξάνεται όσο αυξάνεται η ταχύτητα της ράβδου. Αυτή η τάση ελαττώνει τη συνολική τάση στο κύκλωμα που δημιουργούν οι δύο ράβδοι με τις ράγες, με αποτέλεσμα η ένταση του επαγωγικού ρεύματος στο κύκλωμα να μειώνεται και, άρα, να μειώνεται και η δύναμη Λαπλάς που ασκείται στη ράβδο MN (και στη ράβδο KΛ). Έτσι, η ράβδος MN θα εκτελέσει επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση που ελαττώνεται μέχρι να αποκτήσει την ίδια ταχύτητα με τη ράβδο KΛ [Mov. 1]. Τότε το κύκλωμα δεν θα διαρρέεται από ρεύμα και δεν θα υπάρχει δύναμη Λαπλάς στις ράβδους. Στη συνέχεια η ράβδος θα κινείται με ταχύτητα u [Mov. 1].

- iii. Να εξηγήσετε πώς θα μεταβάλλεται, από τη στιγμή που αφήσαμε ελεύθερη τη ράβδο MN, η δύναμη που αναγκάζει τη ράβδο KΛ να κινείται με σταθερή ταχύτητα. (Μον. 4)

Η δύναμη που αναγκάζει τη ράβδο KΛ να κινείται με σταθερή ταχύτητα είναι συνεχώς ίση με τη δύναμη Λαπλάς που ασκείται στη ράβδο [Mov. 1]. Από τη στιγμή που αφήσαμε ελεύθερη τη ράβδο MN η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα ελαττώνεται [Mov. 1] και, άρα, η δύναμη Λαπλάς ελαττώνεται [Mov. 1] και μηδενίζεται όταν η ταχύτητα της ράβδου MN γίνει ίση με την ταχύτητα της ράβδου KΛ [Mov. 1].



ΘΕΜΑ 6 (Μονάδες 10)

α'. Πιο κάτω καταγράφονται τρεις παρατηρήσεις από τα πειράματα που εκτέλεσε ο Ράδερφορντ (Rutherford) μαζί με τους συνεργάτες του για να κατανοήσει τη δομή του ατόμου:

Παρατήρηση 1 Σχεδόν όλα τα σωματίδια α διαπερνούν το φύλλο χρυσού χωρίς καμιά αλλαγή στην πορεία τους.

Παρατήρηση 2 Μερικά από τα σωματίδια α εκτρέπονται κατά μικρές γωνίες.

Παρατήρηση 3 Ακόμα πιο λίγα σωματίδια α εκτρέπονται κατά μεγάλες γωνίες επιστρέφοντας προς τα πίσω.

Να γράψετε σε ποιο συμπέρασμα για τη δομή του ατόμου οδηγεί η κάθε μια από τις παρατηρήσεις αυτές.

(Μον. 3)

Από την Παρατήρηση 1 προκύπτει το συμπέρασμα ότι το μεγαλύτερο μέρος του ατόμου είναι κενός χώρος [Μον. 1]. Από την Παρατήρηση 2 προκύπτει ότι η μάζα του ατόμου φέρει ηλεκτρικό φορτίο [Μον. 1]. Από την Παρατήρηση 3 προκύπτει ότι το μεγαλύτερο μέρος της μάζας του ατόμου είναι συγκεντρωμένη σε μια μικρή περιοχή του ατόμου και αυτή η μάζα είναι φορτισμένη θετικά [Μον. 1].

β'. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται οι πέντε πρώτες ενεργειακές στάθμες για το άτομο του υδρογόνου, σύμφωνα με το πρότυπο του Μπορ (Bohr).

$$n = 5 \quad \text{_____} \quad E_5 = -0,544 \text{ eV}$$

$$n = 4 \quad \text{_____} \quad E_4 = -0,85 \text{ eV}$$

$$n = 3 \quad \text{_____} \quad E_3 = -1,51 \text{ eV}$$

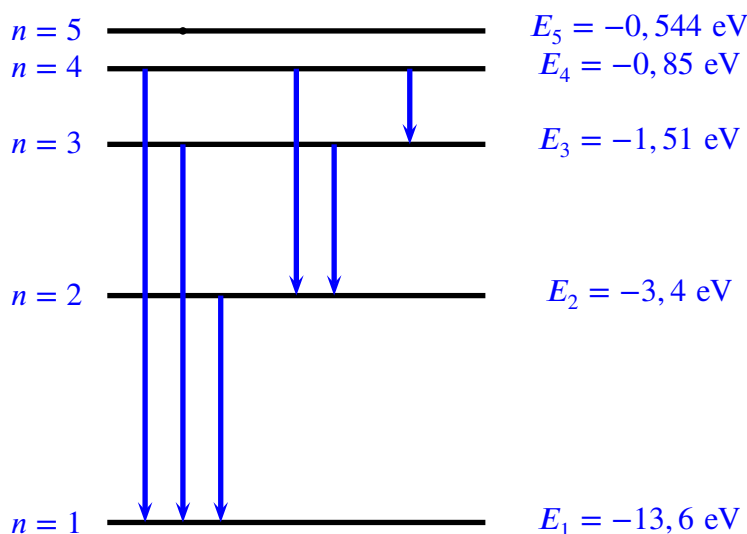
$$n = 2 \quad \text{_____} \quad E_2 = -3,4 \text{ eV}$$

$$n = 1 \quad \text{_____} \quad E_1 = -13,6 \text{ eV}$$

Σε ένα σωλήνα υπάρχει υδρογόνο τα άτομα του οποίου έχουν διεγερθεί στην τέταρτη ενεργειακή στάθμη.

i. Να αντιγράψετε στο τετράδιο απαντήσεων το σχήμα και να σχεδιάσετε όλες τις πιθανές αποδιεγέρσεις των ατόμων του υδρογόνου.

(Μον. 3)



- ii. Με ένα φασματοσκόπιο παρατηρούμε την ακτινοβολία που εκπέμπεται από το δοχείο με το υδρογόνο. Να εξηγήσετε πόσες γραμμές θα βλέπουμε στο φάσμα εκπομπής του υδρογόνου. Δίνονται: Σταθερά του Planck: $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J/s, $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ J, $\lambda_{\text{ιώδες}} = 380 \text{ nm}$, $\lambda_{\text{κόκκινο}} = 780 \text{ nm}$, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

(Μον. 4)

Με το φασματοσκόπιο μπορούμε να παρατηρήσουμε τις φασματικές γραμμές που βρίσκονται στο ορατό τμήμα του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος **Μον. 1**. Υπολογίζουμε σε eV την ενέργεια των φωτονίων που ανήκουν στο ιώδες και στο κόκκινο τμήμα του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος **Μον. 1**:

$$E_{\text{κόκκινο}} = h \cdot f_{\text{κόκκινο}} = h \frac{c}{\lambda_{\text{κόκκινο}}} = 6,6 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{780 \cdot 10^{-9}} = 2,54 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,59 \text{ eV}$$

$$E_{\text{ιώδες}} = h \cdot f_{\text{ιώδες}} = h \frac{c}{\lambda_{\text{ιώδες}}} = 6,6 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{380 \cdot 10^{-9}} = 5,21 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3,26 \text{ eV}$$

Υπολογίζουμε την ενέργεια των φωτονίων που εκπέμπονται σε κάθε μια από τις έξι διαφορετικές αποδιεγέρσεις **Μον. 1**:

$$E_{4 \rightarrow 1} = -0,85 - (-13,6) = 12,75 \text{ eV},$$

$$E_{3 \rightarrow 1} = -1,51 - (-13,6) = 12,09 \text{ eV},$$

$$E_{2 \rightarrow 1} = -3,4 - (-13,6) = 10,2 \text{ eV}$$

$$E_{4 \rightarrow 2} = -0,85 - (-3,4) = 2,55 \text{ eV},$$

$$E_{3 \rightarrow 2} = -1,51 - (-3,4) = 1,89 \text{ eV},$$

$$E_{4 \rightarrow 3} = -0,85 - (-1,51) = 0,66 \text{ eV},$$

Παρατηρούμε ότι από τις έξι αποδιεγέρσεις μόνο οι δύο εκπέμπουν φωτόνια στο ορατό τμήμα του φάσματος, οι αποδιεγέρσεις $4 \rightarrow 2$ και $3 \rightarrow 2$. Άρα θα παρατηρήσουμε 2 γραμμές στο φάσμα εκπομπής του υδρογόνου **Μον. 1**.

ΘΕΜΑ 7 (Μονάδες 15)

Σας δίνεται μια διάταξη όπως στην διπλανή εικόνα. Αποτελείται από ένα δίσκο μάζας $m = 0,5 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,1 \text{ m}$, ο οποίος στρέφεται γύρω από άξονα ακτίνας $r = 4 \text{ mm}$ και αμελητέας μάζας που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στην επιφάνεια του δίσκου. Σε κάθε άκρο του άξονα υπάρχει ειδική υποδοχή στην οποία είναι δεμένη η μια άκρη ενός νήματος, το πάχος και η μάζα του οποίου είναι αμελητέα. Η άλλη άκρη του νήματος είναι δεμένη σε οριζόντια ράβδο. Ο δίσκος με τον άξονά του, κρέμεται σε οριζόντια θέση από τη ράβδο στήριξης μέσω των δυο νημάτων. Το μήκος των νημάτων, όταν είναι πλήρως ξετυλιγμένα, είναι $l = 70 \text{ cm}$. Η ράβδος είναι στερεωμένη σε δυο ορθοστάτες που με την σειρά τους είναι στερεωμένοι σε μεταλλική βάση. Αρχίζουμε και τυλίγουμε τα δυο νήματα γύρω από τον άξονα περιστροφής του δίσκου με τέτοιο τρόπο ώστε οι περιτυλίξεις του νήματος να είναι ισοκατανεμημένες κατά μήκος του άξονα. Με τον τρόπο αυτό ανυψώνουμε τον δίσκο κρατώντας τον πάντοτε σε οριζόντια θέση. Όταν το πάνω μέρος της περιφέρειας του δίσκου εφάπτεται της οριζόντιας ράβδου αφήνουμε το δίσκο ελεύθερο να κινηθεί προς τα κάτω. Καθώς ο δίσκος κατεβαίνει προς τα κάτω το νήμα ξετυλίγεται. Όταν το νήμα έχει ξετυλιχθεί τελείως, ο δίσκος αρχίζει να ανεβαίνει προς τα πάνω και το νήμα τυλίγεται και πάλι γύρω από τον άξονα. Ο δίσκος φθάνει σε κάποιο ύψος και αρχίζει να κινείται και πάλι προς τα κάτω.



- α'. Να βρείτε την εξίσωση που συνδέει τον χρόνο κίνησης, t , με το ύψος, h , από το οποίο αφήνεται να πέσει ο δίσκος και να προσδιορίσετε τη γραμμική επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου. Θα πρέπει να εκφράσετε το αποτέλεσμά σας συναρτήσει των μεγεθών, h , R , r , και t .

(Μον. 4)

Αν αφήσουμε τον δίσκο να κινηθεί από ύψος, h , και θεωρήσουμε την δυναμική ενέργεια $U(x) = 0$ στην θέση $x = 0$ όπου το νήμα είναι πλήρως ξετυλιγμένο, η ολική αρχική μηχανική ενέργεια του δίσκου είναι $E_{\text{μηχ.}}^i = mgh$. Κατά την διάρκεια της κίνησης προς τα κάτω, ο δίσκος μεταφέρεται και περιστρέφεται. Επομένως η δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε μεταφορική κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας, CM, $E_{\text{κιν}}^{\text{μετ}} = \frac{1}{2}mu_{\text{CM}}^2$, όπου m η μάζα του δίσκου και u_{CM} η γραμμική ταχύτητα του CM του δίσκου, και σε κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής γύρω από τον άξονα που είναι κάθετος στον δίσκο και περνά από το κέντρο μάζας του δίσκου, $E_{\text{κιν}}^{\text{περ}} = \frac{1}{2}I\omega^2$, όπου I η ροπή αδράνειας του δίσκου και ω η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου. Θεωρούμε αμελητέες τις απώλειες ενέργειας λόγω αντιστάσεων. Η ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι: $E_{\text{μηχ}} = U(x) + E_{\text{κιν}}^{\text{μετ}} + E_{\text{κιν}}^{\text{περ}}$. Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας θα έχουμε

$$mgh = mgh' + \frac{1}{2}mu_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \quad \text{Mov. 1}$$

όπου $h' = h - x(t)$ η θέση του δίσκου ως προς το χαμηλότερο σημείο, μετά από χρόνο t , και αφού έχει διανύσει κατακόρυφη απόσταση $x(t)$. Θεωρώντας ότι ο άξονας κυλίνεται χωρίς να γλιστρά πάνω στο νήμα θα έχουμε: $x(t) = r\phi(t)$ όπου x η κατακόρυφη γραμμική μετατόπιση του δίσκου, ϕ η γωνία που



έχει διαγράψει ο άξονας καθώς περιστρέφεται και ξετυλίγεται ως προς το νήμα και r η ακτίνα του άξονα. Δηλαδή στην περίπτωση αυτή η γραμμική μετατόπιση είναι ίση με το τόξο του κύκλου που διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειας του άξονα. Από την παραπάνω σχέση παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο θα πάρουμε: $u_{CM}(t) = r\omega(t)$ **Mov. 1**. Με αντικατάσταση στην εξίσωση διατήρησης της ενέργειας θα έχουμε:

$$mgx = \frac{1}{2}mu_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\frac{u_{CM}^2}{r^2} \Rightarrow mgx = \frac{1}{2}mu_{CM}^2 \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) \Rightarrow mgx = \frac{1}{2}mku_{CM}^2,$$

όπου $k = 1 + \frac{I}{mr^2}$. Λύνοντας ως προς την ταχύτητα θα έχουμε:

$$u_{CM}^2 = 2gx/k.$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς t , και χρησιμοποιώντας $u = \frac{dx}{dt}$ και $a = \frac{du}{dt}$ παίρνουμε:

$$\frac{d}{dt}(u_{CM}^2) = 2\frac{g}{k}\frac{dx}{dt} \Rightarrow 2u_{CM}\frac{du_{CM}}{dt} = \frac{2gu_{CM}}{k} \Rightarrow a_{CM} = \frac{g}{k}$$

Ο δίσκος κινείται επομένως με σταθερή γραμμική επιτάχυνση μικρότερη από την επιτάχυνση της βαρύτητας, g , κατά τον παράγοντα $k = 1 + \frac{I}{mr^2}$

Mov. 1. Επομένως η μετατόπιση του δίσκου θα είναι: $x(t) = \frac{1}{2}a_{CM}t^2$. Αντικατάσταση της επιτάχυνσης θα δώσει:

$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{g}{k}t^2 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}\frac{g}{1 + \frac{I}{mr^2}}t^2.$$

Εφόσον $I = \frac{1}{2}mR^2$, όπου R η ακτίνα του δίσκου, η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{g}{1 + \frac{mR^2}{2mr^2}}t^2 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}\frac{g}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2}t^2.$$

Θεωρώντας ότι $r \ll R$ η τελευταία σχέση απλουστεύεται σε:

$$x \simeq \frac{1}{2}\frac{2gr^2}{R^2}t^2.$$

Θεωρώντας $x(t) = h$, ότι ο δίσκος έχει καλύψει όλο το ύψος στο οποίο βρίσκονταν θα έχουμε:

$$h = g\left(\frac{r}{R}\right)^2t^2 \quad \text{Mov. 1}$$

2ος τρόπος: Το αποτέλεσμα θα μπορούσε να ληφθεί μελετώντας ροπές δυνάμεων και δυναμική στερεού. Ο δίσκος περιστρέφεται εξαιτίας της ροπής της τάσης των νημάτων. Η τάση είναι εφαπτόμενη του άξονα και θεωρώντας ότι οι τάσεις των δυο νημάτων είναι T , η ροπή τ , θα είναι $\tau = Tr$ όπου r η ακτίνα του άξονα περιστροφής. Αλλά η ροπή δίνεται από την σχέση: $\tau = I\alpha_{\gamma\omega\omega}$ όπου $\alpha_{\gamma\omega\omega}$ η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου. Η γωνιακή επιτάχυνση συνδέεται με την γραμμική επιτάχυνση, a_{CM} , με την σχέση: $a_{CM} = r\alpha_{\gamma\omega\omega} \Rightarrow$



$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = a_{CM}/r.$$

Από τον 2ο νόμο του Νεύτων: $\sum F = mg - T \Rightarrow ma_{CM} = mg - T \Rightarrow T = m(g - a_{CM})$.

Από τις δυο εξισώσεις της ροπής: $Tr = I\alpha_{\gamma\omega\nu} = I\frac{a_{CM}}{r} \Rightarrow T = I\frac{a_{CM}}{r^2}$. Εξισώνοντας τις δυο τελευταίες σχέσεις θα έχουμε:

$$m(g - a_{CM}) = I\frac{a_{CM}}{r^2} \Rightarrow a_{CM}\left(m + \frac{I}{mr^2}\right) = mg \Rightarrow a_{CM} = \frac{g}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

όπως και προηγουμένως. Τα ίδια ισχύουν τόσο κατά την κίνηση του δίσκου προς τα κάτω όσο και προς τα πάνω.

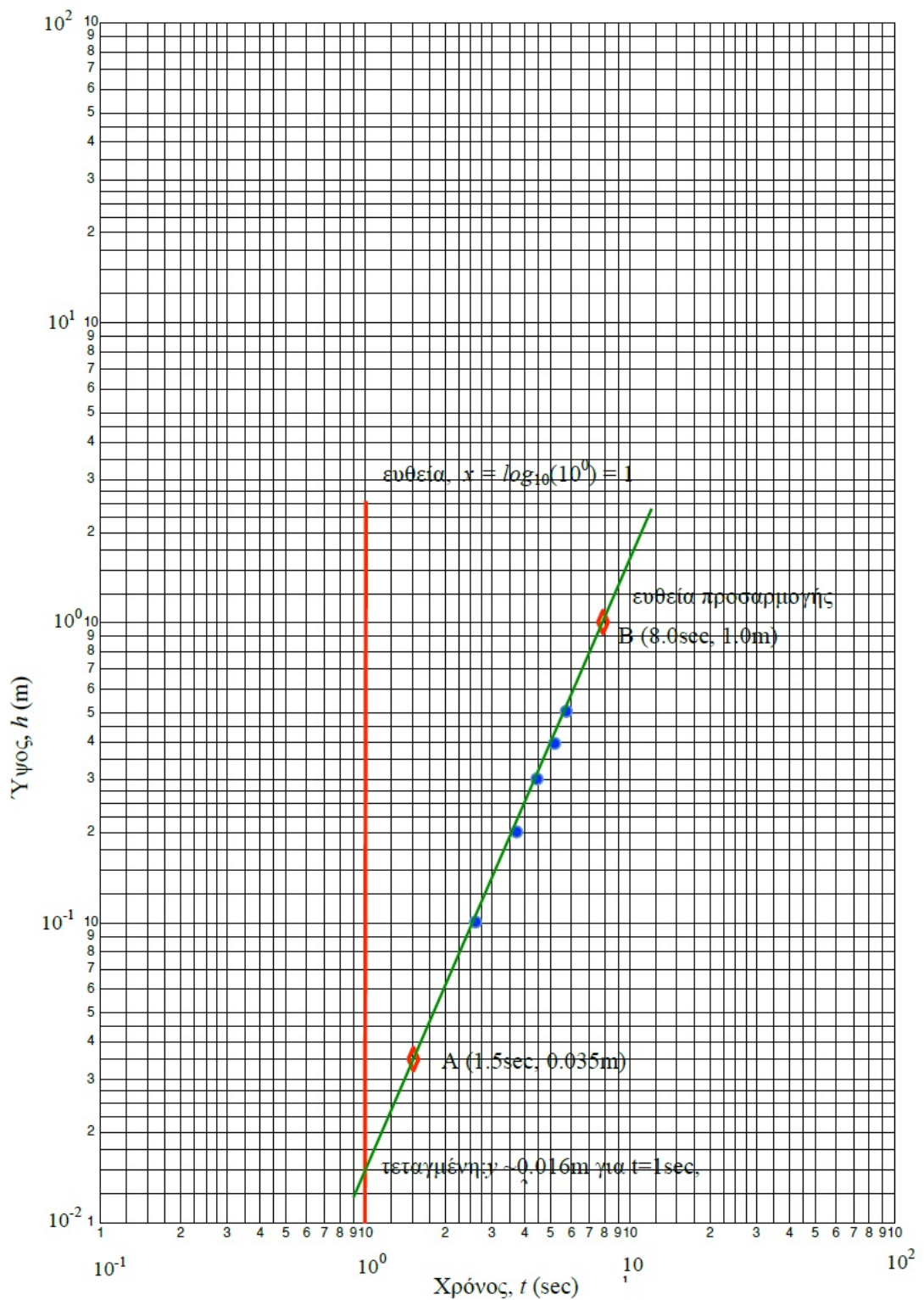
- β'. Σε σχετικό πείραμα λήφθηκαν μετρήσεις του χρόνου, t , κατάβασης του δίσκου σε συνάρτηση με το ύψος, h , από το οποίο αφήνεται να κινηθεί προς τα κάτω. Οι μετρήσεις φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

$h(\text{m})$	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$t(\text{s})$	5,5	5,0	4,4	3,6	2,5

- i. Να κάνετε το γράφημα του ύψους, h , συναρτήσει του χρόνου, t , στο λογαριθμικό γραφικό χαρτί που σας δίνεται. Οδηγίες χρήσης του λογαριθμικού χαρτιού δίνονται στο τέλος του θέματος.

(Μον. 3)

Αναπαριστούμε τις μετρήσεις του πίνακα στο γραφικό χαρτί που δίνεται. Παρατηρούμε ότι τα σημεία βρίσκονται σε ευθεία γραμμή όπως ήταν αναμενόμενο, αφού η σχέση που συνδέει τα δυο μεγέθη είναι της μορφής: $h = Ct^n \Rightarrow \log_{10}(h) = \log_{10}(C) + n\log_{10}(t)$. Η γραφική παράσταση φαίνεται πιο κάτω.



Ορθή τοποθέτηση των σημείων **Μον. 2**, ορθή σχεδίαση της ευθείας **Μον. 1**

ii. Να υπολογίσετε γραφικά τη συναρτησιακή εξάρτηση των δύο αυτών μεγεθών.

(Μον. 2)

Η κλίση της ευθείας θα δώσει τον εκθέτη, την συναρτησιακή εξάρτηση



των δυο μεγεθών h και t . Από το ερώτημα (α):

$$h \simeq g \left(\frac{r}{R} \right)^2 t^2 \Rightarrow \log_{10} h = \log_{10} \left(g \frac{r^2}{R^2} \right) + 2 \log_{10} t$$

οπότε αναμένουμε ότι η κλίση της ευθείας καλύτερης προσαρμογής θα είναι 2. Διαλέγουμε δυο σημεία Α και Β στην ευθεία καλύτερης προσαρμογής που κατασκευάσαμε και βρίσκουμε από τους άξονες τις συντεταγμένες τους (t_A, h_A) και (t_B, h_B) **Μοβ. 1**. Λογαριθμίζουμε τις συντεταγμένες για να βρούμε την κλίση:

$$\text{Κλίση} = \frac{\log_{10}(h_B) - \log_{10}(h_A)}{\log_{10}(t_B) - \log_{10}(t_A)} = \frac{\log_{10}(1) - \log_{10}(0,035)}{\log_{10}(8) - \log_{10}(1,5)} = \frac{1,456}{0,727} = 2,003 \quad \text{Μοβ. 1}$$

- iii. Να υπολογίσετε από το γράφημα τη γραμμική επιτάχυνση με την οποία κινείται το κέντρο μάζας του δίσκου και να ελέγξετε το αποτέλεσμά σας με αυτό που υπολογίσατε θεωρητικά στο ερώτημα α. Η ροπή αδράνειας δίσκου ως προς άξονα κάθετο στην επιφάνειά του και περνά από το κέντρο του, δίνεται από την σχέση $I = mR^2/2$.

(Μοβ. 2)

Η τεταγμένη βρίσκεται γραφικά από το σημείο τομής της ευθείας καλύτερης προσαρμογής με την ευθεία όπου $\log_{10}(x) = 0$, δηλαδή την ευθεία $x = 10^0 = 1$ όπως φαίνεται στο γράφημα. Από το σημείο τομής των δυο ευθειών βλέπουμε: $h_0 \simeq 0,016 \text{ m}$ για $t = 1 \text{ s}$ **Μοβ. 1**. Θεωρητικά αναμένουμε ότι η τεταγμένη είναι: $g(r/R)^2$, που αντιστοιχεί σε $a_{CM}/2$. Αντικατάσταση των δεδομένων του προβλήματος $r = 0,004 \text{ m}$, $R = 0,1 \text{ m}$ και $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, δίνει $a_{CM}/2 \simeq 0,0156 \text{ m/s}^2$ που συμφωνεί με την τιμή της τεταγμένης που βρίσκουμε γραφικά. Επομένως $a_{CM} = 0,0313 \text{ m/s}^2$ **Μοβ. 1**.

- γ'. Η πειραματική διάταξη που φαίνεται στην πιο πάνω εικόνα τοποθετείται πάνω σε ζυγαριά ακριβείας. Ο δίσκος συγκρατείται αρχικά ακίνητος στην υψηλότερη θέση και στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερος να κινηθεί προς τα κάτω. Να περιγράψετε την ένδειξη της ζυγαριάς καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης του δίσκου από το ύψος που αφήνεται μέχρι το ύψος στο οποίο επιστρέφει και πάλι. Να εξηγήσετε την ένδειξη της ζυγαριάς όταν ο δίσκος κατεβαίνει, όταν ανεβαίνει και όταν το νήμα έχει ξετυλιχθεί πλήρως. Να δώσετε μια εκτίμηση για τη διαφορά στην ένδειξη της ζυγαριάς που θα περιμένατε να δείτε όταν ο δίσκος κατεβαίνει και όταν ανεβαίνει.

(Μοβ. 4)

Η ένδειξη της ζυγαριάς περιλαμβάνει το βάρος όλων των τμημάτων της διάταξης καθώς και το βάρος του δίσκου μέσω των τάσεων των δυο νημάτων που είναι στερεωμένα στην οριζόντια ράβδο της διάταξης. Αλλαγές στην ένδειξη της ζυγαριάς οφείλονται σε αλλαγές της τάσης, T , του νήματος **Μοβ. 1**. Καθώς ο δίσκος αφήνεται να κινηθεί προς τα κάτω, στο κέντρο μάζας του ασκείται η συνισταμένη δύναμη $\sum F = mg - T \Rightarrow T = m(g - a_{CM})$. Η γραμμική επιτάχυνση του κέντρου μάζας παραμένει σταθερή όταν ο δίσκος κατεβαίνει αλλά και όταν ανεβαίνει και πάλι προς τα πάνω, όπως είδαμε στο τέλος του (α) ερωτήματος. Εφόσον η τάση του νήματος όταν ο δίσκος ανεβαίνει ή κατεβαίνει είναι πάντοτε μικρότερη της τάσης του νήματος όταν ο δίσκος είναι ακίνητος ($T_{\text{ακιν}} = mg$), η ένδειξη της ζυγαριάς θα είναι μικρότερη του βάρους της διάταξης καθ' όλη την διάρκεια



της κίνησης του δίσκου **Mov. 1**. Η ένδειξη αυτή θα είναι μικρότερη κατά $ma_{CM} = 0,5 \times 0,0313 \Rightarrow ma_{CM} = 0,016 \text{ N}$ από την ένδειξη όταν ο δίσκος είναι ακίνητος. Στο κατώτερο σημείο της κίνησης του δίσκου, η ένδειξη της ζυγαριάς αυξάνει απότομα. Στο σημείο αυτό της τροχιάς έχουμε για πολύ μικρό χρονικό διάστημα μια σχεδόν τέλεια ελαστική κρούση όπου η γραμμική ταχύτητα του δίσκου αντιστρέφεται. Επομένως πάνω στον δίσκο εφαρμόζεται μια δύναμη $F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2mu}{\Delta t}$ **Mov. 1**. Η ίδια δύναμη αυτή εμφανίζεται λόγω δράσης-αντίδρασης πάνω στα νήματα, αλλά με αντίθετη φορά, οπότε η τάση του νήματος αυξάνει στιγμιαία. Επομένως και η ένδειξη της ζυγαριάς αυξάνει απότομα την στιγμή που το νήμα έχει ξετυλιχθεί πλήρως **Mov. 1**. Η ένδειξη εξαρτάται από το χρόνο που διαρκεί η κρούση αυτή και εξαρτάται από την ελαστικότητα του νήματος.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΧΡΗΣΗΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟΥ ΧΑΡΤΙΟΥ: Όταν οι μετρήσεις ενός μεγέθους έχουν τιμές που καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα, (πολλές τάξεις μεγέθους), είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε λογαριθμική κλίμακα για να ελαττώσουμε το εύρος και να βελτιώσουμε την γραφική αναπαράσταση. Αν μεγέθη στους δυο λογαριθμικούς άξονες του γραφήματος έχουν εκθετική συναρτησιακή εξάρτηση τότε η γραφική αναπαράσταση των δυο μεγεθών θα είναι γραμμική. Με τη χρήση των λογαριθμικών αξόνων αποφεύγεται η λογαρίθμηση των τιμών των μεγεθών, για τη γραφική τουλάχιστον αναπαράσταση. Οι υποδιαίρέσεις των αξόνων διακρίνονται σε κύριες και δευτερεύουσες. Οι αποστάσεις μεταξύ των υποδιαίρέσεων του άξονα είναι ανάλογες των λογαρίθμων των τιμών που αναπαράστώνται στο γράφημα. Οι κύριες υποδιαίρέσεις αντιστοιχούν σε δυνάμεις του 10, ο εκθέτης των οποίων αυξάνει κατά μια μονάδα. Η μικρότερη κύρια υποδιαίρεση καθορίζεται από τις μετρήσεις που πρέπει να αναπαρασταθούν. Η διαφορά δυο κύριων υποδιαίρέσεων δεν είναι σταθερή αλλά ο λόγος δυο διαδοχικών υποδιαίρέσεων είναι σταθερός. Οι δευτερεύουσες υποδιαίρέσεις αντιστοιχούν σε πολλαπλάσια της κύριας υποδιαίρεσης. Για παράδειγμα αν η χαμηλότερη υποδιαίρεση έχει καθοριστεί να είναι 10^3 (εκθέτης 3), οι δευτερεύουσες υποδιαίρέσεις θα είναι 2×10^3 , 3×10^3 , ..., 8×10^3 , 9×10^3 και η επόμενη κύρια υποδιαίρεση θα είναι 10^4 . Έτσι ο λόγος των κύριων υποδιαίρέσεων είναι 10 αλλά η απόσταση 9000. Στην πραγματικότητα η απόσταση είναι σταθερή αφού $\log 10^3 = 3$ και $\log 10^4 = 4$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Να παραδώσετε το λογαριθμικό χαρτί μαζί με το τετράδιο απαντήσεών σας και να βεβαιωθείτε ότι ο επιτηρητής το έχει καρφιτσώσει μέσα στο τετράδιο απαντήσεων.

ΤΕΛΟΣ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

